Postulato 1 della MQ:

Lo stato di un sistema è descritto da una funzione $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ detta funzione di stato o funzione d'onda

I vettori $\vec{r}_i$ rappresentano le coordinate delle particelle che compongono il sistema, t è il tempo. Matematicamente, Ψ è un vettore di uno spazio di Hilbert.

Per noi, uno spazio di Hilbert è uno spazio in cui è definito il prodotto interno (o prodotto scalare).

Il prodotto scalare di un vettore con il suo complesso coniugato è il modulo quadro del vettore.

In MQ, se ho la f.o. $\Psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \Psi^*(\vec{r}, t)\, \Psi(\vec{r}, t)\, d\vec{r}$ rappresenta la probabilità che la particella si trovi nel volume $d\vec{r}$ al tempo t (Legge di Born 1926)

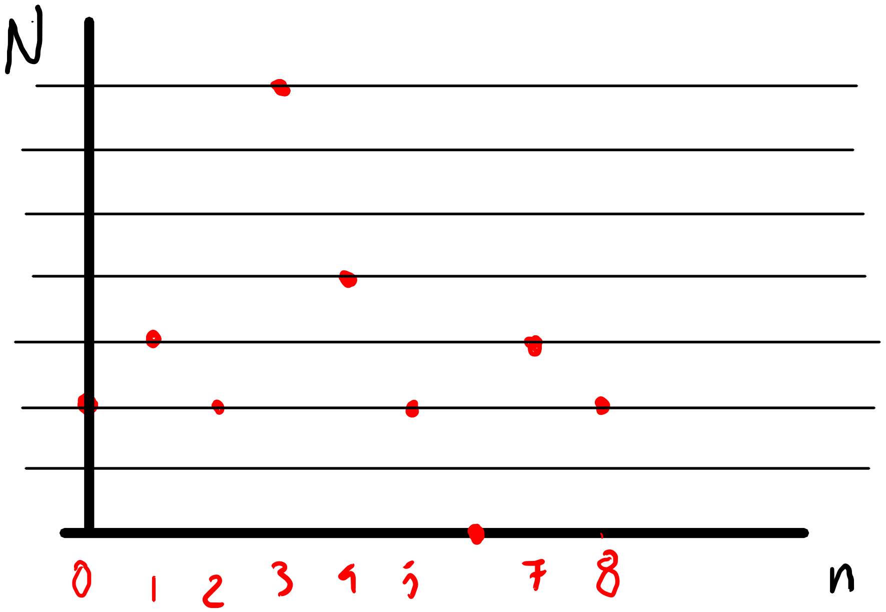
Richiami di probabilità

Consideriamo $\bar{N}$ persone (es. $\bar{N} = 25$)

Sia $N(n)$ il numero di persone con n monete in tasca

! il # di monete più probabile è 3

! Qual è il # di monete medio che le persone hanno in tasca?



$P(n) = \frac{N(j)}{\bar{N}}$ la probabilità di trovare una persona con n monete

Sarà $\sum_j N(j) = \bar{N}$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1}$$

Si definisce:

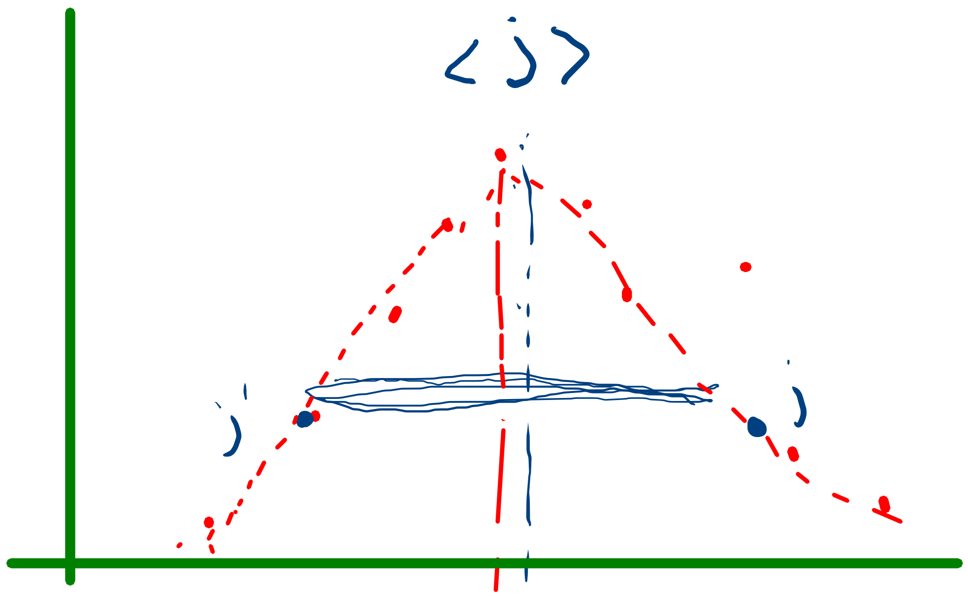
$$\langle j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j \, P(j)$$

