Problema 3.22 (Griffiths)

Consideriamo spazio 3-DIM, con $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una sua base ortonormale

Consideriamo i ket:

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle$$

$$|\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

a) Come sono fatti $\langle\alpha|$ e $\langle\beta|$?

$$\langle\alpha| = -i\langle 1| - 2\langle 2| + i\langle 3|$$

$$\langle\beta| = -i\langle 1| + 2\langle 3|$$

b) $\langle\alpha|\beta\rangle = ?$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \left(-i\langle 1| - 2\langle 2| + i\langle 3|\right)\left(i|1\rangle + 2|3\rangle\right) = -i\cdot i\langle 1|1\rangle + 2i\langle 3|3\rangle = 1 + 2i$$

c) $\langle\beta|\alpha\rangle = ?$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \left(-i\langle 1| + 2\langle 3|\right)\left(i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle\right) = -i\cdot i\langle 1|1\rangle - 2i\langle 3|3\rangle = 1 - 2i$$

...... potevamo già scriverlo....

Nel caso 1 d.

$f(x)$ è la f. onda di una particella

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty = 1$$

$$\boxed{\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx}$$

- i vettori sono delle funzioni
- La dimensione dello spazio è ∞

$$|\langle f | g \rangle| = \left| \int f^*(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int |f(x)|^2 dx \cdot \int |g(x)|^2 dx}$$

$\langle f | f \rangle = 1 \Rightarrow f$ è normalizzata

$\langle f | g \rangle = 0$ $\quad$ f e g sono ortogonali

Possiamo sempre trovare un set ortonormale completo, come base dello spazio vettoriale.

Postulato 2 Ad ogni osservabile corrisponde un operatore hermitiano

- osservabile: tutto ciò che può essere osservato $\Rightarrow$ grandezza misurabile

  Esempi:
  - posizione
  - momento
  - energia
  - momento angolare

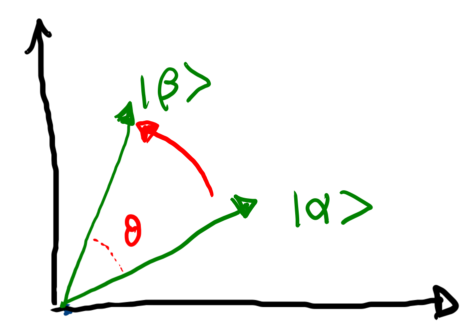
- operatore: "macchina" che agisce sui ket e li trasforma in altri ket

ESEMPIO in spazio coordinate cartesiane 2D

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A|\alpha\rangle = |\beta\rangle$$

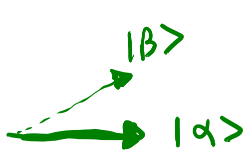
A in questo caso è una matrice di rotazione



Se $\theta = 30$, $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\beta\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\beta| = \sqrt{3+1} = 2$ conservato

$\theta = \operatorname{atan}\frac{y}{x} = \operatorname{atan}(\sqrt{3})^{-1} = 30$



Nel caso di 3 D, di spazio vettoriale

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 \\ \text{- - - - - - - -} \\ \text{- - - - - - -} \end{pmatrix} = |\gamma\rangle$$

La matrice trasposta $\tilde{A}$ è $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\left(A|\alpha\rangle\right)_{ik} = \sum A_{ij}\,\alpha_{jk}$$

Se ho due operatori, A e B, posso

$$AB|\gamma\rangle \quad \text{sarà} \quad C|\gamma\rangle \quad \text{dove}$$

$$C = AB$$

In forma matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \\ \vdots & & \\ & & b_{33} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{ik} = \sum a_{ij} b_{jk}$$

(prodotto righe per colonne)

