

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

Meccanica dei solidi e delle travi

Corsi di Laurea in
Ingegneria Civile e Ambientale
Ingegneria Industriale
Ingegneria Navale

 Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura

Trieste, 4 agosto 2011

Indice

I Meccanica dei solidi	1
1 Analisi della tensione	3
1.1 Tensore degli sforzi di Cauchy	3
1.2 Equazione del moto	5
1.3 Equazione di equilibrio al contorno	7
1.4 Simmetria del tensore degli sforzi	7
1.5 Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali	9
1.6 Componenti	10
1.6.1 Significato fisico delle componenti del tensore degli sforzi	10
1.6.2 Significato fisico delle componenti dell'equazione di Cauchy	11
1.6.3 Significato fisico delle componenti dell'equazione indefinita di equilibrio	13
1.7 Autotensioni e configurazione naturale	14
1.8 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni (teoria del primo ordine)	14
2 Analisi della deformazione	15
2.1 Tensori di deformazione e di rotazione infinitesime	15
2.2 Misure di deformazione	16
2.2.1 Dilatazione lineare	16
2.2.2 Scorrimento	16
2.2.3 Significato fisico delle componenti del tensore di deformazione	18
2.2.4 Coefficiente di dilatazione cubica	19
2.3 Compatibilità della deformazione	20
3 Direzioni principali di tensione e di deformazione	23
3.1 Esercizio sulle direzioni principali di tensione	26

3.2 Esercizio sulle direzioni principali di deformazione	33
4 Stati elementari di tensione e di deformazione	37
4.1 Trazione semplice	37
4.2 Dilatazione semplice	38
4.3 Trazione uniforme	38
4.4 Dilatazione uniforme	39
4.5 Taglio semplice	40
4.6 Scorrimento semplice	42
4.7 stato di tensione monoassiale	42
4.8 stato di deformazione monoassiale	44
4.9 stato di tensione piano	44
4.10 stato di deformazione piano	45
5 Principio dei lavori virtuali	47
6 Elasticità lineare	51
6.1 Legame costitutivo	51
6.2 Elasticità lineare	51
6.3 Problema elastico lineare	53
6.4 Soluzione del problema elastico col metodo delle forze	54
6.5 Autotensioni	55
6.6 Sovrapposizione degli effetti	56
7 Energia elastica di deformazione	57
7.1 Lavoro di deformazione	57
7.2 Energia elastica di deformazione	58
7.3 Teoremi sul lavoro di deformazione	60
7.3.1 Teorema di Clapeyron	60
7.3.2 Teorema di Betti	60
7.4 Energia complementare	62
7.5 Unicità della soluzione	63
7.6 Soluzioni deboli, soluzioni forti ed esistenza della soluzione	64
8 Elasticità lineare isotropa	67
8.1 Legge di Hooke	67
8.2 Moduli tecnici	70
8.3 Direzioni principali di elasticità (isotropia)	74
8.4 Legge di Hooke inversa	76
8.5 Limitazioni delle costanti elastiche	77

8.6	Energia elastica di deformazione ed energia complementare elastica	78
8.7	Esercizio su un campo di spostamenti	80
9	Criteri di snervamento	83
9.1	Superficie di snervamento	83
9.2	Snervamento isotropo	83
9.3	Asse idrostatico e piano deviatorico	84
9.4	Coordinate sul piano deviatorico	86
9.5	Criterio della massima tensione normale o di Rankine	87
9.5.1	Criterio della massima dilatazione o di Grashof	89
9.6	Criteri di snervamento per i materiali metallici	90
9.6.1	Criterio di snervamento di Huber-von Mises	92
9.6.2	Criterio di snervamento di Tresca	95
9.6.3	Criterio di snervamento di Hill	96
9.7	Cenni sui criteri di snervamento per i materiali non metallici	98
9.7.1	Criterio di Drucker-Prager	98
9.7.2	Criterio di Mohr-Coulomb	99
9.8	Tensione ideale	100
II	Meccanica delle travi	103
10	Analisi della sollecitazione nelle travi	105
10.1	Caratteristiche della sollecitazione	105
10.2	Equazioni di equilibrio	107
10.2.1	Equazioni indefinite di equilibrio	107
10.2.2	Equazioni di discontinuità	107
10.2.3	Equazioni di equilibrio al contorno	108
10.2.4	Componenti scalari delle equazioni indefinite di equilibrio	108
10.3	Statica della trave piana	110
10.3.1	Equazioni scalari di equilibrio indefinito	110
10.3.2	Equazioni scalari di discontinuità	112
10.3.3	Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (asse rettilineo)	113
10.3.3.1	Convenzioni di segno	113
10.3.3.2	Forza normale	114
10.3.3.3	Taglio e momento flettente	114

11	Analisi della deformazione nelle travi	119
11.1	Moto rigido relativo per unità di linea	119
11.2	Componenti di deformazione locale	120
11.3	Deformazioni nel caso di trave piana	122
11.3.1	Trave piana ad asse rettilineo	122
11.4	Dilatazione e scorrimento della generica fibra longitudinale	123
11.4.1	Integrazione delle equazioni di congruenza	125
11.5	Trave inflessa	127
11.5.1	Esercizio: Determinazione diretta del vincolo di trave inflessa e della dilatazione della linea d'asse nel caso di trave piana inflessa ad asse rettilineo	128
12	Principio dei lavori virtuali per le travi	131
13	Teoria tecnica delle travi	135
13.1	Elasticità lineare	135
13.2	Lavoro di deformazione	136
13.3	Energia elastica di deformazione	138
13.4	Teoremi sul lavoro di deformazione	140
13.4.1	Teorema di Clapeyron	140
13.4.2	Teorema di Betti	141
13.4.3	Teorema di Castigliano	144
13.5	Centri di flessione e taglio	147
14	Legame costitutivo per la trave inflessa	151
14.1	Legame costitutivo nell'intorno di un punto	152
14.1.1	Legame costitutivo elastico	152
14.1.2	Legame costitutivo elastoplastico	153
14.2	Legame costitutivo assiale	155
14.3	Legame costitutivo flessionale	156
14.4	Travi omogenee a piccola curvatura	157
14.5	Travi piane	157
14.6	Legame costitutivo tagliante e torcente dedotto dal campo di spostamenti rigidi delle sezioni rette	158
15	Geometria delle masse	161
15.1	Masse distribuite su un'area piana	161
15.2	Vettore dei momenti statici	162
15.2.1	Momenti statici	163
15.2.2	Proprietà del baricentro	165

15.3 Tensore di inerzia	168	19.3 Energia complementare	222
15.3.1 Momenti di inerzia	169	19.4 Legami costitutivi	223
15.3.2 Formule di trasposizione o del trasporto (teorema di Huyghens-Steiner)	172	20 Travi elastiche lineari	225
15.3.3 Direzioni e momenti principali di inerzia	174	20.1 Equazioni della teoria tecnica delle travi	225
15.3.4 Formule di rotazione	174	20.2 Trave di Timoshenko	228
15.3.5 Circonferenza di Mohr	175	20.3 Trave piana inflessa	230
15.3.6 Raggi di inerzia	176	20.4 Sovrapposizione degli effetti	237
15.3.7 Ellisse centrale di inerzia (o ellisse di Culmann)	177	20.5 Integrazione dell'equazione della linea elastica	240
16 Sezioni omogenee	179	20.5.1 Esempio: Trave incastro-appoggio	240
16.1 Sezioni tipiche	180	20.5.2 Travi caricate solo alle estremità	242
16.1.1 Rettangolo	180		
16.1.2 Rettangolo sottile	181		
16.1.3 Triangolo rettangolo	182		
16.1.4 Arco circolare sottile	184		
16.1.5 Settore circolare	186		
16.2 Sezioni composte di parti semplici	187		
16.2.1 Esempio 1: Sezione composta di due rettangoli	187		
16.2.2 Esempio 2: Sezione rettangolare con un intaglio	189		
16.2.3 La sezione a C sottile	192		
16.2.4 Sezione a Z	194		
17 Problema di Saint-Venant	197		
17.1 Schematizzazione della trave nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità	197		
17.2 Caratteristiche della sollecitazione	198		
17.3 Principio e ipotesi di Saint-Venant	199		
17.4 Problema di Saint-Venant	200		
17.5 Energia complementare elastica	203		
18 Problema della torsione	205		
18.1 Funzione di ingobbamento	205		
18.2 Fattore torsionale di rigidezza	210		
18.3 Energia complementare	211		
18.4 Funzione delle tensioni	211		
19 Estensione del problema di Saint-Venant	217		
19.1 problema di flessione, taglio e torsione	217		
19.2 Centro di taglio	218		

Parte I

Meccanica dei solidi

Capitolo 1

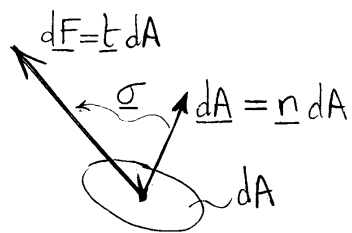
Analisi della tensione

1.1 Tensore degli sforzi di Cauchy

In corrispondenza di un generico punto del solido, la tensione interna è funzione della normale $\underline{n}$ alla superficie su cui la tensione stessa si esercita. Se con $\mathcal{U}$ indichiamo l'insieme dei versori e con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori, la tensione interna rappresenta dunque, nell'intorno di un punto, una funzione del tipo:

$$\underline{t}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \underline{n} \mapsto \underline{t}(\underline{n})$$

D'altronde, se con $d\underline{F} = \underline{t} dA$ si indica la forza che



globalmente si esercita su un elemento dA di superficie, di normale $\underline{n}$, viene ad istituirsi una funzione del tipo:

$$\underline{\sigma}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \underline{v} \mapsto |\underline{v}| \underline{t}\left(\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right)$$

che, in modo evidente, è omogenea di grado 1:

$$\underline{\sigma}(\alpha \underline{v}) = \alpha \underline{\sigma}(\underline{v}).$$

Vogliamo mostrare che tale funzione è anche additiva, ovvero che vale la relazione:

$$\underline{\sigma}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{\sigma}(\underline{v}_1) + \underline{\sigma}(\underline{v}_2),$$

e che quindi $\underline{\sigma}$ risulta essere un tensore doppio, cioè una trasformazione lineare nell'insieme dei vettori ordinari. Tale tensore doppio è detto tensore degli sforzi, rappresentando lo sforzo interno nell'intorno di un punto. Per dimostrare l'additività di $\underline{\sigma}$, si

considerino due generici vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e sia $\underline{v}$ la loro somma:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2.$$

Si costruisca, nell'intorno del punto in cui $\underline{\sigma}$ è definito, un solido prismatico di base triangolare, con i lati del triangolo perpendicolari ai tre vettori $\underline{v}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e di altezza $d\tau$ pari alla

lunghezza del lato perpendicolare a $\underline{v}$.

Il triangolo di base del prisma e il triangolo di lati $\underline{v}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono simili e quindi:

$$\frac{d\tau_1}{d\tau} = \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}|}, \quad \frac{d\tau_2}{d\tau} = \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}|}.$$

Il bilancio della quantità di moto del prisma, a meno di termini di ordine superiore a $d\tau^2$,

si scrive:

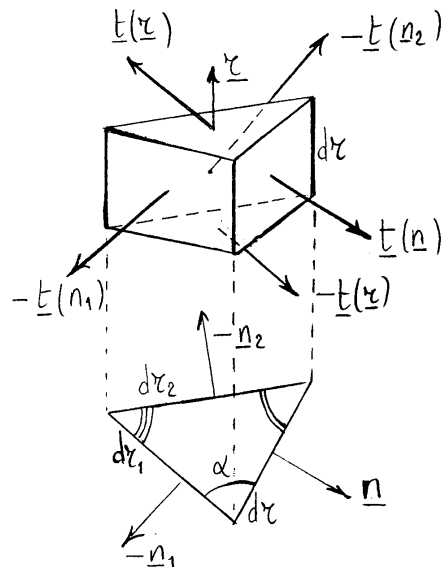
$$t(\underline{n}) d\tau^2 - t(\underline{n}_1) d\tau d\tau_1 - t(\underline{n}_2) d\tau d\tau_2 = 0,$$

poiché le forze agenti sulle due basi differiscono di termini di ordine superiore a $d\tau^2$:

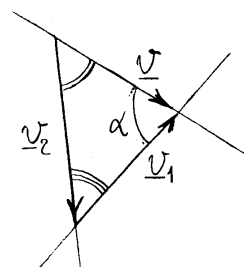
$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \right) \frac{1}{2} d\tau d\tau_1 \sin \alpha + o(d\tau^3),$$

così come i termini di volume:

$$(\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \frac{1}{2} d\tau^2 d\tau_1 \sin \alpha + o(d\tau^3).$$



$$\begin{cases} \underline{n} = \underline{v}/|\underline{v}| \\ \underline{n}_1 = \underline{v}_1/|\underline{v}_1| \\ \underline{n}_2 = \underline{v}_2/|\underline{v}_2| \end{cases}$$



Risulta quindi, dividendo per $d\mathcal{V}^2$:

$$\underline{t}(\underline{n}) - \underline{t}(\underline{n}_1) \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}|} - \underline{t}(\underline{n}_2) \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}|} = \underline{0}.$$

Moltiplicando infine per $|\underline{v}|$:

$$|\underline{v}| \underline{t}\left(\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right) - |\underline{v}_1| \underline{t}\left(\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|}\right) - |\underline{v}_2| \underline{t}\left(\frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|}\right) = \underline{0},$$

ovvero sia:

$$\underline{\sigma}(\underline{v}) - \underline{\sigma}(\underline{v}_1) - \underline{\sigma}(\underline{v}_2) = \underline{0},$$

come volevasi dimostrare.

La tensione $\underline{t}$ agente su una giacitura di normale $\underline{n}$ risulta quindi esprimibile nella forma:

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n},$$

espressione detta equazione di Cauchy.

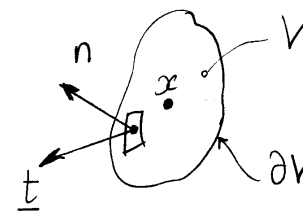
1.2 Equazione del moto

Come visto, il bilancio di un volume V si scrive:

$$\int_{\partial V} \underline{t} dS + \int_V (\underline{f} - \rho \underline{\ddot{v}}) dV = \underline{0},$$

dove:

$$\int_{\partial V} \underline{t} dS \stackrel{\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}}{=} \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS.$$



Divergenza di $\underline{\sigma}$:

$$\text{div } \underline{\sigma} = \lim_{V \rightarrow x} \frac{\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS}{V}.$$

Rappresenta la forza totale agente sul contorno ∂V

di V per unità di volume :

$$\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS = \int_V \operatorname{div} \underline{\sigma} dV .$$

$\operatorname{div} \underline{\sigma}$ è un vettore e le sue dimensioni sono quelle di una forza per unità di volume. In componenti:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS &= \int_{\partial V} \sum_{ij} (\sigma_{ij} n_j) \underline{e}_i dS \\ &= \sum_{ij} \left(\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dS \right) \underline{e}_i \end{aligned}$$

formula di Green $\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\int_V \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i dV \right) \\ &= \int_V \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i dV \end{aligned}$$

Dunque :

$$(\operatorname{div} \underline{\sigma})_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} .$$

Il bilancio del generico volume V , intorno del

punto x , si scrive quindi :

$$\int_V (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\ddot{v}}) dV = \underline{0} ,$$

che, dovendo essere valido per ogni intorno di x , permette di estrarre l'equazione del moto valida nel punto x :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \rho \underline{\ddot{v}} .$$

Nel caso statico risulta $\underline{\ddot{v}} = \underline{0}$ e l'equazione del moto diventa :

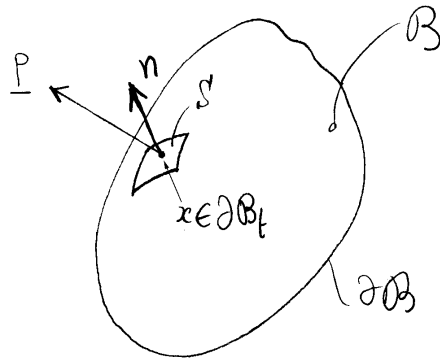
$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} ,$$

che viene detta equazione indefinita di equilibrio.

1.3 Equazione di equilibrio al contorno

La tensione $\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}$ che emerge sul contorno deve uguagliare la forza esterna $\underline{p}$ applicata sulla superficie ∂B di contorno:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{p} \quad \text{su } \partial B \quad (\text{superficie esterna}).$$



1.4 Simmetria del tensore degli sforzi

Si vuole mostrare che, in ogni punto $x \in B$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases}.$$

A tale scopo si ricordi la rappresentazione in componenti di un prodotto vettoriale:

$$(\underline{u} \times \underline{v})_i = \sum_{j,k} e_{ijk} u_j v_k,$$

dove il simbolo di permutazione e_{ijk} , a tre indici, vale:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione pari di } (x,y,z) \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione dispari di } (x,y,z) \\ 0 & \text{altrimenti (cioè se almeno due indici sono uguali)} \end{cases}.$$

Per dimostrare la simmetria di $\underline{\sigma}$, impariamo, al generico volume V , intorno di un punto x , il bilancio del momento della quantità di moto:

$$\int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS + \int_V \underline{r} \times (\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \, dV = \underline{0}.$$

L'integrale di superficie diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS &= \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{\sigma} \underline{n} \, dS \\ &= \int_{\partial V} \sum_i \left\{ \sum_{jk} e_{ijk} r_j \left(\sum_h \sigma_{kh} n_h \right) \right\} \underline{e}_i \, dS = \sum_{ijk} \left\{ \int_{\partial V} e_{ijk} r_j \sigma_{kh} n_h \, dS \right\} \underline{e}_i \\ &\stackrel{\text{formula di Green}}{=} \sum_{ijk} \left\{ \int_V e_{ijk} \frac{\partial r_j \sigma_{kh}}{\partial x_h} \, dV \right\} \underline{e}_i \\ &= \int_V \sum_{ijk} e_{ijk} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_h} \sigma_{kh} + r_j \frac{\partial \sigma_{kh}}{\partial x_h} \right) \underline{e}_i \, dV. \end{aligned}$$

La componente r_j del vettore posizione $\underline{r}$ coincide con la coordinata x_j del punto x (nell'ipotesi

non restrittiva che il polo per il calcolo dei momenti coincide con l'origine delle coordinate) e dunque $\frac{\partial r_j}{\partial x_h}$ coincide con il delta di Kronecher:

$$\frac{\partial r_j}{\partial x_h} = \delta_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = h \\ 0 & \text{se } j \neq h \end{cases}.$$

Quindi:

$$\sum_h \frac{\partial r_j}{\partial x_h} \sigma_{kh} = \sum_h \delta_{jh} \sigma_{kh} = \sigma_{kj}.$$

sommando sull'indice h viene conservato il solo termine corrispondente ad h=j

Inoltre $\sum_h \frac{\partial \sigma_{kh}}{\partial x_h}$ rappresenta $(\text{div } \underline{\sigma})_k$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS &= \int_V \sum_{ijk} e_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i \, dV + \int_V \sum_{ijk} e_{ijk} r_j (\text{div } \underline{\sigma})_k \underline{e}_i \, dV \\ &= \int_V \sum_{ijk} e_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i \, dV + \int_V \underline{r} \times \text{div } \underline{\sigma} \, dV. \end{aligned}$$

Il bilancio del momento della quantità di moto diviene:

$$\sum_{ijk} \int_V e_{ijk} \sigma_{kj} e_i dV + \int_V \underline{r} \times (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) dV = \underline{0}.$$

Il secondo termine è nullo per via dell'equazione del moto e quindi si ha infine:

$$\sum_{ijk} \int_V e_{ijk} \sigma_{kj} e_i = 0,$$

che equivale alle 3 equazioni scalari:

$$\int_V (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dV = 0 \quad (i=x)$$

$$\int_V (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) dV = 0 \quad (i=y)$$

$$\int_V (\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) dV = 0 \quad (i=z)$$

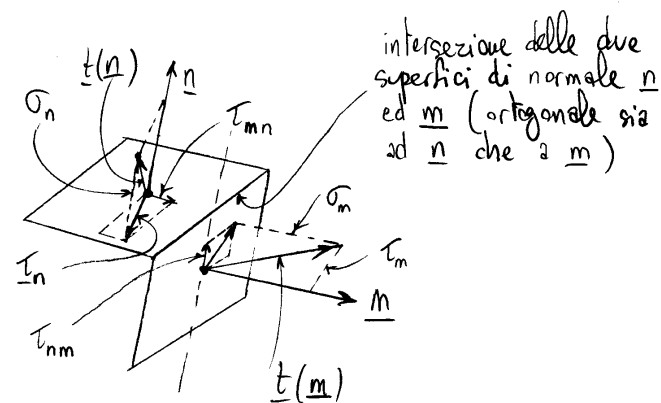
Da questo si deduce che per ogni volume V contenente x , $\underline{\sigma}$ deve dunque essere simmetrico nel punto x , e poiché x è generico $\underline{\sigma}$ è simmetrico ovunque.

1.5 Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali

Siano date due superfici, nell'intorno di un punto di un corpo continuo, ortogonali tra loro, quindi tali che:

$$\underline{n} \cdot \underline{m} = 0,$$

dove $\underline{n}$ ed $\underline{m}$ sono i vettori normali alle due superfici.



Essendo $\underline{m}$ ortogonale ad $\underline{n}$, la componente del vettore tensione $\underline{t}(\underline{m})$ nella direzione $\underline{n}$ rappresenta la componente tangenziale τ_{nm} e analogamente la componente di $\underline{t}(\underline{n})$ nella direzione $\underline{m}$ rappresenta τ_{mn} .

Risulta:

$$\tau_{nm} = \underline{n} \cdot \underline{t}(\underline{m}) = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \underline{m} = \underline{m} \cdot \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{m} \cdot \underline{t}(\underline{n}) = \tau_{mn},$$

ovverossia:

$$\tau_{nm} = \tau_{mn}.$$

Questa uguaglianza rappresenta il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali:

"Date due superfici nell'interno di un punto ortogonali tra loro, le componenti tangenziali dello sforzo sulle due superfici, nelle direzioni ortogonali all'intersezione tra le due superfici, sono uguali in modulo ed ambedue dirette verso l'intersezione oppure allontanantisi da essa."

Più in generale, se $\underline{n} \cdot \underline{m} \neq 0$ risulta ancora:

$$\tau_{nm} = \tau_{mn} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \tau_{nm} = \underline{n} \cdot \underline{t}(\underline{m}) \\ \tau_{mn} = \underline{m} \cdot \underline{t}(\underline{n}) \end{cases}.$$

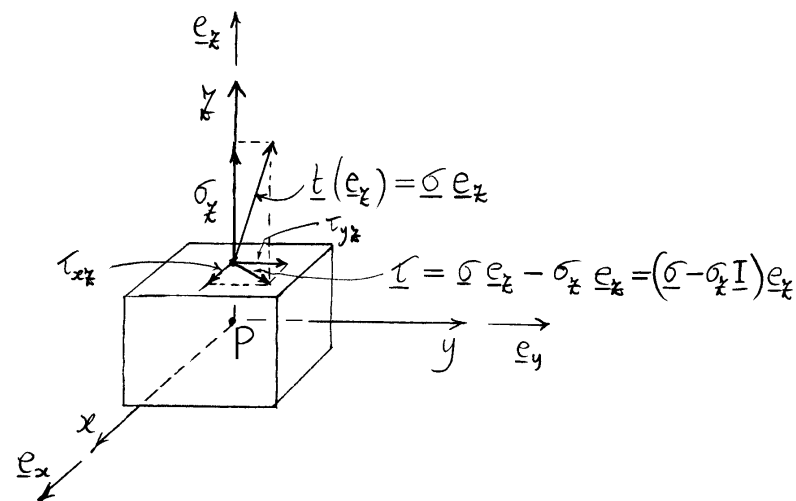
Pero' in tal caso, τ_{nm} e τ_{mn} non hanno più il significato di tensione tangenziale.

1.6 Componenti

1.6.1 Significato fisico delle componenti del tensore degli sforzi

Le componenti del tensore degli sforzi risultano:

$$\sigma_{ij} = \underline{e}_i \cdot (\underline{\sigma} \underline{e}_j) = \underline{e}_i \cdot \underline{t}(\underline{e}_j).$$



Componente normale:

$$\sigma_x = \underline{e}_x \cdot \underline{t}(\underline{e}_x)$$

Componenti tangenziali:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \underline{e}_x \cdot \underline{t}(\underline{e}_y) \\ \tau_{yx} = \underline{e}_y \cdot \underline{t}(\underline{e}_x) \end{cases}$$

Modulo della componente tangenziale totale:

$$|\underline{t}|^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

Ne consegue il seguente significato fisico della rappresentazione algebrica del tensore degli sforzi:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

componenti di $\underline{t}(\underline{e}_x)$ nella base $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$

Poiché le componenti indipendenti del tensore degli sforzi, per via della sua simmetria, sono 6, risulta possibile rappresentarlo per il mezzo di un vettore algebrico di sollecitazione di dimensione 6:

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}.$$

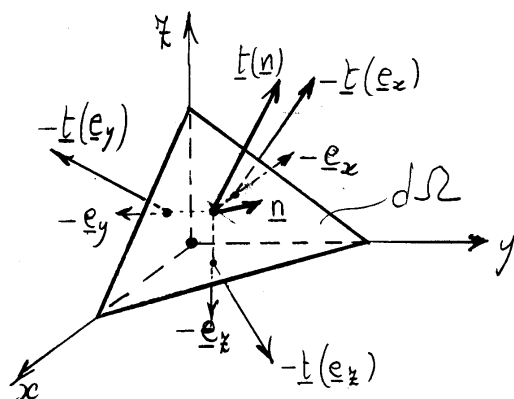
1.6.2 Significato fisico delle componenti dell'equazione di Cauchy

L'equazione $\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \underline{n}$ si rappresenta in componenti nella forma:

$$(1) \quad \begin{cases} t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{cases},$$

dove t_x, t_y e t_z sono le componenti di $\underline{t}(\underline{n})$ e n_x, n_y e n_z sono i coseni direttori della normale $\underline{n}$ all'elemento di superficie su cui agisce $\underline{t}(\underline{n})$.

Le tre equazioni scalari rappresentano le tre equazioni di bilancio della quantità di moto nella direzione degli assi x, y e z rispettivamente, di un tetraedro elementare costruito nell'intorno del punto considerato ed avente tre facce parallele ai piani coordinati ed una faccia di normale $\underline{n}$ (detto tetraedro di Cauchy).



Sulle tre facce di normali $-e_x$, $-e_y$ e $-e_z$ agiscono rispettivamente le tre tensioni $-t(e_x)$, $-t(e_y)$ e $-t(e_z)$ di componenti:

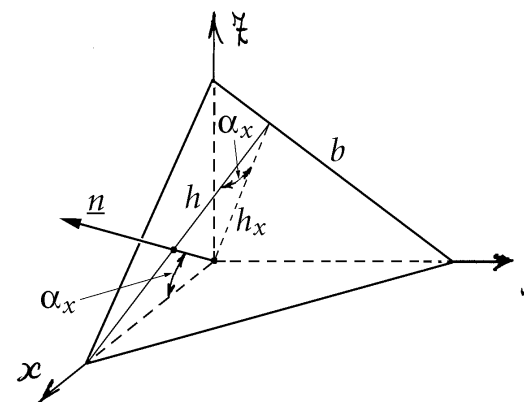
$$\{-t(e_x)\} = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{-t(e_y)\} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \\ -\tau_{zy} \end{Bmatrix}, \quad \{-t(e_z)\} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \\ -\sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Inoltre, se $d\Omega$ è l'area della faccia di normale $\underline{n}$, allora le aree $d\Omega_x$, $d\Omega_y$, $d\Omega_z$ delle tre facce di normali $-e_x$, $-e_y$ e $-e_z$ rispettivamente valgono:

$$d\Omega_x = d\Omega n_x, \quad d\Omega_y = d\Omega n_y, \quad d\Omega_z = d\Omega n_z.$$

Infatti, tenendo conto della figura, si ha per es.:

$$d\Omega_x = b h_x = b h \cos \alpha_x = d\Omega \cos \alpha_x.$$



Ne risultano le tre equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\text{Asse } x: -\sigma_x d\Omega_x - \tau_{xy} d\Omega_y - \tau_{xz} d\Omega_z + t_x d\Omega = 0,$$

$$\text{Asse } y: -\tau_{yx} d\Omega_y - \sigma_y d\Omega_y - \tau_{yz} d\Omega_z + t_y d\Omega = 0,$$

$$\text{Asse } z: -\tau_{zx} d\Omega_x - \tau_{zy} d\Omega_y - \sigma_z d\Omega_z + t_z d\Omega = 0,$$

dove si sono trascurati i contributi di ordine superiore al primo in $d\Omega$, compresi i contributi delle componenti f_x , f_y e f_z della forza di volume e quelli delle componenti $\rho \dot{v}_x$, $\rho \dot{v}_y$ e $\rho \dot{v}_z$ della forza di inerzia.

Dividendo per $d\Omega$ e mandando al limite per $d\Omega \rightarrow 0$ si ottengono le (1).

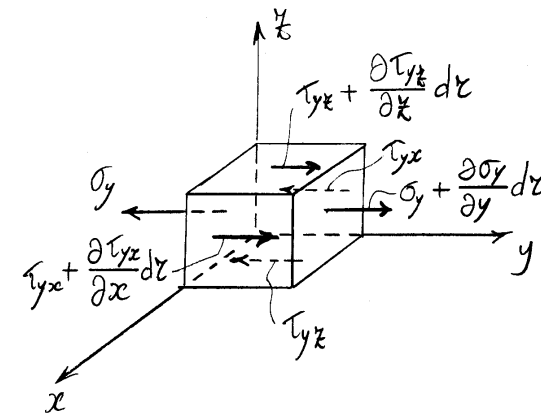
1.6.3 Significato fisico delle componenti dell'equazione indefinita di equilibrio

L'equazione indefinita di equilibrio $\text{div } \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0}$ è rappresentata in componenti dalle tre equazioni scalari :

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} .$$

Queste tre equazioni scalari rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione, nella direzione degli assi x, y e z rispettivamente, di un cubetto elementare avente le facce parallele agli assi coordinati e di lato dr .

Per esempio, l'equazione alla traslazione in direzione y si scrive, a meno di infinitesimi di



ordine superiore a $(dr)^3$:

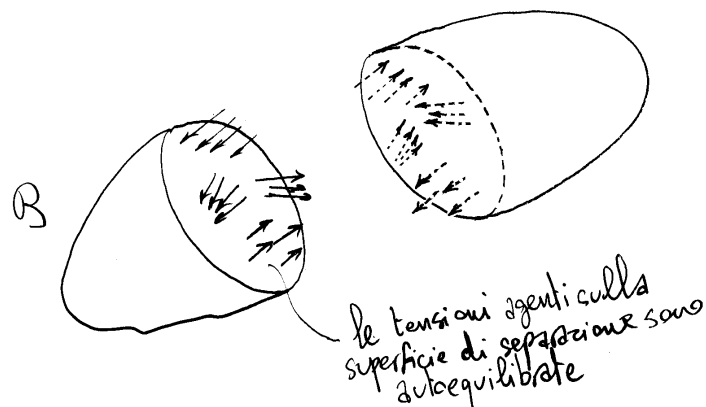
$$\begin{aligned} & \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dr \right) dr^2 - \sigma_y dr^2 \\ & + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dr \right) dr^2 - \tau_{yz} dr^2 \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dr \right) dr^2 - \tau_{yx} dr^2 \\ & + f_y dr^3 = 0 . \end{aligned}$$

Semplificando, dividendo per dr^3 e usando il limite per $dr \rightarrow 0$ si ottiene la seconda equazione delle (2).

