

CAPITOLO 2

RICHIAMI SUI PRINCIPI FONDAMENTALI DELLA FLUIDODINAMICA ED ACCENNI AI PRINCIPALI METODI DI SOLUZIONE IN AMBIENTE NAVALE/OFFSHORE PER IL CALCOLO DEI CARICHI D'ONDA IN REGIME DI RADIAZIONE/DIFFRAZIONE D'ONDA

2.1 - INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno ripresi i principi base che costituiscono i fondamenti della fluidodinamica, già visti nel Corso di Architettura Navale I (Idrodinamica) a cui si rimanda. Si tratta di *principi* nel senso che le leggi che li traducono in espressioni matematiche, non possono essere derivate attraverso una dimostrazione. Formulati ormai secoli fa, trovano continua conferma nella esperienza della comunità scientifica. Questi principi sono formulati in un senso del tutto generale, cioè valgono sia per i fluidi che per i solidi, ed esprimono la relazione matematica tra alcune quantità fondamentali (massa, spazio, tempo). L'esistenza di tali principi e la conferma continua della loro validità non ci garantisce tuttavia la comprensione di tutti i fenomeni e la soluzione delle equazioni associate non è sempre ottenibile, salvo fare alcune semplificazioni.

La scelta di riproporli in questa sede nasce dall'esigenza di dare risalto e giustificazione ai modelli matematici e schemi numerici che si usano in ambito ingegneristico/applicativo per la previsione delle forze idrodinamiche indotte dalle onde e dalla corrente su strutture marine, interpretando tali modelli alla luce delle equazioni generali che regolano il comportamento di un fluido e non come casi separati, con chissà quali presupposti alla loro base.

2.2 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Partendo dall'ipotesi di fluido continuo, cioè che la velocità e la densità possono essere definiti ovunque, tale principio dice che *la variazione nel tempo della massa M contenuta in una regione materiale MR dello spazio ben definita è nulla*. Una regione materiale è una zona costituita da fluido e si muove con la velocità del fluido stesso.

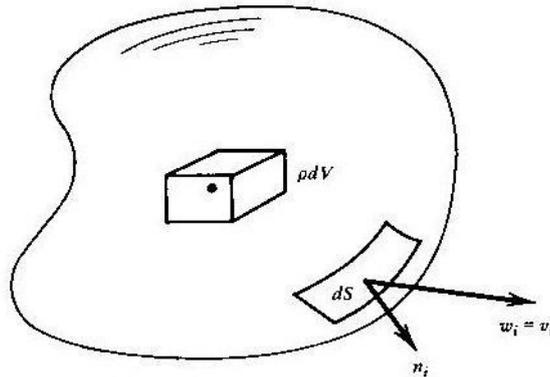


Fig. 2.2.1

Dal punto di vista matematico questo principio si traduce in

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{MR} \rho dV = 0} \quad (2.2.1)$$

e dopo alcune manipolazioni attraverso i Teoremi di Leibniz e di Gauss si giunge alla espressione del Principio di conservazione della massa in forma integrale.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{MR} \rho dV = \int_{MR} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = \int_{MR} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right] dV = 0} \quad (2.2.2)$$

D'altra parte affinché questa equazione sia valida per ogni MR , deve essere che l'integrando sia *sempre identicamente nullo*.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (2.2.3)$$

o anche

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \sum_j \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\vec{v}) = 0} \quad (2.2.4)$$

Le equazioni ottenute sono equazioni differenziali alle derivate parziali ed esprimono il Principio di conservazione della massa in forma differenziale.

Se il fluido è incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$), queste equazioni si semplificano in

$$\boxed{\nabla \cdot (\vec{v}) = 0} \text{ o anche } \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad (2.2.5)$$

Nel caso in cui si assuma l'ipotesi di irrotazionalità del flusso e cioè che

$$\text{rot } \vec{V} = 0 \quad (2.2.6)$$

allora si può introdurre lo scalare $\phi(x, y, z, t)$ detto *potenziale di velocità* tale che il suo gradiente dia il vettore velocità del flusso come segue (in coordinate cartesiane)

$$\vec{V} = (u, v, w) = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (2.2.7)$$

In coordinate cartesiane, sostituendo le espressioni appena riportate nell'equazione di continuità per fluidi incompressibili, quest'ultima diventa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0} \quad (2.2.8)$$

o in forma compatta

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad (2.2.9)$$

L'equazione ottenuta è detta *equazione di Laplace* e rappresenta l'equazione di continuità per fluidi non viscosi incompressibili. Si tratta di una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine, per cui se $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ sono funzioni che la soddisfano vale anche che una qualsiasi

combinazione lineare delle funzioni $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ è ancora soluzione della equazione di Laplace. Come si vedrà, questa importante proprietà di linearità, ci consente di costruire dei flussi attorno a geometrie interessanti dal punto di vista ingegneristico sovrapponendo (sommando algebricamente) soluzioni elementari della equazione di Laplace, ad es. quella molto interessante nel contesto di questo Corso delle onde di piccola ampiezza, oppure sorgenti di Rankine per descrivere flussi anche non stazionari attorno a strutture marine (problema della radiazione e diffrazione d'onda).

2.3 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

La conservazione della quantità di moto per un continuo è l'analogo della seconda legge di Newton applicata ad una massa puntiforme. Tale principio dice che *la variazione nel tempo della quantità di moto di una regione materiale MR è pari alla sommatoria delle forze agenti su MR*.

Anche in questo caso, dopo alcune manipolazioni attraverso i Teoremi di Leibniz e di Gauss si giunge alla espressione

$$\int_{MR} \rho \left[\frac{\partial(v_i)}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i) \right] dV = \int_{MR} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_{MR} \rho F_i dV + \int_{S_{MR}} R_i dS, \quad i=1,3 \quad (2.3.1)$$

avendo indicato le *i-esime* componenti cartesiane, o anche, in forma vettoriale compatta

$$\int_{MR} \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right] dV = \int_{MR} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dV = \int_{MR} \rho \vec{F} dV + \int_{S_{MR}} \vec{R} dS \quad (2.3.2)$$

dove \vec{F} ed \vec{R} rappresentano le *forze di volume* \vec{F} e di *superficie* \vec{R} .

Si può dimostrare che le forze di superficie \vec{R} sono esprimibili attraverso un tensore degli sforzi come segue $\vec{R} = \vec{n} \cdot \mathbf{T}$ dove la generica componente cartesiana del vettore \vec{R} è data da

$$R_i = \sum_j n_j R_{ji} = n_1 R_{11} + n_2 R_{21} + n_3 R_{31}$$

$$\int_{MR} \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho v_i) v_j] \right] dV = \int_{MR} \rho F_i dV + \int_{S_{MR}} \sum_j n_j R_{ji} dS, \quad i=1,3 \quad (2.3.3)$$

ed utilizzando il Teorema di Gauss per trasformare l'integrale di superficie in uno di volume

$$\int_{MR} \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho v_i)v_j] \right] dV = \int_{MR} \rho F_i dV + \int_{MR} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ji} dV, \quad i=1,3 \quad (2.3.4)$$

Dunque

$$\int_{MR} \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho v_i)v_j] - \rho F_i - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ji} \right] dV = 0, \quad i=1,3 \quad (2.3.5)$$

Analogamente a quanto detto per la conservazione della massa, se questa equazione deve risultare valida in ogni istante di tempo e per ogni regione materiale MR scelta arbitrariamente, l'integrando deve essere *sempre identicamente nullo*:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho v_i)v_j] - \rho F_i - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ji} = 0, \quad i=1,3} \quad (2.3.6)$$

Nel caso di fluidi newtoniani, i ricercatori hanno proposto la seguente formulazione per il tensore di tensione

$$R_{ji} = \begin{cases} -p + 2\mu \left[-\frac{1}{3} \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right] = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, & i=j \\ \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), & i \neq j \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Dalla sua sostituzione e dopo opportune semplificazioni nel caso di fluido incompressibile, si ottiene la terna di equazioni che rappresentano il Principio di conservazione della quantità di moto in forma differenziale per un fluido newtoniano ed incompressibile.

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu [\nabla \cdot \nabla \vec{v}]} \quad (2.3.8)$$

Queste equazioni sono dette anche Equazioni di Navier-Stokes.