Esercizio A 11

Dati due operatori S, T dimostrare che

$\widetilde{(ST)} = \tilde{T}\tilde{S}$

× visualizzate come prodotto di matrici

$$\left(\widetilde{ST}\right)_{ki} = (ST)_{ik} = \sum_{j=1}^{N} S_{ij} T_{jk} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{S}_{ji} \tilde{T}_{kj} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{T}_{kj} \tilde{S}_{ji} = \left(\tilde{T}\tilde{S}\right)_{ki}$$

Un'operazione ulteriore alla trasposizione è quella di considerare la matrice coniugata

Con il simbolo $\dagger$ (dagger) si indica la trasposta coniugata di una matrice

$$(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger$$

$$\overset{\text{def}}{=} \left(\widetilde{ST}\right)^* = \left(\tilde{T}\tilde{S}\right)^* = \tilde{T}^* \tilde{S}^* = T^\dagger S^\dagger$$

$$(AB)^*_{ik} = \left(\sum A_{ij} B_{jk}\right)^* = \sum A^*_{ij} B^*_{jk} = \left(A^* B^*\right)_{ik}$$

$$(ab)^* = a^* b^* \dots$$

$$\boxed{A|\alpha\rangle = |\gamma\rangle}$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \langle\alpha| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$$

quale è il bra corrispondente, ovvero $\langle\gamma| = (\gamma_1 \;\; \gamma_2 \;\; \gamma_3)$

$$\boxed{\langle\gamma| = \langle\alpha| A^\dagger}$$

("A dagger")

$A^\dagger$ è la trasposta coniugata di A

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$$

$$\langle\alpha| A^\dagger = \boxed{(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}} = \langle\gamma|$$

Se $\boxed{A = A^\dagger}$ A è hermitiano

Esempio

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \qquad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{|\beta\rangle = \hat{A}\,|\alpha\rangle}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 3i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle\beta|} = \left(-2i\,,\ -3i\right)$$

$$\overset{!}{=} \boxed{\langle\alpha|\,A^\dagger} = \left(-i \quad 2\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \left(-2i\,,\ -3i\right) \qquad \checkmark \text{ ok}$$

Ovvero $\qquad |\beta\rangle = \hat{A}\,|\alpha\rangle \iff \langle\beta| = \langle\alpha|\,\hat{A}^\dagger$

Se A è hermitiano:

$$A|\alpha\rangle = |A\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|A\alpha\rangle = \langle\beta A|\alpha\rangle$$

$$= \boxed{\langle\beta|A|\alpha\rangle}$$

$$|\alpha\rangle = \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix} \qquad |\beta\rangle = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \qquad \langle\beta| = (\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & a_{22} & \\ \vdots & & a_{33}\end{pmatrix} \qquad A^\dagger = A$$

!!! Il caso speciale in cui un operatore agisce su un vettore in modo che:

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$\longrightarrow$ α è autovalore di A

$|\alpha\rangle$ è autovettore di A

Esempio $\quad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{O} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{O}$ è hermitiano

Considero $\langle \alpha | \hat{O} | \beta \rangle$

$$\langle \alpha | \hat{O} \beta \rangle = (2,0) \left(\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = (2,0) \begin{pmatrix} 3-2i \\ 2+i \end{pmatrix} = 6-4i$$

$$\left(\langle \alpha | \hat{O} \right) | \beta \rangle = \left((2,0) \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6-4i$$

V

- Si definisce l'operatore posizione: $\boxed{x}$ (1 dim) $(\vec{r})$ (3 dim)

si ricava (lo vedremo) che $\boxed{p = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}}$

Tutti gli altri operatori sono riconducibili da x e da p

Esempio Energia cinetica: $K = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{1}{2m}\, p \cdot p$

$$= \frac{1}{2m}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}$$

L'operatore momento è hermitiano?

