

# ESERCIZI (CAPITOLIO 7 - APPENDICE)

Es. n. 2 5/04

La funzione di produzione per un prodotto è data da  $q = 100KL$ . Se il prezzo del capitale è €120 al giorno e il prezzo del lavoro è €30 al giorno, qual è il costo minimo per produrre 1000 unità?

$$\min_{L, K} C = wL + rK$$
$$F(K, L) = q_0$$

$$\Rightarrow \min C = 30L + 120K$$
$$100KL = 1000$$

saggio marginale  
di sostituzione  
tecnica

$$\left\{ \begin{array}{l} SMST = \frac{P'_L}{P'_K} \\ F(K, L) = q_0 \end{array} \right.$$

$$C = wL + rK$$

$$rK = C - wL$$

$$K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r}L$$

$$SMST = -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{w}{r}$$

$$P'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 100K \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{100K}{100L}$$

$$P'_K = \frac{\partial q}{\partial K} = 100L$$

$$\frac{30}{120} = \frac{K}{L} \Rightarrow 30L = 120K$$
$$L = 4K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 4K \\ 100KL = 1000 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ 100K \cdot 4K = 1000 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ 4K^2 = 10 \end{array} \right.$$
$$K = \sqrt{\frac{10}{4}} = 1,58$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 4 \cdot 1,58 = 6,32 \\ K = 1,58 \end{array} \right.$$

Il costo totale è quindi

$$C = 30L + 120K$$
$$= 30 \cdot 6,32 + 120 \cdot 1,58 =$$
$$= 189,6 + 189,6 = 379,20 \text{ €}$$

#### Es. n. 4

Supponiamo che il processo di produrre impermeabili per un'impresa di abbigliamento sia descritto dalla funzione:

$$q = 10 K^{0,8} (L - 40)^{0,2}$$

dove  $q$  è il numero di impermeabili prodotti,  $K$  il numero di ore-macchina (macchine da cucire e controllo numerico) e  $L$  il numero di ore-persona di lavoro. Oltre a capitale e lavoro, la produzione di ogni maglione richiede €10 di materie prime.

- a) Minimizzando il costo soggetto alla funzione di produzione, ricavate la domanda di  $K$  e  $L$  che minimizza i costi come funzione della produzione ( $q$ ), del tasso di salario ( $w$ ) e del tasso di noleggio delle macchine ( $r$ ). Utilizzate i risultati per ricavare la funzione di costo totale, che esprime i costi come funzione di  $q$ ,  $r$ ,  $w$  e della costante di 10 € per unità di materia prima.

È data la funzione di produzione  $q = 10 K^{0,8} (L - 40)^{0,2}$

Sappiamo che il costo di produzione comprende, oltre al costo del capitale e a quello del lavoro, anche 10 € di materie prime per unità di prodotto. Pertanto la funzione del costo totale è data da:

$$CT(q) = wL + rK + 10q$$

problema: 
$$\min CT(q) = wL + rK + 10q$$
$$q = 10 K^{0,8} (L - 40)^{0,2}$$

Impostiamo la Lagrangiana:

$$\Phi = wL + rK + 10q - \lambda [10 K^{0,8} (L - 40)^{0,2} - q]$$

Differenziamo rispetto a  $K$ ,  $L$  e  $\lambda$  e uguagliamo le derivate a zero

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial K} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial K} = r - 10\lambda \cdot 0,8 \cdot K^{0,8-1} (L-40)^{0,2} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial L} = w - 10\lambda K^{0,8} \cdot 0,2 (L-40)^{0,2-1} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 10 K^{0,8} (L-40)^{0,2} - q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 10\lambda \cdot 0,8 K^{-0,2} (L-40)^{0,2} \\ w = 10\lambda K^{0,8} \cdot 0,2 (L-40)^{-0,8} \\ q = 10 K^{0,8} (L-40)^{0,2} \end{cases}$$

$$\frac{r}{w} = \frac{\cancel{10\lambda} \cancel{0,8} K^{-0,2} (L-40)^{0,2}}{\cancel{10\lambda} K^{0,8} \cancel{0,2} (L-40)^{-0,8}} = \frac{4(L-40)}{K} \Leftrightarrow$$