Nell'ipotesi di trascurare gli effetti viscosi $\mu = 0$ e che il campo di forze di volume corrisponda al campo gravitazionale $\vec{F} = (0, 0, -g)$ e poiché $\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} = \vec{k}$, le equazioni assumono la seguente espressione

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\rho g \nabla z - \nabla p \quad (2.3.9)$$

Tali equazioni (dette di Eulero) sono integrabili nei due casi seguenti:

- 1) flusso stazionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; in questo caso le equazioni sono integrabili lungo linee di corrente e forniscono la ben nota eq. di Bernoulli

$$\frac{p_B - p_A}{\rho} + g(z_B - z_A) + \frac{(V_B^2 - V_A^2)}{2} = 0 \quad (2.3.10)$$

dove A e B sono due punti qualsiasi appartenenti alla stessa linea di corrente;

- 2) flusso non stazionario ma irrotazionale $rot \vec{V} = 0$; in questo caso è possibile definire un potenziale $\phi(x, y, z, t)$ tale che $\vec{V} = (u, v, w) = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$ e allora le equazioni di Eulero sono integrabili con il seguente risultato

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.3.11)$$

Il risultato fondamentale che emerge da queste due derivazioni di Bernoulli (fluido non viscoso!!!) è il seguente:

- 1) nel caso di flusso stazionario, se un oggetto è completamente immerso in un fluido (significa molto distante dalla eventuale superficie libera), la forza di pressione che il fluido esercita sull'oggetto è sempre nulla (Paradosso di D'Alambert); in questo caso a poppa si ha il totale recupero della pressione;

- 2) sempre nel caso di flusso stazionario, se un oggetto NON è completamente immerso nel fluido o è sufficientemente vicino alla superficie libera, la forza di pressione che il fluido esercita sull'oggetto NON è nulla a causa della generazione di onde da parte dell'oggetto; tale generazione è direttamente correlata ad una distorsione del campo di pressione rispetto al caso di oggetto completamente immerso; tale distorsione implica il mancato recupero di pressione a poppa da cui discende una resistenza al moto che prende il nome di "resistenza d'onda";
- 3) nel caso di flusso incidente NON stazionario o di oggetto in movimento non stazionario (con accelerazione NON nulla), la forza di pressione che il fluido esercita sull'oggetto è in generale NON nulla;
- 4) nel caso in cui l'oggetto sia completamente immerso, fermo e investito da una corrente non stazionaria in direzione x , si può dimostrare che la forza è data da

$$\boxed{R_x(t) = \rho \cdot C_m \cdot \nabla \cdot \frac{\partial U}{\partial t}} \quad (2.3.12)$$

dove $\frac{\partial U}{\partial t}$ è l'accelerazione istantanea del flusso indisturbato, ∇ è il volume (in 3D) oppure l'area (in 2D) dell'oggetto e C_m è un coefficiente (detto *coefficiente di inerzia*) che dipende dalla geometria dell'oggetto stesso (ad es. per il cerchio vale 2);

- 5) nel caso in cui l'oggetto sia parzialmente immerso, fermo e investito da una corrente non stazionaria in direzione x , si può dimostrare che la forza è data da

$$\boxed{R_x(t) = F_{0,dUdt} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + F_{0,U} \cdot U} \quad (2.3.13)$$

dove $\frac{\partial U}{\partial t}$ e U sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità istantanee del flusso indisturbato, $F_{0,dUdt}$ e $F_{0,U}$ sono due coefficienti rappresentativi della ampiezza della forza in fase con la accelerazione e con la velocità rispettivamente;

- 6) nel caso nel caso in cui l'oggetto sia completamente immerso ed in movimento in direzione x non stazionario in un fluido in quiete, si può dimostrare che la forza che il fluido esercita sull'oggetto è data da

$$\boxed{R_x(t) = -\rho \cdot C_a \cdot \nabla \cdot \frac{\partial U}{\partial t}} \quad (2.3.14)$$

dove $\frac{\partial U}{\partial t}$ è l'accelerazione istantanea dell'oggetto, ∇ è il volume (in 3D) oppure l'area (in 2D) dell'oggetto e C_a è un coefficiente (detto *coefficiente di massa aggiunta*) che dipende dalla geometria dell'oggetto stesso (ad es. per il cerchio vale 1); $\rho \cdot C_a \cdot \nabla$ è detta *massa aggiunta (added mass) M_{add}* ;

- 7) nel caso in cui l'oggetto sia parzialmente immerso ed in movimento in direzione x non stazionario in un fluido in quiete, si può dimostrare che la forza che il fluido esercita sull'oggetto è data da

$$\boxed{R_x(t) = -M_{add} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - D \cdot U} \quad (2.3.15)$$

dove $\frac{\partial U}{\partial t}$ è l'accelerazione istantanea dell'oggetto, U è la velocità istantanea dell'oggetto, M_{add} è il termine che ha le dimensioni di una massa (detta *added mass*) e D è un coefficiente che ha le dimensioni di un termine di smorzamento (detto *wave damping*); entrambi i coefficienti dipendono dalla geometria dell'oggetto stesso e, nel caso di moto armonico, dipendono dalla frequenza del moto stesso.

Il caso del flusso piano non stazionario attorno ad un cerchio

Un cerchio di raggio R è investito da una corrente parallela all'asse x e di intensità U (Fig. 2.3.1). L'intensità del flusso incidente è in questo caso dipendente dal tempo secondo la legge $U(t)$.

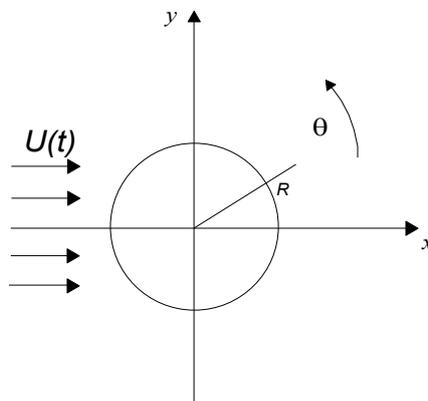


Fig. 2.3.1

Il flusso complessivo che nasce dall'interazione tra il flusso piano e il cilindro è dato ancora dalle espressioni che seguono, con la particolarità che ora il valore di U è dipendente dal tempo

$$\begin{aligned} \phi(r, \vartheta, t) &= U(t)r \cos(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \\ V_r(r, \vartheta, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = U(t) \cos(\vartheta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ V_\vartheta(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = -U(t) \sin(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Istante per istante, il flusso è rappresentato dalle linee di corrente indicate in Fig. 2.3.2, fintanto che il flusso è diretto da sinistra a destra, poi la situazione è invertita:

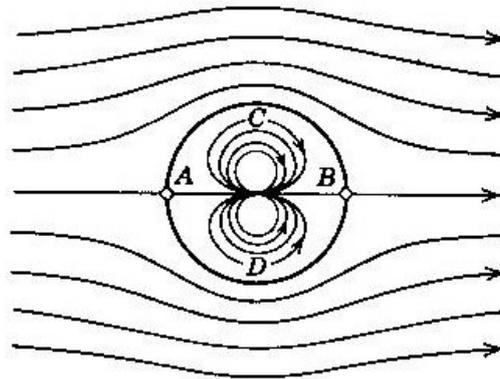


Fig. 2.3.2

Andiamo a calcolare la pressione. Per semplicità eliminiamo il termine gravitazionale gz che, essendo statico, non dà contributo dinamico (la trattazione risulterebbe uguale conservandolo).

$$p(r, \vartheta, t) = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 - C(t) \right\} \quad (2.3.17)$$

dove in questo caso piano 2D la velocità è data dalla componente radiale e da quella circonferenziale $V^2 = V_r^2 + V_\vartheta^2$. Dunque

$$p(r, \vartheta, t) = -\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} r \cos(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} (V_r^2 + V_\vartheta^2) - C(t) \right\} \quad (2.3.18)$$

Sostituendo e valutando la pressione sul mantello del cerchio dato dalla equazione $r=R$ otteniamo

$$p(r, \vartheta, t) = -\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) + \frac{1}{2} (2U(t) \sin(\vartheta))^2 - C(t) \right\} \quad (2.3.19)$$

Calcoliamo la forza R_x in linea con la direzione \vec{i} del flusso incidente.

$$R_x(t) = \int_{\text{Circonferenza}} -p \vec{n} \cdot \vec{i} ds \quad (2.3.20)$$

dove \vec{n} è il versore normale esterno al cerchio, $\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos(\vartheta)$, $ds = R \cdot d\vartheta$.