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

Consideriamo due funzioni f g $\left(f(x) \quad g(x)\right)$, f e g sono integrabili

$$\boxed{\langle f | \hat{p}\, g\rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial g}{\partial x}\, dx \overset{\text{int. per parti}}{=} \frac{\hbar}{i}\left(\int -\frac{\partial f^*}{\partial x} \cdot g\, dx + \underbrace{f^* g \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0}\right)$$

$= 0$ perché f e g sono $||^2$ integrabili

$$= \int \underbrace{-\frac{\hbar}{i}}_{=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^*} \frac{\partial f^*}{\partial x}\, g\, dx = \int \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* g\, dx$$

$$= \boxed{\langle \hat{p} f | g\rangle}$$

Integrazione per parti

$$\int_a^b [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ $\hat{p}$ è hermitiano

Def. Sia Q un'osservabile, $\hat{Q}$ l'operatore relativo, si definisce il valore di aspettazione di Q

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi \, dx$$

dove ψ è lo stato o f. onda del sistema.

$$\left(= \langle \psi | \hat{Q} \psi \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle \right)$$

Avevamo definito $\langle f(j) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) P(j) \longrightarrow \langle f(x) \rangle = \int f(x) P(x) \, dx$

Supponiamo di cercare il valore di aspettazione di x

$$\langle x \rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi \, dx = \int x \, \psi^* \psi \, dx = \int x \underbrace{|\psi|^2}_{\text{f. probabilità}} dx$$

Se però la osservabile fosse $\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad \int \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi \, dx \neq \int \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2 dx$

$\boxed{1.}$ La definizione + generale di $\langle Q \rangle$ è:

$$\boxed{\langle Q \rangle = \frac{\langle \psi | Q | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}} \quad , \quad \text{se } \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

allora $\langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle$

$\boxed{2.}$ Se $\langle Q \rangle$ mi descrive una osservabile,

$\langle Q \rangle$ <u>deve</u> essere reale

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$$

e siccome $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle^*$ $\Rightarrow$ $\langle \psi | Q \psi \rangle = \langle Q \psi | \psi \rangle$

$\Downarrow$

Q è hermitiano

Proprietà degli operatori hermitiani

1. Sia $\hat{Q}$ un operatore hermitiano $\Rightarrow$ $\hat{Q}$ ha autovalori reali

$$\boxed{\hat{Q}|f\rangle = f|f\rangle}$$

$\Rightarrow$ $|f\rangle$ è autovettore di Q, supponiamo che sia normalizzato

Faccio il prodotto interno con $\langle f|$

$$\langle f|\hat{Q}|f\rangle = f\underbrace{\langle f|f\rangle}_{=1} = f$$

$$\left(\langle f|\hat{Q}|f\rangle\right)^* = f^*$$

Siccome $\hat{Q}$ è hermitiano

$$\langle f|\hat{Q}|f\rangle^* = \langle f|\hat{Q}|f\rangle \quad \Rightarrow \quad f^* = f \quad \text{cioè} \quad \boxed{f \text{ è reale}}$$

2. Autovettori di autovalori diversi sono ortogonali

$\hat{Q}$, hermitiano, con 2 autovettori tali che:

I $\quad \hat{Q}|f\rangle = f|f\rangle$

II $\quad \hat{Q}|f'\rangle = f'|f'\rangle \qquad\qquad f \neq f'$

moltiplico per $\langle f'|$ la I, per $\langle f|$ la II

I $\quad \langle f'|\hat{Q}|f\rangle = f\langle f'|f\rangle$

II $\quad \langle f|\hat{Q}|f'\rangle = f'\langle f|f'\rangle$

I $-$ (II)*

$$\underbrace{\langle f'|Q|f\rangle - \underbrace{\langle f|Q|f'\rangle^*}_{\langle f|Q f'\rangle^* = \langle Qf'|f\rangle \overset{!}{=} \langle f'|Q|f\rangle}}_{=0} = f(\langle f'|f\rangle) - f'(\langle f|f'\rangle)^* \rightarrow 0 = f\langle f'|f\rangle - f'\langle f'|f\rangle \overset{!}{=} \langle f'|f\rangle(f - f')$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle f'|f\rangle = 0}$$

ASSIOMA (Proprietà 3)

$\boxed{\text{Gli autovettori di un operatore Hermitiano rappresentano una base completa dello spazio di Hilbert}}$