$$r \cdot K = w \cdot 4(L-40) \Leftrightarrow K = \frac{4w(L-40)}{r}$$

$$L-40 = \frac{rK}{4w}$$

Sostituiamo nella 3ª:

$$q = 10 \left( \frac{4w(L-40)}{r} \right)^{0,8} (L-40)^{0,2}$$

$$q = 10 \left( \frac{4w}{r} \right)^{0,8} (L-40)^{0,8} (L-40)^{0,2}$$

$$q = 10 \left( \frac{4w}{r} \right)^{0,8} (L-40) \xrightarrow{\text{vedi altro foglio}}$$

$$L-40 = \frac{q}{10} \frac{r^{0,8}}{(4w)^{0,8}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{r^{0,8} \cdot q}{30,3 w^{0,8}} + 40}$$

$$q = 10 K^{0,8} \left( \frac{rK}{4w} \right)^{0,2} \Rightarrow q = \frac{10 K^{0,8} \cdot r^{0,2} K^{0,2}}{4^{0,2} w^{0,2}} \Rightarrow q = \frac{10}{4^{0,2}} \cdot K \cdot \frac{r^{0,2}}{w^{0,2}}$$

$$K = q \cdot \frac{4^{0,2}}{10} \cdot \frac{w^{0,2}}{r^{0,2}} \Rightarrow \boxed{K = 0,13 \frac{w^{0,2} \cdot q}{r^{0,2}}}$$

La funzione del costo totale in termini di  $r$ ,  $w$ , e  $q$  sarà quindi:

$$CT(q) = wL + rK + 10q$$

$$CT(q) = w \left( \frac{r^{0,8} \cdot q}{30,3 w^{0,8}} + 40 \right) + r \cdot 0,13 \frac{w^{0,2} \cdot q}{r^{0,2}} + 10q$$

$$= \frac{(w) r^{0,8} \cdot q}{30,3 (w^{0,8})} + 40w + 0,13 \frac{w^{0,2} q}{(r^{0,2})} (r) + 10q$$

$$= \frac{w^{0,2} r^{0,8} q}{30,3} + 40w + ~~0,13~~ \frac{r^{0,8} w^{0,2} q}{7,6} + 10q$$

b) Questo processo richiede lavoratori esperti, che guadagnano 32€ l'ora. Il tasso di noleggio per le macchine usate nel processo è di 64€ l'ora. Con questi prezzi dei fattori produttivi, quali sono i costi totali in funzione di  $q$ ? Questa tecnologia presenta rendimenti di scala decrescenti, costanti o crescenti?

$$w = 32 ; r = 64 \Rightarrow CT(q) = \frac{2 \cdot 27,86 \cdot q}{30,3} + 1280 + 0,13 \cdot 27,86 \cdot 2 \cdot q + 10q$$

$$CT(q) = 1,85q + 1280 + 7,34q + 10q$$

$$CT(q) = 19,2q + 1280$$

La funzione di costo medio è data da:

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q} = 19,2 + \frac{1280}{q}$$

quindi decresce al crescere della produzione.

$$q = 10 K^{0,8} \left( \frac{rK}{4w} \right)^{0,2} = 10 K^{0,8} \left( \frac{r}{4w} \right)^{0,2} K^{0,2} = 10 K \left( \frac{r}{4w} \right)^{0,2}$$

$$K = \frac{q}{10 \left( \frac{r}{4w} \right)^{0,2}} = \frac{q}{\frac{10}{4^{0,2}} \left( \frac{r}{w} \right)^{0,2}} = \frac{q w^{0,2}}{7,58 r^{0,2}}$$

$$K = \frac{q w^{0,2}}{7,6 r^{0,2}}$$

$$L = 40 + \frac{rK}{4w} = 40 + \frac{r}{4w} \cdot \frac{q w^{0,2}}{7,6 r^{0,2}} =$$

$$L = 40 + \frac{r^{0,8} \cdot q}{30,4 w^{0,8}}$$



⌋ Data la funzione di produzione  $q = F(L, K)$  e la costante positiva  $t$  si avranno:

Rendimenti di scala costanti se  $F(tL, tK) = t F(L, K)$

Rendimenti di scala decrescenti se  $F(tL, tK) < t F(L, K)$

Rendimenti di scala crescenti se  $F(tL, tK) > t F(L, K)$

⌋ i rendimenti di scala

Per individuare, scegliamo una combinazione di fattori produttivi e troviamo il livello di produzione; poi ad es. raddoppiamo le quantità dei fattori e confrontiamo il nuovo livello di produzione con il precedente.