Allora

$$R_x(t) = \int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) + \frac{1}{2} (2U(t) \sin(\vartheta))^2 - C(t) \right) \cos(\vartheta) R d\vartheta \quad (2.3.21)$$

Si può dimostrare attraverso gli integrali di funzioni trigonometriche che i termini che seguono sono identicamente nulli

$$\int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{1}{2} (2U(t) \sin(\vartheta))^2 \right) \cos(\vartheta) R d\vartheta = 0 \quad (2.3.22)$$

$$\int_0^{2\pi} \rho (-C(t)) \cos(\vartheta) R d\vartheta = 0 \quad (2.3.23)$$

e dunque ciò che resta è solamente

$$R_x(t) = \int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) \right) \cos(\vartheta) R d\vartheta \quad (2.3.24)$$

Questo integrale non è nullo e vale

$$\boxed{R_x(t) = \rho 2\pi R^2 \frac{\partial U}{\partial t}} \quad (2.3.25)$$

La resistenza istantanea $R_x(t)$ incontrata dal cerchio investito da una corrente omogenea di intensità dipendente da tempo è dunque non nulla ed è proporzionale alla densità ρ del fluido, all'area del cerchio πR^2 ed all'accelerazione istantanea del flusso indisturbato $\frac{\partial U}{\partial t}$.

In Fig. 2.3.3 è rappresentata una fotografia (istantanea) del campo di pressione dovuto al solo termine $p(r, \vartheta, t) = -\rho \left\{ \frac{1}{2} (2U(t) \sin(\vartheta))^2 \right\}$. Tale contributo, presente anche nel caso di flusso stazionario, non produce forza in direzione x, essendo completamente bilanciato prora-poppa. Nel caso del cerchio il bilanciamento è ben evidente anche per effetto della simmetria geometrica tuttavia anche per oggetti non simmetrici prora-poppa tale bilanciamento è verificato.

In Fig. 2.3.4 è invece rappresentata una fotografia (istantanea) del campo di pressione dovuto al solo termine $p(r, \vartheta, t) = -\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) \right\}$. Come si può vedere, la differenza sostanziale con il caso del flusso stazionario è che la simmetria “prora-poppa” delle pressioni è persa da cui la forza non è più nulla.

In Fig. 2.3.5 tratta da Sarpkaya and Isaacson, sono riportate le masse aggiunte relative ad alcune geometrie significative.

In Fig. 2.3.6 (alto) tratta da Vugts (1968) è riportata invece la massa aggiunta di un semicerchio che oscilla verticalmente in prossimità della superficie libera. La novità fondamentale risiede nel fatto che la presenza della superficie libera e quindi delle onde prodotte rende la massa aggiunta dipendente dalla frequenza della oscillazione.

In Fig. 2.3.7, sempre tratta da Vugts (1968) sono riportate le forze adimensionali orizzontale (alto) e verticale (basso) prodotte da onde incidenti (flusso alternato con oggetto fermo) su un semicerchio posizionato in prossimità della superficie libera. Come si vede anche in questo caso la forza è dipendente dalla frequenza dell'onda incidente stessa.

Di questi aspetti si discuterà ampiamente nel resto del Corso.

