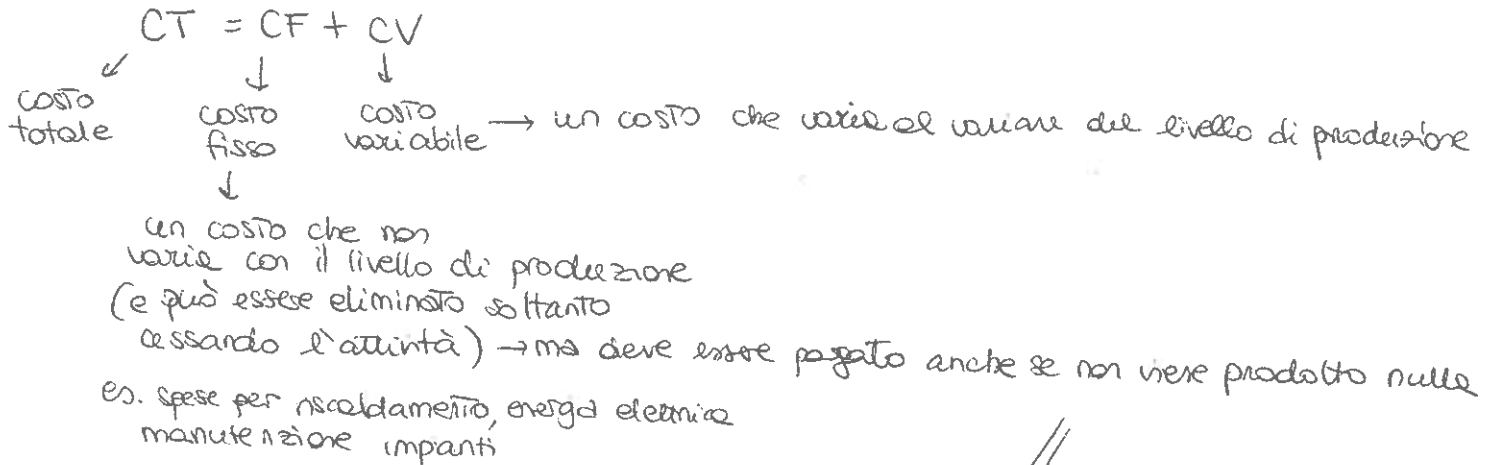


## Es. 9 (CAP. 7)

Sl4

La funzione di costo di breve periodo di un'impresa è data dall'equazione  $C = 200 + 55q$ , dove  $C$  è il costo totale e  $q$  è la quantità di produzione Totale, entrambi misurati in migliaia di unità.

a) Qual è il costo fisso dell'impresa?



Se  $q = 0 \Rightarrow CT = 200 \Rightarrow$  il costo fisso è uguale a 200 (o 200.000 €).

b) Se l'impresa producesse 100.000 unità di prodotto, quale sarebbe il costo medio variabile?

Il costo medio variabile CMV è il costo variabile diviso per il livello di produzione  $\frac{CV}{q}$

$$CMV = \frac{CV}{q} = \frac{55q}{q} = 55 \quad (\text{ovvero } 55.000 \text{ €})$$

o anche  $CV = 55q = 55 \cdot 100 = 5500 \Rightarrow CMV = \frac{CV}{q} = \frac{5500}{100} = 55$

c) Quale sarebbe il costo marginale di produzione?

Il costo marginale (detto anche costo incrementale) è l'incremento di costo che risulta dalla produzione di una unità di prodotto in più.