1.7 Autotensioni e configurazione naturale

Si dice che un corpo continuo è soggetto a delle *autotensioni* se il suo stato di sforzo, espresso dal tensore degli sforzi σ , non è nullo in presenza di forze applicate nulle. Questo significa che lungo una qualunque superficie che divide il corpo in due parti la distribuzione delle tensioni interne non è in generale nulla, nonostante siano nulle la risultante e il momento risultante di tale distribuzione.

La configurazione che un solido assume quando non è soggetto a forze esterne viene detta *configurazione naturale* se le autotensioni sono nulle.



1.8 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni (teoria del primo ordine)

Fino ad ora non si è posta alcuna limitazione alle deformazioni che può subire il corpo continuo. Le equazioni di equilibrio (oppure del moto) sono state scritte nella configurazione deformata, cioè nella configurazione che il corpo assume in seguito all'applicazione delle azioni esterne. Questa configurazione ha il grande difetto di essere, normalmente, una delle incognite del problema. Il problema è allora enormemente semplificato se, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, la configurazione deformata viene, ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio, confusa con la configurazione indeformata di riferimento, che è nota a priori.

Capitolo 2

Analisi della deformazione

2.1 Tensori di deformazione e di rotazione infinitesime

Il gradiente degli spostamenti $\mathbf{H}$ può essere decomposto nella somma di una parte simmetrica $\boldsymbol{\epsilon}$ e di una parte emisimmetrica $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad (2.1)$$

dove:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T), \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T). \quad (2.3)$$

Le componenti di $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\omega}$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale risultano:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.4)$$

dove, ora e nel seguito, con x_i si sono indicate le generiche coordinate dei punti nella configurazione di riferimento del corpo, essendo questa, per via dell'approssimazione lineare, l'unica configurazione in cui si eseguono delle operazioni differenziali. Poiché $\mathbf{H}$ è dello stesso ordine degli spostamenti, questo è vero anche per le sue parti simmetrica e emisimmetrica. Questo implica che vale l'approssimazione lineare:

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (2.5)$$

L'azione di $\mathbf{I} + \mathbf{H}$ su un qualunque vettore materiale equivale dunque, nell'approssimazione lineare, all'applicazione successiva di $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ e di $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$ in un ordine qualunque. La (2.5) consente quindi di esprimere la relazione tra un elemento di linea materiale $d\mathbf{X}$ e il corrispondente elemento di linea spaziale nella forma approssimata:

$$d\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})d\mathbf{X} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega})d\mathbf{X}. \quad (2.6)$$

Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è emisimmetrico, la quantità $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ rappresenta, a meno di infinitesimi di ordine superiore negli spostamenti, una rotazione rigida dell'intorno del punto $\mathbf{X}$ in cui $\boldsymbol{\omega}$ è calcolato (è una rotazione rigida dell'intorno di $\mathbf{X}$, non di tutto il corpo, poiché $\boldsymbol{\omega}$ è in generale variabile da punto a punto). Per tale motivo $\boldsymbol{\omega}$ è detto *tensore di rotazione infinitesima*,¹ dove la dizione "infinitesima" ricorda che ciò è vero solo nell'approssimazione lineare. La rotazione rigida dell'intorno può essere dunque rappresentata da un *vettore di rotazione infinitesima* $\boldsymbol{\varphi}$ tale che:²

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{a}. \quad (2.7)$$

per ogni vettore $\mathbf{a}$. Le relazioni tra le componenti del tensore di rotazione infinitesima e quelle del vettore di rotazione infinitesima risultano quindi:

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varphi}\} = \begin{bmatrix} \omega_{zy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yx} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Si ribadisce che $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ rappresenta una rotazione dell'intorno di un punto del continuo *nell'ipotesi di piccoli spostamenti*. In generale una rotazione è rappresentata da una matrice ortogonale e non, a meno dell'identità, da una matrice emisimmetrica.

Nell'approssimazione lineare, dunque, la parte simmetrica di $\mathbf{H}$ rappresenta tutta la deformazione dell'intorno, essendo ottenuta depurando gli spostamenti dell'intorno da un moto rigido. Inoltre, la deformazione dell'intorno di un punto è nulla se il moto dell'intorno è rigido, cioè se, nell'approssimazione lineare, $\mathbf{H}$ è emisimmetrico e quindi se la parte simmetrica è nulla. La parte simmetrica $\boldsymbol{\epsilon}$ di $\mathbf{H}$ rappresenta dunque tutta la deformazione nell'intorno di un punto e si annulla se e solo se l'intorno non si deforma. Per tale motivo $\boldsymbol{\epsilon}$ è chiamato *tensore di deformazione infinitesima*,³

¹Infinitesimal rotation tensor nella letteratura inglese.

²Infinitesimal rotation vector nella letteratura inglese.

³Infinitesimal deformation tensor nella letteratura inglese.

dove ancora una volta la dizione “infinitesima” ricorda che ciò è vero solo nell'approssimazione lineare.

2.2 Misure di deformazione

2.2.1 Dilatazione lineare

Si tenga conto che al fine del calcolo delle misure di deformazione si possono depurare gli spostamenti nell'intorno di un punto della quota dovuta alla rotazione rigida e scrivere di conseguenza, in accordo alla (2.6):

$$d\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X} \quad \text{oppure} \quad d\mathbf{u} \approx \boldsymbol{\epsilon} d\mathbf{X}. \quad (2.9)$$

Sia allora $\mathbf{r}_0$ il versore di una direzione uscente dal punto materiale $\mathbf{X}$ di un continuo. Un elemento lineare $d\mathbf{X}_r$ uscente da $\mathbf{X}$ ed avente la direzione e il verso di $\mathbf{r}_0$ può essere messo nella forma (fig. 2.1):

$$d\mathbf{X}_r = dL_r \mathbf{r}_0, \quad (2.10)$$

dove dL_r rappresenta la lunghezza dell'elemento di linea. All'elemento $d\mathbf{X}_r$

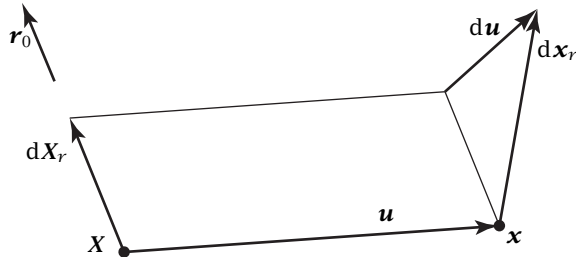


Figura 2.1: Calcolo della dilatazione lineare

uscite da $\mathbf{X}$ corrisponde, grazie alla (2.9), l'elemento $d\mathbf{x}_r$ uscente da $\mathbf{x}$ tale che:

$$d\mathbf{x}_r = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}_r = dL_r (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{r}_0. \quad (2.11)$$

Il modulo $d\ell_r$ di $d\mathbf{x}_r$ risulta quindi:

$$d\ell_r = \sqrt{d\mathbf{x}_r \cdot d\mathbf{x}_r} = dL_r \sqrt{\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 \mathbf{r}_0} \quad (2.12)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e quindi di piccole deformazioni, vale l'approssimazione:

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2 \approx \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.13)$$

Sfruttando inoltre lo sviluppo in serie di MacLaurin:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

la (2.12) permette di scrivere allora:

$$d\ell_r \approx dL_r \sqrt{1 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_0} \approx dL_r (1 + \mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_0). \quad (2.15)$$

Ricordando che per definizione la dilatazione lineare ϵ_r della linea uscente da $\mathbf{X}$ e avente la direzione di $\mathbf{r}_0$ vale:

$$\epsilon_r = \frac{d\ell_r - dL_r}{dL_r}, \quad (2.16)$$

inserendo la (2.15) nella (2.16) si ottiene infine:

$$\epsilon_r \approx \mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_0. \quad (2.17)$$

2.2.2 Scorrimento

Siano $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{s}_0$ i versori di due direzioni uscenti dal punto materiale $\mathbf{X}$ di un continuo e ortogonali tra loro (fig. 2.2), quindi tali che:

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0. \quad (2.18)$$

Due elementi lineari $d\mathbf{X}_r$ ed $d\mathbf{X}_s$ uscenti da $\mathbf{X}$ ed aventi le direzioni e i versi di $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{s}_0$ possono essere messi nella forma:

$$d\mathbf{X}_r = dL_r \mathbf{r}_0, \quad d\mathbf{X}_s = dL_s \mathbf{s}_0, \quad (2.19)$$

dove dL_r e dL_s sono i moduli dei due elementi di linea. Gli elementi lineari $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ corrispondenti nella deformazione ai due elementi di linea materiali $d\mathbf{X}_r$ e $d\mathbf{X}_s$ valgono:

$$d\mathbf{x}_r = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}_r = dL_r (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{r}_0, \quad (2.20a)$$

$$d\mathbf{x}_s = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}_s = dL_s (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{s}_0, \quad (2.20b)$$

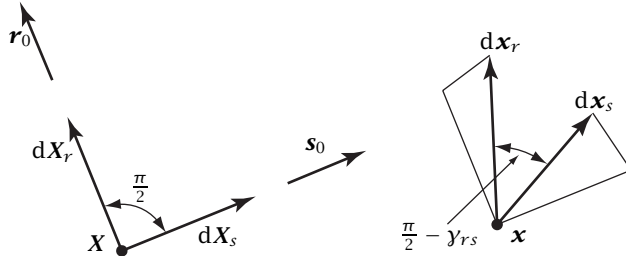


Figura 2.2: Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali

avendo ancora una volta depurato, in accordo alla (2.9), il contributo dovuto alla rotazione rigida dell'intorno. Se γ_{rs} rappresenta lo scorrimento tra gli elementi di linea $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ inizialmente ortogonali, l'angolo tra gli elementi spaziali $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ vale $\pi/2 - \gamma_{rs}$ e quindi risulta:

$$\sin \gamma_{rs} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{rs} \right) = \frac{d\mathbf{x}_r \cdot d\mathbf{x}_s}{d\ell_r d\ell_s}, \quad (2.21)$$

dove $d\ell_r$ e $d\ell_s$ sono i moduli di $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ rispettivamente. Si tenga ora conto che tra le lunghezze $d\ell_r$ e $d\ell_s$ degli elementi di linea spaziali e quelle dL_r e dL_s degli elementi di linea materiali valgono le relazioni seguenti:

$$d\ell_r = (1 + \epsilon_r) dL_r, \quad d\ell_s = (1 + \epsilon_s) dL_s, \quad (2.22)$$

dove ϵ_r e ϵ_s sono le dilatazioni degli elementi di linea $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ rispettivamente. Inserendo nella (2.21) le relazioni (2.20) e (2.22) e tenendo conto che $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$ è un tensore simmetrico si ottiene allora:

$$\gamma_{rs} = \arcsin \frac{\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 \mathbf{s}_0}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}. \quad (2.23)$$

Poiché $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{I} \mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$, avendo sfruttato la relazione di ortogonalità (2.18), ed utilizzando l'approssimazione (2.13) dalla (2.23) si ottiene:

$$\gamma_{rs} \approx \arcsin \frac{2(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0)}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}. \quad (2.24)$$

Tenendo poi conto del seguente sviluppo in serie di MacLaurin:

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

risulta, nell'approssimazione lineare:

$$(1 + \epsilon_r)^{-1} (1 + \epsilon_s)^{-1} \approx 1 - \epsilon_r - \epsilon_s. \quad (2.26)$$

La (2.24), sfruttando l'approssimazione (2.26) e lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione arcsin:

$$\arcsin x = x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

fornisce infine il risultato cercato:

$$\gamma_{rs} \approx 2(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0). \quad (2.28)$$

Si noti che il vettore $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$ è l'immagine del versore della direzione $\mathbf{s}_0$ dovuta all'azione della trasformazione $\boldsymbol{\epsilon}$. Dato che la dilatazione ϵ_s della linea $\mathbf{s}_0$ vale $\mathbf{s}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$, ne risulta che la componente del vettore $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$ nella direzione $\mathbf{s}_0$ vale $\epsilon_s \mathbf{s}_0$ (fig. 2.3). La differenza $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0$ coincide quindi con la proie-

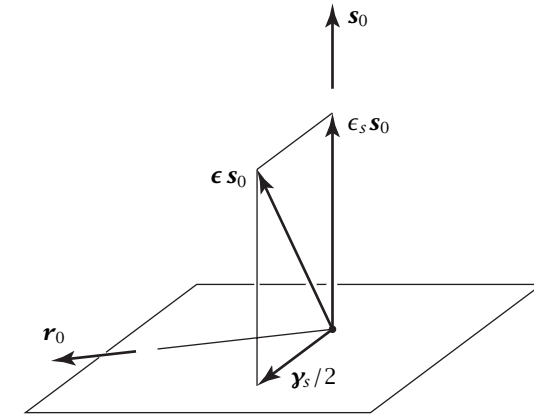


Figura 2.3: Scorrimento tra una linea e una superficie

zione del vettore immagine $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$ sul piano perpendicolare a $\mathbf{s}_0$. Detto $\mathbf{r}_0$ un generico vettore del piano ortogonale a $\mathbf{s}_0$, risulta allora:

$$2 \{ \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0 \} \cdot \mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 \approx \gamma_{rs}, \quad (2.29)$$

per via della (2.28) e poiché $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$. Si tenga ora conto che, per l'ipotesi di piccole deformazioni, gli scorrimenti tra due linee, così come la differenza

tra il versore di una linea deformata e quello della corrispondente linea indeformata, sono quantità piccole e che quindi ne consegue:

$$\sin \gamma_{rs} \approx \gamma_{rs}, \quad \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{s} \approx \mathbf{s}_0. \quad (2.30)$$

La (2.29) afferma allora che il vettore scorrimento $\mathbf{y}_s$ tra la linea s_0 e il piano ortogonale ad essa vale approssimativamente:

$$\mathbf{y}_s \approx 2(\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0). \quad (2.31)$$

Se poi x e y sono due assi ortogonali giacenti nel piano ortogonale alla direzione indeformata s_0 ne risulta la seguente scomposizione di $\mathbf{y}_s$:

$$\mathbf{y}_s \approx \gamma_{xs} \mathbf{e}_x + \gamma_{ys} \mathbf{e}_y. \quad (2.32)$$

Si ricordi che il vettore scorrimento $\mathbf{y}_s$ tra una linea ed una superficie ortogonale a questa giace nel piano tangente alla superficie deformata ed ha modulo $\sin \gamma_s$, con γ_s scorrimento massimo, mentre il vettore $2(\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0)$ che l'approssima giace nel piano tangente alla superficie indeformata.

2.2.3 Significato fisico delle componenti del tensore di deformazione

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e siano $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ i versori degli assi cartesiani. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, tenendo quindi conto della relazione (2.17), le dilatazioni delle linee uscenti da un punto materiale $\mathbf{X}$ del continuo e parallele agli assi coordinati valgono:

$$\epsilon_x \approx \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_x, \quad \epsilon_y \approx \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_y, \quad \epsilon_z \approx \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z. \quad (2.33)$$

se $\boldsymbol{\epsilon}$ è il tensore di deformazione infinitesima nell'intorno del punto $\mathbf{X}$. Analogamente, gli scorrimenti delle stesse linee, ricordando la relazione (2.28), risultano:

$$\begin{aligned} \gamma_{zy} &= \gamma_{yz} \approx 2(\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_y), \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} \approx 2(\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z), \\ \gamma_{yx} &= \gamma_{xy} \approx 2(\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dalle (2.33) e (2.34) consegue quindi la seguente rappresentazione del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\epsilon}$ nel dato sistema cartesiano ortogonale

$Oxyz$, valida nell'ipotesi di piccoli spostamenti:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] \approx \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Tenendo conto delle relazioni tra componenti di deformazione e componenti di spostamento riportate nelle prime delle (2.4), ne conseguono le seguenti espressioni, valide nell'approssimazione lineare, tra le dilatazioni e gli scorrimenti delle linee coordinate uscenti da un punto e le componenti di spostamento:

$$\epsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.36a)$$

$$\epsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.36b)$$

$$\epsilon_z \approx \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.36c)$$

$$\gamma_{zy} \approx \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.36d)$$

$$\gamma_{xz} \approx \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.36e)$$

$$\gamma_{yx} \approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.36f)$$

Poiché, per via della simmetria, le componenti indipendenti del tensore di deformazione sono 6, risulta possibile rappresentarlo, come già il tensore degli sforzi, con un *vettore algebrico di deformazione* $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ di dimensione 6. È usuale riportare in tale rappresentazione le dilatazioni e gli scorrimenti delle linee coordinate:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Stante il significato fisico (2.35) delle componenti di deformazione, nel vettore di deformazione sono quindi riportate le componenti diagonali e il doppio di quelle non diagonali del tensore di deformazione. La scelta (2.37) per il vettore algebrico di deformazione, associata alla definizione precedentemente data del vettore algebrico $\{\sigma\}$ di sollecitazione, permette di esprimere il prodotto scalare tra il tensore degli sforzi σ e quello di deformazione ϵ nella forma algebrica:

$$\sigma \cdot \epsilon = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}. \quad (2.38)$$

Infatti, tenendo conto della simmetria di σ e ϵ :

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \epsilon &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \left(\frac{1}{2} \sigma_{zy} \gamma_{zy} + \frac{1}{2} \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \sigma_{zx} \gamma_{zx} \right) + \left(\frac{1}{2} \sigma_{yx} \gamma_{yx} + \frac{1}{2} \sigma_{xy} \gamma_{xy} \right) \\ &= \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{zy} \gamma_{zy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yx} \gamma_{yx} = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.2.4 Coefficiente di dilatazione cubica

Per valutare la variazione di volume nell'intorno di un punto materiale X si consideri in tale intorno un cubo elementare di lati di lunghezza dL e paralleli agli assi coordinati di un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$ (fig. 2.4). Il volume dV_0 del cubo indeformato vale quindi:

$$dV_0 = dL^3 \quad (2.40)$$

Sempre con riferimento alla fig. 2.4, dove gli assi $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ indicano le direzioni uscenti dal punto spaziale $\mathbf{x}$ corrispondenti nella deformazione alle direzioni degli assi x , y e z uscenti dal punto materiale X , il volume dV del cubo deformato vale:

$$dV = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) \cos \gamma_{xy} \cos \gamma_z dL^3, \quad (2.41)$$

dove γ_{xy} è lo scorrimento tra gli assi x e y mentre γ_z è il modulo dello scorrimento tra l'asse z e il piano xy . Nell'ipotesi di piccoli spostamenti la (2.41) diventa:

$$dV \approx (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dL^3, \quad (2.42)$$

avendo tenuto conto che in tale ipotesi risulta $\cos \gamma_{xy} \approx 1$ e $\cos \gamma_z \approx 1$. Sfruttando i valori dei volumi deformato e indeformato fornito dalle (2.40)

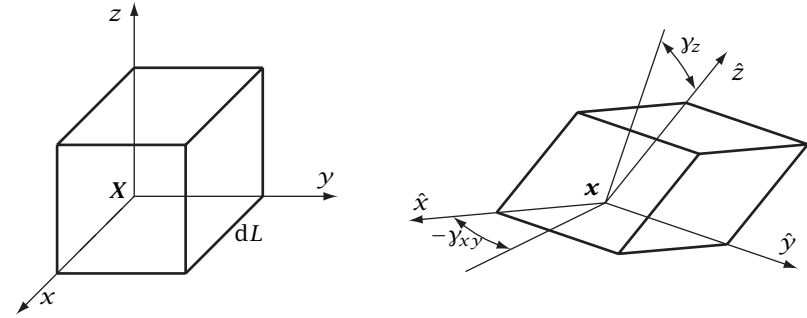


Figura 2.4: Coefficiente di dilatazione cubica

e (2.41) si ottiene il valore, nell'approssimazione lineare, del *coefficiente di dilatazione cubica*:

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (2.43)$$

La rappresentazione (2.35) del tensore ϵ di deformazione infinitesima permette di identificare il coefficiente di dilatazione cubica con la somma degli elementi diagonali di tale rappresentazione.

Poiché la somma degli elementi diagonali della rappresentazione cartesiana ortogonale di un tensore doppio $\mathbf{A}$ definisce la *traccia* $\text{tr } \mathbf{A}$ di $\mathbf{A}$ risulta quindi:

$$\theta \approx \text{tr } \epsilon. \quad (2.44)$$

Gli elementi diagonali della rappresentazione cartesiana ortogonale del tensore ω di rotazione infinitesima sono nulli, essendo il tensore emisimmetrico. Risulta quindi nulla anche la traccia di ω e si ha quindi:

$$\text{tr } \epsilon = \text{tr} (\text{Grad } \mathbf{u} - \omega) = \text{tr Grad } \mathbf{u}. \quad (2.45)$$

La rappresentazione del gradiente materiale degli spostamenti e la definizione di *divergenza* di un vettore⁴ permettono di porre la (2.44) nella

⁴La rappresentazione cartesiana ortogonale della divergenza di un vettore generico $\mathbf{a}$ funzione del punto materiale, e quindi delle sue coordinate materiali x, y e z , risulta:

$$\text{Div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

dove l'iniziale maiuscola dell'operatore di divergenza ricorda che in linea di principio tale operazione differenziale va eseguita nella configurazione di riferimento, che comunque, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, coincide approssimativamente con quella deformata.

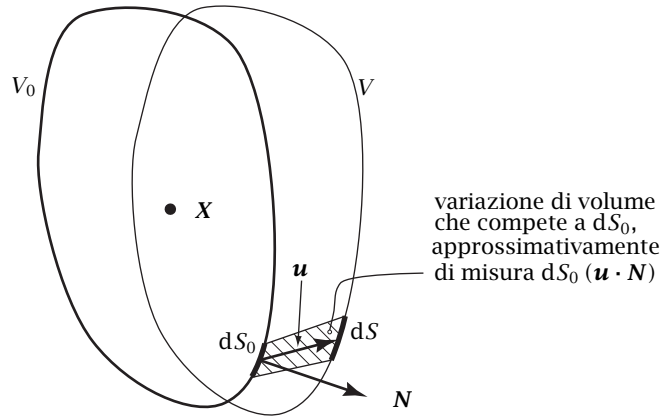


Figura 2.5: Flusso degli spostamenti

forma:

$$\theta \approx \text{Div } \mathbf{u}. \quad (2.46)$$

Per ottenere quest'ultima formula, si può anche considerare un volume V_0 (fig. 2.5) contenente il punto materiale X in corrispondenza del quale si vuole calcolare la dilatazione cubica e tenere conto che la variazione del volume uguaglia, a meno di termini di ordine superiore negli spostamenti, il flusso sul contorno ∂V_0 del volume degli stessi spostamenti:

$$V - V_0 \approx \int_{\partial V_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS_0. \quad (2.47)$$

Risulta allora:

$$\theta \approx \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{\int_{\partial V_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS_0}{V_0} = \text{Div } \mathbf{u}. \quad (2.48)$$

2.3 Compatibilità della deformazione

Se è dato un campo di deformazione $\epsilon(X)$ e lo si vuole integrare in un campo di spostamenti $\mathbf{u}(X)$ occorre valutare innanzitutto il tensore di rotazione infinitesima ω al fine di ottenere il gradiente degli spostamenti utilizzando la sua decomposizione (2.1). A tal fine si noti che un campo di

deformazioni definisce il gradiente del tensore di rotazione infinitesima. Infatti derivando rispetto alla generica coordinata x_h la generica componente ω_{ij} del tensore di rotazione infinitesima, fornita dalla seconda delle (2.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right) \right\}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \epsilon_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jh}}{\partial x_i}. \quad (2.49)$$

Integrando prima il gradiente di ω e poi quello di $\mathbf{u}$ si ottiene, se tali integrazioni sono fattibili, il campo degli spostamenti di cui il dato campo di deformazione rappresenta la parte simmetrica del suo gradiente.

È intuitivo che in generale tale integrazione non è possibile, poiché il campo degli spostamenti incognito è individuato dai tre campi scalari delle sue componenti, che a loro volta devono soddisfare le 9 equazioni differenziali espresse dalla prima delle (2.4), di cui solo 6 indipendenti per la simmetria del tensore di deformazione. Si hanno dunque 6 equazioni differenziali per definire 3 campi incogniti. Le condizioni che il campo di deformazione deve soddisfare rappresentano innanzitutto le condizioni per l'integrabilità delle (2.49) nel campo tensoriale emisimmetrico ω . Se il corpo continuo è monoconnesso, condizione necessaria e sufficiente per tale integrabilità, come noto, è che le derivate seconde delle componenti di ω rispetto a due generiche coordinate siano invertibili (*teorema di Schwartz*):

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_h} = 0. \quad (2.50)$$

Inserendo in tali condizioni le (2.49) si ottengono le condizioni di integrabilità espresse per il tramite del dato campo ϵ di deformazione.

Posto:

$$\mathbb{R}_{ijhk} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right), \quad (2.51)$$

si ottengono le condizioni:

$$\mathbb{R}_{ijhk} = 0, \quad (2.52)$$

dette *equazioni di compatibilità (o di congruenza) di Saint-Venant*. La (2.51) definisce in ogni punto del continuo un tensore $\mathbb{R}$ del quarto ordine detto *tensore di incompatibilità* e dipendente dal dato campo di deformazione. Si osservi che, indipendentemente da ϵ , le (2.52) sono identicamente soddisfatte se $i = j$ oppure $h = k$ e che inoltre valgono le identità:

$$\mathbb{R}_{jihk} = \mathbb{R}_{ijkh} = -\mathbb{R}_{ijhk}, \quad (2.53a)$$

$$\mathbb{R}_{ijhk} = \mathbb{R}_{hkij}. \quad (2.53b)$$

Ne consegue che le equazioni di compatibilità (2.52) indipendenti si riducono a 6, che per esteso si possono scrivere:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} = 0, \quad (2.54a)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0, \quad (2.54b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial x} = 0, \quad (2.54c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial x} = 0, \quad (2.54d)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2.54e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (2.54f)$$

Ottenuto il tensore di rotazione infinitesimo ω occorre integrare le equazioni:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (2.55)$$

Nel caso di corpi monoconnessi, la condizione necessaria e sufficiente per tale integrabilità richiede ancora una volta l'invertibilità dell'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_j} = 0. \quad (2.56)$$

Tenendo conto delle relazioni (2.49), la (2.56) è identicamente soddisfatta ed è quindi a tal punto possibile integrare la (2.55) nel campo degli spostamenti ignoto.

Se il corpo continuo è pluriconnesso, le condizioni di compatibilità (2.50), come noto, sono solo necessarie. Per poter integrare la (2.49) nel campo emisimmetrico ω occorre anche che sia nulla la circolazione del gradiente di ω su una qualunque curva chiusa che non possa ridursi con continuità a un punto senza fuoriuscire dal dominio del corpo continuo. Detta ℓ una qualunque di tali curve chiuse e con riferimento al vettore assiale φ di ω , deve quindi risultare:

$$\oint_{\ell} (\text{grad } \varphi) \mathbf{t} ds = \mathbf{0}, \quad (2.57)$$

dove $\mathbf{t}$ è il versore tangente alla curva. Se questa condizione è soddisfatta per una delle dette curve chiuse, lo è automaticamente per tutte quelle curve chiuse che possono trasformarsi con continuità nella detta curva senza fuoriuscire dal corpo. Questa circostanza restringe il numero delle curve chiuse su cui imporre la condizione (2.57) al numero delle connessioni del corpo meno uno.

Sempre nel caso di pluriconnessione del corpo, per poter poi integrare la (2.55) nel campo degli spostamenti $\mathbf{u}$, occorre imporre le analoghe condizioni di circolazione nulla del gradiente degli spostamenti:

$$\oint_{\ell} (\epsilon + \omega) \mathbf{t} ds = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

Capitolo 3

Direzioni principali di tensione e di deformazione

Nel caso del tensore degli sforzi σ , l'equazione determinatrice degli autovalori ed autovettori si scrive:

$$\sigma \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n},$$

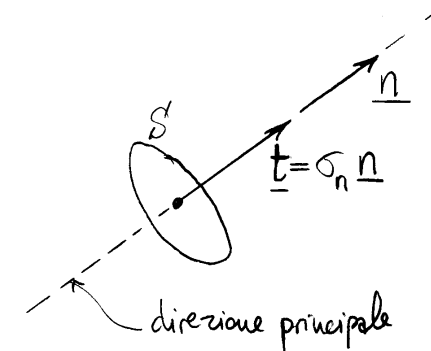
dove $\mathbf{n}$ rappresenta il versore normale di un elemento di superficie nell'intorno del punto in corrispondenza del quale la tensione interna è individuata da σ .

Poiché $\sigma \mathbf{n}$ rappresenta la tensione agente nell'elemento di superficie di normale $\mathbf{n}$, è evidente il significato fisico delle direzioni principali di tensione. Su un elemento di superficie di normale una direzione principale la tensione è normale alla superficie stessa e sono quindi nulle le tensioni tangenziali.

La tensione normale vale invece:

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot (\sigma \mathbf{n}).$$

Dunque, un autovalore λ rappresenta la tensione normale, che coincide con la tensione totale, agente su un elemento di superficie normale



alla direzione principale associata a λ . Per questo motivo gli autovalori del tensore degli sforzi sono anche detti tensioni principali.

Le direzioni principali di deformazione si ottengono invece risolvendo il problema agli autovalori e autovettori associato a ϵ :

$$\epsilon \mathbf{t}_0 = \lambda \mathbf{t}_0.$$

Si ricorda che la dilatazione di una linea t_0 di versore $\underline{t}_0$ vale:

$$\epsilon_t = \underline{t}_0 \cdot \underline{\epsilon} \underline{t}_0.$$

Ne consegue che un autovalore rappresenta la dilatazione della linea uscente dal punto individuata dall'autovettore associato e per tale motivo gli autovalori del tensore di deformazione sono anche detti *dilatazioni principali*. Se t_0 è una direzione principale di $\underline{\epsilon}$ allora risulta nullo lo scorrimento $\underline{y}_t$ di tale linea con il piano perpendicolare:

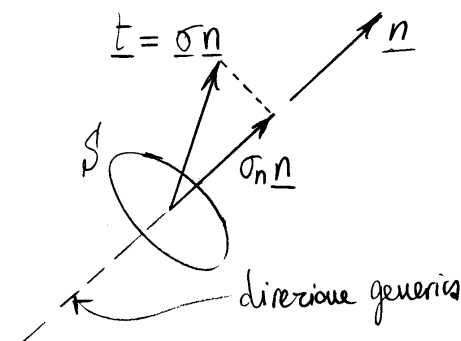
$$\underline{y}_t = 2(\underline{\epsilon} \underline{t}_0 - \epsilon_t \underline{t}_0) = \underline{0},$$

poiché ϵ_t rappresenta l'autovalore associato alla direzione t_0 .

Ne risulta che una direzione principale può subire una dilatazione (salvo che l'autovalore non sia nullo), ma non degli scorrimenti con le rette del piano perpendicolare alla stessa direzione principale.