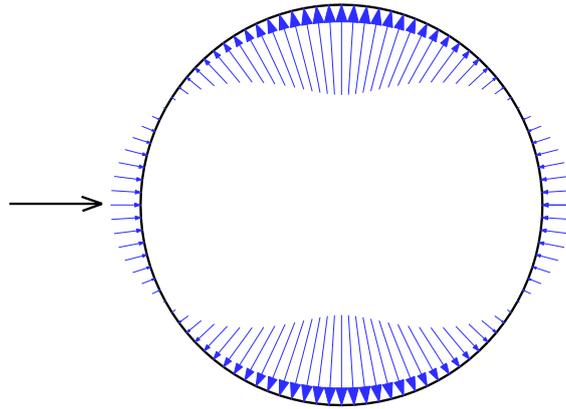


Fig. 2.3.3

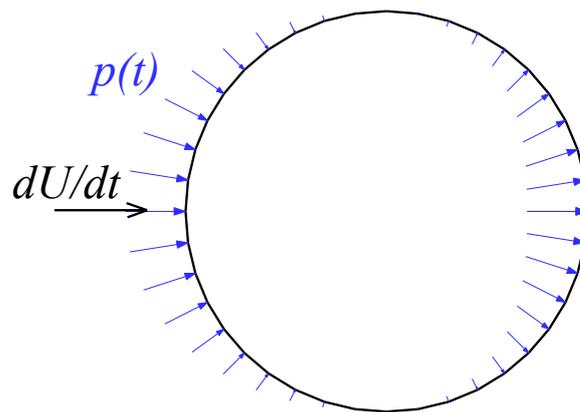


Fig. 2.3.4

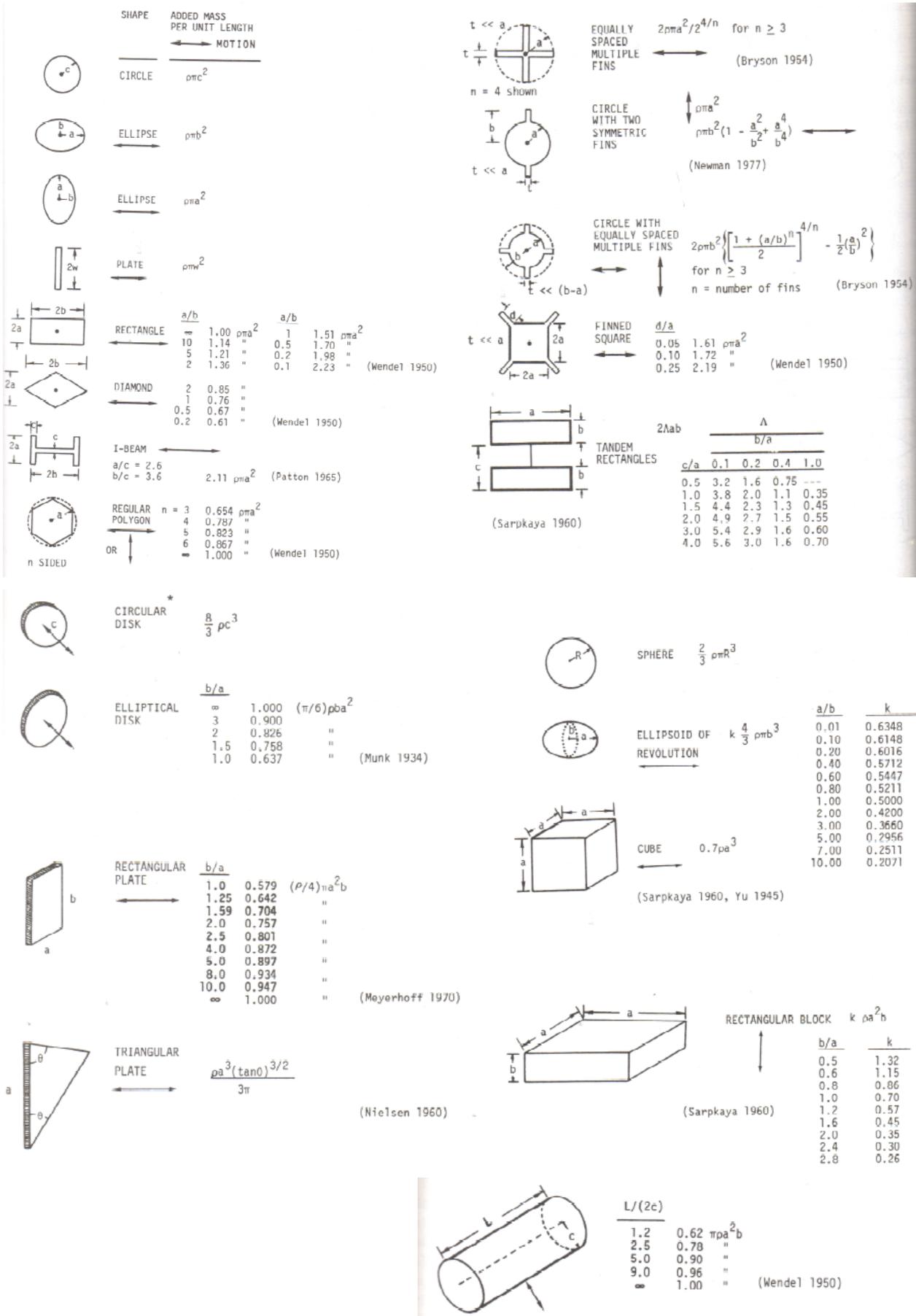


Fig. 2.3.5

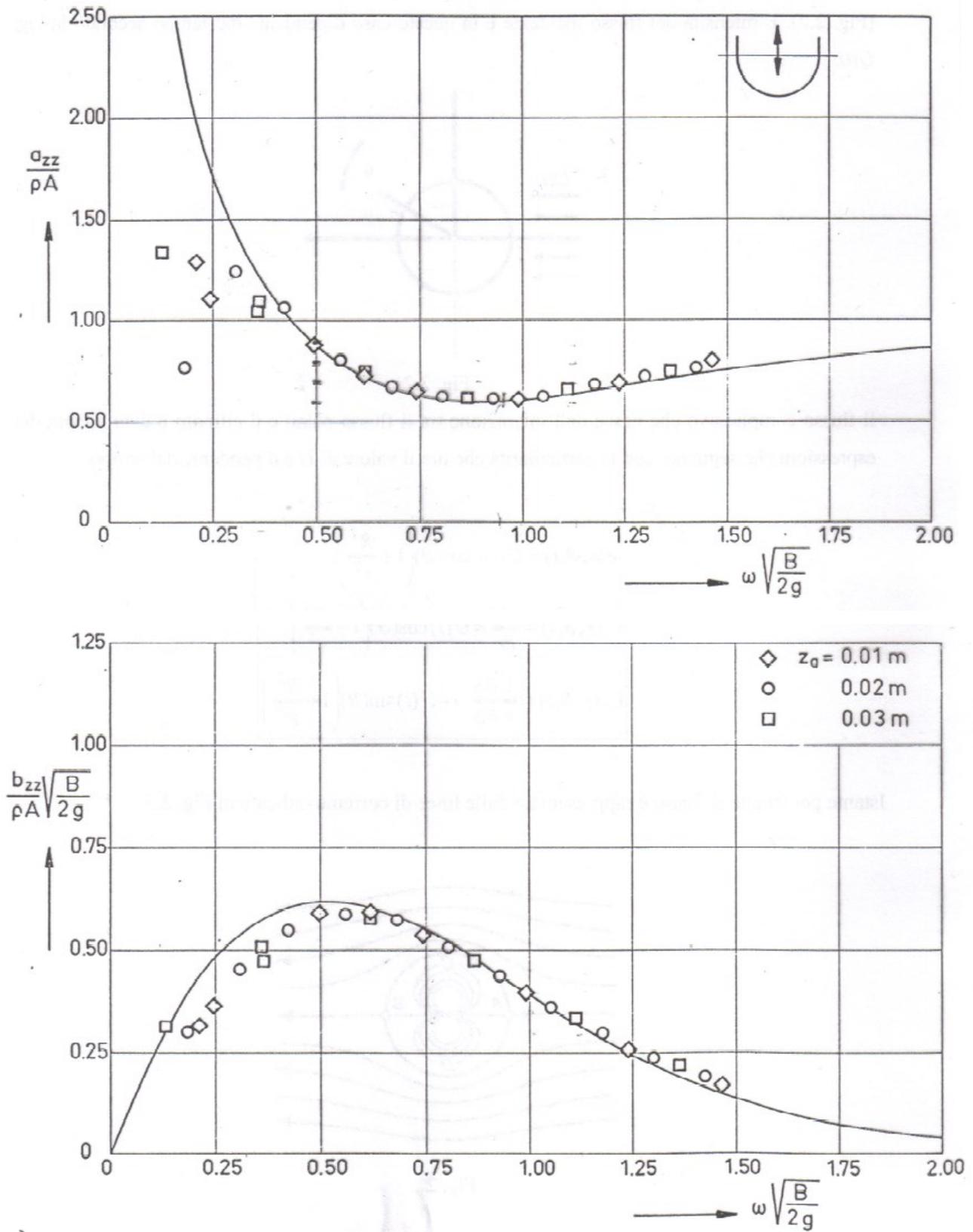


Fig. 2.3.6

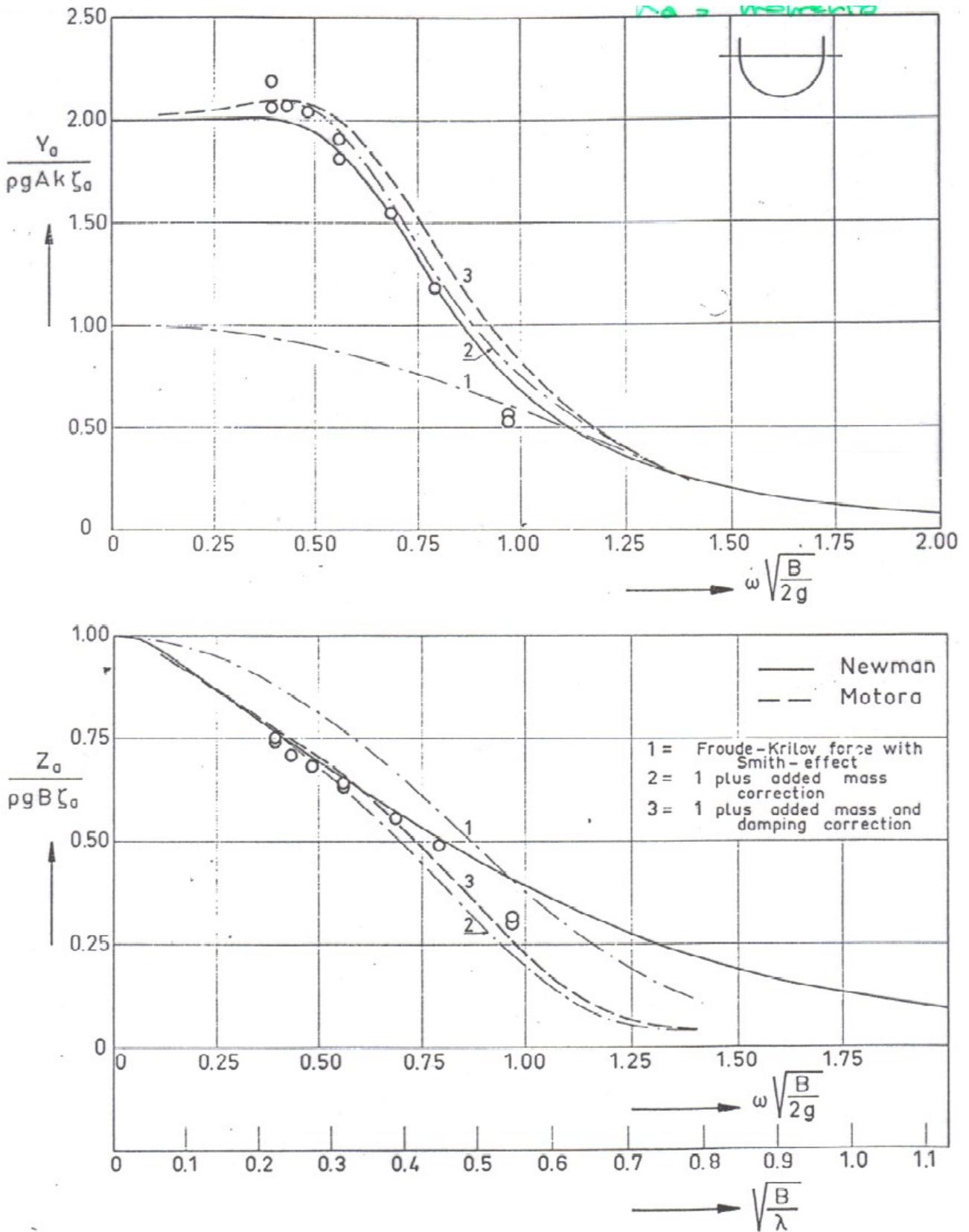


Fig. 2.3.7

2.4 MODELLI MATEMATICI E METODI NUMERICI IN USO NEI CALCOLI DI *SEAKEEPING & WAVE LOADS* PER LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO DEI FLUIDI ATTORNO A NAVI E/O STRUTTURE MARINE IN PRESENZA DI SUPERFICIE LIBERA

Le equazioni ottenute dai *Principi di conservazione della massa e della quantità di moto* sono le equazioni che descrivono il comportamento di un fluido viscoso newtoniano ed incompressibile e quindi valgono anche per il problema della interazione onde-struttura (*seakeeping & wave loads*). La loro soluzione risulta ancora particolarmente pesante dal punto di vista computazionale, anche utilizzando modelli di turbolenza che riducono significativamente l'onere computazionale per risolvere le strutture turbolente del flusso. Inoltre, nel caso di flussi dipendenti dal tempo (non stazionari) come nel caso delle onde e dei moti nave, il calcolo diventa ancora più oneroso. A causa delle prestazioni dei calcolatori, tale situazione era decisamente peggiore dieci anni fa.

E' per questo motivo che uno sforzo enorme è stato compiuto dagli studiosi soprattutto matematici per cercare una soluzione alternativa al problema, soluzione che al tempo stesso fosse ingegneristicamente utile e percorribile dal punto di vista del calcolo.