VALORE di ASPETTAZIONE

(qui $\langle j \rangle = 3.64$)

In generale, se ho una certa funzione di j, $f(j)$ es: quanti panini compro con j monete

$$\langle f \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j)$$



$$j \to \Delta j = j - \langle j \rangle$$

$$\boxed{\langle \Delta j \rangle = 0}$$

$$\langle (\Delta j)^2 \rangle \equiv \sigma^2 \quad \text{VARIANZA}$$

σ è la DEVIAZIONE STANDARD

Vale la seguente relazione:

$$\sigma^2 = \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (\Delta j)^2 P(j) = \sum_{j=0}^{\infty} (j - \langle j \rangle)^2 P(j) = \sum_{j=0}^{\infty} (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) P(j)$$

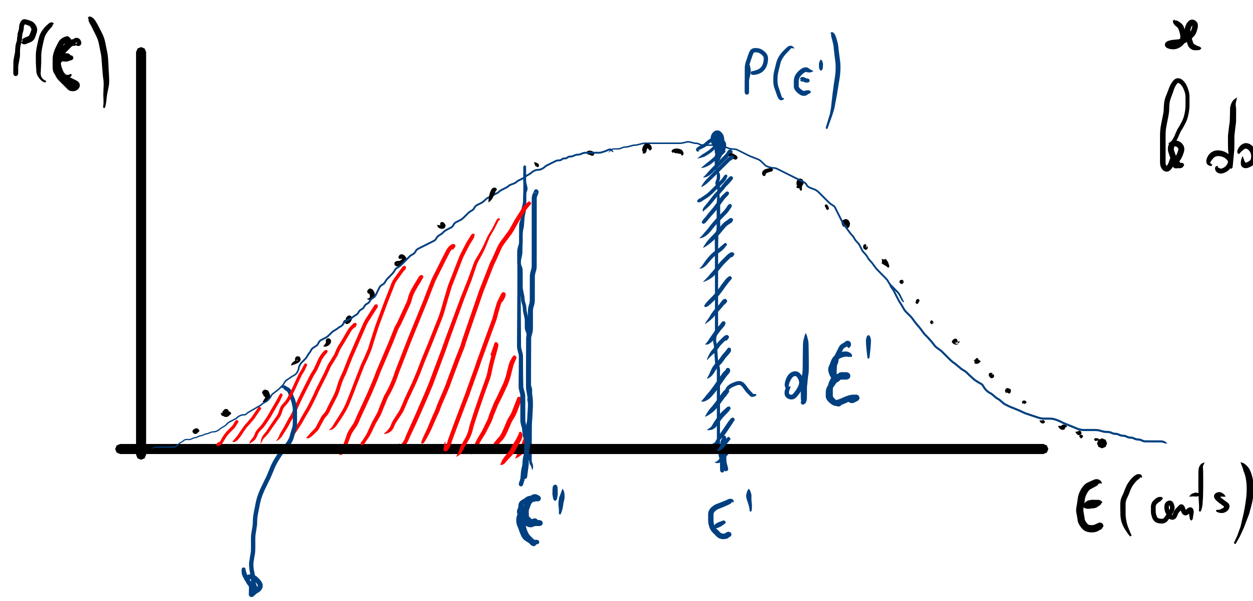
$$= \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j) - 2\langle j \rangle \sum_{j=0}^{\infty} j P(j) + \langle j \rangle^2 \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle^2 + \langle j \rangle^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2}$$

qui: $\sigma = 3.86$

se $\bar{N} \gg$

la domanda è: quanti centesimi di euro avete in tasca



$P(\epsilon)$ funzione densità di probabilità

$P(\epsilon')\,d\epsilon'$: probabilità che ci siano persone che hanno da ϵ a $\epsilon + d\epsilon$ euro in tasca

Probabilità di trovare persone con meno di ϵ'' euro in tasca:

$$\int_0^{\epsilon''} P(\epsilon)\,d\epsilon$$

NOTA : $\displaystyle\int_0^{\infty} P(\epsilon)\,d\epsilon = 1$ CONDIZIONE di NORMALIZZAZIONE