Dato che il costo fisso non cambia al variare del livello di produzione dell'impresa, il costo marginale è uguale all'incremento di costo variabile o di costo totale causato da una unità di prodotto in più.

$$C' = \frac{\Delta CV}{\Delta q} = 55$$

d) Quale sarebbe il costo medio fisso?

$$CMF = \frac{CF}{q} = \frac{200}{100} = 2 \quad (\text{ovvero } 20000)$$

$q \leftarrow$  livello di produzione

e) Supponete che l'impresa sottoscriva un prestito e proceda all'ampliamento dello stabilimento. Il costo fisso aumenta di 50'000 €, ma il costo variabile scende a 45'000 € per 1000 unità. Nell'equazione rientra anche il costo degli interessi ( $i$ ). Ogni incremento percentuale del tasso di interesse fa salire i costi di 3'000 €. Scrivete la nuova equazione del costo.

costo fisso

$$CF = 200 \rightarrow CF' = 250$$

costo variabile

$$CV = 55q \rightarrow CV' = 45q$$

Il costo fisso comprende anche il costo degli interessi, pari a  $3i$

L'equazione del costo è:  $CT = 250 + 45q + 3i$

# Es. n. 11 (CAP. 7)

Supponete che la funzione di produzione di un'impresa sia:

$$q = 10 L^{1/2} K^{1/2}$$

Il costo di una unità di lavoro è €20 e il costo di una unità di capitale è €80.

- a) L'impresa attualmente produce 100 unità di prodotto e ha determinato che le quantità di lavoro e capitale che minimizzano i costi sono, rispettivamente, 20 e 5. Rappresentate graficamente la situazione utilizzando isoquanti e linee di isocosto.

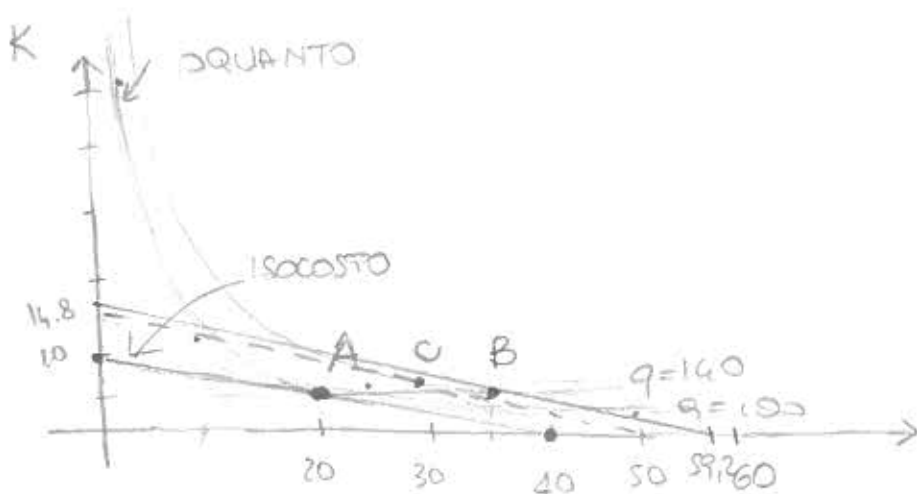
Per tracciare l'isoquante:  $q = 10 L^{1/2} K^{1/2}$

$$100 = 10 L^{1/2} K^{1/2}$$

Risolvo rispetto a K:

$$K^{1/2} = \frac{100}{10 L^{1/2}} \Rightarrow K = \left( \frac{100}{10 L^{1/2}} \right)^2 = \frac{(100)^2}{10^2 L} = \frac{100}{L}$$

L	K
10	10
50	2
2	50
25	4
4	25



L'isoquante è convessa.

Retta di isocosto:  $CT = wL + rK$

$$CT = 20L + 80K$$

$$80K = CT - 20L$$

$$K = \frac{CT}{80} - \frac{20}{80}L$$

$$\Rightarrow K = \frac{CT}{80} - \frac{1}{4}L$$

// inclinazione

$$L^* = 20$$

$$K^* = 5$$

$$CT = 20 \cdot 20 + 80 \cdot 5 = 800 \text{ €}$$

⇒ la retta di isocosto ha equazione

$$20L + 80K = 800$$

$$K = \frac{800}{80} - \frac{1}{4}L \Rightarrow \boxed{K = 10 - 0,25L}$$

interc. orizzontale :  $K=0 \Rightarrow 10 - 0,25L = 0$

$$0,25L = 10$$

$$L = \frac{10}{0,25} = 40$$

interc. verticale :  $L=0 \Rightarrow K=10$

b) L'impresa vuole ora aumentare la produzione a 140 unità. Se il capitale è fisso nel breve periodo, quanto lavoro servirà? Rappresentate graficamente la situazione e determinate il nuovo costo totale dell'impresa.