La soluzione è stata individuata nell'utilizzo (in certi casi) dell'ipotesi di fluido non viscoso. Come vedremo nel [Capitolo 7](#), tale metodo di operare, apparentemente grossolano, trova invece buona giustificazione nel fatto che l'interazione tra onde e una struttura di dimensioni grandi è dominata da effetti non viscosi (effetti inerziali, di diffrazione e radiazione d'onda). Per questi motivi fisici ed in virtù delle proprietà matematiche delle equazioni che governano il moto non stazionario di un fluido non viscoso, la trattazione matematica del problema idrodinamico e gli schemi numerici utilizzati per risolvere tali equazioni assumono una forma completamente diversa da quella tradizionale della Computational Fluid Dynamics (viscosa) al punto da far pensare (ingannevolmente) che si tratti di un altro problema fisico risolto poi con dei trucchi matematici.

Obiettivo di questo Paragrafo è pertanto quello di fornire una visione unificata del problema idrodinamico della interazione onde-struttura nei confronti dell'idrodinamica classica e di dare un senso fisico-matematico alle equazioni ed ai metodi numerici che si trovano nei "*Theory Manuals*" dei codici utilizzati poi quotidianamente nella progettazione di navi e strutture offshore (ad es. codice WADAM - WAve Diffraction And Morison; codice MOSES).

2.4.1 IL BOUNDARY ELEMENT METHOD (BEM) – METODO DIRETTO

Nelle ipotesi di fluido non viscoso si è visto che l'equazione di continuità può essere trasformata nella *equazione di Laplace* $\nabla^2\phi=0$ nel potenziale di velocità ϕ che vale su tutta la *regione materiale MR*.

Supponiamo di disporre di due funzioni ϕ, φ tali che $\nabla^2\phi=0$ e anche $\nabla^2\varphi=0$.

Scriviamo il flusso della seguente quantità vettoriale $[\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi]$ attraverso la superficie di *MR*:

$$\int_{S_{MR}} [\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi] \cdot \bar{n} dS \quad (2.4.1.1)$$

Il Teorema di Green o della Divergenza ci viene in aiuto dicendo che quell'integrale di superficie è uguale all'integrale sul volume *MR* della divergenza della stessa quantità vettoriale $[\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi]$

$$\int_{S_{MR}} [\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi] \cdot \bar{n} dS = \int_{MR} \nabla \cdot [\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi] dV \quad (2.4.1.2)$$

ma l'integrale di volume vale zero

$$\int_{MR} \nabla \cdot [\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi] dV = \int_{MR} [\phi\nabla^2\varphi + \nabla\varphi\nabla\phi - \varphi\nabla^2\phi - \nabla\varphi\nabla\phi] dV = 0 \quad (2.4.1.3)$$

e quindi

$$\int_{S_{MR}} [\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi] \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (2.4.1.4)$$

o anche

$$\boxed{\int_{S_{MR}} [\phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\phi] \cdot \bar{n} dS = \int_{S_{MR}} \left[\phi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] dS = 0} \quad (2.4.1.5)$$

Risolvere questa equazione integro-differenziale sulla sola superficie di *MR* rispetto a ϕ , utilizzando ad es. un pozzo/sorgente per la funzione φ (detta *Green function*), oppure risolvere

l'equazione differenziale di Laplace (continuità) rispetto a ϕ su MR è assolutamente equivalente. Il vantaggio risiede nel diverso onere computazionale.

Se ad es. discretizziamo una regione materiale MR cubica (per semplicità di ragionamento) in $N \times N \times N$ elementi volumici, il numero di incognite è dell'ordine di N^3 mentre sulle facce della superficie di MR il numero di incognite è $6 \times N^2$. All'aumentare di N il divario sul numero di incognite è evidente, a tutto vantaggio per il calcolo. Vi sono poi ulteriori proprietà di questa equazione integro-differenziale che la rendono ancor più "appetibile".

Senza entrare eccessivamente nei dettagli matematici, per i quali si rimanda ai testi specifici, si può dimostrare che in 3D, utilizzando su S_{MR} per la funzione di Green ϕ un pozzo/sorgente $\phi = 1/r$, l'equazione integro-differenziale diventa

$$\int_{S_{MR}} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS = -2\pi\phi \quad (2.4.1.6)$$

Tale equazione (detta Seconda Identità di Green) fornisce il potenziale ϕ (parte destra dell'eguaglianza) in un punto appartenente alla superficie S_{MR} . L'integrale nella parte sinistra è calcolabile anche se diventa singolare nel caso in cui $r \rightarrow 0$ e cioè quando l'integrale deve essere effettuato nell'intorno del punto P su S_{MR} . Si può però qui dimostrare che tali integrali sono calcolabili ed assumono valori finiti attraverso opportuni trattamenti delle singolarità.

ESEMPIO 2D: BEM di ordine zero – metodo diretto

Nel caso piano, il pozzo/sorgente è pari a $\phi = \log(r)$ e la Seconda Identità di Green diventa

$$\int_{S_{MR}} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} (\log(r)) - \log(r) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS = -\pi\phi \quad (2.4.1.7)$$

La superficie di integrazione in questo caso è una linea chiusa nel piano di lavoro.

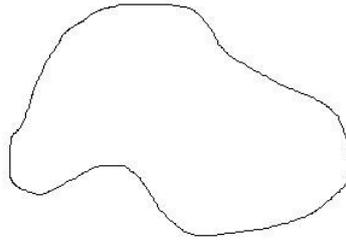


Fig. 2.4.1.1

Per eseguire l'integrale, bisogna stabilire il metodo di integrazione (Bezout, Simpson, ...) e quale è la rappresentazione matematica della superficie/linea. Il metodo più rudimentale è quello di suddividere la linea in N segmenti rettilinei e su ciascuno di questi segmenti valutare l'integrale (proprietà additiva dell'integrale).

Se indichiamo con "i" l'indice del segmento su cui si trova il punto P in cui vogliamo calcolare ϕ_i e se indichiamo con "j" l'indice del generico segmento su cui effettuiamo l'integrale, allora possiamo riscrivere la Seconda Identità di Green in questo modo:

$$\sum_{j=1}^N \int_{S_j} \left[\phi_j \frac{\partial}{\partial n} (\log(r_{ij})) - \log(r_{ij}) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS_j = -\pi \phi_i \quad (2.4.1.8)$$

dove S_j è la superficie del segmento j -esimo ed r_{ij} rappresenta la distanza tra il punto P ed il generico punto di integrazione sul segmento j -esimo.

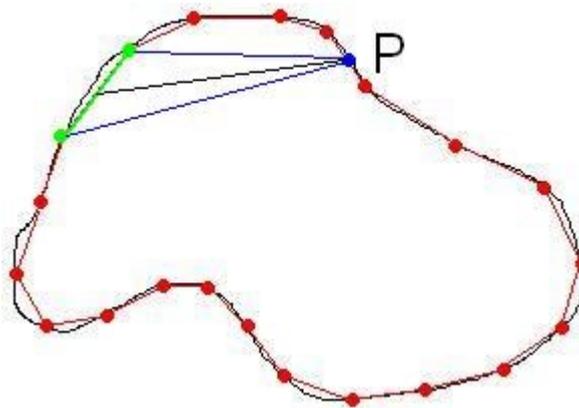


Fig. 2.4.1.2

A questo punto se supponiamo in prima approssimazione che ϕ_j e $\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_j$ siano costanti sul segmento j-esimo, allora si possono portare fuori dall'integrale e quindi

$$\sum_{j=1}^N \phi_j \int_{S_j} \left[\frac{\partial}{\partial n} (\log(r_{ij})) \right]_j dS_j - \sum_{j=1}^N \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_j \int_{S_j} \log(r_{ij}) dS_j = -\pi\phi_i \quad (2.4.1.9)$$

P viene generalmente preso come punto centrale del segmento i-esimo.

I 2 integrali sul segmento j-esimo sono ora calcolabili analiticamente e dipendono solo da quantità geometriche (angoli, distanze tra segmento j e punto i).

