

Esercizio n. 1

AUTOVALUTAZIONE

Un'impresa ha una funzione di produzione data da: $F(K, L) = LK$
I prezzi degli input sono $w=1$ ed $r=4$.

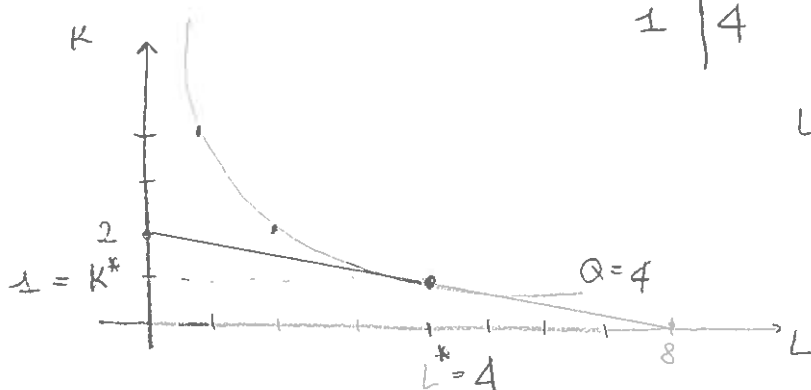
- 1) Si derivi e si rappresenti graficamente l'isopunto associato al livello di produzione $Q=4$.

Basta uguagliare la funzione di produzione $F(K, L) = LK$ al livello di produzione 4:

$$LK = 4 \Rightarrow K = \frac{4}{L}$$

\Rightarrow Si tratta di una iperbole \longrightarrow

K	L
4	1
2	2
1	4



$$L + 4K = c$$

$$4K = c - L$$

$$K = \frac{c}{4} - \frac{1}{4}L$$

- 2) Supponendo che nel breve periodo lo stock di capitale sia fisso al livello $K=4$, determinare la funzione di costo totale di breve periodo dell'impresa e le corrispondenti funzioni di costo medio e costo marginale.

La funzione di produzione nel breve periodo è data da:

$$q = L\bar{K} = L \cdot 4 \Rightarrow L = \frac{q}{4}$$

La funzione di costo sarà:

$$CT(q) = wL + r\bar{K} = L + 4 \cdot 4 = L + 16$$

$$CT(q) = \frac{q}{4} + 16$$

$$\text{Costo medio: } CM = \frac{CT}{q} = \left(\frac{q}{4} + 16\right) \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{4} + \frac{16}{q}$$

$$\text{Costo marginale: } C' = \frac{dCT}{dq} = \frac{1}{4}$$

3) Supponendo che nel lungo periodo i prezzi dei fattori rimangano i medesimi, determinate la combinazione di fattori che minimizza i costi nell'ipotesi in cui il livello desiderato di produzione sia pari a 4.

$$\min_{L, K} \quad CT(q) = wL + rK = L + 4K$$

$$KL = 4$$

$$\begin{cases} SMST = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{w}{r} \\ KL = 4 \end{cases}$$

$$P'_L = \frac{dq}{dL} = K$$

$$P'_K = \frac{dq}{dK} = L$$

$$\Rightarrow SMST = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{K}{L}$$

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \\ KL = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{1}{4} \\ KL = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4K = L \\ K(4K) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ 4K^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$K^2 = 1 \Rightarrow K = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} L = 4K = 4 \\ K = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K^* = 1 \\ L^* = 4 \end{cases}$$

4) Quanto vale il costo di produzione in corrispondenza della scelta ottima?

$$CT = wL^* + rK^* = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 4 + 4 = 8$$

Esercizio n. 2

Le seguenti funzioni di produzione sono caratterizzate da rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti?

a) $F(K, L) = 3KL + 8L^2$

✓ Per $t > 1$

$$F(tK, tL) > tF(K, L) \Rightarrow \text{rendimenti di scala crescenti}$$

$$F(tK, tL) = tF(K, L) \Rightarrow \text{" " costanti}$$

$$F(tK, tL) < tF(K, L) \Rightarrow \text{" " decrescenti}$$

per le funzioni di produzione Cobb-Douglas: $F(K, L) = A K^a L^b$
il tipo di rendimenti di scala dipende dalla grandezza di $(a+b)$

$$\text{se } (a+b) = 1 \Rightarrow \text{rendimenti di scala costanti}$$

$$\text{se } (a+b) > 1 \Rightarrow \text{" " crescenti}$$

$$\text{se } (a+b) < 1 \Rightarrow \text{" " decrescenti}$$

⬆

$$\begin{aligned} F(tK, tL) &= 3(tK)(tL) + 8(tL)^2 = 3t^2KL + 8t^2L^2 = t^2(3KL + 8L^2) \\ &= t^2 F(K, L) \end{aligned}$$