$\downarrow$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \qquad \text{in generale } c_n, \psi_n \in \mathbb{C}$$

$$|f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle$$

Se facciamo il prodotto con $\langle \psi_m|$:

$$\langle \psi_m | f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\langle \psi_m | \psi_n \rangle}_{= \delta_{n,m}} = c_m$$

!! ci possono essere autovettori degeneri, con stesso autovalore

$$c_m = \langle \psi_m | f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x)\, f(x)\, dx$$

coefficienti di Fourier

Operatore proiezione

$$\boxed{P_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|}$$

$$P_m f(x) = |\psi_m\rangle \underbrace{\langle\psi_m|f\rangle} = \boxed{c_m |\psi_m\rangle}$$

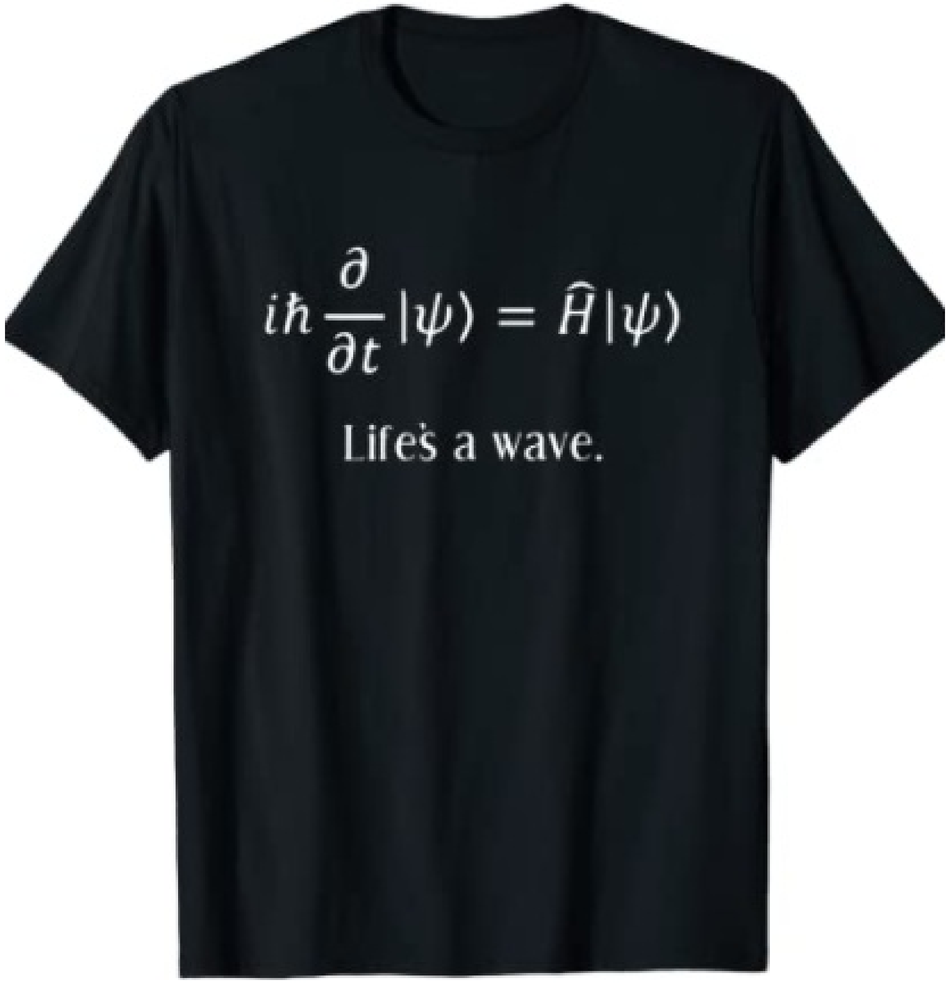
In generale $\quad P = |\alpha\rangle\langle\alpha|$