Es.  $K = 50 \quad L = 60 \Rightarrow q_1 = 10 \cdot (50)^{0,8} (60-40)^{0,2} =$   
 $= 10 \cdot 22,87 \cdot 1,82 = 416,3$

raddoppiamo

$$K = 100 \quad L = 120 \Rightarrow q_2 = 10 \cdot (100)^{0,8} (120-40)^{0,2} = 956,4$$

$$q_2 = F(2L, 2K) > 2q_1 = 2F(L, K)$$

$\Rightarrow$  i rendimenti di scala sono crescenti

c) L'impresa pianifica la produzione di 2000 impermeabili la settimana. Con i prezzi dei fattori produttivi dati in precedenza, quanti lavoratori dovrebbe assumere (con orario di 40 ore settimanali) e quante macchine dovrebbe affittare (a 40 ore-macchina la settimana)? Quali sono i costi marginale e medio a questo livello di produzione?

So che  $q = 2000$ ,  $r = 64$ ,  $w = 32$

$$\Rightarrow L = \frac{(64)^{0,8} \cdot 2000}{30 \cdot 3 \cdot 32^{0,8}} + 40 = 154,9$$

$$K = 0,13 \frac{32^{0,2} \cdot 2000}{64^{0,2}} = 229,1$$

non possiamo assumere frazioni di lavoratori e di macchine

Assumendo che la settimana lavorativa sia di 40 ore

$$L = \frac{154,9}{40} = 3,87 \text{ lavoratori a settimana} \Rightarrow 4 \text{ lavoratori}$$

$$K = \frac{229,1}{40} = 5,73 \text{ macchine a settimana} \Rightarrow 6 \text{ macchine} \quad (5)$$

Le funzioni del costo totale e del costo medio sono:

$$CT(q) = 19,2 q + 1280$$

$$CM(q) = 19,2 + \frac{1280}{q}$$

quindi la funzione del costo marginale è:

$$C'(q) = \frac{dCT(q)}{dq} = 19,2$$

I costi marginali sono costanti e pari a € 19,2 per impermeabile.

I costi medi sono pari a:

$$CM(2000) = 19,2 + \frac{1280}{2000} = 19,84 \text{ per impermeabile.}$$



Es.

Si consideri la funzione di produzione  $q = L^{1/3} K^{2/3}$ ; siano inoltre  $C=40$  le risorse finanziarie a disposizione del produttore,  $w=2$  e  $r=4$  rispettivamente la remunerazione unitaria del lavoro e quella del capitale. Si vuole determinare la combinazione ottimale dei fattori produttivi nel lungo periodo.

$$\begin{aligned} \max \quad & q = F(L, K) \\ C = & wL + rK \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{SMST}(L, K) = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{w}{r} \\ C = wL + rK \end{cases}$$

$$\max \quad q = L^{1/3} K^{2/3}$$

$$40 = 2L + 4K$$

$$\frac{P'_L}{P'_K} = \frac{\frac{1}{3} L^{-2/3} K^{2/3}}{\frac{2}{3} L^{1/3} K^{-1/3}} = \frac{1}{2} L^{-2/3-1/3} K^{2/3+1/3} = \frac{1}{2} L^{-1} K = \frac{K}{2L}$$

$$\begin{cases} \frac{K}{2L} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{K}{2L} = \frac{1}{2} \\ 40 = 2L + 4K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2K = 2L \Rightarrow K = L \\ 40 = 2L + 4L \\ 40 = 6L \Rightarrow L = \frac{40}{6} = 6,6 \end{cases}$$

$$L^* = K^* = \frac{20}{3} = 6,67$$

Es. 5/4

Sia la tecnologia di una impresa rappresentata dalla seguente funzione di produzione  $q = L^{1/2} K^{1/2}$ .