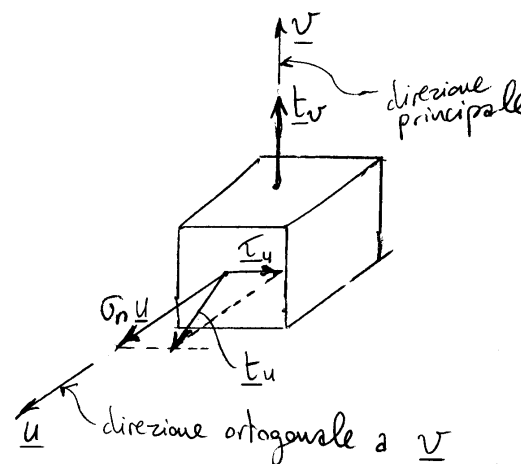
Ricordando la proprietà di estremo dei valori principali, ne risulta che il massimo ed il minimo valore

principale di tensione nell'intorno di un punto rappresentano rispettivamente il massimo e il minimo fra tutte le componenti normali di tensione σ_n .



Analogamente, la massima e la minima dilatazione nel fascio di sostegno un punto coincidono con il massimo e il minimo tra i valori delle dilatazioni principali.

Si ricorda inoltre che i vettori ortogonali ad una direzione principale $\underline{v}$ si trasformano ancora in vettori ortogonali alla stessa direzione. Quindi su tutte le giaciture di sostegno la direzione principale $\underline{v}$ la tensione risulta ortogonale alla dire-



zione principale. Questo è in accordo con il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali, che richiede che sulle giaciture di sostegno $\mathbf{v}$ le componenti tangenziali agenti in direzione $\mathbf{v}$ siano nulle poiché sulla giacitura principale sono nulle le tensioni tangenziali reciproche.

Che nel caso del tensore di deformazione il vettore $\epsilon \mathbf{u}$ sia perpendicolare alla direzione principale è invece in accordo col fatto che $\epsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ rappresenta metà dello scorrimento γ_{uv} tra la linea principale $\mathbf{v}$ e quella ortogonale $\mathbf{u}$.

Per quel che riguarda la rappresentazione di Mohr occorre considerare che sugli assi del piano di Mohr vanno riportate, nel caso del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, le tensioni normali σ in ascissa e le tensioni tangenziali τ in ordinata. Nel caso del tensore di deformazione ϵ vanno invece riportate le dilatazioni lineari ϵ in ascissa e la metà degli scorrimenti $\frac{1}{2}\gamma$ in ordinata.

Nel caso piano, detto Oxy il sistema di coordinate cartesiano ortogonale destro, la circonferenza di Mohr si può tracciare a partire dai punti rappresentativi degli assi x e y che hanno coordinate $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ e rispettivamente (σ_y, τ_{xy}) nel caso della tensione e $(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ e rispettivamente $(\epsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$ nel caso della deformazione.

Si ricordi infine che esistono sempre tre direzioni principali ortogonali tra loro e che quindi è sempre possibile, senza restrizioni, assumere localmente un *sistema principale di coordinate* cartesiano ortogonale, sia per quel che riguarda la tensione che per quel che riguarda la deformazione. Tali sistemi di coordinate hanno gli assi coincidenti con tre direzioni principali di tensione oppure, rispettivamente, con tre direzioni principali di deformazione. Si noti che in generale il sistema di coordinate principale indotto dalla tensione non coinciderà con quello

indotto dalla deformazione. Si noti inoltre che tali sistemi di coordinate sono locali poiché i tensori degli sforzi e di deformazione, e quindi le loro direzioni principali, variano in generale da punto a punto.

Le tre direzioni principali di tensione associate ad ogni punto del corpo, ortogonali tra loro, inviluppano tre famiglie di curve, pure ortogonali tra loro, dette *linee isostatiche*. In particolare, le linee isostatiche hanno la proprietà che una qualunque giacitura ortogonale ad una di tali linee è soggetta solo a tensione normale e non a tensione tangenziale.

Per quel che riguarda il tensore di deformazione si tenga conto che le direzioni principali di deformazione restano invariate a seguito della deformazione stessa e che la rotazione rigida dell'intorno lascia ortogonali tre direzioni inizialmente ortogonali. Si può allora affermare che esistono sempre tre direzioni ortogonali uscenti da un punto che restano ortogonali anche dopo la deformazione.

3.1 Esercizio sulle direzioni principali di tensione

Sia:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

la rappresentazione algebrica, in un sistema ortonormale $Oxyz$, del tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ definito in un punto di un corpo continuo.

Si vogliono determinare:

- 1) I valori principali di tensione;
- 2) I vettori delle direzioni principali;
- 3) Le componenti, nel sistema $Oxyz$, del tensore rotazione $\underline{R}$ che ruota il sistema $Oxyz$

nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$.

4) Verificare, utilizzando la matrice $[\underline{R}]$, che la rappresentazione di $\underline{\sigma}$ nel sistema principale è diagonale, con i valori diagonali coincidenti con i valori principali.

Soluzione

L'equazione caratteristica si ottiene svolgendo il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 10-\lambda & -10 & 10 \\ -10 & 20-\lambda & 0 \\ 10 & 0 & 20-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

oppure calcolando gli invarianti principali di tensione:

$$\sigma_I = 10 + 20 + 20 = 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II} = (200 - 100) + (400 - 0) + (200 - 100) = 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$\begin{aligned}\sigma_{III} &= 20 \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 20 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 20 (200 - 100) - 2000 = 0 \text{ N}^3/\text{mm}^6.\end{aligned}$$

Si ottiene :

$$\lambda^3 - 50 \text{ N/mm}^2 \times \lambda^2 + 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4 \times \lambda = 0 \text{ N}^3/\text{mm}^6,$$

oppure :

$$\lambda (\lambda^2 - 50 \text{ N/mm}^2 \times \lambda + 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4) = 0 \text{ N}^3/\text{mm}^6,$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono :

$$\lambda = \begin{cases} 0 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{50 - \sqrt{2500 - 2400}}{2} = 20 \text{ N/mm}^2, \\ \frac{50 + \sqrt{2500 - 2400}}{2} = 30 \text{ N/mm}^2 \end{cases},$$

e queste rappresentano i valori principali di tensione:

$$\sigma_{\xi} = 0 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{\eta} = 20 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{\zeta} = 30 \text{ N/mm}^2.$$

Le direzioni principali ξ , η e ζ si ottengono dalla soluzione dei sistemi:

$$\begin{bmatrix} 10-0 & -10 & 10 \\ -10 & 20-0 & 0 \\ 10 & 0 & 20-0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10-20 & -10 & 10 \\ -10 & 20-20 & 0 \\ 10 & 0 & 20-20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10-30 & -10 & 10 \\ -10 & 20-30 & 0 \\ 10 & 0 & 20-30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Conservando per ogni sistema due sole equazioni linearmente indipendenti (la terza è senz'altro linearmente dipendente dalle altre due poiché il determinante dei coefficienti è nullo) si ottengono i sistemi :

$$\begin{cases} -10 \xi_x + 20 \xi_y = 0 \\ 10 \xi_x + 20 \xi_z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -10 \eta_x - 10 \eta_y + 10 \eta_z = 0 \\ 10 \eta_x = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -10 \zeta_x - 10 \zeta_y = 0 \\ 10 \zeta_x - 10 \zeta_z = 0 \end{cases}.$$

Imponendo infine alle componenti degli autovettori di essere componenti di un versore:

$$\begin{cases} \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 = 1 \\ \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = 1 \\ \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 = 1 \end{cases},$$

si ottengono, a meno del segno, gli autovettori:

$$\{e_\xi\} \equiv \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \mp\sqrt{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}, \{e_\eta\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}, \{e_\zeta\} \equiv \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \mp\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix}.$$

Per ogni direzione principale vi sono due autovettori, di verso opposto. La scelta del segno delle componenti è equivalente alla scelta del verso dell'autovettore. Attenzione: per un dato autovettore occorre scegliere o tutti i segni superiori o tutti i segni inferiori. La scelta seguente:

$$\{e_\xi\} \equiv \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}, \{e_\eta\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}, \{e_\zeta\} \equiv \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix},$$

rende il sistema $O\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento destro. Per verificarlo occorre mostrare che:

$$\underline{e}_\xi \times \underline{e}_\eta = \underline{e}_\zeta.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\underline{e}_\xi \times \underline{e}_\eta &= \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}, \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{12}} + \sqrt{\frac{1}{12}} \right) \underline{e}_x - \sqrt{\frac{1}{3}} \underline{e}_y + \sqrt{\frac{1}{3}} \underline{e}_z = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \underline{e}_x - \sqrt{\frac{1}{3}} \underline{e}_y + \sqrt{\frac{1}{3}} \underline{e}_z.\end{aligned}$$

Il tensore rotazione $\underline{R}$ che porta il sistema $Oxyz$ nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ soddisfa le condizioni

$$\underline{R} \underline{e}_x = \underline{e}_\xi, \quad \underline{R} \underline{e}_y = \underline{e}_\eta, \quad \underline{R} \underline{e}_z = \underline{e}_\zeta.$$

Come già noto, la matrice delle componenti di $\underline{R}$ nel sistema $Oxyz$ ha per colonne le componenti, sempre nel sistema $Oxyz$, degli autovettori (che sono i vettori della base principale):

$$[\underline{R}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

Risulta:

$$[\underline{\sigma}] [\underline{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{300} \\ 0 & \sqrt{200} & -\sqrt{300} \\ 0 & \sqrt{200} & \sqrt{300} \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Notare che tale matrice ha per colonne gli autovettori moltiplicati ognuno per l'autovalore corrispondente. Infatti:

$$\begin{aligned}e_i \cdot (\underline{\sigma} \underline{R}) e_j &= e_i \cdot \underline{\sigma} (\underline{R} e_j) = e_i \cdot (\lambda_j \underline{R} e_j) \\ &= \lambda_j (e_i \cdot \underline{R} e_j) = \lambda_j R_{ij}.\end{aligned}$$

Infine:

$$[\underline{R}]^T [\underline{\sigma}] [\underline{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Attenzione!: nell'operazione $[\underline{R}]^T [\underline{\sigma}] [\underline{R}]$ è sottinteso che le componenti siano tutte calcolate rispetto allo stesso sistema di riferimento, che nel caso in esame è il sistema $Oxyz$ di partenza.

Il risultato rappresenta sia le componenti del tensore $\underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}$ nel sistema $Oxyz$ di partenza, che le componenti del tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ nel riferimento principale $O\xi\eta\zeta$.

Notiamo che il vettore $\underline{e}_\eta$ ha componente nulla

rispetto all'asse x ed uguali componenti rispetto agli assi y e z . Quindi l'asse giace nel piano yz e biseca il quadrante positivo di tale piano. Poiché l'asse x è ortogonale al piano yz contenente η , appartiene al piano di ξ e ζ .

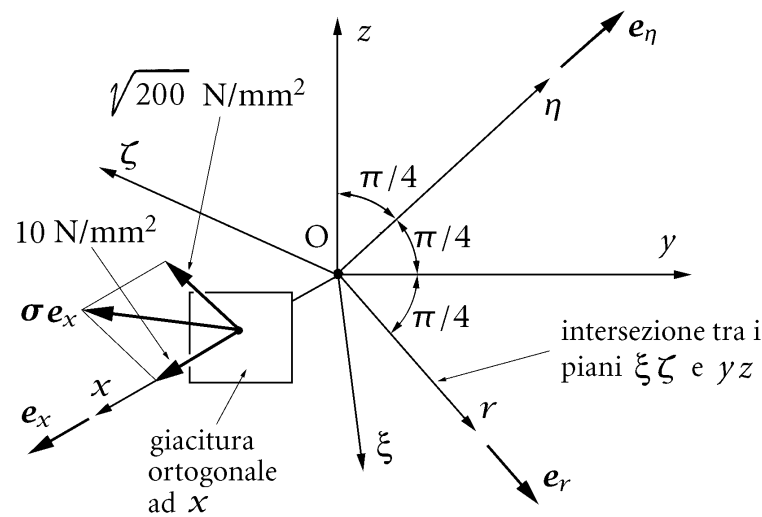
Questo significa che il punto rappresentativo dell'asse

x :

$$\begin{cases} \sigma_x = 10 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} \text{ N/mm}^2 \end{cases},$$

giace sulla circonferenza di Mohr esterna, relativa alle giaciture di sostegno l'asse η . Se si vuole rendere operativa tale circonferenza occorre anche dare un segno alla tensione tangenziale τ_x .

A tale scopo scegliamo un asse r ortogonale ad x di verso tale che $\underline{e}_x \times \underline{e}_r = \underline{e}_\eta$.



Naturalmente r giace nel piano $y\zeta$ ed è ortogonale ad η . Quindi l'angolo tra r e y vale $\pi/4$ e le componenti del versore di r , nel sistema $Oxyz$, sono:

$$\{e_r\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \end{Bmatrix}.$$

Si ha dunque:

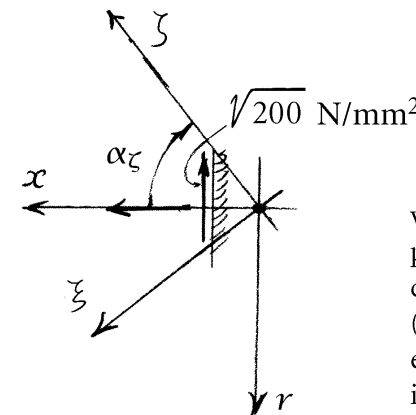
$$\tau_{rx} = e_r \cdot \sigma e_x = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2,$$

ciò:

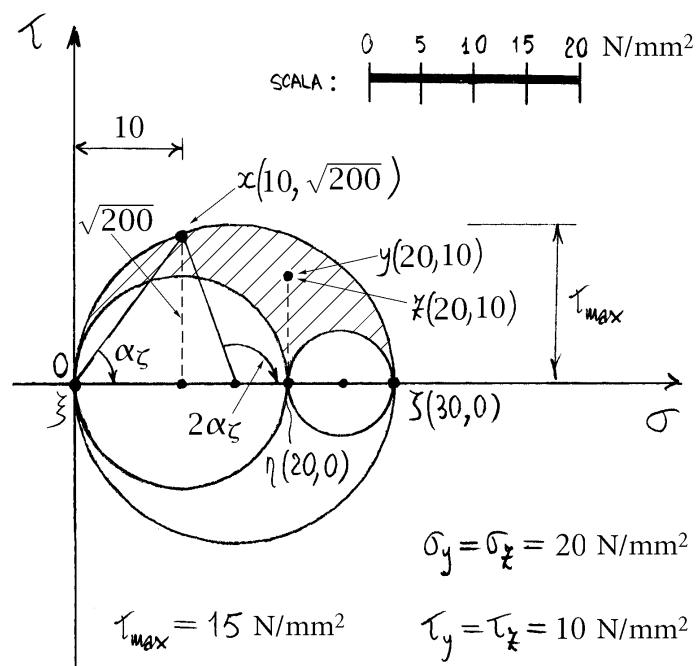
$$\tau_{rx} = -10\sqrt{\frac{1}{2}} - 10\sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{200} \text{ N/mm}^2,$$

Il punto rappresentativo dell'asse x è dunque $(\sigma_x, -\tau_{rx}) = (10 \text{ N/mm}^2, \sqrt{200} \text{ N/mm}^2)$.

Si ricordi che questo risultato dipende dal fatto che il secondo asse del riferimento locale, quello che in tal caso fornisce la componente tangenziale della tensione, si ottiene ruotando il primo asse, e cioè l'asse x , in senso orario sulla faccia positiva del piano xr , faccia di asse η uscente positivo. In altre parole la componente tangenziale da riportare nel piano di Mohr è valutata rispetto all'asse $-r$, avente la direzione di r ma verso opposto. Si noti che se la componente tangenziale è positiva nel riferimento locale allora induce una rotazione oraria ad un elemento di volume avente sul contorno la giacitura su cui agisce la tensione tangenziale stessa.



visti dalla pagina positiva individuata dal versore $e_x \times e_r$ (che nel caso in esame coincide con il versore e_η)



Per ottenere l'asse principale ζ occorre ruotare l'asse x in senso "orario" (se si guarda la pagina positiva definita dalla coppia xr , in questo ordine) dell'angolo α_ζ che, come risulta dalla circonferenza di Mohr, soddisfa la relazione:

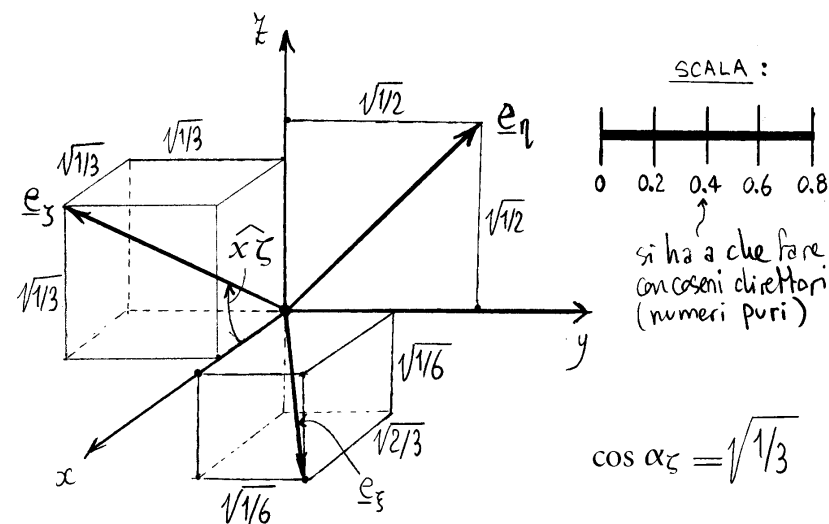
$$\tan \alpha_\zeta = \frac{\sqrt{200}}{10} = \sqrt{2}.$$

Ne risulta quindi:

$$\alpha_\zeta = -\arctan \sqrt{2} = -54.74^\circ.$$

D'altronde, il coseno direttore di ζ rispetto a x vale $1/\sqrt{3}$ e dunque:

$$\hat{x}\zeta = \arccos 1/\sqrt{3} = 54.74^\circ.$$



Alternativamente, utilizzando la formula che individua la direzione principale ζ rispetto al primo asse (nel nostro caso l'asse x) si ottiene:

$$\tan \alpha_\zeta = \frac{\sigma_\zeta - \sigma_x}{\tau_{xr}} = \frac{30 - 10}{-\sqrt{200}} = -\sqrt{2},$$

e quindi:

$$\alpha_\zeta = \arctan(-\sqrt{2}) = -54.74^\circ.$$

Tenendo poi conto che:

$$\sigma_r = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sqrt{200} \\ \sqrt{200} \\ -\sqrt{200} \end{Bmatrix} = 20 \text{ N/mm}^2,$$

si può utilizzare invece la formula che individua entrambe le direzioni principali. Si ottiene:

$$\tan 2\alpha_o = \frac{2\tau_{xr}}{\sigma_x - \sigma_r} = 2 \frac{-\sqrt{200}}{10 - 20} = 2\sqrt{2},$$

e quindi:

$$\alpha_o = \frac{1}{2} \arctan(2\sqrt{2}) = 35.26^\circ.$$

Poiché l'arcotangente di un angolo è compresa tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, applicando tale funzione l'angolo α_o che si ottiene è compreso tra $-\pi/4$ e $\pi/4$. L'angolo α_ζ è all'infuori del dato intervallo e quindi applicando la funzione arcotangente si ottiene l'angolo che individua, sempre rispetto all'asse x , l'altra direzione principale.

3.2 Esercizio sulle direzioni principali di deformazione

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema $Oxyz$ cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = \left\{ (1 \text{ m}^{-2}) x^3 - 6y + (2 \text{ m}) \right\} \times 10^{-3}, \\ v = \left\{ - (3 \text{ m}^{-1}) x^2 + 3y - (4 \text{ m}) \right\} \times 10^{-3}, \\ w = - (1 \text{ m}^{-2}) z^3 \times 10^{-3}. \end{cases}$$

1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi nel punto P di coordinate $(0, 0, 1 \text{ m})$;
2. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
3. Determinare dilatazione e scorrimento massimi (in modulo), sempre nel punto P;
4. Con riferimento al sistema locale $Pxyz$, determinare lo scorrimento, nel punto P, tra l'asse x e la bisettrice s del primo quadrante nel piano yz , orientata dal punto P all'interno del primo quadrante, e dire se l'angolo tra x ed s aumenta o diminuisce.

SOLUZIONE

Il gradiente degli spostamenti vale:

$$[\text{grad } \underline{u}] \equiv \begin{bmatrix} (3 \text{ m}^{-2}) x^2 & -6 & 0 \\ -(6 \text{ m}^{-1}) x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(3 \text{ m}^{-2}) z^2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Nel punto $(0,0,1 \text{ m})$ si ha quindi:

$$[\text{grad } \underline{u}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$[\underline{\omega}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Il vettore della rotazione rigida dell'intorno del punto P ha componenti:

$$\{\underline{\varphi}\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \times 10^{-3} \end{Bmatrix},$$

e ne risulta una rotazione di ampiezza 3×10^{-3} rad attorno all'asse z .

L'asse z rappresenta una direzione principale di dilatazione, con dilatazione principale pari a:

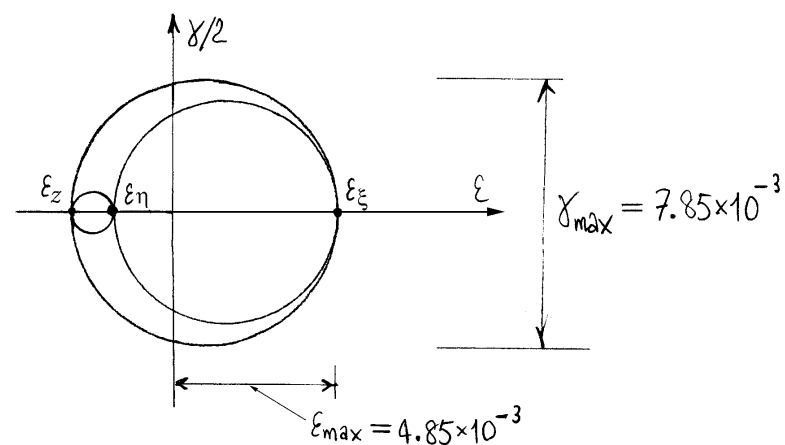
$$\varepsilon_z = -3 \times 10^{-3}.$$

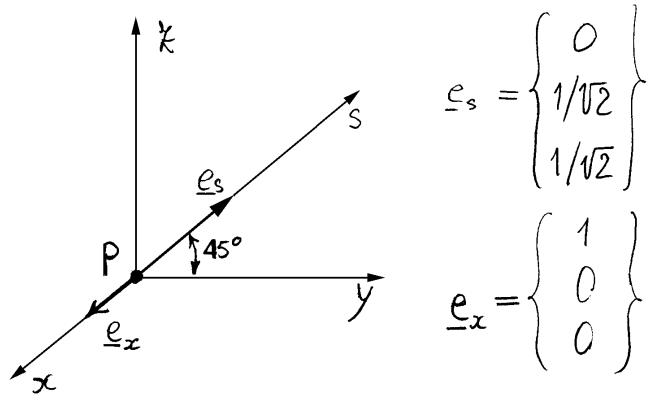
Le altre due dilatazioni principali si determinano ponendo:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -3 \times 10^{-3} \\ -3 \times 10^{-3} & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Si ottiene:

$$\lambda^2 - 3 \times 10^{-3} \lambda - 9 \times 10^{-6} = 0,$$





$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ 3 \times 10^{-3} \pm \sqrt{9 \times 10^{-6} + 36 \times 10^{-6}} \right\} = \begin{Bmatrix} 4.85 \times 10^{-3} \\ -1.85 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \gamma_{sx} &= 2 \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e}_s = \\ &= 2 \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{6}{\sqrt{2}} \times 10^{-3} \text{ rad.} \end{aligned}$$

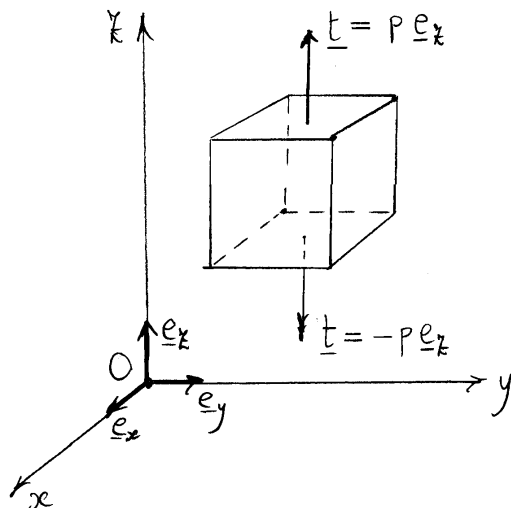
Essendo $\gamma_{xs} < 0$, l'angolo tra le parti positive degli assi x ed s aumenta.

Capitolo 4

Stati elementari di tensione e di deformazione

4.1 Trazione semplice

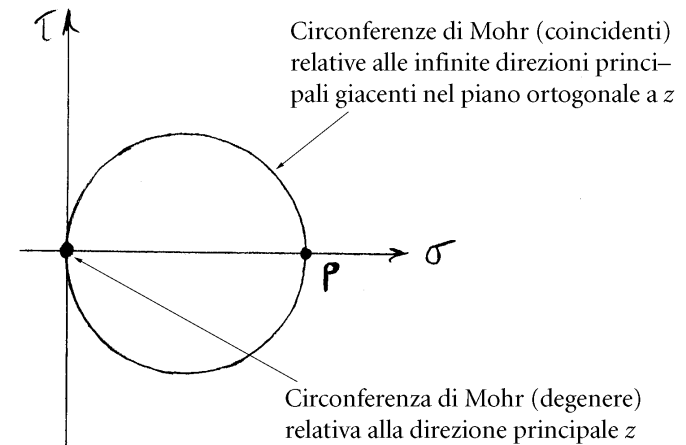
Si dice che si ha trazione semplice nella direzione dell'asse z se la tensione, in una giacitura di normale z , è ortogonale alla giacitura e uscente dall'elemento di volume, e se la tensione, in



una qualunque giacitura di sostegno z , è nulla. In un sistema di riferimento $Oxy\bar{z}$ il tensore $\underline{\sigma}$ degli sforzi ha componenti:

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

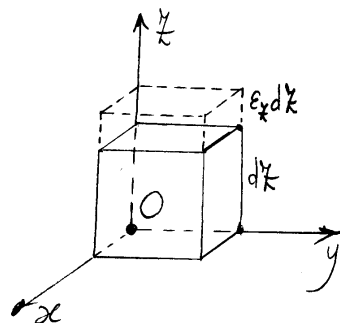
Naturalmente se $p < 0$ la tensione agente nella giacitura di normale z è entrante nell'elemento



di volume e in tal caso, più propriamente, si parla di compressione semplice.

4.2 Dilatazione semplice

La controparte deformativa della trazione semplice è lo stato di *dilatazione semplice* in una data direzione. Se la direzione della dilatazione è quella dell'asse z , si richiede che si abbia dilatazione nella direzione di tale asse, mentre la dilatazione nelle direzioni ortogonali all'asse z devono essere nulle così come gli scorrimenti tra l'asse z e gli assi ortogonali a questo.

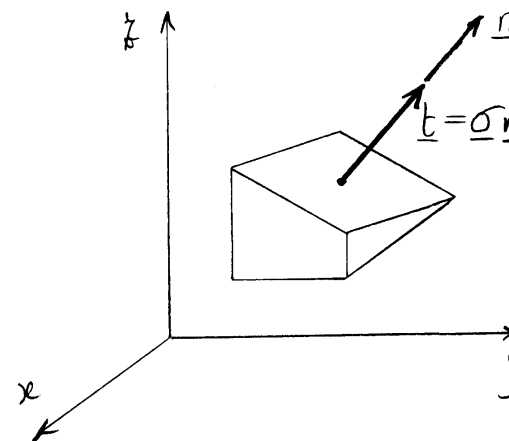


In un sistema di riferimento $Oxyz$ le componenti di $\underline{\varepsilon}$ risultano:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_x \end{bmatrix}.$$

4.3 Trazione uniforme

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno stato di trazione uniforme se la tensione in una qualunque giacitura nell'intorno del punto



agisce ortogonalmente alla giacitura.

Questo significa che la tensione deve avere la direzione della normale $\underline{n}$:

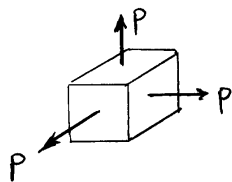
$$\underline{\sigma n} = \lambda_n \underline{n}, \quad \text{per ogni } \underline{n}.$$

Tutte le direzioni dello spazio sono dunque principali e questa è possibile se e solo se l'equazione caratteristica ammette una radice tripla, cioè se il tensore degli sforzi risulta sferico:

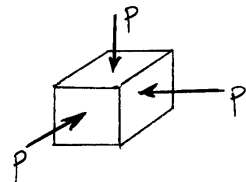
$$\underline{\sigma} = p \underline{I}.$$

Per tale motivo lo stato di tensione in tal caso è anche detto sferico o isotropo.

Se la tensione è entrante nell'elemento di volume, cioè se $p < 0$ si parla più propriamente di compressione uniforme.



trazione uniforme



compressione uniforme

4.4 Dilatazione uniforme

Analogamente alla trazione uniforme, nel caso della deformazione si ha la *dilatazione uniforme*:

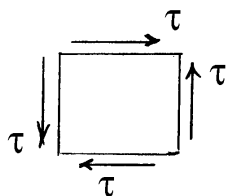
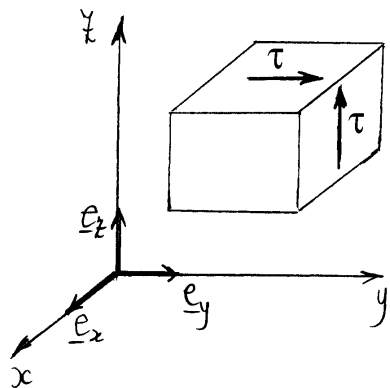
$$\underline{\varepsilon} \underline{e}_v = \lambda_v \underline{e}_v \quad \text{per ogni direzione } \underline{e}_v.$$

Tutte le direzioni dello spazio devono essere principali e quindi $\underline{\varepsilon}$ risulta sferico:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{I}, \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

4.5 Taglio semplice

Si dice che nell'intorno di un punto si ha una sollecitazione di taglio semplice se esistono tre giaciture ortogonali tra loro in una delle quali la tensione è nulla mentre nelle altre due la tensione ha la sola componente tangenziale. Nelle due giaciture dove è presente la sola componente tangenziale, la tensione è diretta ortogonalmente allo spigolo comune. D'altronde, per

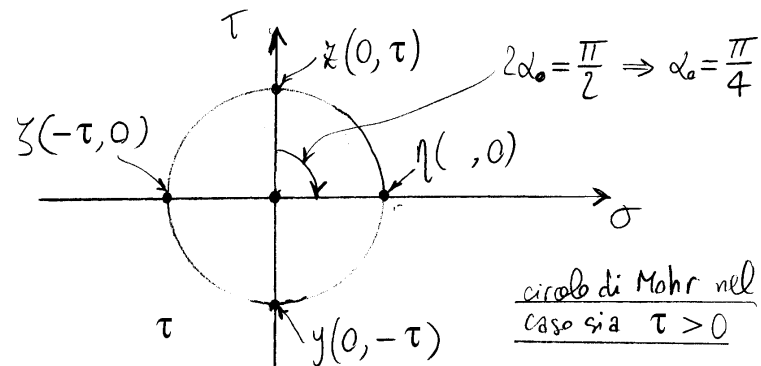


il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali tali tensioni sono uguali e dirette entrambe verso lo spigolo comune oppure entrambe uscenti dallo spigolo comune. In un sistema di riferimento $Oxyz$ con x ortogonale alla giacitura con tensione nulla e y e z ortogonali alle altre due giaciture, la rappresentazione di $\underline{\sigma}$ risulta:

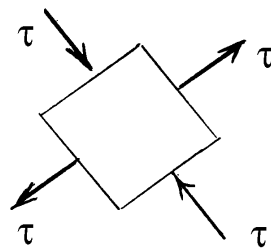
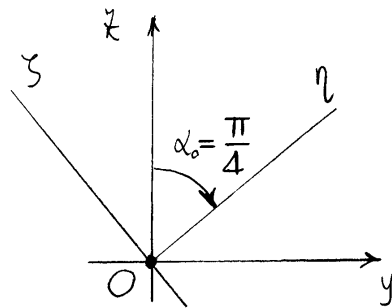
$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}.$$

La direzione x è principale. Le direzioni principali nel piano yz ed i relativi valori principali possono determinarsi utilizzando la circonferenza di Mohr relativa alle giaciture di sostegno l' asse x ,

circonferenza che contiene i punti rappresentativi delle giaciture di normale y e z .



