RICHIAMI SUL GRUPPO DI POINCARÉ E RAPPRESENTAZIONI DELL'ALGEBRA DI LORENTZ

La teoria deve essere invariante sotto:

- traslazioni : $\varphi(x) \to \varphi(x+a)$, $\forall\ a^\nu = \text{const}$
- rotazioni + boost : invarianza di Lorentz $x_\mu \to \Lambda_\mu^{\ \nu} x_\nu$

$\Rightarrow$ traslazioni $\oplus$ Lorentz = GRUPPO DI POINCARÉ $ISO(1,3)$

(isometrie di Minkowski)

Diverse particelle hanno massa, momento, indici di spin, ma anche altri numeri quantici.
Una trasformazione di Poincaré manda una particella in se stessa:

DEFINIZIONE DI UNA PARTICELLA:

$\boxed{\text{PARTICELLE trasformano sotto RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILE e UNITARIA del gruppo di Poincaré}}$

La rappresentazione è NECESSARIAMENTE INFINITO-DIMENSIONALE : un campo ha un numero di gradi di libertà infinito

$$\varphi(x)\ ,\quad A_\mu(x)\ ,\quad \psi_\alpha(x), \dots$$

CLASSIFICATE da MASSA e SPIN

(Wigner '39)

RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO DI LORENTZ $SO(1,3)$ [5.10.1]

Il gruppo di Lorentz è l'insieme di rotazioni e boost che lasciano invariata la metrica di Minkowski:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad , \quad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

Nella rappresentazione dei 4-vettori $V_\mu \to \Lambda_{\mu\nu} V_\nu$

Estraiamo l'algebra di Lie del gruppo a partire da questa rapp. Studiamo trasformazioni infinitesime: $V_\mu \to V_\mu + \delta V_\mu$

$$\delta V_0 = \beta_i V_i \qquad \delta V_i = \beta_i V_0 - \varepsilon_{ijk}\,\vartheta_j V_k$$

$\varepsilon_{123} = +1$

β_i : boost

ϑ_i : rotazioni

Ovvero:

$$\delta V_\mu = i \sum_{i=1}^{3} \left(\vartheta_i \, (J_i)_{\mu\nu} + \beta_i \, (K_i)_{\mu\nu} \right) V_\nu$$

generatori dell'algebra di Lorentz

Hermitiani

$$J_1 = i\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = i\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = i\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10.14)$$

$$K_1 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = i\begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = i\begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

anti-Hermitiani

Soddisfano:

Lorentz algebra $so(1,3)$

$$\begin{cases} [J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k \quad \} \text{ algebra delle rotazioni } SO(3) \\ [J_i, K_j] = i\,\varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = -i\,\varepsilon_{ijk} J_k \end{cases}$$

Per costruire irrep del gruppo di Lorentz possiamo usare quello che già sappiamo sulle irrep di $SU(2)$.

Definiamo: $J_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$; $J_i^- = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$

Soddisfano l'algebra
$$\begin{cases} [J_i^+, J_j^+] = i\varepsilon_{ijk} J_k^+ \\ [J_i^-, J_j^-] = i\varepsilon_{ijk} J_k^- \\ [J_i^+, J_k^-] = 0 \end{cases}$$
due sub-algebre che commutano fra loro

$\downarrow$

$$so(1,3) = su(2)_L \oplus su(2)_R$$

$\rightarrow$ Le irrep del gruppo di Lorentz si possono determinare dalle rappresentazioni di $su(2) = so(3)$ [Rotazioni in 3D]

$\Rightarrow$ specificate da un numero semi-intero

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots$$

$\Rightarrow$ agisce su uno spazio vettoriale di $\dim = (2j+1)$

Irrep. del gruppo di Lorentz è descritta da due numeri $\rightarrow (A, B)$ $\quad A, B = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

$$(2A+1)\cdot(2B+1) \text{ degrees of freedom}$$

Il generatore delle rotazioni è $\vec{J} = \vec{J}^+ + \vec{J}^-$ (sommati vettorialmente: Clebsh-Gordan)

$su(2)\oplus su(2)$	$(0,0)$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
SPIN: $SO(3)$ ROTAZIONI	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\oplus 0$	1	1	$2\oplus 1\oplus 0$

SCALARE — SPINORI L,R — VETTORE A_μ + SCALARE

SPINORI

[S.10.2, P.S.3.2]

Le irrep $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ descrivono oggetti di spin $j=\frac{1}{2}$ e con $(2j+1)=2$ gradi di libertà.