NOTA: $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} P_m = \mathbb{I}$

Paradosso del gatto di Schrödinger

3° postulato

Equazione di Schrödinger



4° postulato

Postulato 3 Dato un sistema con f. onda ψ, il valore medio che un'osservabile Q assume in una serie di misure è $\langle Q\rangle = \langle\psi|Q|\psi\rangle$

I valori che si possono ottenere nelle singole misure di Q sono gli autovalori q_n, che soddisfano l'equazione agli autovalori $Q|q_n\rangle = q_n|q_n\rangle$

Interpretazione statistica delle misure

Supponiamo di avere l'osservabile Q, $\hat{Q}$ con autovalori e autovettori q_n, $|q_n\rangle$

Lo stato ψ posso scriverlo $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |q_n\rangle$

$$\boxed{\langle Q\rangle} = \langle\psi|Q|\psi\rangle = \left(\sum_m c_m^* \langle q_m|\right) Q \left(\sum_n c_n |q_n\rangle\right)$$

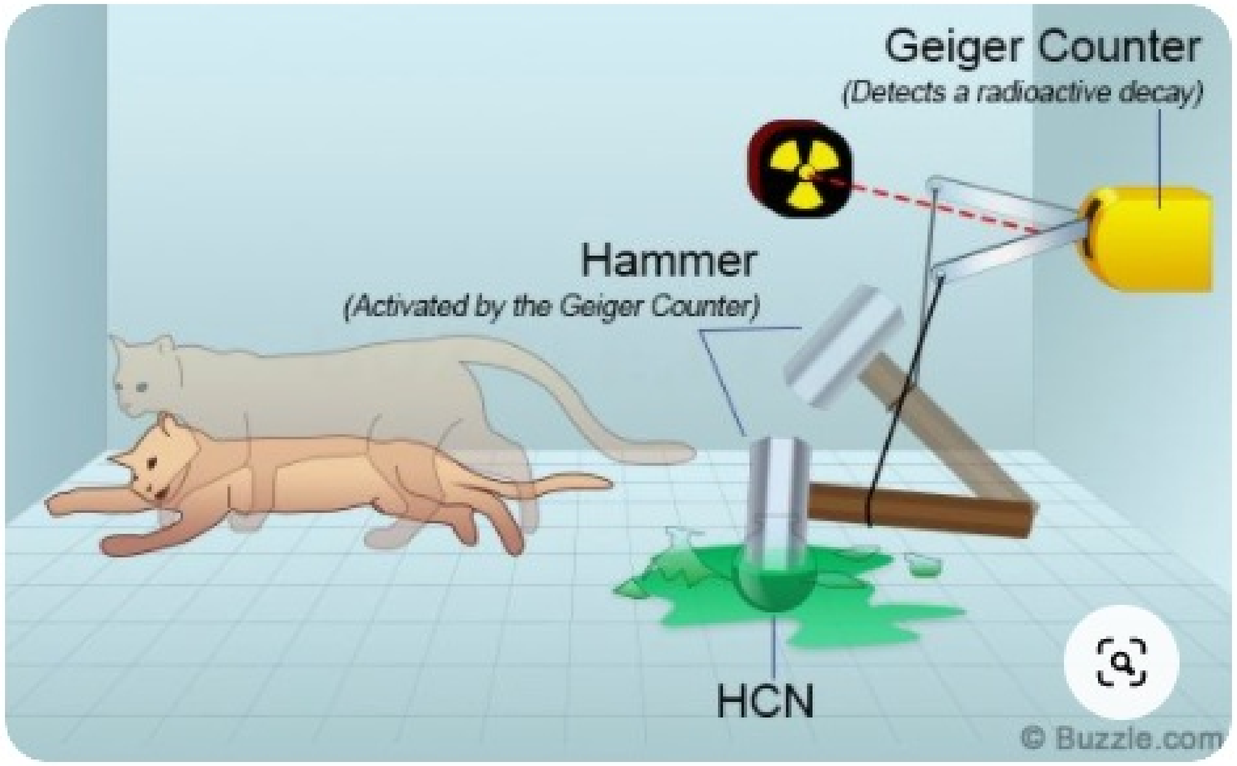
$$= \sum_{n,m} c_m^* c_n \langle q_m|Q|q_n\rangle$$

$$= \sum_{n,m} c_m^* c_n\, q_n \underbrace{\langle q_m|q_n\rangle}_{\delta_{nm}} = \sum_n c_n^* c_n\, q_n = \boxed{\sum_n |c_n|^2 q_n}$$