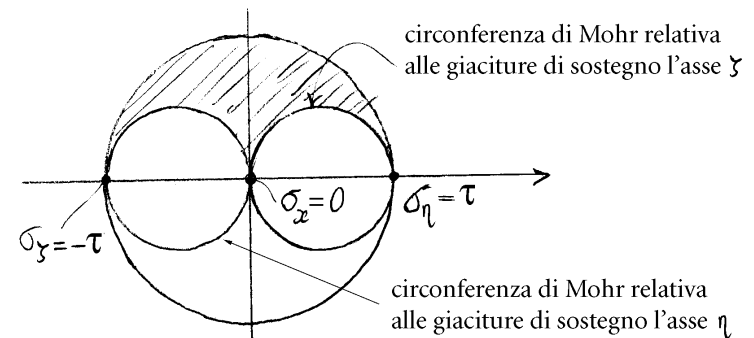
Il punto rappresentativo dell'asse y ha coordinate $(0, -\tau)$ e quello dell'asse z $(0, \tau)$. Il centro della circonferenza è il punto



$(0, 0)$ e il suo raggio vale $|\tau|$. Dunque si hanno i due valori principali:

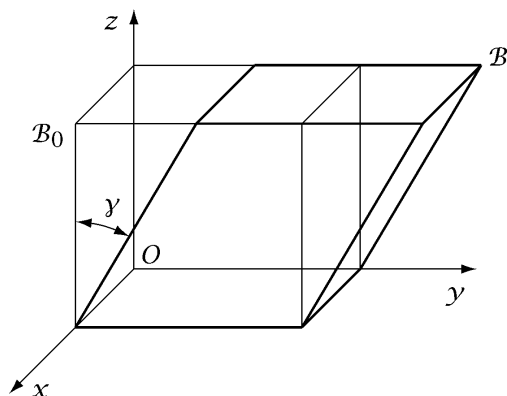
$$\begin{cases} \sigma_z = -\tau & \text{di compressione se } \tau > 0 \\ \sigma_y = \tau & \text{di trazione se } \tau > 0 \end{cases}$$

Se $\tau > 0$, la direzione principale di trazione rappresenta la bisettrice del quadrante positivo del piano y, z .



4.6 Scorrimento semplice

Si ha scorrimento semplice se in cubo elementare nell'intorno di un punto una faccia scorre rispetto a quella parallela.



Le componenti, nel sistema di riferimento $Oxyz$ illustrato in figura, del campo degli spostamenti $\mathbf{u}$, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, risulta:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = yz, \\ w = 0 \end{cases}$$

dove y rappresenta lo scorrimento tra le linee parallele agli assi coordinati y e z .

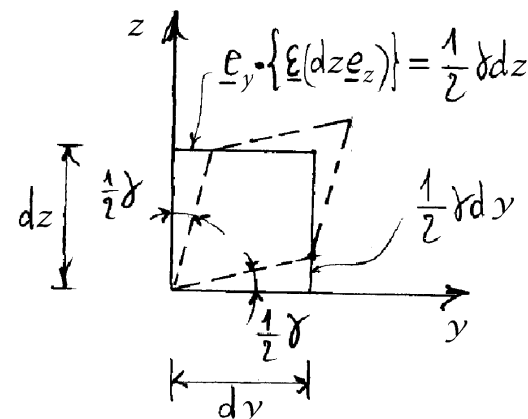
Dal campo materiale degli spostamenti si ottiene il gradiente materiale degli spostamenti $\text{Grad } \mathbf{u}$:

$$[\text{Grad } \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La parte simmetrica e quella emisimmetrica del gradiente materiale degli spostamenti forniscono rispettivamente i tensori di deformazione infinitesima ϵ e di rotazione ω :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}y \\ 0 & \frac{1}{2}y & 0 \end{bmatrix}, \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}y \\ 0 & -\frac{1}{2}y & 0 \end{bmatrix}.$$

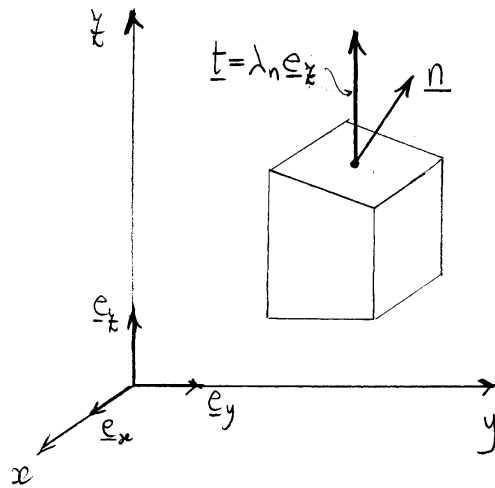
Si noti che la rotazione rigida dell'intorno ha ampiezza $\frac{1}{2}y$ e avviene attorno all'asse x . Nella figura seguente è illustrato l'effetto della sola deformazione.



4.7 stato di tensione monoassiale

Si dice che si ha stato di tensione monoassiale se la tensione, su una qualunque giacitura, ha

sempre la stessa direzione. Se $\underline{e}_z$ è il versore della direzione predetta, deve aversi $\underline{t} = \lambda_n \underline{e}_z$.



per un certo scalare λ_n , eventualmente dipendente da $\underline{n}$. Quindi, dato un $\underline{n}$ generico, deve risultare:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \lambda_n \underline{e}_z,$$

e in particolare:

$$\underline{\sigma} \underline{e}_z = \lambda_z \underline{e}_z.$$

Dunque, $\underline{e}_z$ rappresenta una direzione principale.

Sia poi $\underline{e}_v$ un qualunque versore ortogonale ad $\underline{e}_z$:

$$\underline{e}_z \cdot \underline{e}_v = 0.$$

Anche sulla giacitura di normale $\underline{e}_v$ la tensione deve avere la direzione di $\underline{e}_z$, che è quella della tensione tangenziale τ_{zv} :

$$\underline{\sigma} \underline{e}_v = \tau_{zv} \underline{e}_z.$$

Poiché tale tensione tangenziale è nulla per reciprocità ne consegue che la tensione è nulla nelle giaciture di sostegno l'asse z . Si ricade dunque nel caso della trazione semplice in direzione z .

4.8 stato di deformazione monoassiale

Si dice che lo stato di deformazione nell'intorno di un punto è *monoassiale* se gli spostamenti dei punti di tale intorno, depurati dell'effetto della rotazione rigida locale, avvengano tutti in una direzione comune. Se la direzione comune è quella dell'asse z deve dunque risultare:

$$\epsilon \mathbf{r} = \lambda_r \mathbf{e}_z,$$

dove $\mathbf{r}$ è il versore di una generica direzione uscente dal punto in cui lo stato di deformazione è monoassiale e λ_r uno scalare eventualmente dipendente dalla direzione. Poiché la relazione deve valere anche per la direzione dell'asse z , ne consegue che l'asse z è un asse principale. Questo assicura che gli scorrimenti tra l'asse z e gli assi ortogonali a questo sono nulle. Inoltre, se x è un qualunque asse ortogonale a z , il vettore di deformazione deve avere la direzione di z e quindi la sola componente γ_{xz} che, come già visto, è nulla. Ne consegue che lo stato di deformazione monoassiale coincide con quello di dilatazione semplice.

4.9 stato di tensione piano

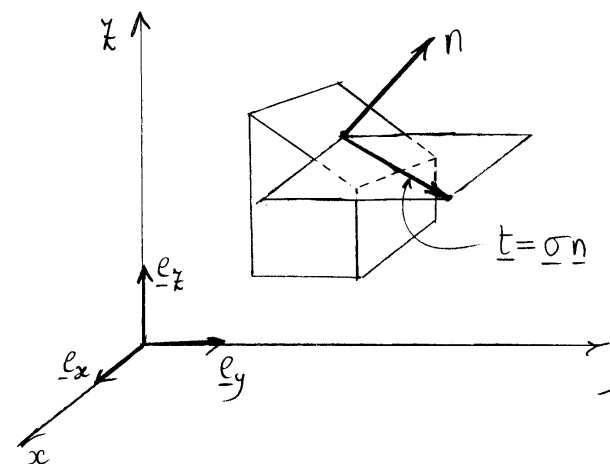
In tal caso si richiede alla tensione agente in una qualunque giacitura di essere parallela ad un piano. Se $\mathbf{e}_z$ rappresenta il versore normale

al piano deve quindi aversi

$$\mathbf{e}_z \cdot (\underline{\sigma} \mathbf{n}) = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{n}.$$

Per la simmetria di $\underline{\sigma}$ questa condizione diventa:

$$\mathbf{n} \cdot (\underline{\sigma} \mathbf{e}_z) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{n}$$



ed infine:

$$\underline{\sigma} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}.$$

Ne risulta allora che la tensione in una giacitura

di normale $\underline{e}_z$ è nulla, il che poi equivale a dire che $\underline{e}_z$ è un autovettore di $\underline{\sigma}$ corrispondente ad un autovalore nullo.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxy\bar{z}$, dove ancora $\bar{z}$ indica la direzione normale al piano delle tensioni, il tensore degli sforzi si rappresenta nella forma:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.10 stato di deformazione piano

Stato di deformazione piano (piano ortogonale alla direzione $\bar{z}$):

$$\underline{e}_z \cdot (\underline{\varepsilon} \underline{e}_v) = 0, \quad \text{per ogni direzione } \underline{e}_v.$$

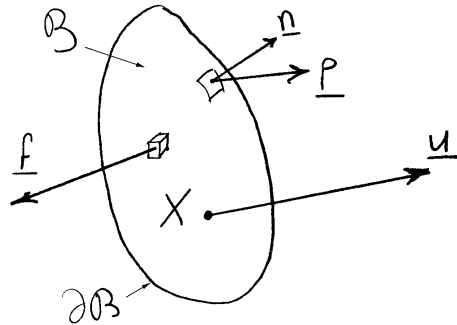
In un sistema di riferimento $Oxy\bar{z}$ le componenti di $\underline{\varepsilon}$ risultano:

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 5

Principio dei lavori virtuali

Sia data una possibile configurazione $\mathcal{B}$ di un corpo solido, di contorno $\partial\mathcal{B}$, non soggetto a vincoli esterni



Un sistema di forze e tensioni agenti nella data configurazione $\mathcal{B}$ del corpo è definito una volta che siano date le forze di volume $\underline{f}$, quelle di superficie $\underline{p}$ e il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ quali campi arbitrari in $\mathcal{B}$. Il dato sistema di forze e tensioni è *equilibrato* se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio indefinite e al contorno:

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (1a)$$

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{p}, \quad \text{su } \partial\mathcal{B}, \quad (1b)$$

dove $\underline{n}$ è la normale uscente dalla superficie $\partial\mathcal{B}$ del contorno del solido e l'operatore divergenza è definito in $\mathcal{B}$.

Un sistema di spostamenti e deformazioni virtuali del dato corpo nella data configurazione $\mathcal{B}$ è definito una volta che siano dati un campo di spostamenti $\underline{u}$ e un campo di deformazioni $\underline{\epsilon}$ infinitesimi e congruenti. Si sottolinea il fatto che il termine infinitesimo non è sinonimo di piccolo ma di parte prima: gli spostamenti $\underline{u}$ e le deformazioni $\underline{\epsilon}$ virtuali sono la parte prima, negli spostamenti stessi, di spostamenti e di deformazioni finite. Uno spostamento virtuale non è approssimato dalla parte prima di uno spostamento, *uno spostamento virtuale è la parte prima di uno spostamento*. La congruenza richiede che il campo di spostamenti virtuale sia in accordo con le ipotesi di continuità e di differenziabilità a suo tempo discusse e che la deformazione $\underline{\epsilon}$ sia quella generata dallo stesso campo di spostamenti virtuali. Le parti prime di un campo di spostamenti e dell'associata deformazione soddisfano, in modo esatto, l'equazione di congruenza linearizzata:

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + \operatorname{grad} \underline{u}^T), \quad (2)$$

dove l'operatore gradiente è definito in $\mathcal{B}$.

Il lavoro L_{ve} del sistema di forze esterne $\underline{f}$ e $\underline{p}$ per gli spostamenti virtuali $\underline{u}$ viene detto *lavoro virtuale esterno*:

$$L_{ve} = \int_{\partial\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \underline{u} dS + \int_{\mathcal{B}} \underline{f} \cdot \underline{u} dV. \quad (3)$$

Il lavoro L_{vi} del sistema di forze interne $\underline{\sigma}$ per le deformazioni virtuali $\underline{\epsilon}$ viene detto *lavoro virtuale interno*:

$$L_{vi} = \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} dV. \quad (4)$$

Principio dei lavori virtuali. *il sistema di forze e tensioni $\mathbf{f}$, $\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ è equilibrato se e solo se il lavoro virtuale L_{ve} delle forze esterne uguaglia il lavoro virtuale L_{vi} delle forze interne per ogni sistema di spostamenti $\mathbf{u}$ e deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ virtuali congruenti:*

$$L_{ve} = L_{vi}. \quad (5)$$

Dimostrazione. Si supponga allora che le forze e tensioni $\mathbf{f}$, $\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ siano equilibrate.

Innanzitutto, occorre trasformare l'integrale di superficie utilizzando l'equazione di equilibrio al contorno e il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS &= \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{u}) \, dV. \end{aligned}$$

Risulta in generale:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}^T \mathbf{a}) = (\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{a},$$

dove $\mathbf{A}$ è un qualunque campo tensoriale in generale non simmetrico e $\mathbf{a}$ è un qualunque campo vettoriale. Infatti:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}^T \mathbf{a}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{a})_i = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ji} a_j) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{ij} \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i} a_j + \sum_{ij} A_{ji} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_j (\operatorname{div} \mathbf{A})_j a_j + \sum_{ij} A_{ji} (\operatorname{grad} \mathbf{a})_{ji}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \, dV,$$

Inoltre:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon},$$

poiché, in virtù della simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$ e della emisimmetria di $\boldsymbol{\omega}$ è $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$.

In definitiva:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dV,$$

e quindi:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dV.$$

In virtù dell'equazione indefinita di equilibrio ne segue immediatamente la (5).

Si supponga poi che la (5) valga per ogni sistema di spostamenti $\mathbf{u}$ e deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ virtuali congruenti. Procedendo nel senso inverso si ottiene allora:

$$\int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} \, dS = 0. \quad (6)$$

Come detto, la (6) deve valere per ogni campo $\mathbf{u}$ di spostamenti virtuali, e questo fa sì che può essere soddisfatta se e solo se le funzioni $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$ e $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}$ che sotto il segno di integrale sono moltiplicate per il campo $\mathbf{u}$ si annullano in tutti i punti del relativo dominio di definizione.¹ Ne conseguono le equazioni di equilibrio (1), come volevasi dimostrare. ■

Si noti che in termini dei vettori algebrici $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ di sollecitazione e $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ di deformazione virtuale il lavoro virtuale interno si scrive:

$$L_{vi} = \int_{\mathcal{B}} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}\} \, dV. \quad (7)$$

Si noti poi che per applicare il principio dei lavori virtuali nella forma testé dimostrata, occorre che il corpo oggetto di considerazione non sia vincolato. Se così non è occorre svincolarlo e considerare le reazioni vincolari parte delle forze esterne.

Si noti inoltre che il principio dei lavori virtuali non è ristretto all'ipotesi di piccoli spostamenti, poiché tale ipotesi non è stata utilizzata nella dimostrazione. Si noti comunque che la

configurazione $\mathcal{B}$ è quella nella quale sono definite sia le forze e le tensioni che gli spostamenti e le deformazioni virtuali ed è inoltre la configurazione nella quale si impone sia l'equilibrio delle forze e tensioni che la congruenza degli spostamenti e deformazioni virtuali. Se è data una configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento, il campo degli spostamenti finiti che individuano, a partire da questa, la configurazione deformata conseguente all'applicazione sul corpo di certe forze non è un campo di spostamenti virtuali perché tale campo non è linearizzato. Inoltre le date forze non sono equilibrate nella configurazione di riferimento, dominio di definizione del campo di spostamenti finiti di cui si sta parlando, ma nella configurazione deformata.

Infine, nell'ipotesi di piccoli spostamenti la configurazione $\mathcal{B}$ del corpo può essere fatta coincidere con la configurazione indeformata di riferimento $\mathcal{B}_0$, che diventa quindi la configurazione nella quale si definiscono approssimativamente sia le forze e le tensioni che gli spostamenti e le deformazioni virtuali e dove si impongono sia l'equilibrio delle forze e tensioni che la congruenza degli spostamenti e deformazioni virtuali. In tal caso un campo di spostamenti reale, cioè conseguente all'applicazione sul corpo di certe forze, può essere assunto quale campo di spostamenti virtuali congruenti, poiché nel caso di piccoli spostamenti tale campo deve soddisfare, come un campo di spostamenti virtuali, le equazioni di congruenza linearizzate.

¹La dimostrazione rigorosa di questo fatto appartiene al *calcolo delle variazioni* ed è a volte citata in letteratura con il nome di *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

Capitolo 6

Elasticità lineare

6.1 Legame costitutivo

Se si deforma un solido composto da un dato materiale ne corrisponde uno stato tensionale agente nel solido stesso che dipende sia dalla deformazione che dal materiale che compone il solido. La relazione che sussiste tra deformazione e tensione, variabile da materiale a materiale, viene detta *legame costitutivo*.

I legami costitutivi si distinguono in *locali* e *non locali*. Nel caso di un legame costitutivo locale, la tensione nell'intorno di un punto dipende solo dalla deformazione agente nello stesso intorno. Il modo più semplice di ottenere un legame costitutivo locale è quello di descrivere la deformazione e la tensione nell'intorno di un punto tramite i tensori di deformazione ϵ e degli sforzi σ .

In generale ad una storia di deformazione $\epsilon(\tau)$, dipendente dal tempo τ precedente un dato istante t , corrisponderà a quell'istante una ben precisa tensione (*legge di determinismo*):

$$\epsilon(\tau), \quad -\infty < \tau \leq t \quad \Rightarrow \quad \sigma(t). \quad (1)$$

Se invece la tensione σ ad un dato istante dipende solo dalla deformazione ϵ allo stesso istante e non dalla precedente storia di deformazione il legame viene detto *elastico*:

$$\sigma = \sigma(\epsilon). \quad (2)$$

6.2 Elasticità lineare

Il caso più semplice di un legame elastico è quello *lineare*, che nel caso di un solido si scrive:

$$\sigma = \mathbb{E}_{\text{sym}} [\epsilon]. \quad (3)$$

dove $\mathbb{E}_{\text{sym}}$ è una trasformazione lineare:

$$\mathbb{E}_{\text{sym}} : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbb{E}_{\text{sym}} [\mathbf{A}], \quad (4)$$

definita nello spazio vettoriale Sym dei tensori doppi simmetrici ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$). Tale spazio ha dimensione 6 e quindi $\mathbb{E}_{\text{sym}}$ può essere rappresentato da $6 \times 6 = 36$ componenti. È però usuale (e conveniente) estendere la trasformazione $\mathbb{E}_{\text{sym}}$ a tutto lo spazio Lin dei tensori doppi ponendo:

$$\mathbb{E} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbb{E}_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \right]. \quad (5)$$

Una trasformazione lineare $\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$ è detta *tensore del quarto ordine* e la particolare trasformazione $\mathbb{E}$ definita dalla (5) è detta *tensore di elasticità lineare*. Il legame costitutivo elastico lineare si scrive allora:

$$\sigma = \mathbb{E} [\epsilon]. \quad (6)$$

Questa si può rappresentare in componenti nella forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} \epsilon_{hk}. \quad (7)$$

Le componenti $\mathbb{E}_{ijhk}$ di $\mathbb{E}$ soddisfano le condizioni seguenti, dette *simmetrie minori*:

$$\mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{jihk}, \quad \mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{ijkh}. \quad (11)$$

La prima delle (11) dipende dal fatto che $\mathbb{E}[\epsilon]$ deve essere un tensore doppio simmetrico. La seconda delle (11) dipende invece dal fatto che $\mathbb{E}$ trasforma un tensore doppio $\mathbf{A}$ generico allo stesso modo in cui trasforma il suo trasposto:

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}] = \mathbb{E}[\mathbf{A}^T], \quad (12)$$

avendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^T$ la stessa parte simmetrica. Scrivendo la (12) in componenti si ottiene:

$$\sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} A_{hk} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} A_{kh} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijkh} A_{hk}, \quad (13)$$

e poiché $\mathbf{A}$ è generico ne deriva infine la seconda simmetria minore.

Le simmetrie minori (11) fanno scendere a 36 componenti indipendenti le $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ componenti $\mathbb{E}_{ijkh}$ del tensore di elasticità lineare.

Le (10) per esteso si scrivano, tenendo conto della simmetria di $\underline{\epsilon}$ e delle condizioni (11):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \mathbb{E}_{ijxx} \epsilon_x + \mathbb{E}_{ijyy} \epsilon_y + \mathbb{E}_{ijzz} \epsilon_z \\ & + 2\mathbb{E}_{ijxy} \epsilon_{xy} + 2\mathbb{E}_{ijxz} \epsilon_{xz} + 2\mathbb{E}_{ijyz} \epsilon_{yz}, \end{aligned}$$

oppure:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \mathbb{E}_{ijxx} \epsilon_x + \mathbb{E}_{ijyy} \epsilon_y + \mathbb{E}_{ijzz} \epsilon_z + \\ & + \mathbb{E}_{ijzy} \epsilon_{zy} + \mathbb{E}_{ijxz} \epsilon_{xz} + \mathbb{E}_{ijyx} \epsilon_{yx}, \end{aligned} \quad (14)$$

dove $(i,j) = (x,x), (y,y), (z,z), (z,y), (x,z), (y,x)$.

Per $(i,j) = (y,z), (z,x), (x,y)$ non si ottiene niente di nuovo per via delle simmetrie di $\underline{\epsilon}$ e di $\mathbb{E}$.

In forma matriciale la (14) si può scrivere nella forma:

$$\{\underline{\sigma}\} = [\mathbb{E}] \{\underline{\epsilon}\}.$$

Per esteso, la matrice di elasticità si scrive:

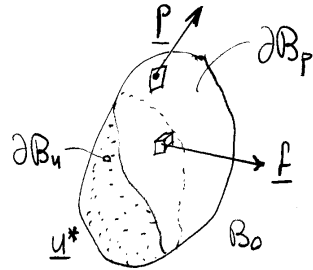
$$[\mathbb{E}] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{xxxx} & \mathbb{E}_{xxyy} & \mathbb{E}_{xxzz} & \mathbb{E}_{xxzy} & \mathbb{E}_{xxzx} & \mathbb{E}_{xxyx} \\ \mathbb{E}_{yyxx} & \mathbb{E}_{yyyy} & \mathbb{E}_{yyzz} & \mathbb{E}_{yyzy} & \mathbb{E}_{yyxz} & \mathbb{E}_{yyyx} \\ \mathbb{E}_{zzxx} & \mathbb{E}_{zzyy} & \mathbb{E}_{zzzz} & \mathbb{E}_{zzzy} & \mathbb{E}_{zzxz} & \mathbb{E}_{zzyx} \\ \mathbb{E}_{zyxx} & \mathbb{E}_{zyyy} & \mathbb{E}_{zyzz} & \mathbb{E}_{zyzy} & \mathbb{E}_{zyxz} & \mathbb{E}_{zyyx} \\ \mathbb{E}_{zxxx} & \mathbb{E}_{zxxy} & \mathbb{E}_{zxzz} & \mathbb{E}_{zxzy} & \mathbb{E}_{zxzx} & \mathbb{E}_{zxyx} \\ \mathbb{E}_{yxxx} & \mathbb{E}_{yxyy} & \mathbb{E}_{yxxz} & \mathbb{E}_{yxxz} & \mathbb{E}_{yxxz} & \mathbb{E}_{yxxz} \end{bmatrix}.$$

6.3 Problema elastico lineare

Incongnita: il campo degli spostamenti $\underline{u}$

Termini noti:

- 1) forze di volume $\underline{f}$
- 2) forze di superficie $\underline{p}$, limitatamente alla porzione ∂B_p del contorno
- 3) Spostamenti $\underline{u}^*$ limitatamente alla porzione ∂B_u del contorno



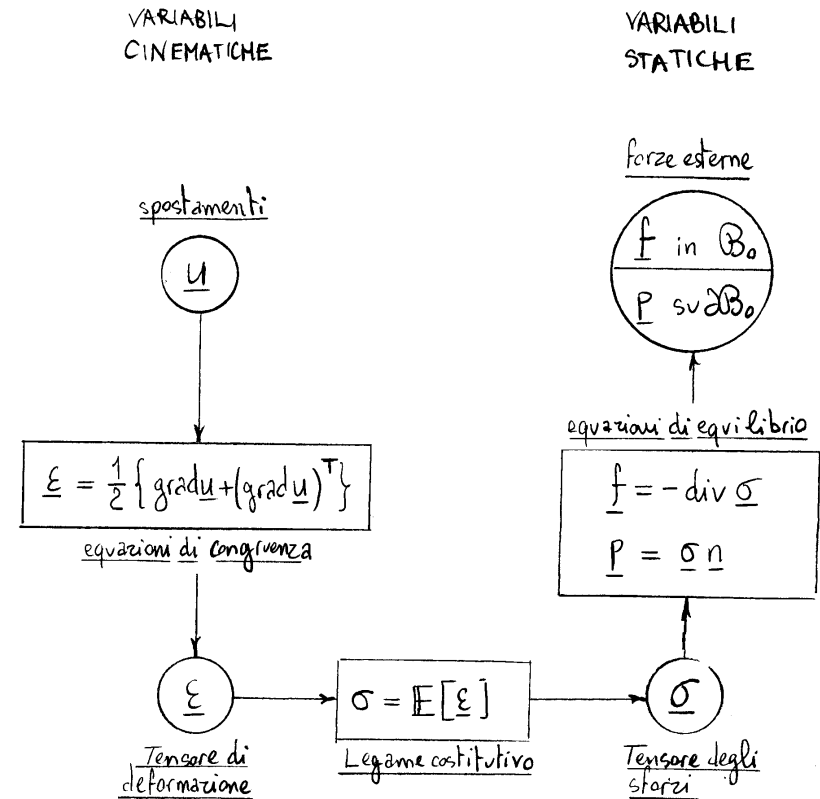
$$\begin{cases} \partial B_u \cup \partial B_p = \partial B_0 \\ \partial B_u \cap \partial B_p = \emptyset \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{(Insieme vuoto)} \end{matrix}$$

Equazione fondamentale:

$$\operatorname{div} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) \right] \right\} + \underline{f} = \underline{0}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}^* & \text{su } \partial B_u \\ \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) \right] \right\} \underline{n} = \underline{p} & \text{su } \partial B_p \end{cases}$$



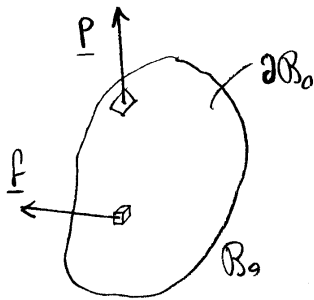
$$\int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot \underline{u} dS + \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} dV = \int_{B_0} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV$$

principio dei lavori virtuali

6.4 Soluzione del problema elastico col metodo delle forze

Incongnita: Tensore degli sforzi $\underline{\sigma}^*$ equilibrato con $\underline{p}$ e $\underline{f}$,
cioè tale che:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}^* + \underline{f} = \underline{0}, & \text{in } B_0 \\ \underline{\sigma}^* \underline{n} = \underline{p} & \text{su } \partial B_0 \end{cases}$$

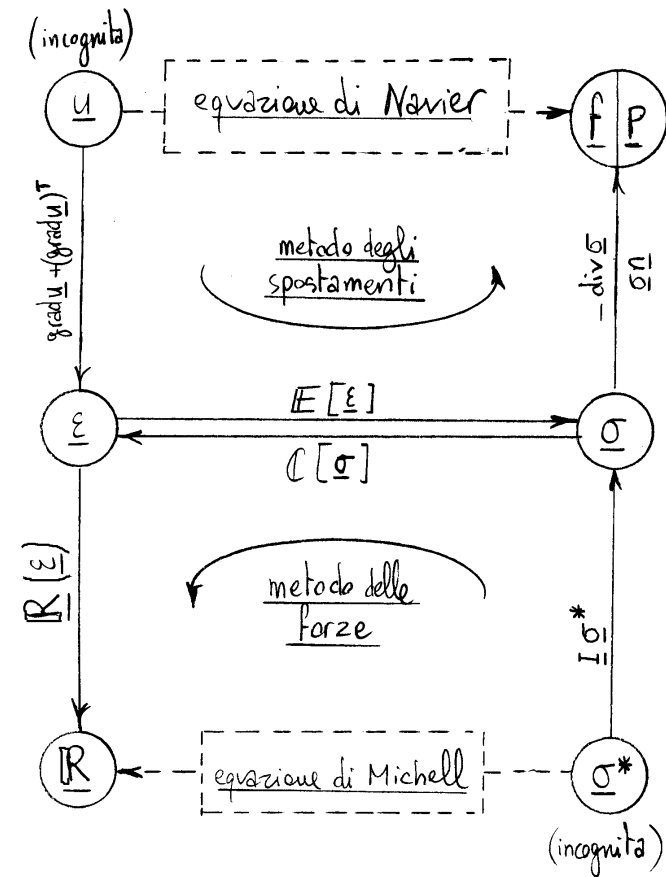


Termini noti: forze di volume $\underline{f}$ e di superficie $\underline{p}$.

Equazione fondamentale

$$\underline{R}^* = \underline{0},$$

dove $\underline{R}^* = \underline{R}(\underline{C}[\underline{\sigma}^*])$ è il tensore di incompatibilità corrispondente a $\underline{C}[\underline{\sigma}^*]$.



$\underline{\sigma}^* \equiv$ Tensore degli sforzi equilibrato con $\underline{p}$ e $\underline{f}$

$\underline{R} \equiv$ Tensore di incompatibilità

6.5 Autotensioni

Come già detto, un corpo è soggetto ad autotensioni se il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ non è nullo nella configurazione scarica, cioè nella configurazione che corrisponde a forze esterne applicate nulle. Si ricordi anche che se le autotensioni sono nulle la configurazione scarica viene detta configurazione naturale.

Il legame costitutivo elastico lineare $\underline{\sigma} = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}]$ è relativo alla configurazione naturale, poiché per $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$ fornisce $\underline{\sigma} = \underline{0}$.