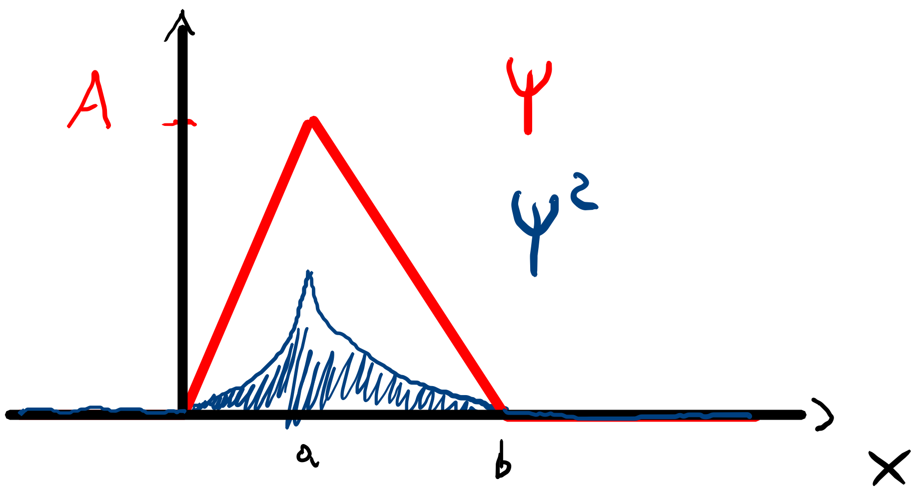
$$\langle \epsilon \rangle = \int_0^{\infty} \epsilon\, P(\epsilon)\,d\epsilon$$

$$\sigma^2 = \langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2$$

Problema 1.4 Griffiths

Al tempo $t=0$ una particella è nello stato:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} A\dfrac{x}{a} & 0 \le x \le a \\ A\dfrac{(b-x)}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$|\psi|^2 = \begin{cases} A^2\dfrac{x^2}{a^2} & 0 \le x \le a \\ A^2\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)^2} & a < x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Normalizzare la funzione di stato

I postulato: $|\psi|^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$$ condizione di normalizzazione

$$= 0 + \int_0^a A^2\frac{x^2}{a^2}dx + \frac{A^2}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)^2 dx$$

$$= A^2\frac{b}{3} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{3}{b}}}$$

2. Dove si trova la particella con maggiore probabilità? $\rightarrow x = a$

3. Quale è il valore di aspettazione di x? $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi|^2 dx = \ldots\ldots = \dfrac{2a+b}{4}$

Il primo postulato parla di $|\psi|^2$ e non semplicemente di ψ^2 perché ψ può essere complesso.
Il formalismo della QM (Quantum Mechanics) <u>richiede</u> l'utilizzo dei numeri complessi.

Inoltre, gli stati di un sistema sono vettori di uno spazio vettoriale di Hilbert, $\mathcal{H}$

In uno spazio vettoriale di Hilbert è definito il prodotto interno tra vettori

Per trattare tutto ciò, è utile introdurre la notazione braket

Dirac introduce il simbolo $|\ \rangle$, "ket" per indicare gli stati di un sistema,
ovvero i vettori $\in \mathcal{H}$

$|\alpha\rangle$ è il ket α

Uno spazio vettoriale è un insieme di vettori $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots\}$ e di scalari $(a, b, c, \ldots)$ chiuso rispetto alle operazioni:

SOMMA: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\quad \vec{c}$ appartiene allo spazio

è commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

associativa $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

$\exists$ lo $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$\forall\, \vec{a}$, $\exists\, -\vec{a}$: $\vec{a} + \overrightarrow{(-\vec{a})} = 0$

PRODOTTO SCALARE

$a\vec{a} = \vec{\gamma}$ $\in$ allo spazio

distributiva: $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ rispetto alla somma vettoriale

$(a+b)\vec{a} = a\vec{a} + b\vec{a}$ rispetto alla somma scalare

associativa: $a(b\vec{a}) = (ab)\vec{a}$

e, come intuibile: $0|a\rangle = \vec{0}$, $1|a\rangle = |a\rangle$

$0\vec{a} = \vec{0}$, $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

In uno spazio vettoriale, reale, ad esempio di 3 dimensioni (x, y, z)

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

α_1, α_2 e α_3 sono le coordinate di $|\alpha\rangle$ nella base scelta per lo spazio vettoriale

Ad ogni ket $|\alpha\rangle$ viene associato un "bra", un vettore riga:

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle\alpha| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \iff \langle\alpha| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$$

Un prodotto interno, per essere ben definito, deve rispettare:

1. $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$
2. $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ $\quad = 0$ solo se $|\alpha\rangle = 0$
3. $\langle\alpha|\left(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle\right) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle$

$\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$ norma o modulo di $|\alpha\rangle$ $\Rightarrow$ Se $|\alpha\rangle$ ha norma $= 1$, si dice normalizzato

Se $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ sono tali che $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ $\Rightarrow$ si dicono ortogonali

In uno spazio vettoriale con prodotto interno posso <u>sempre</u> individuare una base di vettori ortonormale.