$$F(tK, tL) = t^2 F(K, L) > tF(K, L) \Rightarrow \text{rendimenti di scala CRESCENTI}$$

b) $F(K, L) = 10 L^{0.3} K^{0.8}$

funzione di produzione Cobb-Douglas $\Rightarrow a+b = 0.3+0.8 = 1.1 > 1$
 \Rightarrow rendimenti di scala crescenti

c) $F(K, L) = 2\sqrt{L^2 + K^2}$

$$\begin{aligned} F(tK, tL) &= 2\sqrt{(tK)^2 + (tL)^2} = 2\sqrt{t^2K^2 + t^2L^2} = 2\sqrt{t^2(K^2 + L^2)} = 2|t|\sqrt{K^2 + L^2} = \\ &= |t| F(K, L) \end{aligned}$$

$$t > 1 \Rightarrow F(tK, tL) = tF(K, L) \Rightarrow \text{rendimenti di scala costanti}$$

d) $F(K, L) = 10KL$

$$F(tK, tL) = 10(tK)(tL) = 10t^2KL = t^2 F(K, L)$$

$$F(tK, tL) = t^2 F(K, L) > tF(K, L) \Rightarrow \text{rendimenti di scala crescenti}$$

$$e) F(K, L) = L + 2\sqrt{K}$$

$$F(tK, tL) = (tL) + 2\sqrt{tK} = \cancel{tL + 2t^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}} = \cancel{t(L + 2t^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}})} = \cancel{t(L + t^{-\frac{1}{2}}2\sqrt{K})}$$

$$tF(K, L) = t(L + 2\sqrt{K}) = tL + 2t\sqrt{K}$$

$$F(tK, tL) = tL + 2t^{\frac{1}{2}}\sqrt{K} \quad ? \quad tF(K, L) = tL + 2t\sqrt{K}$$

$$t^{\frac{1}{2}} < t$$

$$\Rightarrow F(tK, tL) < tF(K, L) \Rightarrow \text{rendimenti di scala decrescenti.}$$

Esercizio n. 3

In un mercato perfettamente concorrenziale operano, nel breve periodo, 50 imprese identiche caratterizzate dalla seguente funzione di produzione:

$$q_i = K^{1/2} L^{1/2}$$

con $\bar{K}=4$ e il prezzo dei fattori K e L dato da $r=1$ e $w=4$ rispettivamente.

La funzione di domanda di mercato è $Q = 300 - 5p$

Determinare:

a) l'offerta di breve periodo dell'impresa e del mercato

↳ La curva di offerta di un'impresa indica la quantità che l'impresa produce ad ogni prezzo possibile.

Sappiamo che l'impresa concorrenziale sceglie il livello di produzione in corrispondenza del quale il prezzo è uguale al costo marginale e che interrompe la produzione nel breve periodo quando il prezzo è inferiore al costo medio variabile.
⇒ la curva di offerta sarà quindi la porzione della curva del costo marginale nel tratto in cui il costo marginale è superiore al costo medio variabile.

↑
L'impresa produce quando $P = C'$, a patto che $C' > CMV$

Determiniamo prima la funzione di costo di breve periodo di ciascuna impresa.

$$CT(q) = wL + rK$$

$$\text{ma } K \text{ è fisso} \Rightarrow CT = wL + r\bar{K}$$

La funzione di produzione di breve periodo sarà:

$$q = \bar{K}^{1/2} L^{1/2} = 4^{1/2} L^{1/2} = 2 L^{1/2}$$

$$\Rightarrow L^{1/2} = \frac{q}{2} \Rightarrow L = \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{4}$$

$$CT = 4L + 4 \cdot 1 \Rightarrow CT = 4L + 4 = 4\left(\frac{q^2}{4}\right) + 4 =$$

$$CT = q^2 + 4$$

$$C' = \frac{dCT}{dq} = 2q \quad ; \quad CV = q^2 \Rightarrow CMV = \frac{CV}{q} = \frac{q^2}{q} = q$$

Condizione di massimizzazione dei profitti $\Rightarrow P = C'$

$$\Rightarrow 2q = p$$

$$C' > CMV \Leftrightarrow 2q > q \Leftrightarrow q > 0 \quad \forall q$$

\Rightarrow la curva di offerta è l'intera curva del costo marginale

$$p = 2q \Rightarrow q = \frac{1}{2}p \rightarrow \times \text{ la singola impresa}$$

La curva di offerta di mercato si ottiene moltiplicando per il numero di imprese presenti sul mercato:

$$Q = 50 q_i = 50 \cdot \frac{1}{2}p = 25p$$

b) il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato, nonché la quantità prodotta e il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo.

$$Q^S = Q^D \Rightarrow 25p = 300 - 5p$$

mercato

$$30p = 300 \Rightarrow p^* = \frac{300}{30} = 10$$

$$Q^* = 25p = 25 \cdot 10 = 250$$

singola impresa

$$q_i^* = \frac{1}{2}p^* = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$\begin{aligned} \pi_i &= RT_i - CT_i = p^* q_i^* - CT_i = 5 \cdot 10 - (5^2 + 4) \\ &= 50 - 29 = 21 \end{aligned}$$

Ci si può aspettare che nuove imprese entrino nel mercato poiché le imprese già presenti realizzano profitti economici positivi.

c) il prezzo e la quantità di equilibrio e il numero delle imprese operanti nel mercato nel lungo periodo.