$\left(\frac{1}{2},0\right) \sim \psi_L$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right) \sim \psi_R$

Spinori di Weyl left e right-handed

I generatori di Lorentz in queste irrep devono essere matrici 2x2 con queste regole di commutazione:

$[J_i^+, J_j^+] = i\varepsilon_{ijk} J_k^+$
$[J_i^-, J_j^-] = i\varepsilon_{ijk} J_k^-$
$[J_i^+, J_k^-] = 0$

Matrici di Pauli: $\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$

$\psi_L \sim \left(\frac{1}{2},0\right)$: $\vec{J}^- = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{J}^+ = 0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}$

$\psi_R \sim \left(0,\frac{1}{2}\right)$: $\vec{J}^- = 0$, $\vec{J}^+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$

Dato che $\vec{\sigma}^+ = \vec{\sigma}$, i generatori tra le due irrep son uni gli aggiunti degli altri. ψ_L e ψ_R sono irrep CONIUGATE.

$\Rightarrow$ Sotto Lorentz $\quad \psi_{R,L} \to e^{\frac{1}{2}(i\vartheta_j\sigma_j \pm \beta_j\sigma_j)}\,\psi_{R,L}$

$$\delta\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(i\vartheta_j \pm \beta_j)\sigma_j\psi_{R,L}\,, \qquad \delta\psi^+_{R,L} = \frac{1}{2}(-i\vartheta_j \pm \beta_j)\psi^+_{R,L}\sigma_j \qquad (*)$$

NOTA: Prendiamo una rotazione di 2π, $\vartheta_z = 2\pi$.

Si ha: $\psi_{R,L} \to e^{\frac{1}{2}i2\pi\sigma_3}\psi_{R,L} = -\psi_{R,L}$!

Gli spinori CAMBIANO SEGNO sotto rotazioni di 2π.

$\Rightarrow$ questa proprietà è all'origine del teorema di spin-statistica

Per approfondire vedi, e.g. [S.10.5]

Lagrangiana per SPINORI DI WEYL

$$\mathcal{L}_{Weyl} = i\psi_R^\dagger \sigma_\mu \partial_\mu \psi_R + i\,\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial_\mu \psi_L - m\left(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R\right)$$

$$\sigma^\mu = \left(\mathbb{1}, \vec{\sigma}\right) \qquad \bar{\sigma}^\mu = \left(\mathbb{1}, -\vec{\sigma}\right)$$

$\Rightarrow$ La massa mescola (e accoppia) ψ_L e ψ_R.

Lo spinore di Dirac è dato da

$$\psi = \psi_L \oplus \psi_R = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \qquad \psi^\dagger = \left(\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger\right)$$

$$\bar{\psi} \overset{def}{=} \left(\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger\right)$$

Definiamo $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ Matrici di Dirac (o matrici γ)

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \qquad \boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0}$$

La Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi \xrightarrow{e.o.m} \left(i\not{\partial} - m\right)\psi = 0$$

Equazione di Dirac

Esercizio

Controlla che $\mathcal{L}_{Dirac} = \mathcal{L}_{Weyl}$

[S.11.1, eq(11.10)]

$$\begin{cases} \gamma_5 \psi_L = -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R = +\psi_R \end{cases} \leftarrow \text{autostati}$$

CHIRALITÀ

Definiamo

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \qquad \gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_R^2 = P_R$
$P_L^2 = P_L$
$P_L P_R = 0$

$$P_R \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \qquad P_L \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. di Dirac:

$$\begin{cases} \sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_R = m\psi_L \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_L = m\psi_R \end{cases}$$

1. la massa m mescola ψ_L e ψ_R
2. Per $m=0$, gli spinori sono autovettori di ELICITÀ

$$\hat{h} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E}$$

$$\begin{cases} \hat{h}\psi_R\big|_{m=0} = +\frac{1}{2}\psi_R \\ \hat{h}\psi_L\big|_{m=0} = -\frac{1}{2}\psi_L \end{cases}$$

SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION (richiami) [S.11.2] [P.S.3.3]

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p^s \, u_s(p) \, e^{-ipx} + b_p^{s*} \, v_s(p) \, e^{+ipx} \right)$$

Con $\begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} u_s(p) = 0$ & $\begin{pmatrix} -m & -p\cdot\sigma \\ -p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} v_s(p) = 0$

La soluzione e^-

$$\Rightarrow \quad u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma} \, \xi_s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \, \xi_s \end{pmatrix} \qquad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma} \, \eta_s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \, \eta_s \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \xi_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi_2 = \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Normalizzati come: $\bar{u}_s(p) \, u_{s'}(p) = - \bar{v}_s(p) \, v_{s'}(p) = 2m \, \delta_{ss'}$

Prodotto esterno:

$$\sum_{s=1}^{2} u_s(p) \, \bar{u}_s(p) = \not{p} + m \qquad \sum_{s=1}^{2} v_s(p) \, \bar{v}_s(p) = \not{p} - m$$