Avevamo: $\langle f(j)\rangle = \sum_j \underbrace{f(j)}_{=q_n} \cdot P(j)$

$\boxed{|c_n|^2 \text{ è la probabilità di ottenere } q_n \text{ misurando } Q}$

Il paradosso del gatto di Schrodinger



$$\text{gatto} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\text{dead}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\text{alive})$$

Problema 3.27 Griff.

osservabile A ha 2 autostati: ψ_1 e ψ_2 con autovalori a_1, a_2

osservabile B ha 2 autostati: φ_1, φ_2 autovalori b_1, b_2 $\Rightarrow$

$A\psi_1 = a_1 \psi_1$
$A\psi_2 = a_2 \psi_2$

$B\varphi_1 = b_1 \varphi_1$
$B\varphi_2 = b_2 \varphi_2$

$$\boxed{\psi_1 = \frac{3\varphi_1 + 4\varphi_2}{5} \qquad \psi_2 = \frac{4\varphi_1 - 3\varphi_2}{5}}$$

a) Viene misurata A → si ottiene a_1. Quale è lo stato del sistema dopo la misura?

→ la misura ha fatto collassare il sistema nello stato ψ_1

b) Se ora misuro B, cosa ottengo?

Il sistema si trova in $\psi_1 = \frac{3}{5}\varphi_1 + \frac{4}{5}\varphi_2$ $\Rightarrow$ avrò $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ prob. di ottenere b_1

$\left(\frac{4}{5}\right)^2$ prob di ottenere b_2

$\left(|c_n|^2 \ldots\right)$

c) Misuro di nuovo A .... cosa succede?

la mia particella sarà o in φ_1 o nello stato φ_2, a seconda che io abbia ottenuto b_1 o b_2

Devo esprimere

$$\boxed{\varphi_1 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2}$$
$$\varphi_2 = \bar{c}_1\psi_1 + \bar{c}_2\psi_2$$

→ c_1^2 prob. di trovare a_1, $|c_2|^2$ di trovare a_2

$$\boxed{\psi_1 = \frac{3\varphi_1 + 4\varphi_2}{5} \qquad \psi_2 = \frac{4\varphi_1 - 3\varphi_2}{5}}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}}_{M} \begin{matrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{matrix}$$

l'inverso di M, M^{-1} in questo caso $M = M^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Principio di indeterminazione

Supponiamo di avere un sistema nello stato ψ, e che ci siano due osservabili A, B

$$\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

$$\sigma_A^2 = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)(A - \langle A \rangle) | \psi \rangle$$

A è hermitiano

$$\overset{!}{=} \langle (A - \langle A \rangle)\psi | (A - \langle A \rangle)\psi \rangle = \langle f | f \rangle \qquad |f\rangle = (A - \langle A \rangle)|\psi\rangle$$

Allo stesso modo

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \qquad |g\rangle = (B - \langle B \rangle)|\psi\rangle$$

Ineguaglianza di Schwarz $\langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2 \Rightarrow \sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2 \geq |\langle f | g \rangle|^2$

Ora, $\boxed{\langle f | g \rangle}$ è, in generale un numero complesso z

$$|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 \geq (\mathrm{Im}(z))^2 = \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2$$