Con riferimento alla Fig. 2.4.1.3 in cui è evidenziato in rosso l'elemento j-esimo ed in nero il punto P i-esimo, nelle ipotesi di avere orientato il contorno del dominio 2D in senso antiorario (ascissa curvilinea s) e con la normale interna al dominio (convenzione alla Jaswon-Symm), allora valgono le seguenti espressioni:

$$0 \leq s \leq h \quad a = |P_i - A| \quad b = |P_i - B| \quad r = |P_i - q(s)| \quad (2.4.1.10)$$

$$\psi = a \cos\left(\frac{a^2 + b^2 - h^2}{2ab}\right) \quad \text{con } 0 \leq \psi \leq \pi \quad (2.4.1.11)$$

$$\theta = a \cos\left(\frac{a^2 + h^2 - b^2}{2ah}\right) \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.4.1.12)$$

$$\boxed{\int_A^B \frac{\partial}{\partial n} \log(r) ds = -[\theta_B - \theta_A]} \quad (2.4.1.13)$$

$$\boxed{\int_A^B \log(r) ds = a \cdot \cos(\theta) \cdot [\log(a) - \log(b)] + h \cdot [\log(b) - 1] + a \cdot \psi \cdot \sin(\theta)} \quad (2.4.1.14)$$

Le espressioni sopra riportate sono quanto serve per risolvere il problema al contorno 2D con elementi rettilinei ed una distribuzione delle sorgenti su di essi di tipo costante.

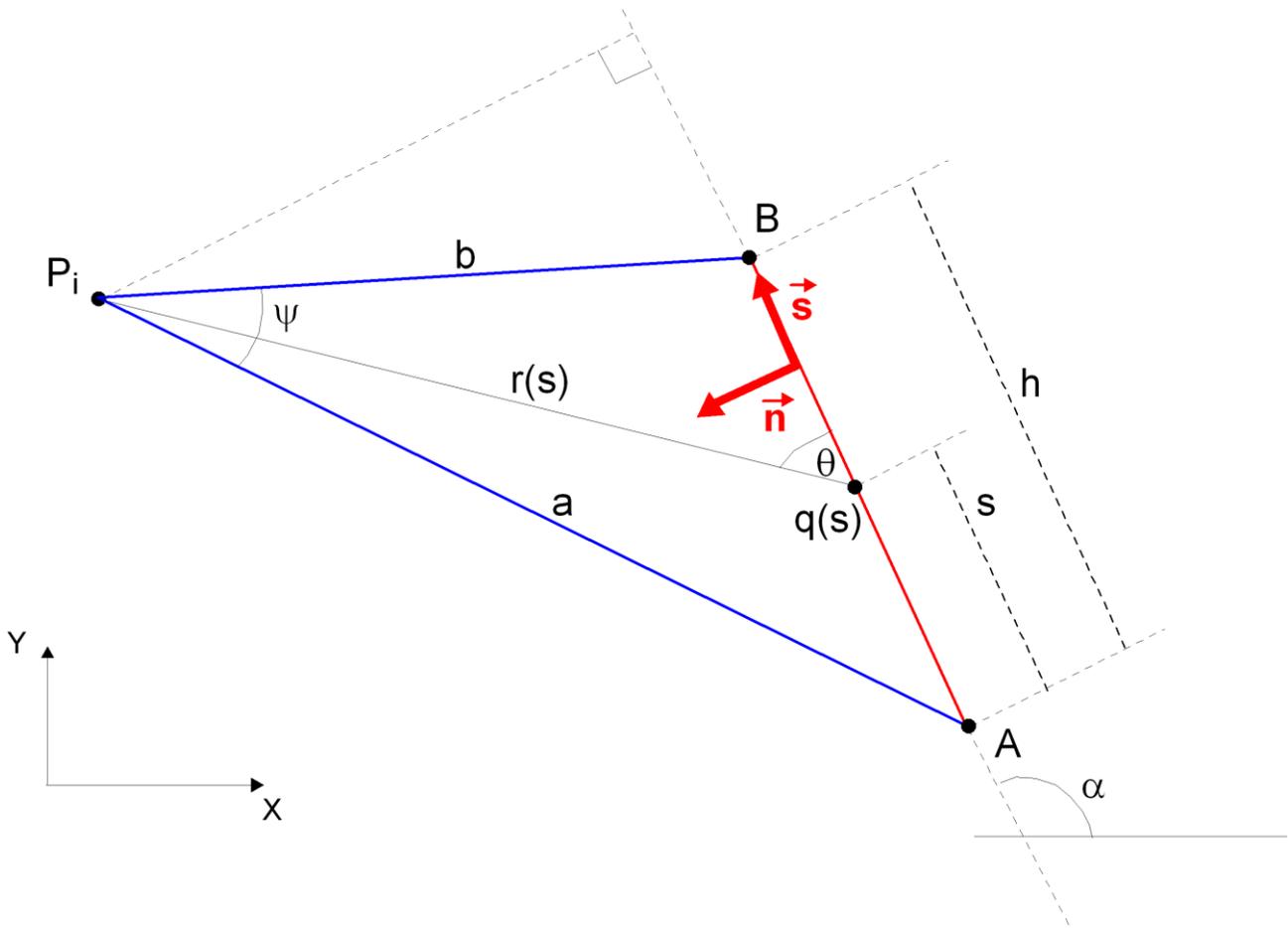


Fig. 2.4.1.3

Dunque abbiamo $2N$ integrali da eseguire per ogni punto $P_i, i=1, N$ e quindi in totale abbiamo $2 \times N \times N$ integrali da eseguire.

Le incognite sono in numero di $2N$ e sono ϕ_j e $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_j$

Si possono però scrivere N equazioni come quella sopra, una per ogni punto $P_i, i=1, N$

$$\sum_{j=1}^N \phi_j \int_{S_j} \left[\frac{\partial}{\partial n} (\log(r_{ij})) \right]_j dS_j - \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{j, S_j} \int \log(r_{ij}) dS_j = -\pi \phi_i \quad i=1, N \quad (2.4.1.15)$$

Dunque abbiamo N equazioni in $2N$ incognite. Risolti gli integrali (che diventano numeri) il sistema sopra non è altro che un sistema di equazioni lineari algebriche nelle incognite ϕ_j e $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_j$.

Però, affinché il problema idrodinamico sia ben posto e che cioè sul contorno della regione materiale MR si conoscano le condizioni al contorno (Boundary Conditions), dobbiamo disporre

delle N condizioni al contorno, ad es. condizioni di impermeabilità, condizione cinematica e dinamica, etc. dove si prescrive dei valori di ϕ_j oppure di $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_j$ (NON ENTRAMBI !!! però).

Quindi abbiamo a disposizione altre N equazioni e quindi il sistema in totale diventa di N equazioni in N incognite, risolvibile con gli strumenti dell'algebra lineare.

In conclusione, l'equazione di Laplace nel potenziale incognito di velocità valida su MR (quindi l'equazione di continuità per fluidi perfetti) è stata sostituita da una equazione integro-differenziale su S_{MR} che attraverso alcuni passaggi matematici e numerici (Metodo dei pannelli o Boundary Element Method) è stata trasformata in un sistema di equazioni lineari algebriche nelle incognite ϕ_j

oppure $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_j$ sugli elementi in cui è stata suddivisa la superficie della regione materiale.

Calcolate le incognite e quindi il potenziale di velocità, è poi possibile calcolare il campo di velocità, di pressione, le forze, etc, etc.

Tale metodo assume il nome di Metodo diretto in quanto le incognite del sistema lineare associato al BVP (Boundary Value Problem) sono "direttamente" le quantità fisiche di interesse ϕ_j oppure

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_j.$$

2.4.2 IL BOUNDARY ELEMENT METHOD (BEM) – METODO INDIRETTO

Lo stesso problema affrontato in 2.4.1 può essere anche affrontato con il metodo indiretto come segue. Sul contorno di MR e quindi su ogni elemento in cui si è discretizzato il contorno si dispongono pozzi/sorgenti $\varphi = \sigma / 4\pi r$ (in 3D). In tal caso nel generico punto P il potenziale indotto da questi pozzi/sorgenti è dato da

$$\boxed{\sum_{j=1, N} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{Pj}} \right) dS = \phi(P)} \quad (2.4.2.1)$$

le componenti della velocità del flusso nello stesso punto sono date da

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1,N} \frac{\partial}{\partial X} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{P_j}} \right) dS &= V_X(P) \\
\sum_{j=1,N} \frac{\partial}{\partial Y} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{P_j}} \right) dS &= V_Y(P) \\
\sum_{j=1,N} \frac{\partial}{\partial Z} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{P_j}} \right) dS &= V_Z(P)
\end{aligned} \tag{2.4.2.2}$$

e la componente normale di velocità in un punto del contorno stesso è data da

$$V_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = V_X(P)n_X + V_Y(P)n_Y + V_Z(P)n_Z \tag{2.4.2.3}$$

Con r_{P_j} si è indicata la distanza dal generico punto sorgente j al punto indotto P .

Da notare che P può coincidere con un punto del contorno stesso.