Se io ho un set di vettori $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle$, base ortonormale, questo si indica con:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} \text{ delta di Kronecker } \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$

NOTA: ci ricordiamo da Algebra lineare che:

- Un set di vettori (ket) si dice linearmente indipendente se ognuno dei ket è linearmente indipendente dagli altri, ovvero se non può essere espresso come combinazione lineare degli altri

- Un set linearmente indipendente con cui riesco a descrivere ogni vettore di $\mathcal{H}$ come combinazione lineare dei ket del set è una base di $\mathcal{H}$

La notazione braket è molto comoda per effettuare operazioni quali il prodotto interno, se la base scelta è ortonormale:

$$|\beta\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \qquad \langle\alpha| = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^* \end{pmatrix}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \alpha_1^*\beta_1 + \alpha_2^*\beta_2 + \alpha_3^*\beta_3$$

si fa il prodotto riga per colonna

Vale che:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

Infatti, ad esempio

$$|\beta\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \\ 2i \end{pmatrix} \qquad \langle\beta| = \begin{pmatrix} 2, & 3-i, & -2i \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \langle\alpha| = \begin{pmatrix} 0, & 1+i, & 4 \end{pmatrix}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \left(0 + (3+i)(1+i) + 8i\right) = 3+3i+i-1+8i \overset{!}{=} 2+12i$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = (3-i)(1-i) - 8i = 3-3i-i-1-8i \overset{!}{=} 2-12i$$

✓

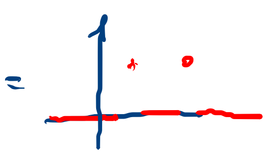
Nel caso di funzioni d'onda, per semplificare consideriamole 1 D, si definisce il prodotto interno: $\langle f | g \rangle \equiv \int f(x)^* g(x)\, dx$

È una buona definizione infatti:

1. $\langle f | g \rangle = \int f(x)^* g(x)\, dx = \left(\int f(x)\, g(x)^*\, dx \right)^* = \langle g | f \rangle^*$

2. $\langle f | f \rangle \geq 0$: $\langle f | f \rangle = \int |f(x)|^2\, dx$ è sempre > 0

   a meno che $f(x)$ sia $= 0$

   (NOTA: se $f(x) =$  anche l'integrale è 0, ma sono dettagli matematici....)

3. $\langle f | \left(b | g \rangle + c | h \rangle \right) = \int f(x)^* \left(b g(x) + c h(x) \right) dx = b \int f^* g\, dx + c \int f^* h\, dx = b \langle f | g \rangle + c \langle f | h \rangle$

Se vogliamo lavorare con lo spazio vettoriale di $\mathcal{H}$ costituito da funzioni $f(x)$ a quadrato integrabili, dobbiamo accertarci che,

date $f(x)$ e $g(x)$ $\in \mathcal{H}$, allora anche $f+g \in \mathcal{H}$, in particolare che è a quadrato integrabile:

$$h(x) = g(x) + f(x)$$

$$\int h^2 dx = \int (f+g)^*(f+g) = \int |f|^2 + |g|^2 + f^* g + g^* f$$

$$= \int |f|^2 dx + \int |g|^2 dx + \int f^* g \, dx + \int g^* f \, dx$$

OK, $< \infty$ OK, $< \infty$ OK per disuguaglianza di Schwarz

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$$

se $|\alpha\rangle = 0 \rightarrow$ OK

se $|\alpha\rangle \neq 0$

introduco $|\gamma\rangle = |\beta\rangle - \dfrac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}|\alpha\rangle$

$$\boxed{\langle\gamma|\gamma\rangle} = \left(\langle\beta| - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle^*}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\langle\alpha|\right)\left(|\beta\rangle - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}|\alpha\rangle\right)$$

$$= \langle\beta|\beta\rangle - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle^*}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\langle\alpha|\beta\rangle + \frac{\langle\alpha|\beta\rangle^*}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\cancel{\langle\alpha|\alpha\rangle}}\cancel{\langle\alpha|\alpha\rangle}$$

$$= \frac{\langle\beta|\beta\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle - \cancel{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle} - \langle\alpha|\beta\rangle^*\langle\alpha|\beta\rangle + \cancel{\langle\alpha|\beta\rangle^*\langle\alpha|\beta\rangle}}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\beta|\beta\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\alpha|\beta\rangle^*\langle\alpha|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2}$$