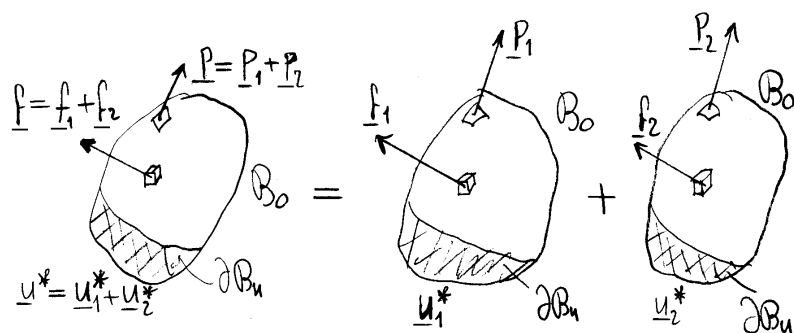
Se sono presenti delle autotensioni $\underline{\sigma}_a$, le tensioni globali che si hanno a seguito dell'applicazione di date forze esterne saranno la somma

delle autotensioni più il contributo dovuto alle forze esterne, contributo valutato sulla configurazione scarica priva di autotensioni:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{B}_0 \text{ soggetto alle autotensioni } \underline{\sigma}_a & = & \text{B}_0 \text{ soggetto alle autotensioni } \underline{\sigma}_a + \text{B}_0 \text{ configurazione naturale} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon} \end{array} \right. & = & \begin{array}{l} \underline{\sigma}_a \\ \underline{0} \end{array} + \begin{array}{l} \underline{\sigma}^* \\ \underline{\varepsilon}^* \end{array} \\
 & & \underline{\sigma}^* = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}^*]
 \end{array}$$

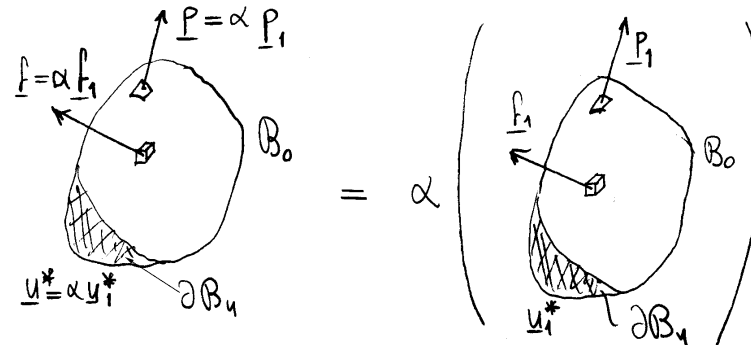
6.6 Sovrapposizione degli effetti

Il problema elastico-lineare è caratterizzato da equazioni lineari definite in uno stesso dominio B_0 , che rappresenta la configurazione naturale del corpo continuo. Vale dunque il principio di sovrapposizione degli effetti. Schematicamente:



$$\begin{cases} \underline{u} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma} \end{cases} = \begin{cases} \underline{u}_1 \\ \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\sigma}_1 \end{cases} + \begin{cases} \underline{u}_2 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \underline{\sigma}_2 \end{cases}$$

additività



$$\begin{cases} \underline{u} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma} \end{cases} = \alpha \times \begin{cases} \underline{u}_1 \\ \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\sigma}_1 \end{cases}$$

omogeneità di grado 1 ($\alpha \in \mathbb{R}$)

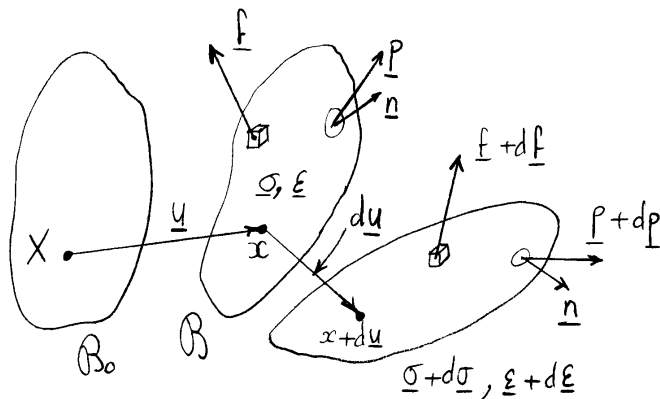
Notiamo che per la validità di tale principio è indispensabile che tutte le equazioni del problema siano lineari, compreso il legame costitutivo. Se sono presenti delle autotensioni, la linearità vale solo per la quota del tensore degli sforzi dovuta ai carichi esterni.

Capitolo 7

Energia elastica di deformazione

7.1 Lavoro di deformazione

Siano $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$, $\underline{u}$ i tensori degli sforzi e della deformazione e gli spostamenti conseguenti all'applicazione di certi carichi $\underline{f}$ nel volume e $\underline{p}$ sulla superficie di un corpo continuo di configurazione naturale B_0 . Siano inoltre $d\underline{u}$ e $d\underline{\varepsilon}$ gli incrementi



degli spostamenti e delle deformazioni dovuti ad un incremento $d\underline{f}$ e $d\underline{p}$ dei carichi esterni.

Ricordiamo che, nell'ambito delle piccole deformazioni, le forze sono considerate sempre applicate alla configurazione indeformata e che l'equilibrio va quindi scritto relativamente a tale configurazione.

L'incremento del lavoro dei carichi esterni (lavoro di deformazione) vale:

$$dL_d = \int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot d\underline{u} dS + \int_{B_0} \underline{f} \cdot d\underline{u} dV.$$

Per il principio dei lavori virtuali si ottiene anche:

$$dL_d = \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot d\underline{\varepsilon} dV.$$

7.2 Energia elastica di deformazione

La richiesta che il lavoro di deformazione non dipenda dal percorso, ma solo dagli istanti iniziale e finale, conduce in modo diretto alla esistenza, per il solido, di una *energia potenziale elastica* o *energia elastica di deformazione* Φ funzione del solo spostamento $\mathbf{u}$. Normalmente si assume che l'energia sia nulla in corrispondenza della configurazione naturale:

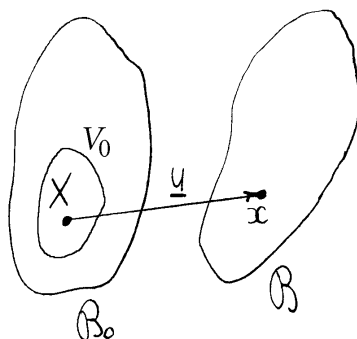
$$\Phi(\mathbf{0}) = 0.$$

Si consideri ora la quota $\Phi(V_0)$ di energia associata al generico volume V_0 del solido e si introduca l'*energia elastica (di deformazione) per unità di volume* ϕ , definita in ogni punto X del solido:

$$\phi = \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{\Phi(V_0)}{V_0}.$$

L'energia associata al generico volume V_0 vale allora:

$$\Phi = \int_{V_0} \phi \, dV_0.$$



Differenziando e tenendo conto del principio dei lavori virtuali si ottiene:

$$dL_d = d\Phi = \int_{V_0} d\phi \, dV_0 = \int_{V_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}) \, dV_0,$$

per ogni volume V_0 di B_0 . Risulta allora:

$$d\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$

e ne consegue che l'energia elastica per unità di volume dipende dallo spostamento $\mathbf{u}$ solo attraverso il valore locale (nel punto) del tensore di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\phi = \phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \phi(\epsilon_{ij}).$$

Ne risulta:

$$\underline{\sigma} = \text{grad}_{\underline{\epsilon}} \phi,$$

oppure, in componenti:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}}.$$

Poiché:

$$\sigma_{ij} = \sum_{hk} E_{ijhk} \epsilon_{hk}$$

risulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{hk}} = E_{ijhk},$$

da cui consegue la simmetria maggiore del tensore E di elasticità:

$$E_{ijhk} = E_{hki j}.$$

Osservare che tale simmetria porta con sé la simmetria della matrice quadrata $[E]$.

Integrando l'incremento $d\phi$ tra gli stati iniziale indeformato e quello finale individuato da $\underline{\varepsilon}$, tenendo conto del legame lineare tra $\underline{\sigma}$ e $\underline{\varepsilon}$, si ottiene l'energia potenziale elastica per unità di volume corrispondente alla configurazione finale:

$$\phi = \int_0^{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma}^* \cdot d\underline{\varepsilon}^*.$$

Per la linearità delle grandezze in gioco, una situazione intermedia tra 0 e $\underline{\varepsilon}$ è individuata dalla deformazione $\underline{\varepsilon}^* = \lambda \underline{\varepsilon}$, per un certo scalare λ compreso nell'intervallo $(0, 1)$, a cui corrisponde la tensione $\underline{\sigma}^* = \lambda \underline{\sigma}$ e l'incremento $d\underline{\varepsilon}^* = d\lambda \underline{\varepsilon}$. Si ottiene:

$$\phi = \left(\int_0^1 \lambda d\lambda \right) \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}.$$

L'energia potenziale elastica per unità di volume risulta dunque:

$$\phi = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot E[\underline{\varepsilon}].$$

e di conseguenza, il lavoro di deformazione risulta:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \underline{\varepsilon} \cdot E[\underline{\varepsilon}] dV.$$

Richiedendo al lavoro di deformazione di essere

sempre positivo, o al più nullo se non si ha deformazione, si ottiene:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] > 0 \quad \text{per ogni } \underline{\varepsilon} \neq 0,$$

cioè il tensore elastico deve essere definito positivo e quindi invertibile. Posto:

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$$

si ottiene

$$\underline{\varepsilon} = \mathbb{C}[\underline{\sigma}].$$

7.3 Teoremi sul lavoro di deformazione

7.3.1 Teorema di Clapeyron

Si è visto che il lavoro di deformazione può essere messo nella forma:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} dV_0.$$

Per il principio dei lavori virtuali risulta allora:

$$L_d = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot \underline{u} dS_0 + \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} dV_0 \right).$$

Tenendo conto che lo spostamento $\underline{u}$ e i carichi $\underline{p}$ e $\underline{f}$ sono quelli finali, ovverossia quelli che si hanno al termine del processo deformativo, si è allora ottenuto il:

Teorema di Clapeyron. *Il lavoro di deformazione che le forze applicate compiono a partire da zero fino al loro valore finale è pari alla metà del lavoro che compirebbero per gli stessi spostamenti se fossero costantemente applicate con il loro valore finale.*

7.3.2 Teorema di Betti

Per il lavoro di deformazione non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti ad un primo sistema di forze (a), di superficie $\underline{p}^{(a)}$ e di volume $\underline{f}^{(a)}$, compete il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \underline{p}^{(a)} \cdot \underline{u}^{(a)} dS_0 + \int_{B_0} \underline{f}^{(a)} \cdot \underline{u}^{(a)} dV_0 \right),$$

dove gli spostamenti $\underline{u}^{(a)}$ sono quelli provocati dalle forze del sistema (a). Ad un secondo sistema di forze (b), di superficie $\underline{p}^{(b)}$ e di volume $\underline{f}^{(b)}$, compete invece il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(b)} = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \underline{p}^{(b)} \cdot \underline{u}^{(b)} dS_0 + \int_{B_0} \underline{f}^{(b)} \cdot \underline{u}^{(b)} dV_0 \right),$$

dove ora gli spostamenti $\underline{u}^{(b)}$ sono quelli provocati dal secondo sistema di forze (b). Per la sovrapposizione degli effetti, al sistema di forze (a+b), somma dei due sistemi precedenti,

competere infine il lavoro:

$$\begin{aligned} L_d^{(a+b)} &= \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial B_0} (\mathbf{p}^{(a)} + \mathbf{p}^{(b)}) \cdot (\mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{u}^{(b)}) dS_0 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_0} (\mathbf{f}^{(a)} + \mathbf{f}^{(b)}) \cdot (\mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{u}^{(b)}) dV_0 \right\} = \\ &= L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{ba}), \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dV_0 \right), \\ L_{ba} &= \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dV_0 \right). \end{aligned}$$

I lavori L_{ab} e L_{ba} rappresentano, rispettivamente, i *lavori mutui* che le forze del sistema (a) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema di forze (b) se avessero sempre il loro valore finale, e viceversa. Si noti che per il principio dei lavori virtuali può anche scriversi:

$$L_{ab} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(b)}, \quad L_{ba} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}.$$

Vale il:

Teorema di Betti (o del lavoro mutuo). I lavori mutui L_{ab} e L_{ba} dovuti a due sistemi di forze (a) e (b) coincidono:

$$L_{ab} = L_{ba}.$$

Dimostrazione. Utilizzando il legame elastico lineare e la simmetria del tensore di elasticità si ha:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} = \int_{B_0} \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^{(a)}] = \\ &= \int_{B_0} \boldsymbol{\epsilon}^{(a)} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^{(b)}] = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Può essere interessante dare una seconda dimostrazione del teorema di Betti, basata sull'osservazione che il lavoro di deformazione $L_d^{(a+b)}$ non dipende dal percorso. Tale lavoro può essere allora calcolato applicando prima le forze del

sistema (a) fino al loro valore finale, poi

le forze del sistema (b) fino al loro

valore finale. Alla fine dell'applicazione del

sistema (a) il lavoro di deformazione vale

$L_d^{(a)}$. L'applicazione del sistema (b) non solo

genera il lavoro di deformazione $L_d^{(b)}$, ma, facendo

lavorare anche il sistema di forze (a), che sono già

al loro valore finale, genera anche il termine L_{ab} :

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + L_{ab}.$$

D'altronde, se si applica prima il sistema di forze (b) fino al loro valore finale e indi il sistema di forze (a), si ottiene analogamente:

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(b)} + L_d^{(a)} + L_{ba}.$$

Ne risulta quindi:

$$L_{ab} = L_{ba}.$$

7.4 Energia complementare

Differenziando il prodotto scalare $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ tra tensione e deformazione si ottiene:

$$d(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Si noti che $\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}$ è un differenziale esatto, rappresentando

l'incremento dell'energia elastica per unità di volume:

$$d\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}.$$

Ne risulta allora che anche $\boldsymbol{\epsilon} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ è un differenziale esatto:

$$d\psi = \boldsymbol{\epsilon} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = d(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} - \phi). \quad (1)$$

È così dimostrata l'esistenza di una funzione ψ della tensione, detta *energia elastica complementare* (per unità di volume), tale che:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}] - \phi(\mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]), \quad (2)$$

dove il tensore del quarto ordine $\mathbb{C}$ è l'inverso del tensore $\mathbb{E}$ di elasticità.

La composizione tra la funzione energia elastica di deformazione $\phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ e il legame costitutivo inverso $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]$ fornisce:

$$\phi(\mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}].$$

Sostituendo nella (2) si ottiene allora:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \phi(\mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}].$$

L'energia complementare coincide quindi, nel caso elastico lineare, con la composizione tra energia elastica di deformazione e legame costitutivo inverso.

L'espressione differenziale (1) equivale a scrivere:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \text{grad}_{\boldsymbol{\sigma}} \psi \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Poiché in componenti il legame costitutivo inverso si scrive:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{hk} C_{ijhk} \sigma_{hk},$$

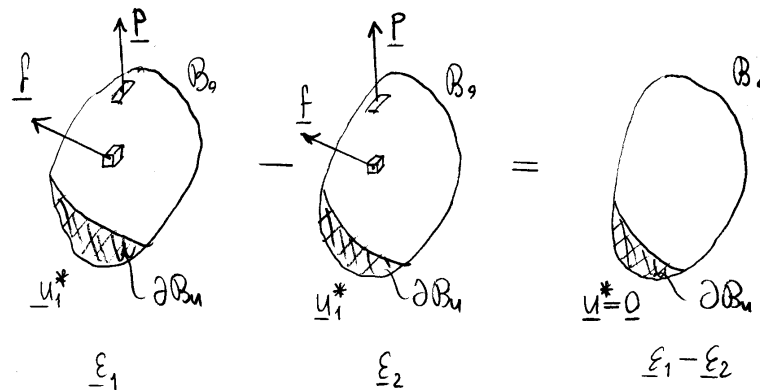
si ottiene:

$$C_{ijhk} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{hk}}.$$

7.5 Unicità della soluzione

Se la soluzione del problema elastico-lineare esiste, essa è unica (teorema di Kirchhoff).

Infatti, siano $\underline{\epsilon}_1$ ed $\underline{\epsilon}_2$ due deformazioni soluzione dello stesso problema elastico-lineare.



Sotto l'ipotesi che la configurazione B_0 coincida con la configurazione naturale, sottraendo le due soluzioni si ottiene, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, una soluzione corrispondente a forze applicate nulle e a vincoli rigidi. Quindi il lavoro di deformazione associato a tale soluzione, per il teorema di Clapeyron, è nullo poiché le forze, al più, sono presenti solo in corrispondenza dei vincoli rigidi.

Deve quindi risultare:

$$\frac{1}{2} \int_V (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2) \cdot \mathbb{E} [\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2] dV = \underline{0},$$

per ogni volume V , il che implica che ovunque nel corpo si ha:

$$\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2) \cdot \mathbb{E} [\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2] = \underline{0},$$

poiché l'integrando è una funzione non negativa. Questo è

possibile se e solo se $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2 = 0$ e quindi se e solo se $\underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon}_2$. Risulta anche:

$$\underline{\sigma}_1 = E [\underline{\varepsilon}_1] = E [\underline{\varepsilon}_2] = \underline{\sigma}_2.$$

Infine, $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$, generando la stessa deformazione non possono che differire di un moto rigido.

Se le condizioni cinematiche al contorno escludono tale possibilità, anche $\underline{u}_1$ ed $\underline{u}_2$ coincidono.

7.6 Soluzioni deboli, soluzioni forti ed esistenza della soluzione

Si noti che il problema elastico lineare richiede, tra l'altro, il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio. Poiché esistono due modi non equivalenti di imporre l'equilibrio esistono due tipi di soluzioni. Il primo tipo di soluzione, detta *debole*, si ottiene imponendo l'equilibrio per ogni volume estraibile da un solido, così come richiesto dall'assunzione fondamentale della meccanica del continuo. Ne consegue che soluzione debole è sinonimo di soluzione. Il secondo tipo di soluzione, detta *forte*, si ottiene imponendo la validità delle equazioni indefinite di equilibrio in tutti i punti del solido, il che poi è equivalente ad imporre la validità dell'equazione differenziale fondamentale del problema. Poiché le equazioni indefinite di equilibrio implicano l'equilibrio per ogni volume estraibile da un solido, una soluzione forte è anche soluzione debole del problema e quindi una soluzione *tout court*. Però non è vero l'inverso, poiché per estrarre le equazioni indefinite di equilibrio dalle equazioni di equilibrio per ogni volume estraibile dal solido occorre aggiungere delle condizioni di regolarità che hanno solo un significato matematico e non fisico per il problema in esame. Quindi esistono problemi che hanno soluzione in senso debole, cioè hanno soluzione, ma che non hanno soluzione in senso forte.

Sotto condizioni di regolarità poco restrittive sulla frontiera ∂B_0 del corpo continuo, è stato dimostrato un teorema di esistenza della soluzione debole del problema elastico lineare.

Esistono anche tutta una serie di risultati più ristretti riguardanti le soluzioni forti.

In ogni caso, i metodi numerici, tipo il metodo delle differenze finite oppure il metodo degli elementi finiti, approssimano la soluzione in senso debole.

Capitolo 8

Elasticità lineare isotropa

Un materiale è isotropo in un dato punto se le proprietà meccaniche sono identiche in tutte le direzioni uscenti dal punto considerato. Un materiale è inoltre isotropo se è isotropo in tutti i suoi punti.

8.1 Legge di Hooke

Vediamo di individuare il legame elastico lineare:

$$\underline{\varepsilon} \rightarrow \underline{\sigma} = E[\underline{\varepsilon}],$$

sotto l'ipotesi di isotropia.

Sia dato un generico tensore $\underline{\varepsilon}$ di deformazione infinitesima. La sua rappresentazione nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ risulta:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Il tensore di deformazione può dunque scomporsi nella somma di tre dilatazioni semplici:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti basta dunque determinare la tensione corrispondente ad una dilatazione semplice.

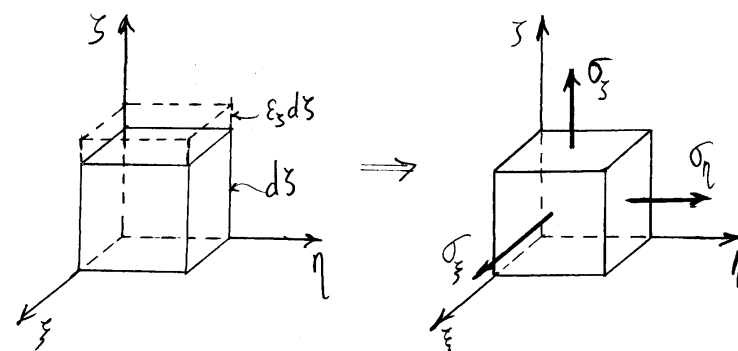
Consideriamo la dilatazione semplice in direzione dell'asse ζ . Su una giacitura di normale ζ non può essere presente una tensione tangenziale poiché

per l'ipotesi di isotropia, tutte le direzioni sulla
giacitura sono equivalenti, mentre la presenza di
una tensione tangenziale ne privilegierebbe una.

L'asse ξ rappresenta dunque una direzione
principale di tensione. Le altre due direzioni sono
ortogonali a ξ . D'altronde, sempre per via
dell'ipotesi di isotropia, non vi è possibilità di
distinguere fra le direzioni ortogonali a ξ e,
dunque, tutte le direzioni ortogonali a ξ devono
essere principali di tensione, come già lo sono di
deformazione. Dunque:

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta},$$

e la rappresentazione di $\underline{\sigma}$ nel sistema $\mathcal{O}\xi\eta\xi$



risulta:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\xi} \end{bmatrix}.$$

Ne consegue la seguente corrispondenza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\xi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\xi} \end{bmatrix}.$$

La linearità del legame elastico impone inoltre:

$$\begin{cases} \sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = \lambda \varepsilon_z \\ \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_z \end{cases}$$

dove λ e μ sono due costanti che dipendono dal tipo di materiale (elastico lineare isotropo, in ogni caso) e che sono note come costanti di Lamé.

Un risultato analogo vale per le dilatazioni semplici in direzione ξ e η . Inoltre, in virtù dell'ipotesi di isotropia, le costanti implicite continuano ad essere sempre λ e μ . Tali risultati si possono compendiarne nelle corrispondenze:

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \lambda\varepsilon_{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+2\mu)\varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon_{\eta} \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \longrightarrow [\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \lambda\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2\mu)\varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Sommando e raggruppando opportunamente si ottiene infine

$$[\underline{\sigma}] \equiv \lambda(\varepsilon_z + \varepsilon_{\eta} + \varepsilon_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

oppure, in forma indipendente dal sistema di coordinate:

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{\mathbb{I}} + 2\mu \underline{\varepsilon}. \quad (\text{legge di Hooke})$$

In componenti, in un sistema cartesiano ortogonale generico, questa si scrive:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\text{tr } \underline{\varepsilon}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

oppure, per esteso:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_z \\ \tau_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} = \mu \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} = \mu \gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} = \mu \gamma_{xy} \end{cases}.$$

La matrice di elasticità 6×6 ha dunque le componenti:

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Si noti che tale rappresentazione è indipendente dal sistema di riferimento, in accordo con l'ipotesi di isotropia.

8.2 Moduli tecnici

Vogliamo ora determinare la relazione esistente tra le costanti di Lamé e i moduli tecnici E , ν e G valutati nelle prove di trazione e di torsione:

E modulo di elasticità longitudinale
o modulo di Young,

ν coefficiente di contrazione laterale
o modulo di Poisson,

G modulo di elasticità tangenziale.
o modulo di Coulomb.

Se lo stato tensionale è monoassiale (situazione che si cerca di riprodurre nella prova di trazione), per definizione di modulo di Young risulta

$\sigma_x = E \varepsilon_x$, se l'asse x coincide con la direzione

della tensione. Inoltre, per definizione di modulo di Poisson, le dilatazioni lungo gli assi x e y , ortogonali a z , valgono $\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z$ e $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$. Deve dunque valere la relazione:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\nu \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \xrightarrow{\mathbb{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}}.$$

Utilizzando la legge di Hooke, si può dunque scrivere:

$$\begin{aligned} E \varepsilon_z &= \lambda (-\nu \varepsilon_z - \nu \varepsilon_z + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_z \\ 0 &= \lambda (-\nu \varepsilon_z - \nu \varepsilon_z + \varepsilon_z) + 2\mu (-\nu \varepsilon_z) \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} E = (1-2\nu)\lambda + 2\mu & (1) \\ (1-2\nu)\lambda - 2\mu\nu = 0 & (2) \end{cases}$$

Ricavando λ dalla (2) si ha:

$$\lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu}. \quad (3)$$

Ricavando $(1-2\nu)\lambda$ dalla (2) e sostituendo nella (1) si ha:

$$E = 2\mu(1+\nu). \quad (4)$$

da cui:

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}. \quad (5)$$

Ricavando μ dalla (5) e sostituendo la (5) nella (3) si ottengono poi le relazioni tra μ e λ da una parte ed E e ν dall'altra:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Ricavando invece il modulo di Poisson ν dalla (3) e sostituendo poi nella (4) si ottengono i moduli tecnici ν e E in funzione delle costanti di Lamé λ e μ :

$$\begin{cases} \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} & (8) \\ E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu & (9) \end{cases}$$

Per quel che riguarda il modulo di elasticità tangenziale G , notiamo che, se lo stato di tensione è di taglio semplice (come si cerca di riprodurre nella prova di torsione), per definizione risulta

$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$, rispetto a due opportuni assi ortogonali x e y . In definitiva, deve aversi la corrispondenza:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \xRightarrow{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & G\gamma_{xy} & 0 \\ G\gamma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} .$$

Utilizzando la legge di Hooke si ottiene:

$$G \gamma_{xy} = \mu \gamma_{xy} ,$$

e quindi :

$$G = \mu . \quad (10)$$

Sostituendo la (10) nella (3) si ottiene:

$$\lambda = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} . \quad (11)$$

Poiché, per le (10) e (11), risulta:

$$2\mu + \lambda = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} , \quad (12)$$

la matrice 6×6 di elasticità può dunque scriversi:

$$[E] = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

La legge di Hooke si può poi scrivere nella forma:

$$\underline{\sigma} = 2G \left\{ \underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{I} \right\},$$

o, per esteso:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_x + \nu (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right\} \\ \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_y + \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right\} \\ \sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_z + \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right\} \\ \tau_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases}.$$

Per quel che riguarda le dimensioni, le costanti di Lamé λ e μ , così come i moduli E e G , hanno le dimensioni di una tensione mentre ν risulta un numero puro:

$$[\lambda] = [\mu] = [E] = [G] = FL^{-2},$$

$$[\nu] = \text{numero puro}.$$

8.3 Direzioni principali di elasticità (isotropia)

La matrice di elasticità isotropa risulta indipendente dal sistema di riferimento, e questo è in accordo con l'ipotesi di isotropia, poiché il sistema di riferimento consta di tre direzioni ortogonali dello spazio. D'altronde, ciò non è in disaccordo con la ricerca di "direzioni principali" nello spazio dei tensori, rispetto alle quali la matrice di elasticità diventa diagonale, poiché la scelta arbitraria di 3 assi ortogonali di riferimento non genera tutte le possibili basi nello spazio dei tensori doppi.

Se $\underline{\underline{\varepsilon}}$ rappresenta una direzione principale

di $\underline{\underline{E}}$ deve risultare:

$$\underline{\underline{E}}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \alpha \underline{\underline{\varepsilon}},$$

dove si è indicato con α l'autovettore di $\underline{\underline{E}}$ per non confonderlo con una delle costanti di Lamé. D'altronde, se $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è un tensore sferico risulta $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{\underline{I}}$ e quindi $(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} = 3\varepsilon \underline{\underline{I}} = 3\underline{\underline{\varepsilon}}$. Utilizzando la legge di Hooke si ottiene:

$$\underline{\underline{E}}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \lambda(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Tale relazione mostra che $3\lambda + 2\mu$ è un autovettore di $\underline{\underline{E}}$ corrispondente ad un qualunque tensore sferico. Notiamo inoltre che le (6) e (7) permettono di porre tale autovettore nella forma:

$$3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \left\{ 1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right\} = \frac{E}{1-2\nu}.$$

Si consideri poi un qualunque tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a traccia nulla, o tensore deviatorico. Dalla legge di Hooke

in tal caso si ottiene:

$$\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] = \lambda (\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{\mathbb{I}} + 2\mu \underline{\varepsilon} = 2\mu \underline{\varepsilon},$$

e dunque 2μ risulta un autovettore di $\mathbb{E}$ associato ad un qualunque tensore deviatorico.

Se $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\sigma}$ sono tensori generici di deformazione e di tensione, si possono decomporre, in modo unico, in una parte sferica ed in una parte deviatorica:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_d, \quad \begin{cases} \underline{\sigma}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{\mathbb{I}} \\ \underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{\mathbb{I}} \end{cases},$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_s + \underline{\varepsilon}_d, \quad \begin{cases} \underline{\varepsilon}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{\mathbb{I}} \\ \underline{\varepsilon}_d = \underline{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{\mathbb{I}} \end{cases}.$$

La linearità del tensore di elasticità permette di scrivere:

$$\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_s] + \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_d],$$

da cui:

$$\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] = (3\lambda + 2\mu) \underline{\varepsilon}_s + 2\mu \underline{\varepsilon}_d.$$

Per l'unicità della decomposizione di $\underline{\sigma}$ in una parte sferica ed in una deviatorica deve quindi risultare:

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_s = (3\lambda + 2\mu) \underline{\varepsilon}_s \Rightarrow \text{tr } \underline{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \underline{\varepsilon}, \\ \underline{\sigma}_d = 2\mu \underline{\varepsilon}_d. \end{cases}$$

Utilizzando i moduli tecnici tali relazioni si scrivono:

$$\begin{cases} \text{tr } \underline{\sigma} = \frac{E}{1-2\nu} \text{tr } \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma}_d = 2G \underline{\varepsilon}_d \end{cases}.$$

Osserviamo infine che $\text{tr } \underline{\varepsilon}$ rappresenta la dilatazione cubica nell'intorno del punto e $\frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}$ la tensione normale media, quantità che, a meno del segno, si presta al ruolo di pressione nell'intorno del punto nel caso in cui la tensione non sia sferica.

Il coefficiente $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ che li collega rappresenta dunque un modulo di elasticità volumetrica.