Sul contorno del dominio di calcolo devono essere note le condizioni al contorno ϕ_i oppure di

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_i = V_{n_i}. \text{ Il numero di condizioni al contorno note è pari ad almeno } N, \text{ dove } N \text{ è il numero di}$$

elementi in cui si è discretizzato il contorno.

Pertanto si possono scrivere in totale N equazioni miste dei due tipi in N incognite σ_j

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1,N} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) dS &= \phi(P_i) \\
\frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{j=1,N} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) dS \right] \cdot n_X + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sum_{j=1,N} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) dS \right] \cdot n_Y + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\sum_{j=1,N} \int_{S_{MR_j}} \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) dS \right] \cdot n_Z &= V_n(P_i)
\end{aligned} \tag{2.4.2.4}$$

$i=1,N$

Il caso più semplice di distribuzione di pozzi e sorgenti su ciascun elemento è quello della sorgente/pozzo puntiforme. Per evitare che per $i=j$ la distanza tra punto sorgente e punto indotto vada a zero (caso “singolare”), di solito si spostano (desingularizzano) le sorgenti posizionandole leggermente fuori dal dominio sulla normale passante per il centro dell’elemento. Tale metodo prende il nome di DESINGULARIZED BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD (DBIEM).

Le N equazioni sopra diventano semplicemente:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,N} \sigma_j \left[\left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) S_j \right] = \phi(P_i) \\
& \sum_{j=1,N} \sigma_j \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) S_j \cdot n_X + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) S_j \cdot n_Y + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} \right) S_j \cdot n_Z \right] = V_n(P_i)
\end{aligned}
\quad i=1,N \quad (2.4.2.5)$$

I termini in parentesi quadra sono detti *kernels* A_{ij} e come si vede dipendono solo da quantità geometriche.

Infatti

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \\
\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{r_{ij}} \right] &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}} \right] = \frac{-(X_i - X_j)}{\left[(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2 \right]^{3/2}} \\
\frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{r_{ij}} \right] &= \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}} \right] = \frac{-(Y_i - Y_j)}{\left[(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2 \right]^{3/2}} \\
\frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{1}{r_{ij}} \right] &= \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}} \right] = \frac{-(Z_i - Z_j)}{\left[(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2 \right]^{3/2}}
\end{aligned}
\quad (2.4.2.6)$$

Come si vede le incognite del sistema lineare associato in questo caso sono le densità delle sorgenti σ_j e pertanto sono quantità di scarso interesse diretto. Infatti ottenute le densità delle sorgenti si devono calcolare le quantità mancanti e cioè le velocità dove era noto il potenziale ed il potenziale dove era nota la velocità normale.

Per tale motivo il metodo è detto indiretto.

2.4.3 APPLICAZIONE DEL BEM AI CODICI DI SEAKEEPING E DI WAVE LOADS E DISCUSSIONE SUI VANTAGGI COMPUTAZIONALI

Da quanto sviluppato sopra, è chiaro che l'equazione integrale deve essere estesa a tutto il contorno S_{MR} della regione materiale MR. Nel caso del calcolo dei moti nave su onda, tale dominio dovrebbe estendersi fino al fondo del mare ed attorno alla nave teoricamente sino all'infinito.

In alcuni casi è però possibile eliminare alcuni tratti della superficie S_{MR} su cui applicare tale equazione, in virtù delle condizioni al contorno che sono applicate su questi tratti. Questa

“eliminazione” ha come conseguenza una riduzione del numero di incognite N a tutto beneficio dell’onere computazionale.

Questo è il caso di TUTTI i codici commerciali di seakeeping e di wave loads lineari nel dominio delle frequenze. Nell’utilizzo di questi codici infatti viene richiesto di schematizzare con una mesh di superficie solo la carena. In questi casi viene allora spontaneo chiedersi dove è “scomparso” il fluido e la superficie libera che circondano la carena. Sembra cioè che le equazioni del moto del fluido siano state abbandonate per far spazio a chissà quali “trucchi”. E’ obiettivo della parte che segue dimostrare, seppure in maniera qualitativa, come tali codici racchiudano le “solite” equazioni del moto del fluido in ipotesi specifiche che consentono di ridurre il numero di equazioni e quindi l’onere computazionale.

Esempio 1 – Simmetria rispetto al fondo

Supponiamo che la regione materiale MR sia quella indicata in Fig. 2.4.3.1 e che la discretizzazione del contorno sia quella mostrata dai pallini rossi. Come esempio è stato scelto il problema di Airy con superficie libera linearizzata. Si ricorda che in questo caso il dominio di calcolo termina sulla superficie libera mare calmo.

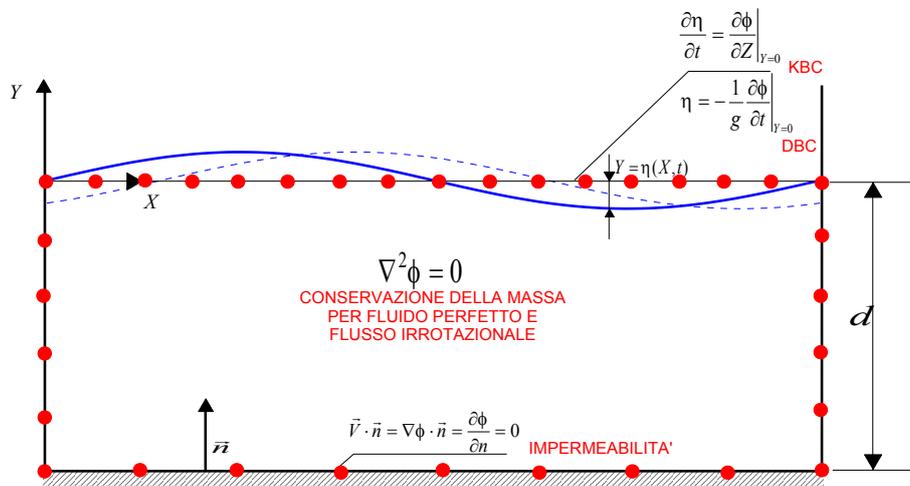


Fig. 2.4.3.1

In virtù della condizione di fondale piatto ed impermeabile, si può interpretare tale condizione come condizione di simmetria rispetto al fondo e quindi si può pensare di fare quanto indicato in Fig. 2.4.3.2 e cioè utilizzare un dominio speculare al primo rispetto al fondo.

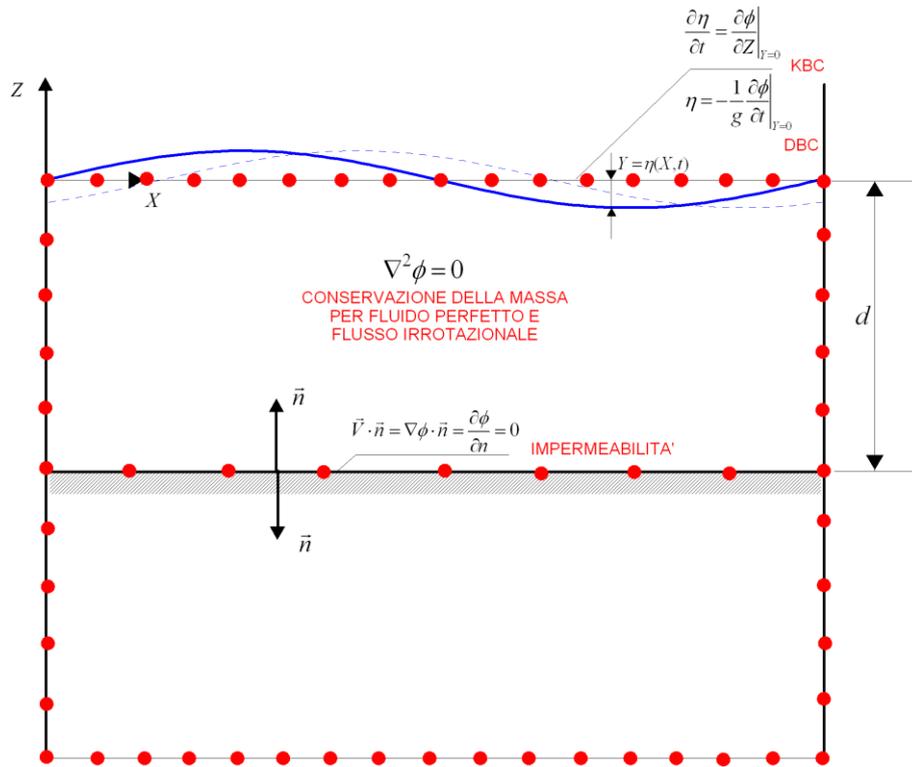


Fig. 2.4.3.2

Vista la simmetria (no cross flow attraverso il fondo), si può rimuovere il fondo stesso senza alcuna conseguenza (Fig. 2.4.3.3). L'altra conseguenza della simmetria è che le sorgenti poste sul contorno devono essere simmetriche rispetto al fondo stesso pertanto il numero di incognite si è ridotto di tanti quanti erano gli elementi sul fondo. Il prezzo da pagare per questo risiede nel dover calcolare dei *kernels* leggermente più complicati in quanto devono tener conto del contributo portato dall'elemento simmetrico come indicato di seguito ed in Fig. 2.4.3.3.