Nell'ipotesi di breve periodo con  $K_B = 4$  si vuole determinare la combinazione ottimale dei fattori produttivi sapendo che l'impresa intende produrre  $q = 50$ .

La funzione di produzione di breve periodo diventa:

$$q = L^{1/2} (4)^{1/2} = 2 L^{1/2}$$

$$q = 50 \Rightarrow 50 = 2 L^{1/2} \Rightarrow L^{1/2} = 25 \Rightarrow L^* = 25^2 = 625$$

Es. 5/4

Sia la tecnologia di una impresa rappresentata dalla seguente funzione di produzione:  $q = L^{1/2} K^{1/2}$ .

Nell'ipotesi di lungo periodo, si vuole determinare la funzione del costo totale di produzione, sapendo che la remunerazione unitaria del lavoro è data da  $w = 4$  e la remunerazione unitaria del capitale è data da  $r = 16$ .

$$\begin{cases} \text{SMST} = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{w}{r} \\ q = L^{1/2} K^{1/2} \\ C = wL + rK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} L^{-1/2} K^{1/2}}{\frac{1}{2} L^{1/2} K^{-1/2}} = \frac{w}{r} \\ q = L^{1/2} K^{1/2} \\ C = 4L + 16K \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{16} \\ q = L^{1/2} K^{1/2} \\ C = 4L + 16K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4K = L \Leftrightarrow K = \frac{1}{4}L \\ q = L^{1/2} \left(\frac{1}{4}L\right)^{1/2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}L \Rightarrow L = 2q \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = \frac{1}{4}L = \frac{1}{4}2q = \frac{1}{2}q \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2}q \\ L = 2q \\ C = 4(2q) + 16(\frac{1}{2}q) \Rightarrow C = 8q + 8q = 16q \end{cases}$$

$\Rightarrow$  funzione del costo totale:  $C = 16q$

Il costo medio totale  $CMT(q) = \frac{C}{q} = \frac{16q}{q} = 16$

Il costo marginale è  $C' = \frac{dC}{dq} = 16$



# Es. n.1 (APPENDICE CAP. 7)

Delle seguenti funzioni di produzione, quali presentano rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti?

2)  $F(K, L) = K^2 L$

$$\begin{array}{l} \boxed{t > 1} \\ \downarrow \\ \begin{array}{l} \text{Se } F(tK, tL) > t F(K, L) \Rightarrow \text{rendimenti di scala CRESCENTI} \\ F(tK, tL) = t F(K, L) \Rightarrow \text{" " COSTANTI} \\ \uparrow F(tK, tL) < t F(K, L) \Rightarrow \text{" " DECRESCENTI} \end{array} \end{array}$$

$$F(tK, tL) = (tK)^2 (tL) = t^2 K^2 tL = t^3 K^2 L = t^3 F(K, L)$$

$$F(tK, tL) = t^3 F(K, L) > t F(K, L)$$

$\Rightarrow$  funzione di produzione con rendimenti di scala crescenti

$\downarrow$

funzione di produzione Cobb-Douglas :  $F(K, L) = A K^a L^b$

Il tipo di rendimenti di scala di questa funzione dipende dalla grandezza di  $(a+b)$ .

$$\begin{aligned} F(tK, tL) &= A (tK)^a (tL)^b = A t^a K^a t^b L^b = t^{a+b} A K^a L^b \\ &= t^{a+b} F(K, L) \end{aligned}$$

$$F(tK, tL) = t^{a+b} F(K, L) \quad ? \quad t F(K, L)$$

$$= \quad \text{se } a+b = 1 \quad (\text{Rend. scala COSTANTI})$$

$$> \quad \text{se } a+b > 1 \quad (\text{Rend. scala CRESCENTI})$$

$$< \quad \text{se } a+b < 1 \quad (\text{Rend. scala DECRESCENTI})$$

$\uparrow$

b)  $F(K, L) = 10K + 5L$

$$F(tK, tL) = 10tK + 5tL = t(10K + 5L) = tF(K, L)$$

$\Rightarrow$  rendimenti di scala costanti

c)  $F(K, L) = (KL)^{0,5} = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$

$$0,5 + 0,5 = 1 \Rightarrow \text{rendimenti di scala costanti}$$