8.4 Legge di Hooke inversa

Utilizziamo la rappresentazione principale, ottenuta decomponendo $\underline{\sigma}$ ed $\underline{\varepsilon}$ in una parte sferica ed in una parte deviatorica, per invertire la legge di Hooke:

$$\begin{cases} \text{tr } \underline{\varepsilon} = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr } \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon}_d = \frac{1}{2G} \underline{\sigma}_d = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}_d \end{cases}.$$

Sommando le parti sferiche e deviatoriche di $\underline{\varepsilon}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\varepsilon})\underline{I} + \underline{\varepsilon}_d \\ &= \frac{1-2\nu}{3E}(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \left\{ \underline{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} \right\} \\ &= -\frac{\nu}{E}(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}, \end{aligned}$$

ed infine:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\underline{\sigma} - \nu(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} \right\}.$$

Il tensore $\mathbb{C}$, inverso di E , risulta allora:

$$[\mathbb{C}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

Per esteso, la legge di Hooke inversa si scrive:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right\} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right\} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right\} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz} & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \tau_{xz} & \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases}.$$

8.5 Limitazioni delle costanti elastiche

Il modulo di Young E ed il coefficiente di contrazione laterale ν sono soggetti a delle limitazioni che discendono dalla richiesta che l'energia elastica di deformazione per unità di volume, e quindi anche l'energia complementare elastica, sia positiva per ogni deformazione non nulla. Questa richiesta è equivalente alla condizione che il tensore elastico $\mathbb{E}$ (e quindi il suo inverso $\mathbb{C}$) sia definito positivo. Una condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice $[\mathbb{C}]$ sia definita positiva è che i suoi minori principali siano tutti positivi. Devono quindi essere verificate le disuguaglianze:

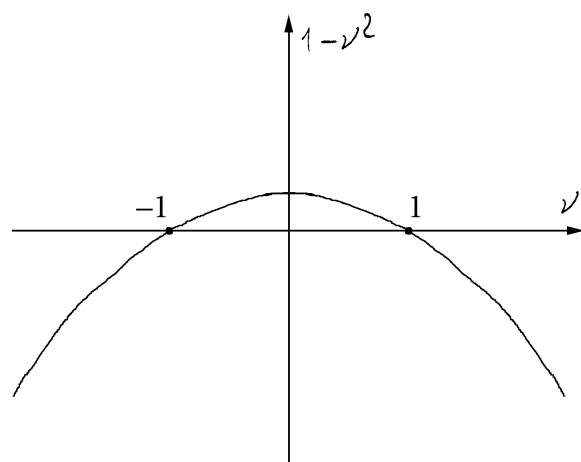
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E} > 0 \\ \frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E^2} > 0 \\ \frac{1}{E^3} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{E^3} \{ (1-\nu^2) + \nu(-\nu-\nu^2) - \nu(\nu^2+\nu) \} \\ \quad = \frac{1}{E^3} \{ (1-\nu^2) - 2\nu^2(1+\nu) \} \\ \quad = \frac{1}{E^3} (1+\nu)^2 (1-2\nu) > 0 \\ \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} > 0 \end{array} \right.$$

Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} E > 0 \\ G > 0 \end{array} \right. ,$$

ed inoltre:

$$\begin{cases} 1-\nu^2 > 0 \\ 1-2\nu > 0 \\ 1+\nu > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < \nu < \frac{1}{2}.$$



Gli usuali materiali utilizzati nella pratica tecnica hanno valori positivi del modulo di Poisson, almeno finché si comportano in modo elastico lineare.

Tuttavia recentemente sono stati prodotti dei materiali porosi, sia polimerici che metallici, che ben si adattano ad essere descritti dalla teoria dell'elasticità lineare e che presentano valori negativi del modulo di Poisson (anche fino a -0.7 per i materiali porosi polimerici e -0.8 per quelli porosi metallici).

8.6 Energia elastica di deformazione ed energia complementare elastica

Utilizzando la legge di Hooke e la sua inversa si ottiene:

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{E}} [\underline{\underline{\epsilon}}] = G \left\{ \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}})^2 \right\} \\ \psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{\sigma}}] = \frac{1}{2E} \left\{ (1+\nu) \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \nu (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})^2 \right\} \end{cases}.$$

Poiché:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 \\ &= (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta})^2 - 2(\sigma_{\zeta}\sigma_{\eta} + \sigma_{\xi}\sigma_{\zeta} + \sigma_{\eta}\sigma_{\xi}) \\ &= (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})^2 - 2\sigma_{\text{II}}, \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}})^2 - 2\epsilon_{\text{II}},$$

dove σ_{II} e ϵ_{II} sono il secondo invariante di tensione e di deformazione rispettivamente, risulta anche:

$$\phi = G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}})^2 - 2\epsilon_{\text{II}} \right\},$$

e:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II} \\ &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1}{2G} \sigma_{II},\end{aligned}$$

in termini di invarianti di deformazione e di tensione. Si noti che il terzo invariante, il determinante, non può comparire in tali espressioni, dovendo queste essere delle forme quadratiche quale conseguenza della linearizzazione del problema elastico.

Vediamo di esprimere tali relazioni in componenti:

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon} &= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yx}^2) + (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + (\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zy}^2) \\ &= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\end{aligned}$$

$$(\text{tr } \underline{\varepsilon})^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2(\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy}),$$

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma} &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2) + (\tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2) + (\tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2),\end{aligned}$$

$$(\text{tr } \underline{\sigma})^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_{xy} \sigma_{yx} + \sigma_{xz} \sigma_{zx} + \sigma_{yz} \sigma_{zy}).$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned}\phi &= G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \right. \\ &\quad + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy}) \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yx}^2) + (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + (\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zy}^2) \right\} \\ &= G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \right. \\ &\quad + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right\}.\end{aligned}$$

La relazione

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

vale per ϕ scritta nella prima forma, dove compaiono tutte e 9 le componenti di $\underline{\varepsilon}$. La seconda forma deve

essere utilizzati se si considerano $\underline{\sigma}$ e $\underline{\varepsilon}$ quali vettori di 6 componenti:

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\underline{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}.$$

In tal caso:

$$\sigma_i = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i}.$$

L'energia complementare risulta poi:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ &\quad + \frac{1}{4G} \{ (\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2) + (\tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2) + (\tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2) \} \\ &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \end{aligned}$$

8.7 Esercizio su un campo di spostamenti

Sia dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = 2kxy + kz^2 \\ v = 2kxy + kz^2 \\ w = -2k(x+y)z \end{cases}.$$

1. Determinare le componenti dei tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi.
2. Nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa determinare le componenti del tensore degli sforzi.
3. Nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ determinare inoltre:
 - (a) L'asse e l'entità della rotazione rigida locale;
 - (b) Le direzioni e i valori principali di tensione;
 - (c) La tensione tangenziale massima.
4. Infine disegnare i cerchi di Mohr relativi al tensore degli sforzi, sempre nei punti del piano di equazione $x - y = 0$, ed indicare i punti rappresentativi degli assi x e y .

Per risolvere l'esercizio occorre innanzitutto determinare il gradiente degli spostamenti:

$$\text{grad} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2ky & 2kx & 2kz \\ 2ky & 2kx & 2kz \\ -2kz & -2kz & -2k(x+y) \end{bmatrix}.$$

I tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi rappresentano poi rispettivamente la parte simmetrica e quella emisimmetrica di $\text{grad} \mathbf{u}$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 2ky & k(x+y) & 0 \\ k(x+y) & 2kx & 0 \\ 0 & 0 & -2k(x+y) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & k(x-y) & 2kz \\ -k(x-y) & 0 & 2kz \\ -2kz & -2kz & 0 \end{bmatrix}.$$

Il tensore degli sforzi si ottiene applicando la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left\{ \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \right\}.$$

Poiché $\text{tr} \boldsymbol{\epsilon} = 0$, risulta quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2kG \begin{bmatrix} 2y & x+y & 0 \\ x+y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -2(x+y) \end{bmatrix}.$$

Nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ il tensore di rotazione infinitesimo e quello degli sforzi assumono l'espressione:

$$\boldsymbol{\omega} = 2kz \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = 4kGx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore di rotazione infinitesimo ha quindi le componenti:

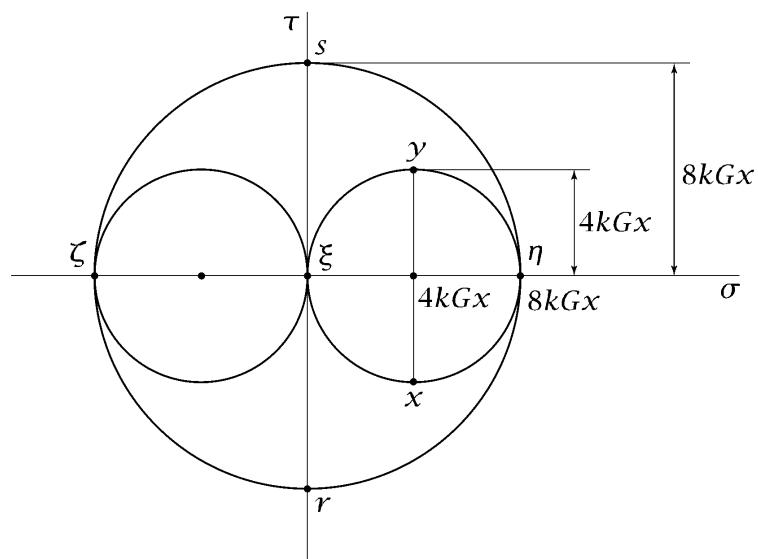
$$\varphi_x = -2kz, \quad \varphi_y = 2kz, \quad \varphi_z = 0.$$

L'asse della rotazione infinitesima nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ giace nel piano xy e la sua parte positiva coincide con la bisettrice del II quadrante. Il suo modulo vale:

$$|\boldsymbol{\varphi}| = 2\sqrt{2}kz.$$

L'asse z rappresenta una direzione principale di tensione a cui corrisponde il valore principale $\sigma_z = -8kGx$. Gli altri due valori principali si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} 4kGx - \sigma & 4kGx \\ 4kGx & 4kGx - \sigma \end{bmatrix} = 0.$$



Si ottiene:

$$\sigma^2 - 8kGx\sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\xi = 0 \\ \sigma_\eta = 8kGx \end{cases}.$$

I versori delle direzioni principali risultano quindi:

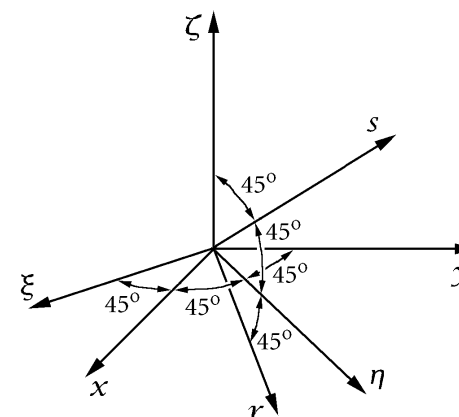
$$\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\eta = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La direzione principale ζ coincide con l'asse z , mentre le direzioni principali ξ e η giacciono sul piano xy e coincidono rispettivamente con le bisettrici del II e del I quadrante.

La tensione tangenziale massima risulta infine:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_\eta - \sigma_\zeta}{2} = 8kGx.$$

Si noti che lo stato tensionale nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ è uno stato di taglio semplice. Infatti, si considerino gli assi r e s nel piano $\eta\zeta$ che si ottengono ruotando l'asse



η di -45° e di 45° rispettivamente. Nel riferimento $O\xi rs$ le componenti del tensore degli sforzi valgono allora:

$$\boldsymbol{\sigma} = 8kGx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 9

Criteri di snervamento

9.1 Superficie di snervamento

La superficie di snervamento o di plasticizzazione, detta anche superficie di danneggiamento nel caso dei materiali fragili, definita nello spazio delle tensioni, rappresenta quella superficie che contiene gli stati tensionali ai quali corrisponde un comportamento elastico del materiale. Tale superficie sarà individuata da una equazione del tipo :

$$f(\underline{\sigma}) = 0,$$

e per l'appartenenza al dominio elastico si richiederà la condizione :

$$f(\underline{\sigma}) < 0.$$

La funzione f è detta funzione di snervamento. Il punto $\underline{\sigma} = \underline{0}$, origine dello spazio delle tensioni,

rappresenta lo stato naturale. A tale punto si richiede di appartenere al dominio elastico. Un'altra ipotesi comunemente accettata richiede che la superficie di snervamento sia convessa.

9.2 Snervamento isotropo

È normalmente accettata l'ipotesi che i materiali abbiano un comportamento isotropo rispetto al raggiungimento del limite di elasticità.

Questo fatto comporta che la funzione di snervamento dipende da $\underline{\sigma}$ solo attraverso i suoi valori principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, poiché, per l'ipotesi di isotropia, il materiale è insensibile ad una rotazione delle direzioni principali. La funzione di snervamento diventa quindi una funzione di tre variabili ed è possibile descrivere la superficie di snervamento nello spazio (tridimensionale) delle

teusioni principali, detto anche spazio di Haigh-Westergaard:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Si noti che è sempre possibile ruotare tre assi ortogonali non orientati su altri tre assi ortogonali qualunque sia la corrispondenza prescelta fra le due terne di assi. Una conseguenza di tale fatto è che non può avere importanza l'ordine in cui i valori principali sono dati. La f deve dunque essere invariante se si permutano i valori principali tra loro. Questo equivale anche a dire che un tensore degli sforzi, e gli infiniti tensori degli sforzi che hanno gli stessi valori principali di questo, sono rappresentati nello spazio delle tensioni principali da più di un punto, 6 punti se i valori principali sono tutti diversi tra loro (pari alle 6 permutazioni delle tre componenti principali), 3 punti se

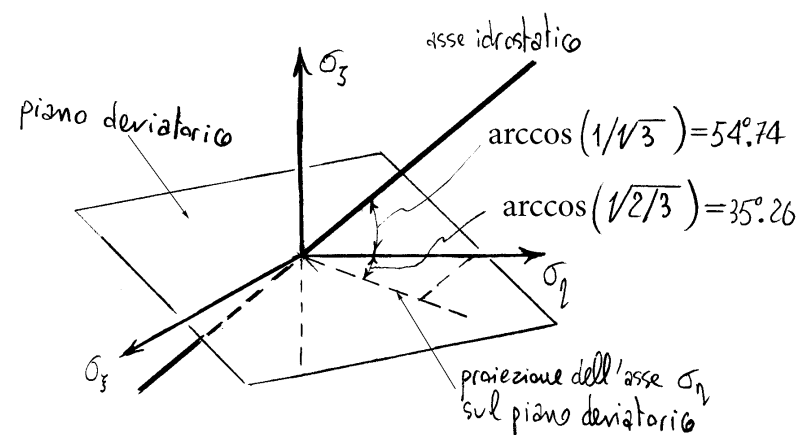
due valori principali sono uguali, 1 punto se lo stato tensionale è sferico.

9.3 Asse idrostatico e piano deviatorico

Gli stati tensionali sferici o isotropi hanno i tre valori principali coincidenti e sono quindi individuati nello spazio delle tensioni principali dalla retta:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

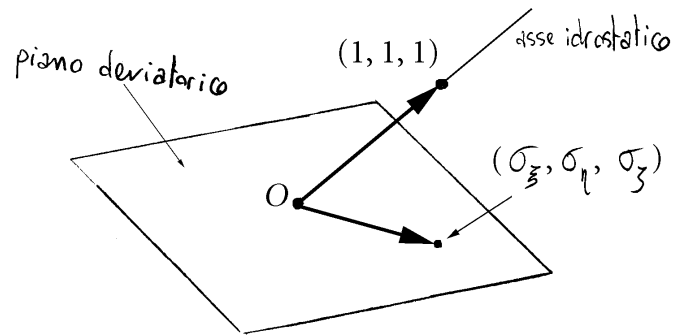
retta passante per l'origine degli assi e coincidente con l'asse dell'ottante positivo dello spazio. Tale retta



è detto asse idrostatico o ottaedrico ed ha uguale inclinazione rispetto ai tre assi di riferimento. I suoi coseni direttori valgono dunque $1/\sqrt{3}$, e di conseguenza il coseno direttore tra un asse e la sua proiezione sul piano ortogonale all'asse idrostatico vale $\sqrt{2/3}$.

Il piano passante per l'origine ed ortogonale all'asse idrostatico ha equazione:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0.$$



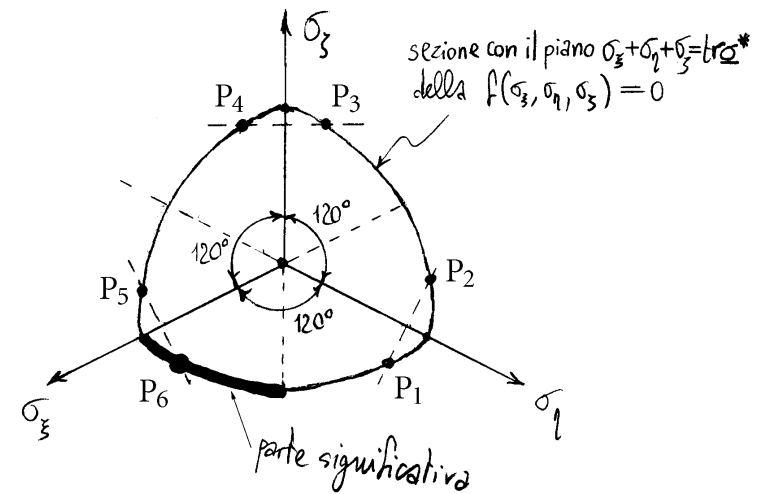
Tale piano rappresenta dunque gli stati tensionali a traccia nulla o deviatorici. Per tale motivo è detto piano deviatorico.

Si noti che le proiezioni degli assi di riferimento sul piano deviatorico formano tra loro angoli di 120° .

Un tensore sferico è rappresentato da un punto dell'asse idrostatico. Un qualunque altro tensore $\underline{\sigma}^*$ è rappresentato da 6 punti (oppure 3 se due valori principali sono uguali) che individuano un piano, parallelo al piano deviatorico, di equazione:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{tr} \underline{\sigma}^*.$$

Poiché l'asse idrostatico, perpendicolare a tale piano, è ugualmente inclinato rispetto ai tre assi coordinati,



c'è simmetria rispetto al piano passante per un asse coordinato e per l'asse idrostatico. Ne consegue che

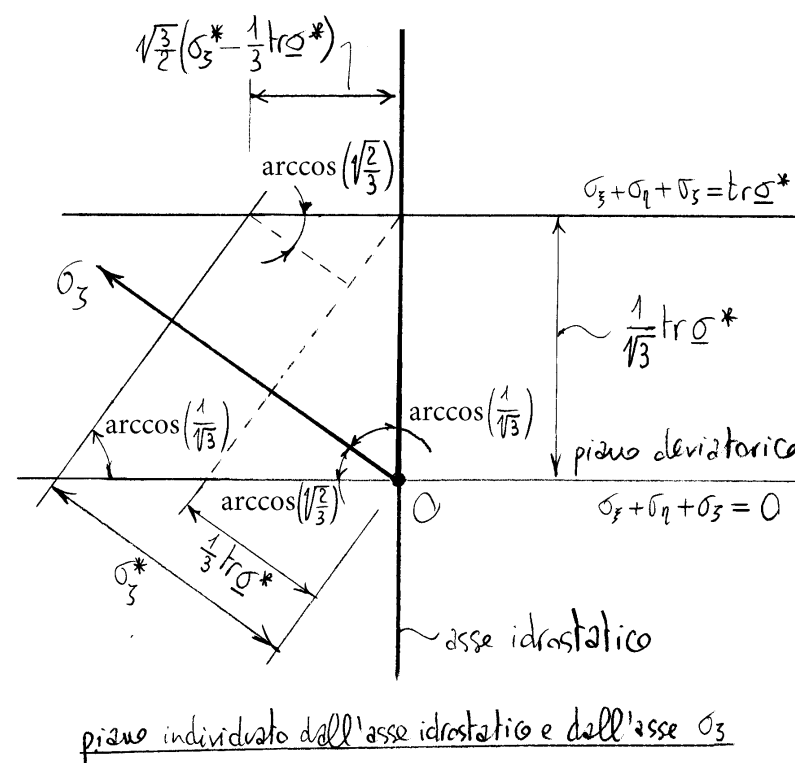
i 6 punti devono trovarsi 2 a 2 in posizione simmetrica rispetto alle proiezioni degli assi (sulle proiezioni degli assi se due valori principali sono uguali), ed inoltre devono sovrapporsi gli uni agli altri per rotazioni di 120° del piano attorno all'asse idrostatico.

Ne consegue che la sezione della superficie di snervamento con un qualunque piano parallelo al piano deviatorico è simmetrica rispetto alle proiezioni degli assi sul piano ed invariante per rotazioni di 120° attorno all'asse idrostatico. Il che poi equivale a dire che solo un sesto della superficie di snervamento è veramente significativa, rappresentando le parti restanti gli stessi stati tensionali.

9.4 Coordinate sul piano deviatorico

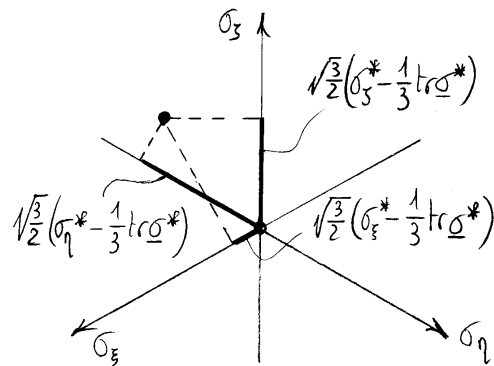
Un punto rappresentativo di uno stato tensionale $\underline{\sigma}^*$ può essere individuato, sul piano parallelo a quello deviatorico

e passante per esso, dalle distanze che esso ha dall'asse idrostatico, misurate, con segno, lungo le proiezioni degli assi. Per valutare tali distanze si noti che un piano passante per il punto ed ortogonale ad un asse di riferimento interseca il piano contenente il punto in una retta ortogonale alla proiezione dell'asse. Ricordando che il coseno dell'angolo



tra un asse coordinato e il piano deviatorico vale $\sqrt{2/3}$
 si ottengono le distanze cercate:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_{\xi}^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^* \right), \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_{\eta}^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^* \right), \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_{\zeta}^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^* \right). \end{cases}$$



Si noti che tali distanze individuano sul piano deviatorico i punti rappresentativi della parte deviatorica di $\underline{\sigma}^*$. Stati tensionali aventi la stessa parte deviatorica sono rappresentati quindi da punti che stanno su una retta parallela all'asse idrostatico.

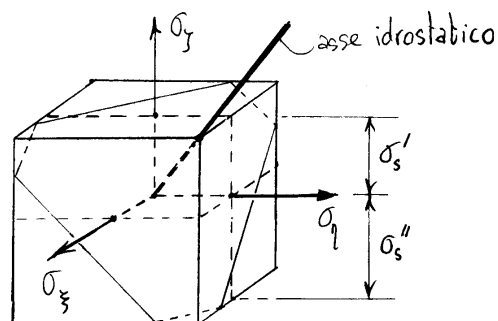
9.5 Criterio della massima tensione normale o di Rankine

Si assume che lo snervamento venga raggiunto quando la massima tensione normale a trazione (o compressione) uguaglia la tensione di snervamento a trazione (o compressione). Se $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}$ e σ_{ζ} sono le tensioni principali associate ad un generico tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$, il criterio equivale ad assumere la seguente superficie di snervamento:

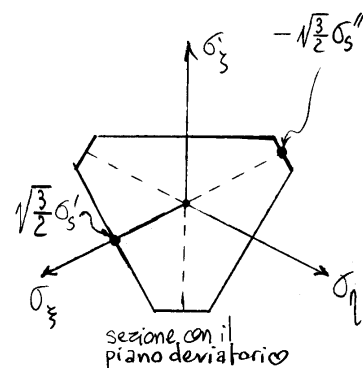
$$\begin{cases} \max \{ \sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \sigma_{\zeta} \} = \sigma_s' \\ \min \{ \sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \sigma_{\zeta} \} = -\sigma_s'' \end{cases},$$

dove σ_s' e σ_s'' sono le tensioni di snervamento a trazione e a compressione rispettivamente.

La superficie di snervamento si rappresenta dunque come un cubo di lato $\sigma_s' + \sigma_s''$ avente le facce parallele agli assi coordinati e distanti dal centro



degli assi di σ'_s nel verso positivo e di σ''_s nel verso negativo. La sezione deviatorica è rappresentata invece da un esagono a lati diseguali (uguali solo se $\sigma'_s = \sigma''_s$) oppure da un triangolo equilatero nel caso il modulo $|\sigma'_s - \sigma''_s|$ sia superiore ad una certa soglia.



Il criterio di snervamento di Rankine, uno dei primi proposti, viene utilizzato nella modellizzazione dei materiali fragili e in particolare delle murature. Viene anche utilizzato, in congiunzione con altri criteri di snervamento, per limitare le tensioni di trazione in materiali che presentano una scarsa resistenza a trazione. In tal caso si impone la sola condizione sulle tensioni di trazione, mentre il comportamento sotto tensioni di compressione è retto da un secondo criterio di snervamento.

9.5.1 Criterio della massima dilatazione o di Grashof

Il criterio di Grashof ha un'importanza esclusivamente storica. Rappresenta il criterio duale di quello di Rankine, assumendo che lo snervamento venga raggiunto quando la massima dilatazione principale (oppure la minima) uguaglia la massima dilatazione a trazione (oppure quella a compressione) che si ha nella prova monoassiale. Dette $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ le dilatazioni principali associate alle tensioni principali $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, si ha:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} \quad i=x, y, z.$$

Poiché le massime dilatazioni a trazione e compressione valgono:

$$\begin{cases} \varepsilon'_s = \frac{1}{E} \sigma'_s \\ \varepsilon''_s = \frac{1}{E} \sigma''_s \end{cases},$$

la superficie di snervamento ha equazione:

$$\begin{cases} \max_{i=x, y, z} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} = \sigma'_s \\ \min_{i=x, y, z} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} = -\sigma''_s \end{cases}.$$

Le equazioni:

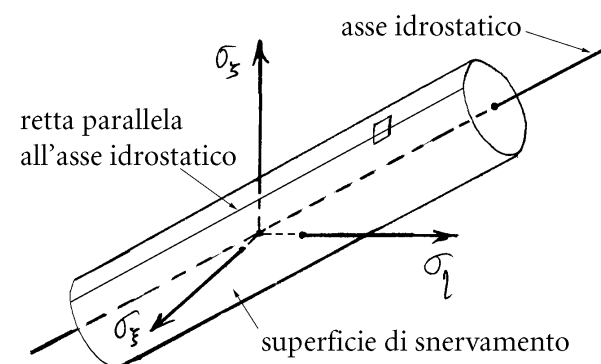
$$\begin{cases} (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} = \sigma'_s \\ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} = -\sigma''_s \end{cases}, \quad i=x, y, z,$$

definiscono 3 coppie di piani paralleli, non ortogonali tra loro se $\nu \neq 0$. Infatti le componenti delle normali a tali piani sono proporzionali alle tre terne di valori $(1, -\nu, -\nu)$, $(-\nu, 1, -\nu)$, $(-\nu, -\nu, 1)$ ed il prodotto scalare tra due di tali normali è dunque proporzionale a $-\nu(2-\nu)$.

9.6 Criteri di snervamento per i materiali metallici

Nel caso dei materiali metallici, le prove sperimentali mostrano che, con buona approssimazione, il limite di snervamento non viene modificato dalla sovrapposizione di un moderato stato sferico di tensione. Si assume allora che il limite di snervamento sia indipendente dalla parte sferica dello sforzo, oppure, in altri termini, che dipenda solo dalla parte deviatorica. Poiché gli sforzi su rette parallele all'asse idrostatico hanno uguale parte deviatorica, ne consegue che se un punto appartiene alla superficie di snervamento allora anche la retta parallela all'asse idrostatico per il punto appartiene alla superficie. La superficie di snervamento può allora essere generata da una retta parallela all'asse idrostatico che si muove usando quale direttrice l'intersezione della superficie con il piano deviatorico. Si può quindi affermare che la superficie di snervamento è rappresentata da un cilindro con asse coincidente con l'asse idrostatico e che è quindi completamente determinata dalla sua intersezione col piano deviatorico o con un qualunque piano parallelo a questo. Inoltre, dato che ai fini dello snervamento conta solo la parte deviatorica della tensione, un tensore degli sforzi si troverà sulla superficie di snervamento se la sua parte deviatorica si trova sull'intersezione della superficie con il piano deviatorico.

I materiali metallici sono in genere anche caratterizzati da un ugual comportamento a trazione e a compressione, ovvero da un uguale valore per i limiti di snervamento a

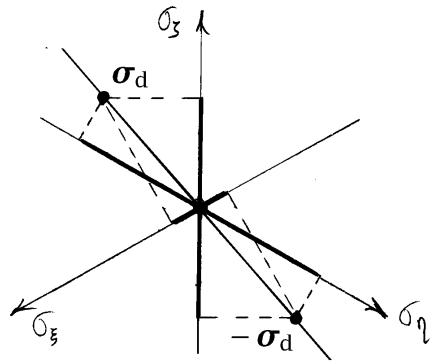


trazione σ'_s e a compressione σ''_s :

$$\sigma'_s = \sigma''_s = \sigma_s.$$

Tale proprietà equivale a dire che per uno stato di tensione monoassiale il cambiamento di segno della tensione non influenza lo snervamento. Estendendo tale proprietà, si richiede, più in generale, che la superficie di snervamento sia invariante sotto un cambiamento di segno della tensione, ovvero sia che se una tensione σ appartiene alla superficie di snervamento allora gli appartiene anche la tensione opposta $-\sigma$. Si consideri allora l'intersezione della superficie di snervamento col piano deviatorico. Se una tensione σ sta sulla superficie di snervamento allora la sua parte deviatorica σ_d appartiene all'intersezione col piano deviatorico, così come $-\sigma_d$, parte deviatorica di $-\sigma$. Le parti deviatoriche σ_d e $-\sigma_d$ sono polar-simmetriche rispetto all'intersezione dell'asse idrostatico col piano deviatorico, cioè si ottengono l'una dall'altra tramite

una rotazione di 180° attorno a tale intersezione. Ne consegue che la superficie di snervamento è invariante per rotazioni di 180° attorno all'asse idrostatico. Essendo già invariante per rotazioni di 120° , se ne deduce infine, combinando due rotazioni di 120° con una di 180° , che è invariante anche per rotazioni di 60° .



Si consideri ora che la superficie di snervamento deve passare per i 6 punti rappresentanti lo snervamento a trazione e compressione. Si ricordi che la parte deviatorica σ_d di un tensore degli sforzi σ vale:

$$\sigma_d = \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I},$$

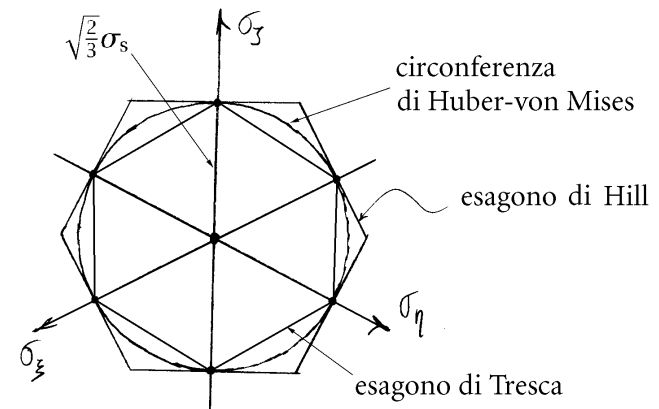
e che i suoi valori principali sono:

$$\sigma_{\xi}^d = \sigma_{\xi} - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \sigma_{\eta}^d = \sigma_{\eta} - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \sigma_{\zeta}^d = \sigma_{\zeta} - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma.$$

Per quel che riguarda lo snervamento a trazione, un valore principale vale σ_s e gli altri due sono nulli. La traccia coinci-

de quindi con σ_s e un valore principale deviatorico vale $\frac{2}{3}\sigma_s$, mentre gli altri due valgono $-\frac{1}{3}\sigma_s$. I tre punti corrispondenti sono dunque posti sulle proiezioni degli assi di riferimento, nella direzione positiva, alla distanza $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\sigma_s\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ dall'asse deviatorico. Stessa considerazione per quel che riguarda lo snervamento a compressione, per cui i tre punti corrispondenti sono posti sulle proiezioni degli assi di riferimento, nella direzione negativa, alla distanza $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ dall'asse deviatorico.