$$\sum_{j=1,N} \sigma_j \left[\left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} + \frac{1}{4\pi r_{ij}^*} \right) S_j \right] = \phi(P_i)$$

$$\sum_{j=1,N} \sigma_j \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} + \frac{1}{4\pi r_{ij}^*} \right) S_j \cdot n_x + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} + \frac{1}{4\pi r_{ij}^*} \right) S_j \cdot n_y + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{4\pi r_{ij}} + \frac{1}{4\pi r_{ij}^*} \right) S_j \cdot n_z \right] = V_n(P_i)$$

(2.4.3.1)

dove

$$r_{ij}^* = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - (-2d - Z_j))^2} \quad (2.4.3.2)$$

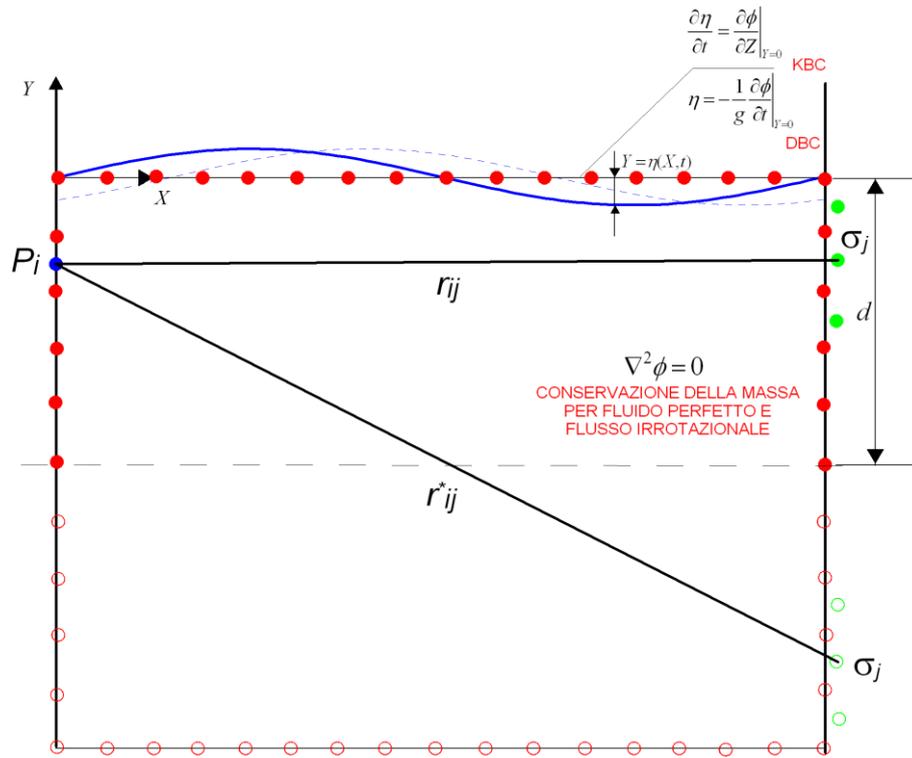


Fig. 2.4.3.3

Esempio 2 – 2D Frank close fit-method per la strip theory

Il Frank close-fit method è un esempio 2D in cui la linea del contorno viene ridotta al minimo indispensabile. Lo si cita solo come esempio 2D quindi più facile da trattare visivamente. Esiste ovviamente anche il caso 3D. Si tratta di un metodo adatto al calcolo dei coefficienti idrodinamici (*added mass, wave damping, incident wave forcing*) per sezioni trasversali di navi ad elevato allungamento L/B .

Si ricorda che nel caso 2D la *Green function* è data da

$$G(x, y) = \log(r) \quad (2.4.3.2)$$

Il fondo del mare viene considerato condizione di simmetria e quindi viene rimosso come sopra modificano la Green function come segue:

$$G(x, y) = \log(r) + \log(r^*) \quad (2.4.3.3)$$

Le due pareti laterali dovrebbero essere poste molto distanti (teoricamente all'infinito) per garantire la cosiddetta condizione di radiazione e cioè che al bordo del dominio l'onda che esce è un'onda piana progressiva stabilizzata. Inoltre esiste la superficie libera sui cui si applicano le *KBC* e *DBC* linearizzata che garantiscono che vi sia un'onda incidente linearizzata (Airy) e che la presenza del corpo produca al più onde di disturbo (diffratte e radiate) lineari e con la stessa frequenza angolare d'incontro rispetto all'onda incidente.

E' stato dimostrato che la *funzione di Green* che soddisfa a tutti questi requisiti e che quindi riassume sulla sola carena tutte le proprietà delle altre parti del contorno diventa:

$$G(x, y, t) = \left[\frac{\sigma}{2\pi} \log\left(\frac{r}{r_*}\right) - \frac{\sigma}{\pi} PV \int_0^\infty \frac{e^{k(y+b)} \cos(k(x-a))}{k-v} dk \right] \cos(\omega t) - \sigma e^{\nu(y+b)} \cos(\nu(x-a)) \sin(\omega t) \tag{2.4.3.4}$$

dove (a,b) sono le coordinate della sorgente, (x,y) le coordinate del punto di calcolo, $\nu = \omega^2/g$ e *PV* sta per "*Principal Value*" (trattandosi di un integrale con punto di singolarità interno).

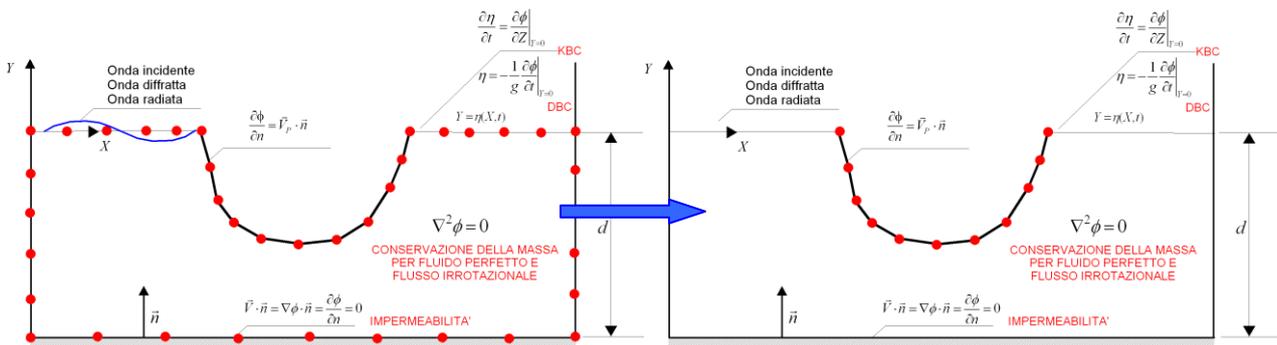


Fig. 2.4.3.4

Al di là della complessità dell'espressione della *Green function*, il risultato fondamentale è che gli elementi del contorno del fluido necessari e sufficienti a descrivere il fenomeno della interazione dell'oggetto con onde incidenti, diffratte e radiate si limitano a quelli sulla carena fino al galleggiamento mare calmo in virtù della linearizzazione del problema.

E' evidente che il vantaggio computazionale è enorme ed i calcoli possono essere fatti anche su un semplice laptop in qualche minuto.

Si noti però che tali vantaggi si hanno SOLO quando il problema è linearizzato e cioè il dominio non cambia forma durante la simulazione. Come aspetto negativo, è noto che la linearizzazione comporta che le onde ed i moti della nave siano di piccola ampiezza. Come aspetto positivo, la

linearizzazione comporta che si possano calcolare i RAO dell'interazione onda-nave (moti, forze, pressioni, etc) una volta per tutte e poi utilizzare di volta in volta lo spettro di mare di interesse.

2.4.4 SOLUZIONE NUMERICA DELLA DIFFRAZIONE E RADIAZIONE D'ONDA LINEARE PER UN OGGETTO DI FORMA QUALSIASI

Esercitazione in classe basata su un codice di calcolo sviluppato dal docente, messo a disposizione degli studenti, e basato sui modelli matematici, schemi numerici ed algoritmi descritti in questo capitolo.