Esplicitiamo $\langle f | g \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)\psi | (B - \langle B \rangle)\psi \rangle \overset{\text{hermitianità}}{=} \langle \psi | (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) | \psi \rangle = \langle \psi | AB - A\langle B \rangle - \langle A \rangle B + \langle A \rangle \langle B \rangle | \psi \rangle$

$$= \langle \psi | AB | \psi \rangle - \langle B \rangle \langle \psi | A | \psi \rangle - \langle A \rangle \langle \psi | B | \psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \underbrace{\langle \psi | \psi \rangle}_{=1}$$

$$= \langle AB \rangle - \langle B \rangle \cancel{\langle A \rangle} - \langle A \rangle \langle B \rangle + \cancel{\langle A \rangle} \langle B \rangle = \boxed{\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle}$$

$$\langle g|f\rangle = \langle BA\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

Segue che:

$$\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle AB\rangle - \langle BA\rangle = \langle AB - BA\rangle = \langle [A,B]\rangle$$

$[A,B] = AB - BA$ è il commutatore di A e B

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left[\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle\right]\right)^2$$

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [A,B]\rangle\right)^2$$ $\Rightarrow$ Principio di Indeterminazione

A, B

$$\boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[A,B]\rangle\right)^2}$$

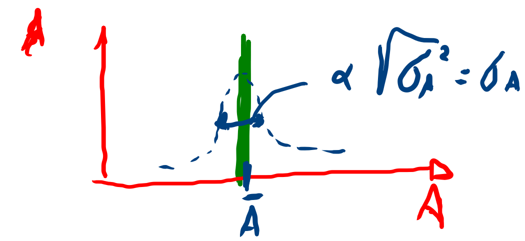
$$[A\,B] = AB - BA$$

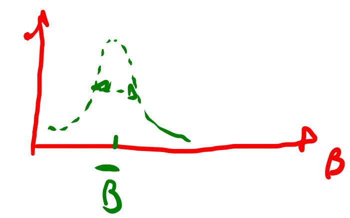
1. caso $AB - BA = 0$ cioè A e B commutano

$$\boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq 0}$$

Se $\sigma_A = 0$

anche σ_B può essere 0





2^{do} caso: $AB - BA \neq 0$ cioè A e B non commutano

Se io misuro A e ottengo un certo valore a

$$\Rightarrow \sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\,]\rangle\right)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_B^2 \to \infty}$$

A, B

$$\boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [A, B] \rangle\right)^2}$$

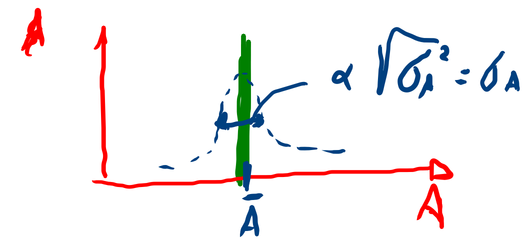
$$[A\,B] = AB - BA$$

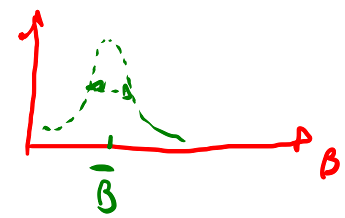
1. caso $AB - BA = 0$ cioè A e B commutano

$$\boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq 0}$$

Se $\sigma_A = 0$

anche σ_B può essere 0





2do caso: $AB - BA \neq 0$ cioè A e B non commutano

Se io misuro A e ottengo un certo valore a

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [\,] \rangle\right)^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_B^2 \to \infty}$$

!! Se ho due operatori, A e B che commutano $[A, B] = 0$ e non ci sono autovalori degeneri, allora A e B hanno gli autovettori in comune

Dimostrazione -

$$A\,|f\rangle = f\,|f\rangle$$

Consideriamo il ket $B|f\rangle$

$$A\underbrace{(B|f\rangle)}\overset{[A,B]=0}{=} BA|f\rangle = Bf|f\rangle = f\,\underbrace{B|f\rangle}$$