Si noti che esistono due esagoni regolari passanti per i 6 punti corrispondenti allo snervamento monoassiale, uno dei quali contiene l'altro, e che soddisfano tutte le condizioni richieste per la superficie di snervamento. Il criterio di snervamento associato all'esagono interno prende il nome di *criterio di snervamento di Tresca*, mentre quello associato all'esagono esterno prende il nome di *criterio di snervamento di Hill*. Si noti poi che, sotto l'ipotesi di convessità della superficie di snervamento, un qualunque criterio di snervamento accettabile deve essere rappresentato da un dominio di elasticità che



contiene il dominio di Tresca e che è contenuto nel dominio di Hill. Una tra le superfici di snervamento intermedie è quella che interseca il piano deviatorico in una circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$. L'esagono di Tresca risulta essere inscritto a tale circonferenza mentre l'esagono di Hill risulta essere circoscritto. Il criterio di snervamento associato alla circonferenza prende il nome di *criterio di snervamento di Huber-von Mises* e rappresenta il più semplice criterio di snervamento per i materiali metallici.

I risultati delle prove sperimentali eseguite su materiali metallici risultano a favore del criterio di Tresca.¹ D'altra parte, i tre criteri (di Huber-von Mises, di Tresca e di Hill) differiscono di quantità che da un punto di vista ingegneristico possono a volte essere trascurabili. Ne consegue che la decisione di quale criterio applicare può a volte dipendere anche da ragioni di convenienza, e, come già detto, in molti casi il criterio di Huber-von Mises è senz'altro il più semplice da un punto di vista analitico, soprattutto se si deve studiare l'evoluzione del flusso plastico susseguente lo snervamento.

9.6.1 Criterio di snervamento di Huber-von Mises

Si vuole innanzitutto ricavare l'equazione della superficie di snervamento individuata dalla circonferenza del criterio di Huber von Mises. Se la parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ della tensione sta, nel piano deviatorico, sulla circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ e centro l'origine degli assi deve risultare:

$$\left(\sigma_\xi - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\right)^2 + \left(\sigma_\eta - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\right)^2 + \left(\sigma_\zeta - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\right)^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

¹Tale criterio fu infatti proposto da Tresca nel 1864 per interpretare una serie di dati sperimentali.

Sviluppando si ottiene:

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{3} (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) \text{tr } \boldsymbol{\sigma} + \frac{3}{9} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2,$$

cioè:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

Si tenga ora conto che il secondo invariante di tensione σ_{II} vale:

$$\sigma_{II} = \sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi,$$

e che quindi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 \\ &= (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta)^2 - 2 (\sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi) \\ &= (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - 2 \sigma_{II}. \end{aligned}$$

Ne consegue la seguente equazione della superficie di snervamento del criterio di Huber-von Mises:

$$(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II} = \sigma_s^2.$$

Il criterio di Huber-von Mises ha una interpretazione particolare, dovuta a Hencky¹ e riportata nel seguito:

Criterio dell'energia di deformazione distortrice (Hencky).
Lo snervamento viene attinto quando l'energia di deformazione distortrice per unità di volume associata alla tensione

¹Per tale motivo il criterio è a volte citato quale criterio di Huber-von Mises-Hencky. Esso fu introdotto da Huber nel 1904 per le sole tensioni principali negative e nella forma completa da von Mises nel 1913. L'interpretazione di Hencky risale al 1924.

uguaglia l'energia di deformazione distortante per unità di volume che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale.

L'energia di deformazione distortante rappresenta l'energia di deformazione associata alla sola parte deviatorica dello sforzo:

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I}.$$

In tal modo lo snervamento viene reso indipendente dalla parte sferica dello sforzo:

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I}.$$

Il criterio di Huber-von Mises, nella formulazione energetica sopra esposta, rappresenta una variante di un criterio dovuto a Beltrami, nel quale si richiede a tutta l'energia elastica associata allo sforzo di uguagliare tutta l'energia elastica che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale. Il criterio di Beltrami non trova modernamente alcuna applicazione, salvo l'utilizzo per i materiali metallici porosi (che presentano diverse resistenze a trazione e

compressione), per il conglomerato di cemento e per le terre di superfici di snervamento simili a quella che si ottiene dal criterio di Beltrami.

Per esplicitare la formulazione energetica del criterio ricordiamo che l'energia di deformazione nella forma complementare si scrive:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II} \\ &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1}{2G} \sigma_{II},\end{aligned}$$

in termini di invarianti dello sforzo.

Ricordando che la traccia della parte deviatorica dello sforzo è nulla:

$$\text{tr } \underline{\sigma}_d = 0,$$

l'energia distortante associata ad un generico sforzo $\underline{\sigma}$ risulta:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = -\frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}^d,$$

dove σ_{II}^d è il secondo invariante della parte deviatorica dello sforzo:

$$\begin{aligned} \sigma_{II}^d &= \left(\sigma_x - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \left(\sigma_y - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) + \\ &\quad + \left(\sigma_y - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \left(\sigma_z - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) + \\ &\quad + \left(\sigma_z - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \left(\sigma_x - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \\ &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \\ &\quad - \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \text{tr } \underline{\sigma} + \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 \\ &= \sigma_{II} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma})^2. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = \frac{1+\nu}{3E} \left\{ (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} \right\}.$$

Il valore Ψ_s dell'energia allo snervamento si ottiene da tale espressione tenendo conto che all'atto dello snervamento nella prova monassiale risulta $\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_s$ e $\sigma_{II} = 0$:

$$\Psi_s = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2.$$

La condizione:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = \Psi_s$$

ric conduce quindi all'espressione:

$$(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} = \sigma_s^2.$$

Si noti che il termine $(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II}$ è sempre positivo, rappresentando l'energia di deformazione a meno del coefficiente positivo $(1+\nu)/3E$.

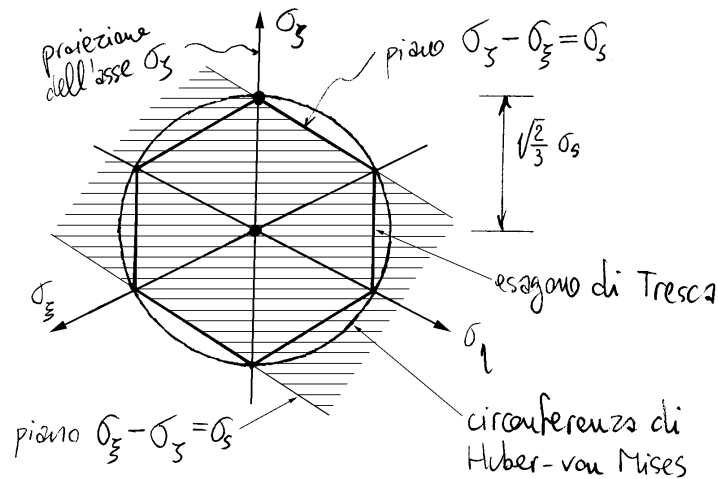
9.6.2 Criterio di snervamento di Tresca

Per ricavare l'equazione della superficie di snervamento associata all'esagono del criterio di Tresca si consideri la coppia di piani paralleli contenenti due facce della superficie, l'uno passante per i punti $(0, 0, \sigma_s)$ e $(-\sigma_s, 0, 0)$ e l'altro per i punti opposti $(0, 0, -\sigma_s)$ e $(\sigma_s, 0, 0)$. I due piani sono ortogonali al piano deviatorico $\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta = 0$ e hanno quindi equazione:

$$\sigma_\xi - \sigma_\zeta = -\sigma_s,$$

$$\sigma_\xi - \sigma_\zeta = \sigma_s.$$

Infatti tali piani passano per i punti predetti come può facilmente essere verificato. Inoltre, dato che il vettore di componenti $(1, 0, -1)$ è ortogonale alla coppia di piani e il vettore di componenti $(1, 1, 1)$ al piano deviatorico risulta verificata l'ortogonalità tra la coppia di piani e il piano deviatorico. Af-



finché la tensione σ si trovi nella striscia individuata dai due piani deve quindi risultare:

$$|\sigma_\xi - \sigma_\zeta| \leq \sigma_s.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due coppie di piani paralleli, si ottengono le seguenti relazioni:

$$|\sigma_\zeta - \sigma_\eta| \leq \sigma_s,$$

$$|\sigma_\eta - \sigma_\xi| \leq \sigma_s.$$

Ne risulta la seguente condizione di appartenenza al dominio elastico:

$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} \leq \sigma_s,$$

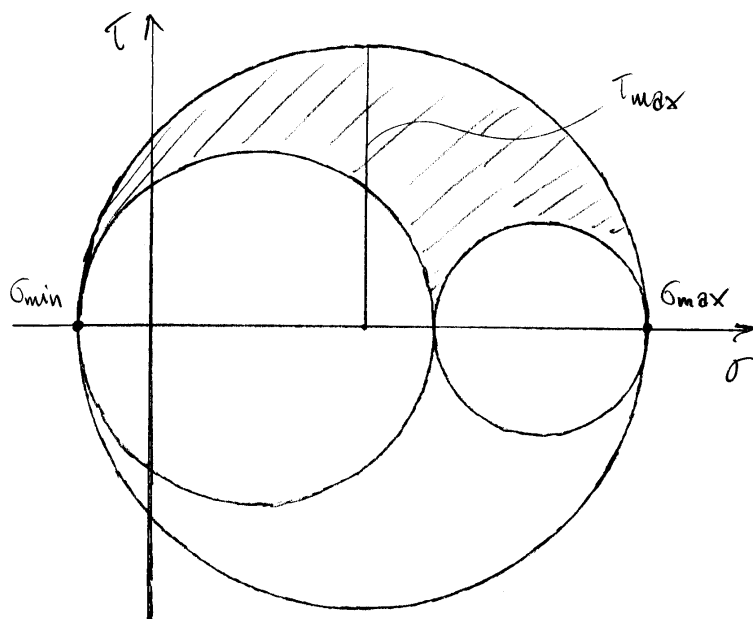
e la seguente equazione per la superficie di snervamento:

$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} = \sigma_s,$$

Si vuole ora mostrare che il criterio descritto sopra coincide con il

Criterio della massima tensione tangenziale. Lo snervamento viene raggiunto quando la massima tensione tangenziale associata al dato stato tensionale uguaglia la massima tensione tangenziale che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale.

Ricordiamo che la massima tensione tangenziale uguaglia il raggio della più grande circonferenza



di Mohr :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2},$$

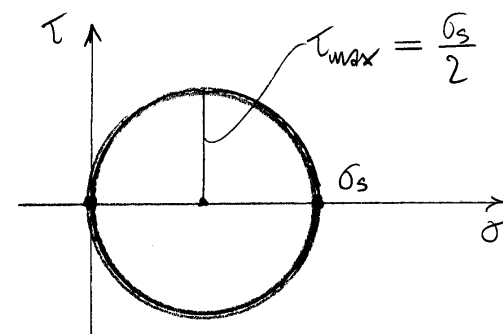
e quindi:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}.$$

La tensione tangenziale massima τ_s che si ha all'atto dello snervamento nella prova monassiale vale

invece :

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{2}.$$



circonferenza di Mohr relativa alla prova monassiale

Il criterio di snervamento di Tresca :

$$\tau_{max} = \tau_s,$$

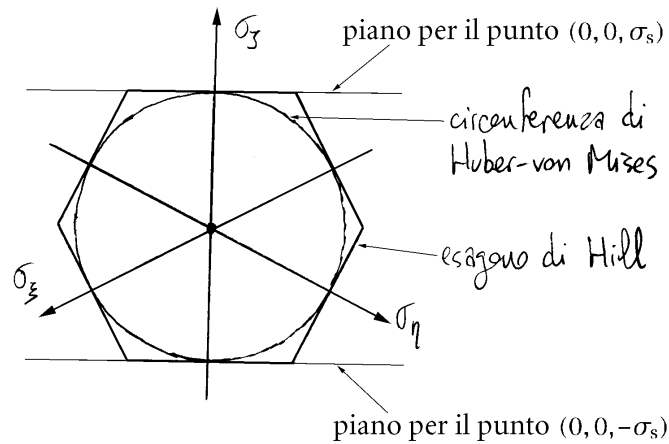
condurre quindi alla seguente superficie di snervamento :

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = \sigma_s,$$

in accordo con quanto già ottenuto.

9.6.3 Criterio di snervamento di Hill

L'equazione della superficie di snervamento associata all'esagono del criterio di Hill può essere ottenuta in modo analogo a quanto fatto per il criterio di Tresca. Si consideri allora la coppia di piani paralleli ortogonali al piano deviatorico e contenenti due facce della superficie, l'uno passante per il punto $(0, 0, \sigma_s)$ e l'altro per il punto opposto $(0, 0, -\sigma_s)$. Tali piani



devono avere versore normale $\mathbf{n}$ con componente $\sqrt{\frac{2}{3}}$ rispetto all'asse σ_ζ e uguale componente rispetto agli assi σ_ξ e σ_η . Poiché $\mathbf{n}$ deve anche essere ortogonale al vettore di componenti $(1, 1, 1)$ (vettore che è ortogonale al piano deviatorico) si ha:

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix}.$$

Le equazioni dei due piani possono quindi essere messe nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) &= \sigma_s, \\ \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) &= -\sigma_s. \end{aligned}$$

Affinché la tensione $\boldsymbol{\sigma}$ si trovi nella striscia individuata dai

due piani deve quindi risultare:

$$\left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \leq \sigma_s.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due coppie di piani paralleli, ne risulta infine la seguente condizione di appartenenza al dominio elastico:

$$\max \left\{ \left| \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_\zeta + \sigma_\eta) \right|, \left| \sigma_\eta - \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \right|, \left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \right\} \leq \sigma_s,$$

e la seguente equazione per la superficie di snervamento:

$$\max \left\{ \left| \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_\zeta + \sigma_\eta) \right|, \left| \sigma_\eta - \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \right|, \left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \right\} = \sigma_s.$$

9.7 Cenni sui criteri di snervamento per i materiali non metallici

I materiali non metallici (conglomerati cementizi, rocce, mezzi granulari, terre) sono caratterizzati da vuoti e da microfessurazioni che rendono il comportamento del materiale fortemente dipendente dalla componente sferica dello sforzo.

Saranno nel seguito descritti i criteri di Drucker-Prager e di Mohr-Coulomb.

Tra i due criteri illustrati, quello che risulta più aderente ai dati sperimentali è quello di Mohr-Coulomb. Tuttavia, da un punto di vista pratico, i due criteri sono equivalenti.

9.7.1 Criterio di Drucker-Prager

Rappresenta una generalizzazione del criterio di Huber-von Mises. Con tale criterio si aggiunge alla funzione di snervamento di Huber-von Mises un termine dipendente linearmente dalla

componente sferica dello sforzo ottenendo:

$$\alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}} = (\alpha + 1) \sigma_s \quad .$$

In tale espressione, α rappresenta un parametro costitutivo positivo adimensionale. Notando che su un piano parallelo al piano deviatorico $\operatorname{tr} \underline{\sigma}$ è costante, ne risulta che l'intersezione della superficie di snervamento definita da tale criterio con un piano parallelo a quello deviatorico coincide con una circonferenza di raggio ρ :

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ (\alpha + 1) \sigma_s - \alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} \} \quad .$$

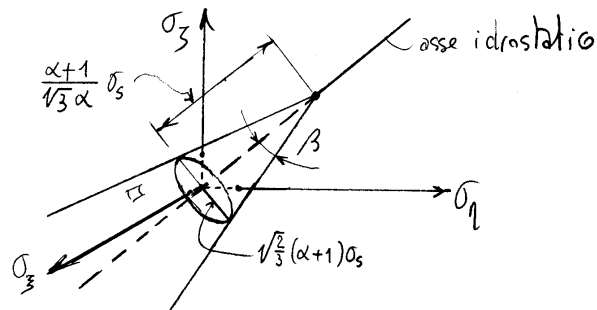
Questo perché se $a = \operatorname{tr} \underline{\sigma}$, l'equazione:

$$\sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}} = (\alpha + 1) \sigma_s - \alpha a \quad ,$$

con a considerato costante anche al di fuori del piano considerato, rappresenta, come già visto, l'equazione di un cilindro di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}} \{ (\alpha + 1) \sigma_s - \alpha a \}$.

All'aumentare di $tr \underline{\sigma}$, il raggio del cerchio diminuisce. La superficie di snervamento è dunque rappresentata da un cono con vertice in corrispondenza del punto posto sull'asse idrostatico individuato dalla condizione $f=0$:

$$tr \underline{\sigma} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \sigma_s.$$



Tale punto ha coordinate

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\alpha+1}{3\alpha} \sigma_s,$$

e dista dal centro degli assi della quantità:

$$d = \frac{\alpha+1}{\sqrt{3}\alpha} \sigma_s.$$

Poiché il raggio della circonferenza sul piano deviatorico vale:

$$l_d = \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha+1) \sigma_s,$$

se ne deduce che la semiapertura β del cono soddisfa la relazione:

$$\tan \beta = \frac{l_d}{d} = \sqrt{2} \alpha.$$

9.7.2 Criterio di Mohr-Coulomb

Si assume che lo snervamento del materiale si sviluppi quando la tensione tangenziale raggiunge in almeno una giacitura un valore limite dipendente linearmente dalla tensione normale alla giacitura:

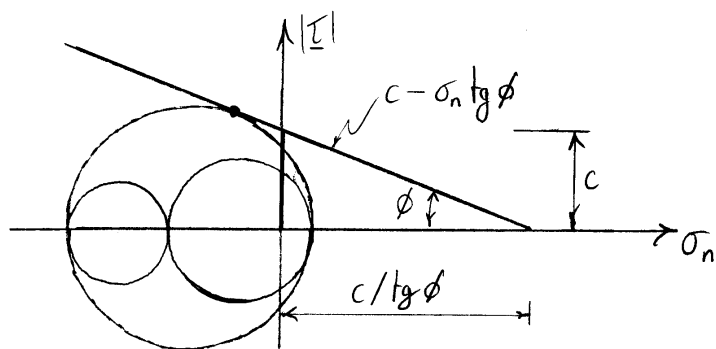
$$|\underline{\tau}_n| = c - \sigma_n \tan \phi.$$

Il coefficiente di σ_n è messo nella forma $-\tan \phi$ e ϕ è detto angolo di attrito interno. La costante c è detta coesione ed ha le dimensioni di una

tensione. Su una giacitura di normale $\underline{n}$ risulta:

$$\begin{cases} \sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \underline{n} \\ |\underline{\tau}_n|^2 = (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot (\underline{\sigma} \underline{n}) - \sigma_n^2 \end{cases}$$

Il criterio si presta ad essere rappresentato efficacemente nel piano di Mohr. Infatti in tale piano l'equazione limite rappresenta una retta inclinata dell'angolo ϕ , detta retta limite.



Gli stati tensionali limite, quindi appartenenti alla superficie di snervamento, devono avere la circonferenza di Mohr più esterna tangente alla retta limite.

9.8 Tensione ideale

Dato un tensore degli sforzi generico:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

lo si vuole trasformare in un tensore degli sforzi monoassiale "equivalente" secondo un qualche "criterio di snervamento":

$$[\underline{\sigma}_{eq}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{id} \end{bmatrix},$$

dove σ_{id} indica la cosiddetta tensione normale ideale o, semplicemente, "tensione ideale".

Il criterio di Rankine rappresenta uno dei primi criteri di resistenza proposti e viene ancora utilizzato per la verifica di resistenza di materiali fragili.

In accordo con la superficie di snervamento già descritta, la tensione ideale vale:

$$\sigma'_{id} = \max \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \quad (\text{a trazione}),$$

$$\sigma''_{id} = \min \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \quad (\text{a compressione}).$$

Nel caso del criterio di Grashof risulta invece:

$$\sigma'_{id} = \max_{i=x,y,z} \left\{ (1+\nu) \sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\},$$

$$\sigma''_{id} = \min_{i=x,y,z} \left\{ (1+\nu) \sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\}.$$

Il criterio di Huber-von Mises equivale poi a porre la σ_{id} nella seguente forma:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}}.$$

Scritta in componenti in un generico sistema di riferimento ortogonale, la σ_{id} diventa:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Il criterio di snervamento di Tresca conduce invece alla seguente tensione ideale:

$$\sigma_{id} = \max \{ |\sigma_x - \sigma_y|, |\sigma_x - \sigma_z|, |\sigma_y - \sigma_z| \}.$$

Parte II

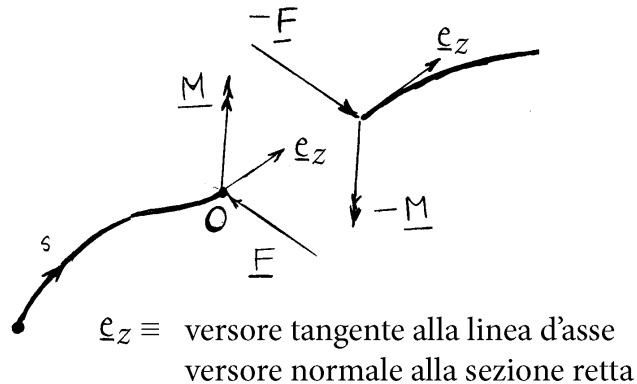
Meccanica delle travi

Capitolo 10

Analisi della sollecitazione nelle travi

10.1 Caratteristiche della sollecitazione

Si ricorda che le caratteristiche della sollecitazione rappresentano la risultante $\underline{F}$ e il momento risultante $\underline{M}$ delle forze agenti sulla faccia della sezione retta di normale uscente positiva, ridotte al punto O intersezione tra linea d'asse e sezione retta. Nella decomposizione locale individuata dalla normale alla sezione retta (coincidente con la tangente alla linea d'asse) vengono generate da una parte la forza normale N e il Momento flettente M_f , risultante e momento risultante della tensione normale, e dall'altra parte il taglio T e il momento torcente M_t , risultante e momento risultante della tensione tangenziale. Si noti che le tensioni normali sono un sistema di forze parallele e quindi equivalenti, se $N \neq 0$, ad un'unica forza perpendicolare alla sezione retta. Analogamente, le tensioni tangenziali



sono un sistema di forze piane e quindi equivalenti, se $T \neq 0$, ad un'unica forza giacente sulla sezione retta.

Il momento risultante $\underline{M}$ e le sue componenti M_f e M_t dipendono dalla scelta del punto O , mentre la risultante $\underline{F}$ e le sue componenti N e T ne sono indipendenti. Detto P un punto posto sul piano della sezione retta distinto dal punto O posto sulla linea d'asse risulta:

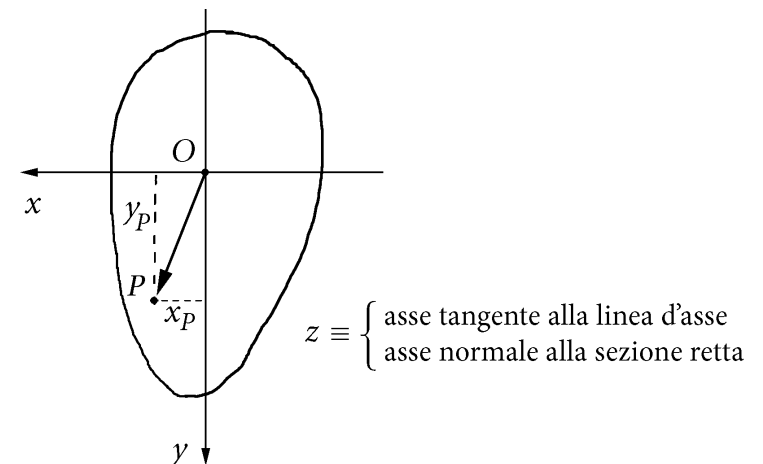
$$\underline{M}_P = \underline{M} + (O - P) \times \underline{F}, \quad (1)$$

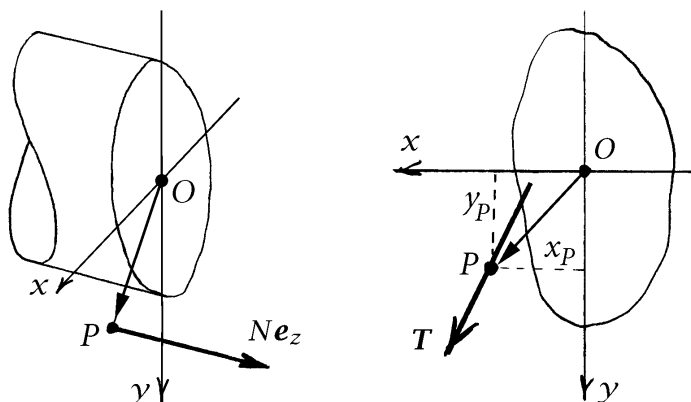
oppure:

$$\underline{M}_f^P = \underline{M}_f + (O - P) \times (N \underline{e}_z), \quad (2a)$$

$$\underline{M}_t^P \underline{e}_z = \underline{M}_t \underline{e}_z + (O - P) \times \underline{T}, \quad (2b)$$

dove si sono indicati con il simbolo P i momenti valutati rispetto al generico polo. Scelto infine un sistema di riferimento Oxy sulla sezione retta della trave le (2) diventano:





$$M_x^P = M_x - N y_P, \quad (3a)$$

$$M_y^P = M_y + N x_P, \quad (3b)$$

$$M_t^P = M_t - T_y x_P + T_x y_P. \quad (3c)$$

dove x_P e y_P sono le coordinate del punto P nel dato sistema Oxy .

Si noti che, allo stato attuale, la scelta della linea d'asse è, almeno fino a un certo punto, arbitraria e che quindi non esiste nessun motivo particolare per la scelta del punto O quale polo per il calcolo dei momenti. Si noti anche che i sistemi delle tensioni normali e delle tensioni tangenziali che si generano dalla scomposizione delle tensioni agenti sulla sezione retta sono indipendenti l'uno dall'altro e non esiste nessun motivo particolare per la scelta di un unico punto quale polo per il calcolo dei momenti dei due sistemi di forze, se non quello della semplicità. Per non perdere generalità, quando e se sarà necessario, ci si riferirà a due poli distinti, G per il calcolo del momento flettente e C per il calcolo del momento torcente,

distinti a loro volta dal punto O posto sulla linea d'asse. Se questo è il caso, dalle (2) risulta allora:

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_f + (\mathbf{O} - \mathbf{G}) \times (N \mathbf{e}_z), \quad (4a)$$

$$M_C \mathbf{e}_z = M_t \mathbf{e}_z + (\mathbf{O} - \mathbf{C}) \times \mathbf{T}, \quad (4b)$$

dove $\mathbf{M}_G$ è il momento flettente valutato rispetto al polo G e M_C il momento torcente valutato rispetto al polo C .

Si noti che essendo 6 il numero delle componenti scalari delle caratteristiche di sollecitazione, risulta possibile rappresentare la sollecitazione nelle travi tramite un *vettore (algebrico) di sollecitazione* $\mathbf{S}$ di dimensione 6. Si noti che le (3) definiscono due gruppi di tre componenti di sollecitazione ciascuno, (N, M_x, M_y) e (M_t, T_x, T_y) , tali che le componenti di sollecitazione di ogni gruppo siano legate tra loro e indipendenti da quelle dell'altro gruppo. Per tale motivo nel vettore di deformazione $\mathbf{S}$ si riporteranno per prime le componenti di sollecitazione del primo gruppo e a seguire quelle del secondo gruppo:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

dove in generale M_x e M_y indicheranno le componenti del momento flettente di polo G mentre M_t indicherà il momento torcente di polo C .

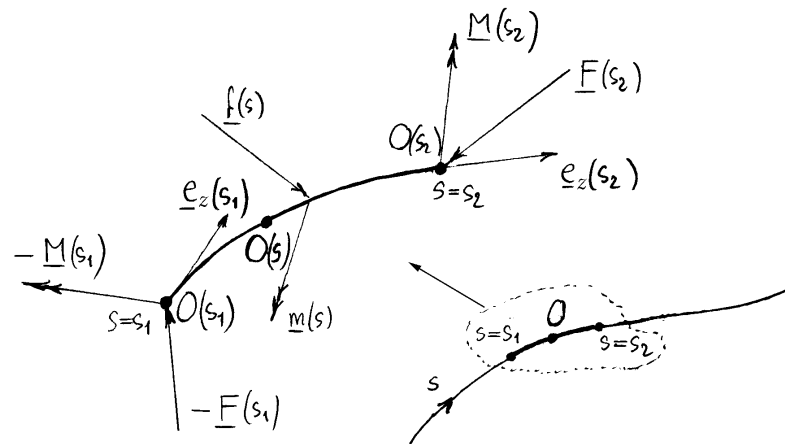
10.2 Equazioni di equilibrio

10.2.1 Equazioni indefinite di equilibrio

Sia O un punto sulla linea d'asse dove non sono applicate forze e coppie concentrate.

Equilibrio alla traslazione:

$$\int_{s_1}^{s_2} \underline{f} \, ds + \underline{F}(s_2) - \underline{F}(s_1) = \underline{0}$$



$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} \right) ds = \underline{0} \quad \text{per ogni } s_1, s_2$$

$$\boxed{\frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} = \underline{0}}$$

Equilibrio alla rotazione (polo Q generico)

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \underline{m} + (\underline{O} - \underline{Q}) \times \underline{f} \right\} ds + \underline{M}(s_2) - \underline{M}(s_1)$$

$$+ (\underline{O}(s_2) - \underline{Q}) \times \underline{F}(s_2) - (\underline{O}(s_1) - \underline{Q}) \times \underline{F}(s_1) = \underline{0}$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{m} + (\underline{O} - \underline{Q}) \times \left(\frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} \right) + \frac{d\underline{O}}{ds} \times \underline{F} \right\} ds = \underline{0},$$

per ogni s_1 e s_2 e quindi:

$$\boxed{\frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{e}_z \times \underline{F} + \underline{m} = \underline{0}}$$

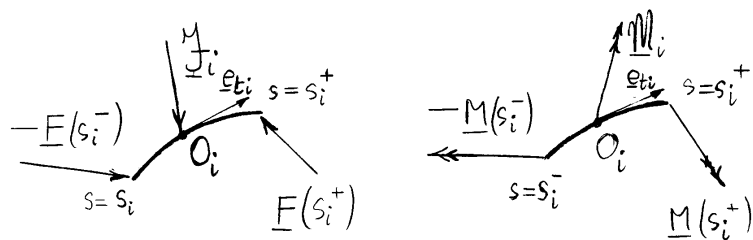
$\left(\frac{d\underline{O}}{ds} = \underline{e}_z \right)$ se s rappresenta la lunghezza d'arco della linea d'asse)

10.2.2 Equazioni di discontinuità

Punti di applicazione di forze e coppie concentrate

$$\underline{F}(s_i^+) - \underline{F}(s_i^-) + \underline{Y}_i = \underline{0}$$

$$\underline{M}(s_i^+) - \underline{M}(s_i^-) + \underline{M}_i = \underline{0}$$



10.2.3 Equazioni di equilibrio al contorno

Le caratteristiche della sollecitazione che affiorano alle estremità devono uguagliare le forze applicate. Nella prima sezione di estremità le caratteristiche della sollecitazione sono applicate sulla sezione di normale entrante positiva e dunque le forze applicate rappresentano le caratteristiche cambiate di segno:

$$\begin{cases} F(0) = -F_0 \\ M(0) = -M_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F(l) = F_l \\ M(l) = M_l \end{cases}$$

10.2.4 Componenti scalari delle equazioni indefinite di equilibrio

Si ricordi che:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \tau \mathbf{e}_y \\ \frac{d\mathbf{e}_z}{ds} = -c \mathbf{e}_y \\ \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} = c \mathbf{e}_z - \tau \mathbf{e}_x \end{cases}$$

Poiché:

$$\mathbf{F} = T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y + N \mathbf{e}_z,$$

e:

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_t \mathbf{e}_z,$$

risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{ds} &= \frac{dT_x}{ds} \mathbf{e}_x + \frac{dT_y}{ds} \mathbf{e}_y + \frac{dN}{ds} \mathbf{e}_z \\ &\quad + T_x \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} + T_y \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} + N \frac{d\mathbf{e}_z}{ds} \\ &= \left(\frac{dT_x}{ds} - \tau T_y \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{dT_y}{ds} - cN + \tau T_x \right) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{dN}{ds} + cT_y \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$



$\tau \equiv$ torsione dell'asse geometrico della trave

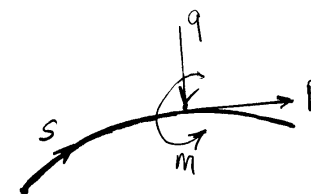
$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \left(\frac{dM_x}{ds} - \tau M_y \right) \underline{e}_x + \left(\frac{dM_y}{ds} + c M_t + M_x \tau \right) \underline{e}_y + \left(\frac{dM_t}{ds} + c M_y \right) \underline{e}_z.$$
$$\begin{aligned}\underline{e}_z \times \underline{F} &= \underline{e}_z \times (\tau_x \underline{e}_x + \tau_y \underline{e}_y + N \underline{e}_z) \\ &= \tau_x \underline{e}_y - \tau_y \underline{e}_x \quad .\end{aligned}$$
$$\begin{cases} \frac{dT_x}{ds} - \tau T_y + q_x = 0 \\ \frac{dT_y}{ds} - c N + \tau T_x + q_y = 0 \\ \frac{dN}{ds} + c T_y + p = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_x}{ds} - \tau M_y - T_y + m_x = 0 \\ \frac{dM_y}{ds} - c M_t + M_x \tau + T_x + m_y = 0 \\ \frac{dM_t}{ds} + c M_y + m_z = 0 \end{array} \right.$$

L'analisi precedente è valida sotto l'ipotesi che la tangente alla linea d'asse coincida con la normale alla sezione retta, altrimenti la binormale e la normale principale non appartengono al piano della sezione. Questo è senz'altro vero nella configurazione di riferimento, dove l'equilibrio viene scritto nell'ipotesi di piccoli spostamenti. Nella configurazione deformata, dove in generale deve essere scritto l'equilibrio, le sezioni rette della configurazione di riferimento non restano in generale ortogonali alla linea d'asse anche dopo la deformazione, salvo che non si assuma l'ipotesi di trave inflessa, ovvero non si ipotizzi esplicitamente tale circostanza.