Nuove imprese decideranno di entrare sul mercato finché i profitti non si annulleranno, ovvero finché il prezzo non sarà uguale al costo medio minimo di lungo periodo.

$$CT = q^2 + 4 \Rightarrow CMT = \frac{CT}{q} = \frac{q^2 + 4}{q} = q + \frac{4}{q}$$

$$P = C' = CMT$$

$$C' = CMT \Rightarrow 2q = q + \frac{4}{q} \Rightarrow \frac{q^2 + 4 - 2q^2}{q} = 0 \Rightarrow -q^2 + 4 = 0$$

$$q^2 = 4 \Rightarrow q^* = 2$$

$$P^* = C' = 2q = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{In equilibrium } Q^D = Q^O$$

$$Q^D = 300 - 5 \cdot p = 300 - 5 \cdot 4 = 300 - 20 = 280$$

$$Q^O = n \cdot q_i = 2n$$

$$Q^D = Q^O \Rightarrow 280 = n \cdot 2 \Rightarrow n = \frac{280}{2} = 140$$

Esercizio n. 4

Un monopolista massimizza il suo profitto producendo la quantità $Q^* = 4$ se la curva di domanda del mercato è $P = 10 - Q$.

- 1) Determinate il costo marginale del monopolista e l'elasticità della domanda rispetto al prezzo in corrispondenza della quantità e del prezzo di monopolio. Calcolare il mark-up.

condizione di massimizzazione del profitto $\Rightarrow C' = R'$

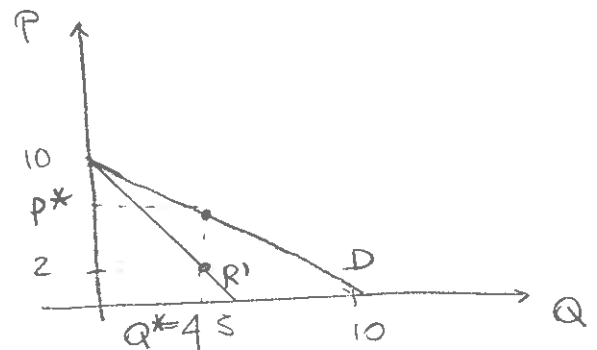
$$RT = P \cdot Q = (10 - Q)Q = 10Q - Q^2$$

$$R' = \frac{dRT}{dQ} = 10 - 2Q$$

$$R'(Q^*) = 10 - 2 \cdot 4 = 10 - 8 = 2$$

$$R' = C' \Rightarrow C' = 2$$

$$P^* = 10 - Q^* = 10 - 4 = 6$$



elasticità della domanda rispetto al prezzo :

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%P} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = (-1) \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\begin{aligned} P &= 10 - Q \\ Q &= 10 - P \\ \frac{dQ}{dP} &= -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_d = (-1) \cdot \frac{P^*}{Q^*} = (-1) \cdot \frac{6}{4} = -1,5$$

Mark-up:

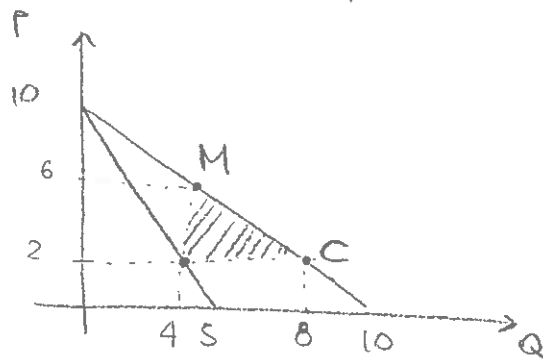
$$R' = P \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_d} \right)$$

$$R' = C' \Rightarrow P \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_d} \right) = C' \Rightarrow P = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_d}} \right) C'$$

← mark-up

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{-1,5}} = 3$$

2) Sfruttando che il costo marginale sia costante e pari a quello calcolato nel punto precedente, qual è la perdita netta di monopolio?



In concorrenza perfetta $P = C'$
 $P^* = 2 \Rightarrow Q^* = 10 - P^* = 8$

C: equilibrio in concorrenza

M: equilibrio in monopolio

$$\text{perdita di surplus} = \frac{(8-4) \cdot (6-2)}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$