$B|f\rangle$ è autovettore di A ed ha f come autovalore

quindi posso scrivere $\boxed{B|f\rangle = f'|f\rangle}$ $\Rightarrow$ $|f\rangle$ è autovettore di B con autovalore f'

!! ok perché non ci sono sottospazi degeneri

Viceversa, se i due operatori hanno un set completo di autovettori in comune $\Longrightarrow [A,B]=0$

Dimostrazione:

Suppniamo $A\,|\psi_n\rangle = a_n\,|\psi_n\rangle$ e $B\,|\psi_n\rangle = b_n\,|\psi_n\rangle$

Allora, siccome qualsiasi $|f\rangle$ potrò esprimerlo come $|f\rangle = \sum c_n\,|\psi_n\rangle$:

$$AB\,|f\rangle = A\left(B\sum c_n\,|\psi_n\rangle\right) = A\left(\sum c_n b_n\,|\psi_n\rangle\right) = \sum c_n b_n a_n\,|\psi_n\rangle$$

$$BA\,|f\rangle = B\left(A\sum c_n|\psi_n\rangle\right) = B\left(\sum c_n a_n\,|\psi_n\rangle\right) = \sum c_n b_n a_n\,|\psi_n\rangle$$

$\Rightarrow (AB - BA)\,|f\rangle = 0 \quad \forall\,|f\rangle$

$\Downarrow$

$[A,B]=0$

!! Si può dimostrare che, anche se ho degenerazione

$[A,B]=0 \iff$ ho set completo di autovettori in comune

Supponiamo di avere un sistema, ψ sia lo stato.

osservabile A $\quad a_1, a_2 \ldots \quad a_m, a_m \quad a_N$ $\quad \Rightarrow$ degenerazione $\underline{a_m = a_{m+1}}$

$|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle \quad \underline{|\alpha_m\rangle, |\alpha_{m+1}\rangle} \quad |\alpha_N\rangle$

Supponiamo di misurare A e di ottenere a_m come valore.

$\Rightarrow$ la funzione ψ è collassata in una combinazione lineare di $|\alpha_m\rangle$ $|\alpha_{m+1}\rangle$

$\Rightarrow$ non so determinare univocamente lo stato del mio sistema

$\Rightarrow$ Cerco una seconda osservabile, B in modo che $[A,B]=0$ (A e B sono $\underline{\text{compatibili}}$)

$B \quad b_1 \ldots \quad b_m, b_{m+1} \quad b_N$

$|\beta_1\rangle \ldots \quad |\beta_N\rangle$

$= |\alpha_1\rangle \ldots \quad |\alpha_m\rangle, |\alpha_{m+1}\rangle \quad |\alpha_N\rangle$

se b_m e b_{m+1} <u>non</u> sono uguali

misurando B ottengo $\to b_m$ / $\to b_{m+1}$ $\Rightarrow$ identifico univocamente lo stato del sistema

Io devo cercare un SET di operatori che mi permetta di identificare univocamente uno stato.

CSCO (Complete set of Commuting operators)

Regola di commutazione $[x, p]$

$$[x, p]\, f(x) = (xp - px) = xp\, f(x) - px\, f(x)$$

$p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$

$$= x \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} f(x) - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\left(x\, f(x)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(\cancel{x \frac{d}{dx} f(x)} - \cancel{x\frac{d}{dx} f(x)} - f(x)\right) = -\frac{\hbar}{i} f(x) = i\hbar\, f(x)$$

$[x, p] = i\hbar$ non commutano

$$\boxed{\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Principio di indeterminazione di Heisenberg

4° postulato

la f. onda ψ di un sistema evolve nel tempo secondo l'equazione:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi}$$

equazione di Schrodinger

NOTA: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = T$, energia cinetica $\left(T = \frac{p^2}{2m}\right)$

V potenziale

$T + V$ energia totale della particella $= H$ hamiltoniana

$\Rightarrow$ l'eq. di Schrodinger posso scrivere:

$$\boxed{i\hbar |\dot{\psi}\rangle = H |\psi\rangle}$$