$$q = 140 \quad K^* = 5 \quad L^* = ?$$

$$q = 10 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L^{\frac{1}{2}} = \frac{q}{10 K^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow L = \frac{q^2}{100 K} = \frac{(140)^2}{100 \cdot 5} =$$

$$\Rightarrow L = \frac{19600}{500} = 39,2$$

$$\begin{array}{r|l} L & K \\ 0 & 14,8 \\ 39,2 & 0 \end{array}$$

$$K = 14,8 - 0,25$$

$$CT = wL + rK \Rightarrow CT = 20 \cdot L + 80K$$

$$CT = 20 \cdot 39,2 + 80 \cdot 5 = 1184 \text{ €} \quad \uparrow$$

$$20L + 80K = 1184 \Rightarrow 80K = 1184 - 20L \Rightarrow K = \frac{1184}{80} - \frac{20}{80}L$$

Il nuovo isoquanto di per una produzione di 140 si trova al di sopra e a destra dell'isoquanto iniziale.

Dato che nel breve periodo il capitale è fisso, l'impresa si sposterà orizzontalmente verso destra fino al nuovo isoquanto e alla nuova quantità di lavoro, ovvero al punto B del grafico.

Non è il punto che minimizza il costo di lungo periodo (perché in B l'isocosto non è tangente all'isoquante) ma è il meglio che l'impresa possa fare nel breve periodo con  $K$  fisso a 5.

↙  
e inoltre ci sono punti del nuovo isoquante ( $q=140$ ) che si trovano al di sotto della nuova retta di isocosto, punti cui corrispondono una quantità maggiore di capitale e una minore di lavoro.

c) Identificate graficamente il livello di capitale e lavoro che minimizza i costi nel lungo periodo se l'impresa vuole produrre 140 unità.

È il punto C sul grafico.

Per l'impresa è ottimale impiegare più capitale e meno lavoro passando alla nuova e più bassa retta di isocosto tangente all'isoquante  $q=140$ .

Le tre rette di isocosto sono parallele e hanno la stessa inclinazione.

d) Se il saggio marginale di sostituzione tecnica è  $\frac{K}{L}$ , determinate il livello ottimale di capitale e lavoro richiesto per produrre 140 unità.

$$SMST = \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{20}{80} \Rightarrow K = \frac{1}{4}L$$

$$140 = 10L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

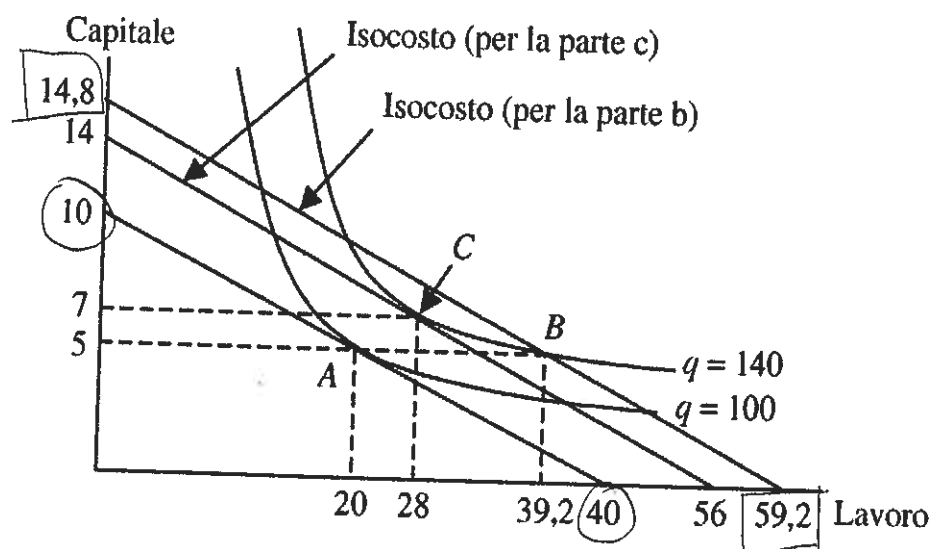
$$140 = 10L^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}L\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$140 = 10L^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 140 = 5L \Rightarrow L = \frac{140}{5} = 28$$

