## ESEMPIO: Funzioni di domanda Cobb-Douglas

Nel Capitolo 4 abbiamo introdotto la **funzione di utilità Cobb-Douglas:**

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}. \qquad 0 < a < 1$$

Poiché le funzioni di utilità vengono definite a meno di una trasformazione monotona, prendiamo i logaritmi di questa espressione, ottenendo

$$\ln u(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (1 - a) \ln x_2.$$

Vogliamo trovare le funzioni di domanda per $x_1$ e $x_2$ relative alla funzione di utilità Cobb-Douglas. Il problema che vogliamo risolvere è

$$\max_{x_1, x_2} a \ln x_1 + (1 - a) \ln x_2$$

$$\text{tale che } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

Vi sono almeno tre modi per risolverlo: uno consiste nello scrivere la condizione MRS ed il vincolo di bilancio. Usando l'espressione del MRS derivata nel Capitolo 4, otteniamo

$$\boxed{\begin{aligned} \text{SMS} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{a x_2}{(1 - a) x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= m. \end{aligned}}$$

Queste sono due equazioni in due incognite che possono essere risolte per la scelta ottima di $x_1$ e $x_2$. Un modo per risolverle consiste nel sostituire la seconda nella prima ottenendo

$$\frac{a(m/p_2 - x_1 p_1/p_2)}{(1 - a) x_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Con le opportune trasformazioni otteniamo

$$a(m - x_1 p_1) = (1 - a) p_1 x_1.$$

Se eliminiamo $-a p_1 x_1$ dalle due parti e le riscriviamo, otteniamo

$$am = p_1 x_1$$

oppure

$$x_1 = \frac{am}{p_1}.$$

Questa è la funzione di domanda di $x_1$. Per trovare la funzione di domanda di $x_2$, sostituiamo nel vincolo di bilancio e otteniamo

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \frac{am}{p_1} \\ &= \frac{(1 - a) m}{p_2}. \end{aligned}$$

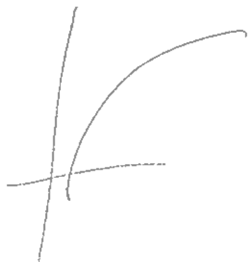
Una trasformazione monotona di una funzione di utilità corrisponde ad una funzione di utilità che rappresenta le stesse preferenze della funzione di utilità di partenza

Es. di trasformazioni monotone si ottengono moltiplicando la funzione per un numero positivo, sommandovi un numero qualsiasi, elevando a una potenza dispari

$\cancel{u(x,y)}$ $u(x_1, x_2)$ $f(u(x_1, x_2))$ è una funzione di utilità che rappresenta le stesse preferenze

$u(x_1 x_2)$ Cobb Douglas

$v(x_1, x_2) = \ln(u(x_1, x_2))$



Il secondo modo consiste nel sostituire direttamente il vincolo di bilancio nel problema di massimizzazione. Il problema così diventa

$$\max_{x_1} a \ln x_1 + (1-a)\ln(m/p_2 - x_1 p_1/p_2).$$

La condizione del primo ordine è

$$\frac{a}{x_1} - (1-a)\frac{p_2}{m - p_1 x_1}\frac{p_1}{p_2} = 0.$$

Con facili calcoli otteniamo

$$x_1 = \frac{am}{p_1}.$$

Sostituiamo nuovamente nel vincolo di bilancio $x_2 = m/p_2 - x_1 p_1/p_2$ ottenendo

$$x_2 = \frac{(1-a)m}{p_2}.$$

Queste sono le funzioni di domanda dei due beni, ed esse coincidono con le funzioni ricavate sopra con l'altro metodo.

Consideriamo ora il metodo di Lagrange. Scriviamo la Lagrangiana

$$L = a \ln x_1 + (1-a)\ln x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

e differenziamo per ottenere le tre condizioni del primo ordine

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1-a}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0.$$

Il modo migliore di procedere è risolvere prima per $\lambda$ e poi per $x_1$ e $x_2$. Con opportuni passaggi otteniamo

$$a = \lambda p_1 x_1$$
$$1 - a = \lambda p_2 x_2.$$

Non resta altro da fare che sommarle membro a membro:

$$1 = \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2) = \lambda m$$

e quindi

$$\lambda = \frac{1}{m}.$$

Sostituiamo nelle prime due equazioni e risolviamo per $x_1$ e $x_2$ per ottenere

$$x_1 = \frac{am}{p_1}$$
$$x_2 = \frac{(1-a)m}{p_2}$$

esattamente come prima.