$$L^* = 28 \quad K^* = \frac{1}{4} \cdot 28 = 7$$

CT =  $20 \cdot 28 + 80 \cdot 7 = 1120$  € è minore che nel breve periodo (1184) perché nel lungo periodo l'impresa può modificare le quantità di tutti i fattori.









Es. n. 13 (CAP. 7)

Supponete che la funzione di costo totale di lungo periodo per un settore industriale sia data dall'equazione cubica

$$C = a + bq + cq^2 + dq^3$$

Mostrate (ricorrendo all'analisi matematica) che questa funzione è coerente con una curva di costo medio di forma a U per almeno alcuni valori di  $a, b, c$  e  $d$ .

Se la produzione è uguale a zero  $q=0 \Rightarrow CT = a$ , dove  $a$  sono i costi fissi

Nel breve periodo i costi fissi sono positivi  $\Rightarrow a > 0$   
ma nel lungo periodo, tutti i fattori di produzione sono variabili  $\Rightarrow a = 0$

Poniamo quindi  $\boxed{a = 0}$

Calcoliamo il costo medio:

$$CM = \frac{CT}{q} = \frac{bq + cq^2 + dq^3}{q} = b + cq + dq^2$$

Questa è una funzione quadratica. Graficamente essa può avere due forme: a U oppure a U rovesciata ( $\cap$ ). Vogliamo una curva a U, cioè una curva che abbia un punto di minimo (il costo medio minimo), non una che abbia un punto di massimo.

In corrispondenza del minimo, l'inclinazione deve essere uguale a zero  $\Rightarrow$  la derivata del CM rispetto a  $q$  deve essere uguale a zero.

$\Rightarrow$  la derivata seconda deve essere  $> 0$  (curva convessa)

$$\frac{dCM}{dq} = c + 2dq = 0$$

$$\frac{d^2CM}{dq^2} = 2d > 0 \Rightarrow \boxed{d > 0}$$

$$c + 2dq = 0 \Rightarrow c = \overbrace{-2dq}^{d > 0, q > 0} \Rightarrow \boxed{c < 0}$$

vincoli per  $b$ ?

$$c + 2dq = 0 \Rightarrow 2dq = -c \Rightarrow q = -\frac{c}{2d} > 0$$

$$C\bar{x} = b + cq + dq^2$$

$$= b + c\left(-\frac{c}{2d}\right) + d\left(-\frac{c}{2d}\right)^2$$

$$= b - \frac{c^2}{2d} + \cancel{d}\left(\frac{c^2}{4d^2}\right)$$

$$= b - \frac{c^2}{2d} + \frac{c^2}{4d} = \frac{4bd - 2c^2 + c^2}{4d} = \frac{4bd - c^2}{4d} > 0$$

Al suo minimo, il costo medio deve essere positivo

$$4bd - c^2 > 0$$

$$4bd > c^2 > 0$$

$$4bd > 0 \Rightarrow \underbrace{bd}_{\substack{\downarrow \\ d > 0}} > 0 \Rightarrow \boxed{b > 0}$$

$\Rightarrow$  per avere curve del costo medio e  $U$  nel lungo periodo

$$a = 0, \quad b, d > 0, \quad c < 0, \quad 4bd > c^2$$