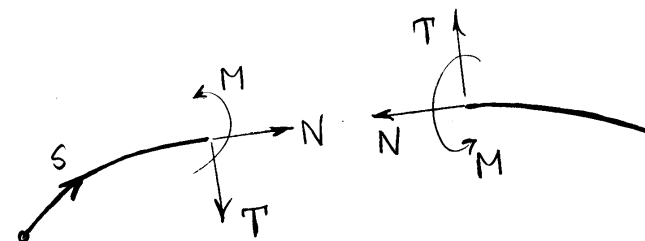
ortogonale al piano della trave, e quindi risulta:

$$\begin{cases} \underline{f} = q \underline{e}_y + p \underline{e}_z \\ \underline{m} = m \underline{e}_x \end{cases}, \quad (\text{forze})$$



$$\begin{cases} \underline{F} = T \underline{e}_y + N \underline{e}_z \\ \underline{M} = M \underline{e}_x \end{cases}, \quad (\text{caratteristiche della sollecitazione})$$

e quindi non vi sono momenti torcenti.



10.3 Statica della trave piana

10.3.1 Equazioni scalari di equilibrio indefinito

Le forze applicate (ridotte ai punti della linea d'asse) e le caratteristiche della sollecitazione appartengono al piano dell'asse (o appartengono tutte ad un piano nel caso l'asse della trave sia rettilineo).

Poiché le forze giacciono nel piano della trave, i momenti hanno asse momento

Le sei equazioni di equilibrio scalari si riducono allora alle tre seguenti equazioni scalari:

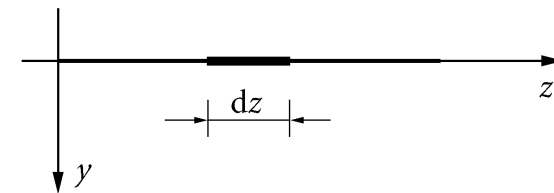
$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} - cN + q = 0 \\ \frac{dN}{ds} + cT + p = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \end{cases}.$$

In generale, l'asse deformato della trave è curvo anche se l'asse indeformato è rettilineo, e dunque, se gli spostamenti sono grandi, le equazioni indefinite di equilibrio dipendono dalla curvatura dell'asse deformato.

Se gli spostamenti sono piccoli l'asse deformato si confonde con l'asse indeformato e, se questo è rettilineo, le equazioni indefinite divergono ($c=0$):

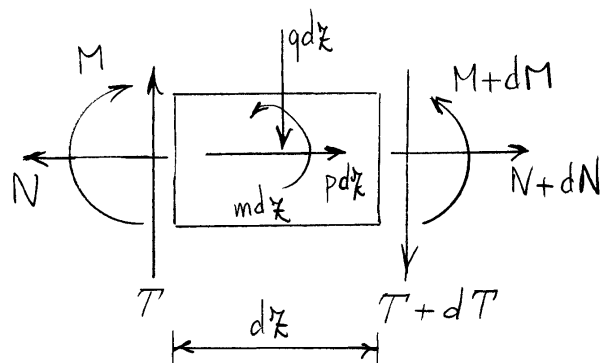
$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m - T = 0 \end{cases}.$$

Tali equazioni di equilibrio potrebbero essere ottenute in modo diretto scrivendo le equazioni di equilibrio nel piano (due alla traslazione ed una alla rotazione) di un tratto di trave di lunghezza dz , trascurando gli infinitesimi



di ordine superiore al primo in dz :

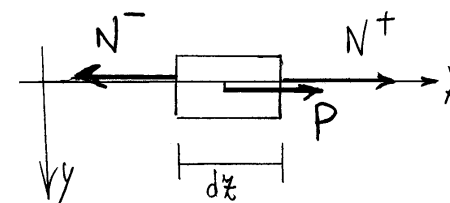
$$\begin{cases} -N + N + dN + p d\zeta = 0 \\ -T + T + dT + q d\zeta = 0 \\ -M + M + dM - T d\zeta + m d\zeta = 0 \end{cases}$$



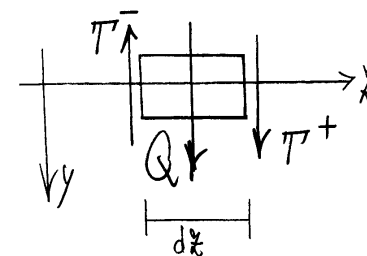
10.3.2 Equazioni scalari di discontinuità

Se in corrispondenza di un punto sulla linea d'asse agisce una forza oppure una coppia concentrata, l'equilibrio nell'intorno del punto impone che in sua corrispondenza le caratteristiche della sollecitazione subiscano delle discontinuità. In tale equilibrio le forze distribuite non intervengono perché al

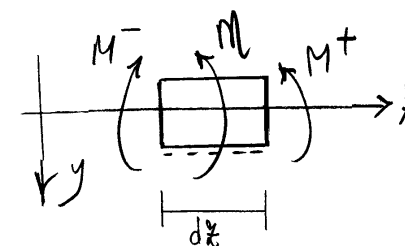
limite per $d\zeta \rightarrow 0$ si annullano, mentre le forze concentrate restano invariate.



$$N^+ - N^- + P = 0 \Rightarrow \Delta N + P = 0$$



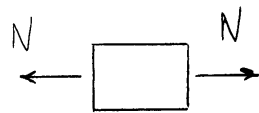
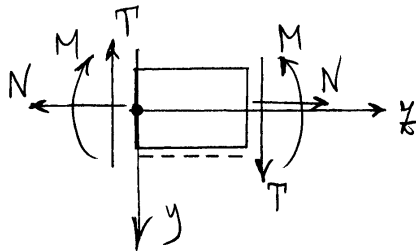
$$T^+ - T^- + Q = 0 \Rightarrow \Delta T + Q = 0$$



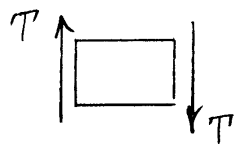
$$M^+ - M^- + \eta = 0 \Rightarrow \Delta M + \eta = 0$$

10.3.3 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (asse rettilineo)

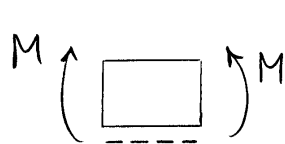
10.3.3.1 Convenzioni di segno



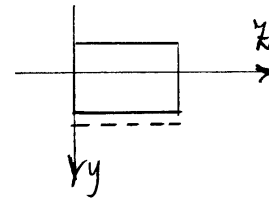
La forza normale è positiva se uscente dall'elemento



La forza di taglio è positiva se fa ruotare l'elemento in senso orario

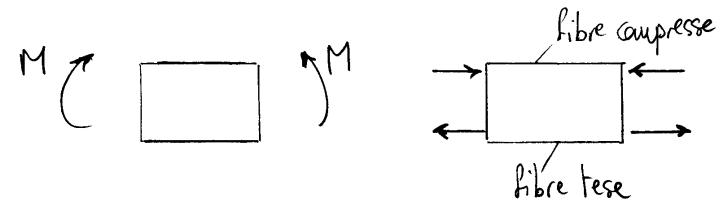


Il momento flettente è positivo se tende le fibre di riferimento (dalla parte del tratteggio)



Orientazione degli assi y e z relativamente alle fibre di riferimento se si vuole la validità della terza equazione indefinita di equilibrio

I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione si tracciano riportando, perpendicolarmente alla linea d'asse, il valore della caratteristica stessa. Per quel che riguarda forza normale e taglio non ha importanza da quale parte venga riportato il valore positivo, purché sia chiaramente indicato il segno della caratteristica. Nel caso del momento flettente invece non ha importanza il suo segno, che può anche non essere indicato. È però consuetudine riportare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese.



Se si scelgono delle fibre di riferimento per dare un segno al momento, questi va tracciato dalla parte delle fibre di riferimento se il momento è positivo, dalla parte opposta se il

momento è negativo, in modo da garantire in ogni caso che il momento sia tracciato dalla parte delle fibre tese.

Le equazioni indefinite di equilibrio e quelle di discontinuità impongono delle condizioni all'andamento dei diagrammi.

10.3.3.2 Forza normale

$$\frac{dN}{dx} + p = 0, \quad \Delta N + P = 0.$$

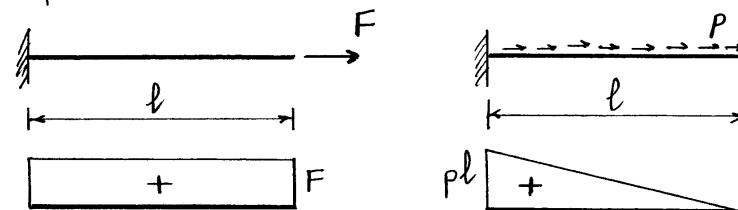
In un tratto non caricato da forze aventi la direzione della linea d'asse (forze di tipo assiale), la forza normale è costante:

$$p = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N = \text{cost.}$$

Se invece il carico di tipo assiale è costante, la forza normale è lineare:

$$p = \text{cost} \Rightarrow N = -p x + \text{cost.}$$

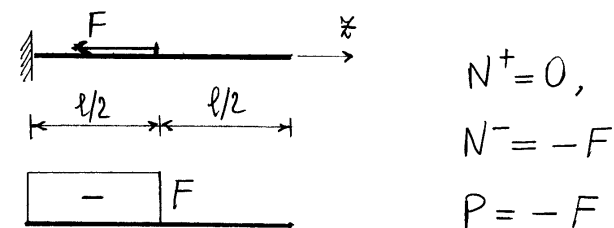
Esempi:



Se invece è presente una forza concentrata diretta come la linea d'asse, la forza normale presenta una discontinuità:

$$\Delta N = N^+ - N^- = -P.$$

Esempio:



10.3.3.3 Taglio e momento flettente

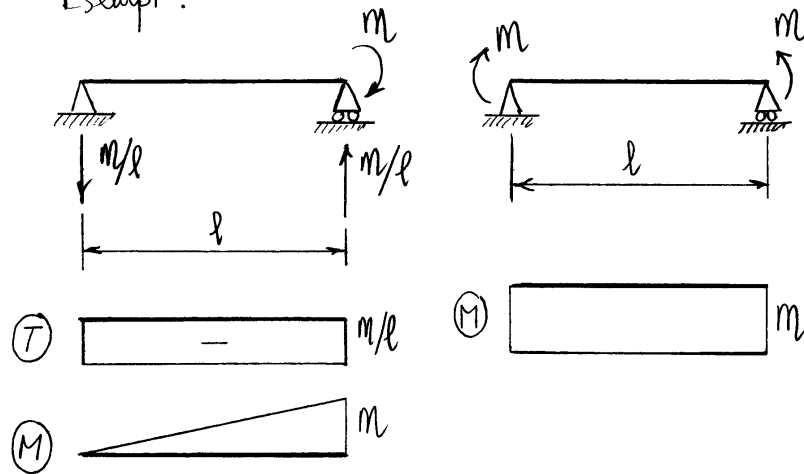
$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} + q = 0 \\ \frac{dM}{dx} + m = T \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta T + Q = 0 \\ \Delta M + M = 0 \end{cases}$$

In un tratto non caricato da forze ortogonali alla linea d'asse e da coppie (forze di tipo flessionale), il taglio è costante e il momento flettente è lineare:

$$m, q = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dz} = 0 \Rightarrow T = \text{cost} \Rightarrow M = Tz + \text{cost.}$$

In particolare, se il taglio è nullo allora il momento flettente è costante.

Esempi:



Una forza concentrata ortogonale alla linea d'asse provoca una discontinuità nel diagramma del taglio e di conseguenza nella tangente al diagramma del momento che

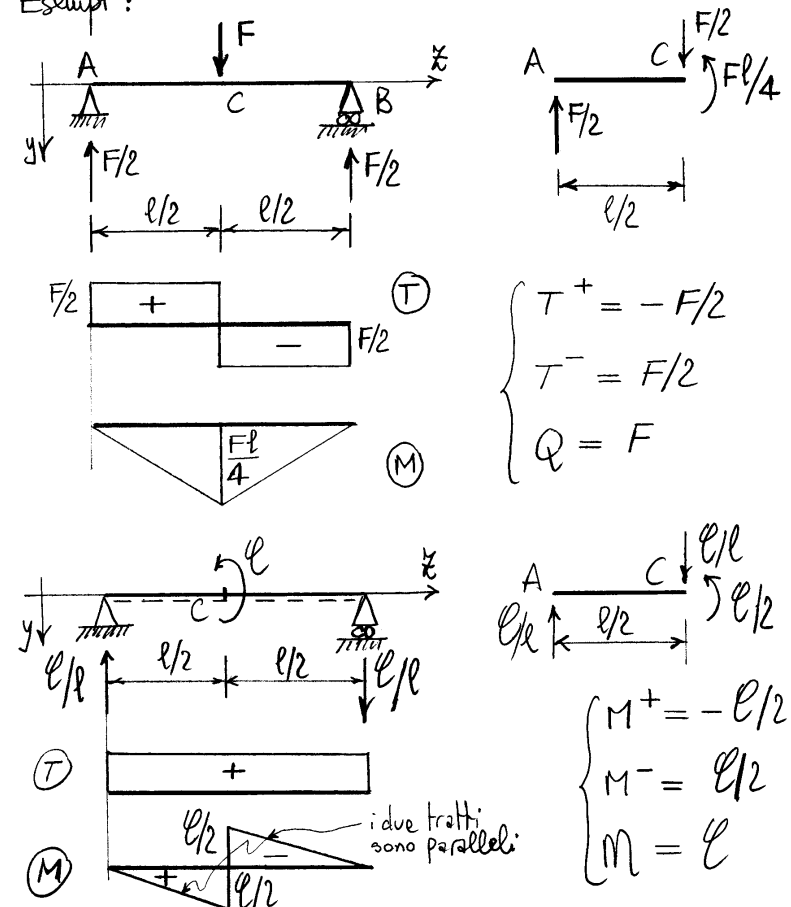
presenta quindi un punto angoloso:

$$\Delta T = T^+ - T^- = \frac{dM}{dz}^+ - \frac{dM}{dz}^- = -Q.$$

Se invece è presente una coppia concentrata si ha una discontinuità nel diagramma del momento flettente:

$$\Delta M = M^+ - M^- = -M.$$

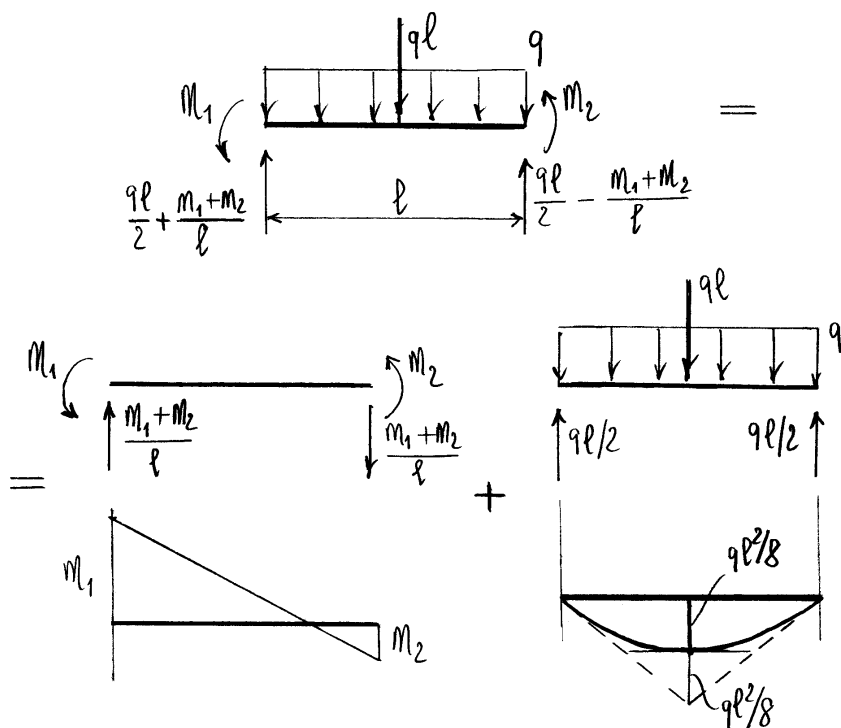
Esempi:



Se infine il carico distribuito ortogonale alla linea d'asse è costante, con le coppie distribuite nulle, il taglio risulta lineare e il momento parabolico, con asse della parabola parallela al carico:

$$\begin{cases} m=0 \\ q=\text{cost} \end{cases} \Rightarrow T = -qz + C_1 \Rightarrow M = -\frac{q}{2}z^2 + C_1z + C_2.$$

Il diagramma parabolico può sempre ottenersi come somma di due diagrammi particolari, uno lineare e uno parabolico:



Il diagramma parabolico particolare è quello di una trave appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico ripartito. In tal caso i momenti alle estremità sono nulli, per cui i momenti eventualmente applicati alle due estremità della trave compaiono nel diagramma lineare. Il diagramma complessivo conserva la convessità dalla stessa parte del diagramma parabolico particolare. Poiché in mezzeria della trave appoggiata soggetta a un carico ripartito costante il taglio è nullo, l'inclinazione del diagramma lineare rappresenta il taglio complessivo e quindi la tangente in mezzeria al diagramma complessivo.

Nei punti di estremità del tratto di applicazione del carico distribuito le caratteristiche della sollecitazione si possono calcolare sostituendo al carico ripartito la sua risultante $q l$ applicata nel punto di mezzo. Ne consegue che il diagramma del momento flettente dovuto alla risultante è tangente, alle estremità del carico distribuito, al momento flettente dovuto al

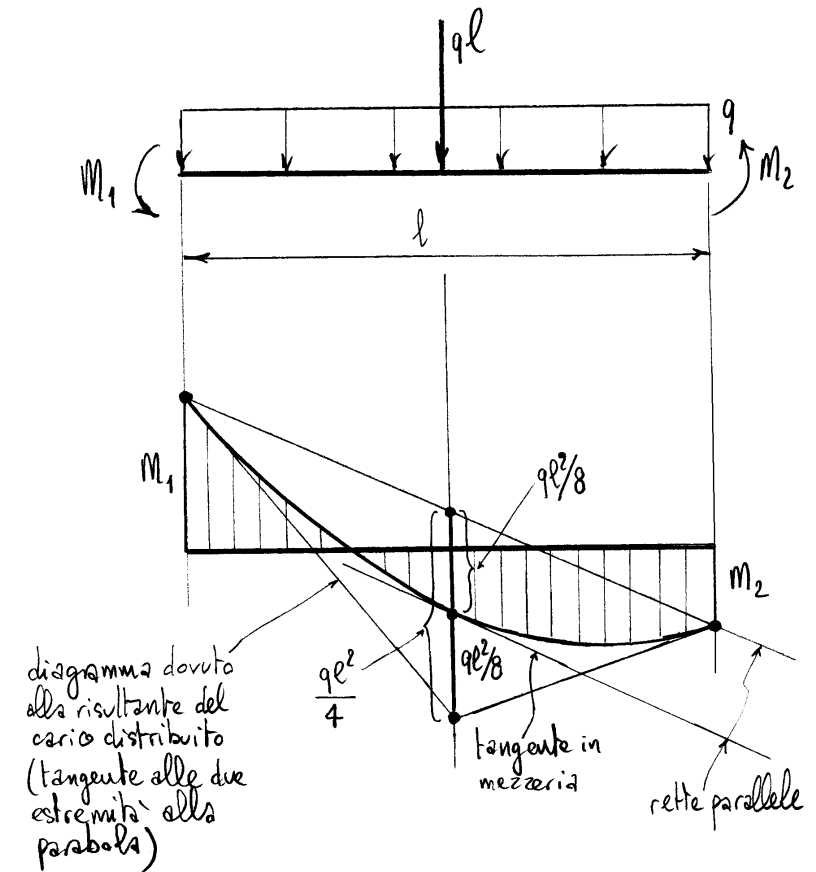
carico ripartito. Infatti, l'inclinazione del momento flettente rappresenta il taglio ed il taglio alle due estremità coincide nei due casi (di carico ripartito e di carico concentrato pari alla risultante).

Per costruire la parabola del momento flettente si può dunque procedere nel modo seguente:

- 1) Si riportano i valori del momento alle due estremità della trave (individuando così due punti della parabola);
- 2) Si uniscono i due punti di estremità (individuando così sia la parte lineare del momento che l'inclinazione della tangente in mezzeria);
- 3) Alla parte lineare si somma in mezzeria il valore $ql^2/8$ concordemente al verso del carico (individuando un terzo punto della parabola);
- 4) Dal punto della parabola in mezzeria si manda la parallela alla parte lineare del diagramma (ottenendo così la tangente alla parabola in tale punto);
- 5) Dal terzo punto della parabola, sempre nel verso del

carico, si riporta un segmento di lunghezza $ql^2/8$ (individuando così il vertice delle tangenti alle due estremità)

6) Si unisce il vertice delle tangenti ai due punti di estremità della parabola (ottenendo così le due tangenti di estremità della parabola).



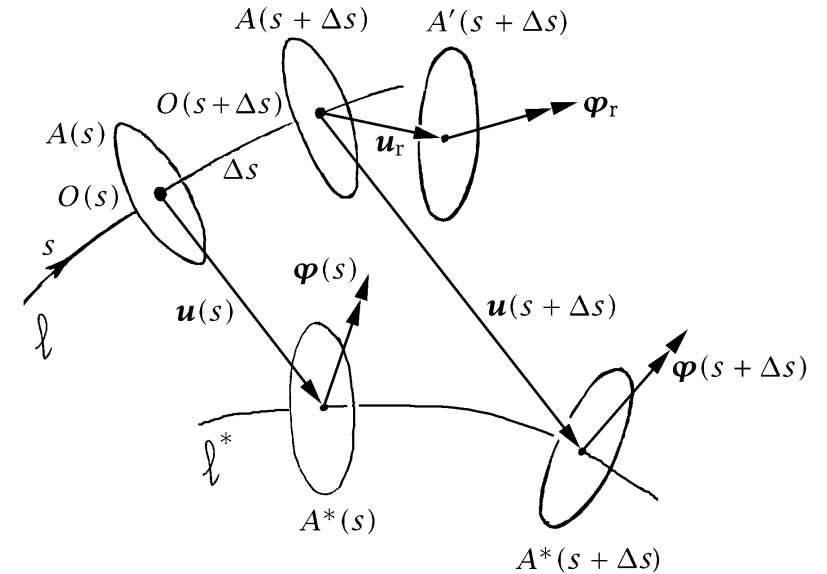
Capitolo 11

Analisi della deformazione nelle travi

11.1 Moto rigido relativo per unità di linea

Si consideri, nella configurazione di riferimento ℓ di una generica trave, una sezione retta fissa $A(s)$ e una seconda sezione retta variabile $A(s + \Delta s)$, individuata dall'incremento Δs della coordinata curvilinea s che individua la sezione fissa. La posizione della sezione fissa nella configurazione deformata ℓ^* sarà individuata dallo spostamento $\mathbf{u}(s)$ e dalla rotazione $\boldsymbol{\varphi}(s)$ mentre quella della seconda sezione dallo spostamento $\mathbf{u}(s + \Delta s)$ e dalla rotazione $\boldsymbol{\varphi}(s + \Delta s)$. Si ricordi che la descrizione della posizione spaziale di un qualunque corpo materiale è sempre relativa ad un osservatore, nel nostro caso un osservatore esterno alla trave, che definisce lo spazio in cui la trave stessa si colloca. Poiché ad ogni corpo rigido è possibile associare un osservatore, con lo spazio ad esso connesso, la posizione della sezione retta variabile $A(s + \Delta s)$ nella configurazione deformata può anche essere individuata dai parametri di moto rigido $\mathbf{u}_r(\Delta s)$ e $\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s)$ della stessa sezione relativi all'osservatore definito dalla sezione retta fissa $A(s)$.

Se la trave non si deforma, il moto rigido relativo prima descritto è nullo. Ne risulta che i parametri del moto rigido relativo rappresentano la deformazione associata alla parte Δs di linea d'asse compresa tra le due sezioni rette. Rapportando i parametri del moto rigido relativo alla lunghezza Δs della



parte di linea si ottengono lo *spostamento relativo per unità di linea* $\mathbf{d}(\Delta s)$ e la *rotazione relativa per unità di linea* $\mathbf{k}(\Delta s)$, detta anche *curvatura (di deformazione)*:

$$\mathbf{d}(\Delta s) = \frac{\mathbf{u}_r(\Delta s)}{\Delta s}, \quad \mathbf{k}(\Delta s) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s)}{\Delta s}. \quad (1)$$

I rapporti (1), dipendenti dalla parte di linea Δs , definiscono una deformazione media nell'intorno della sezione $A(s)$. Lo spostamento relativo per unità di linea e la curvatura in corrispondenza della sezione retta $A(s)$, ancora indicati con i simboli $\mathbf{d}$ e $\mathbf{k}$ rispettivamente, saranno allora definiti dal limite per $\Delta s \rightarrow 0$ di tali rapporti:

$$\mathbf{d}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_r(\Delta s)}{\Delta s}, \quad \mathbf{k}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s)}{\Delta s}. \quad (2)$$

Si vogliono ora determinare le equazioni di congruenza, ovvero le relazioni che determinano il moto relativo per unità di linea in funzione dei campi degli spostamenti $\mathbf{u}$ e delle rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$ individuati dall'osservatore esterno. Il moto relativo, descritto dal punto di vista dell'osservatore esterno, si ottiene dalla differenza tra il moto della sezione variabile $A(s + \Delta s)$ e quello della sezione fissa $A(s)$. Poiché il moto della sezione variabile, relativo alla sezione fissa o all'osservatore esterno, ha quale polo il punto $O(s + \Delta s)$ della linea d'asse appartenente alla stessa sezione variabile, mentre il polo del moto della sezione fissa coincide con il punto $O(s)$ della linea d'asse appartenente alla stessa sezione fissa, si ottengono i seguenti parametri di moto relativo:

$$\mathbf{u}_r(\Delta s) = \mathbf{u}(s + \Delta s) - \mathbf{u}(s) - \boldsymbol{\varphi}(s) \times \left(O(s + \Delta s) - O(s) \right), \quad (3a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s) = \boldsymbol{\varphi}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\varphi}(s). \quad (3b)$$

Sostituendo le (3) nelle (2) si ottengono infine le equazioni di congruenza:

$$\mathbf{d} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z, \quad (4a)$$

$$\mathbf{k} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds}, \quad (4b)$$

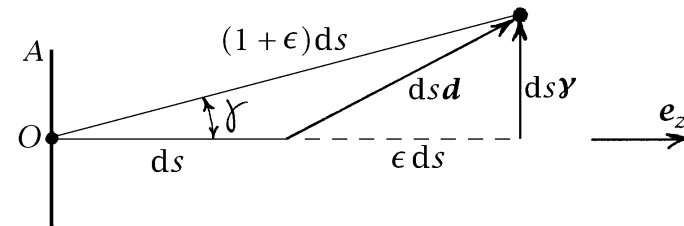
dove $\mathbf{e}_z$ è il versore tangente alla linea d'asse indeformata nel punto di coordinata s , coincidente con la normale alla sezione retta. Si noti che la (4a) vale sotto la condizione che s coincida con la lunghezza d'arco. Si noti anche che le (4) valgono

esclusivamente sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazione, avendo utilizzato il vettore rotazione in luogo del tensore rotazione.

Il moto relativo infinitesimo di parametri $ds\mathbf{d}$ e $ds\mathbf{k}$ e di polo $O(s)$ porta la sezione $A(s + ds)$ in una configurazione intermedia $A'(s + ds)$ che a sua volta il moto della sezione $A(s)$ di parametri $\mathbf{u}(s)$ e $\boldsymbol{\varphi}(s)$ e di polo $O(s)$ porta, a meno di infinitesimi di ordine superiore in ds , nella sua posizione finale $A^*(s + ds)$, ovvero nella posizione che la sezione $A(s + ds)$ occupa nella configurazione deformata.

11.2 Componenti di deformazione locale

Nel seguito ci si riferisce allo schema di figura, che rappresenta, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in ds , la deformazione nell'intorno della sezione A nel piano individuato dalla normale $\mathbf{e}_z$ alla sezione retta e dallo spostamen-



to relativo $\mathbf{d}$. Si noti che l'angolo tra la normale $\mathbf{e}_z$ e il vettore $d\mathbf{s}$ ($\mathbf{e}_z + \mathbf{d}$) individua lo scorrimento massimo γ tra la linea d'asse della trave e la sezione retta. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni risulta:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z = (1 + \epsilon) \cos \gamma - 1 \approx \epsilon. \quad (5a)$$

$$|\mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z| = (1 + \epsilon) \sin \gamma \approx \gamma. \quad (5b)$$

La componente del vettore $\mathbf{d}$ sulla direzione normale alla sezione retta nella configurazione indeformata coincide quindi con la *dilatazione della linea d'asse*, indicata nel seguito con il simbolo ϵ , mentre la sua proiezione nel piano della sezione retta coincide con lo *scorrimento tra linea d'asse e sezione retta*, indicato nel seguito con il simbolo γ . Dalla (4a) si ottiene quindi:

$$\epsilon = \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{du}{ds} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (6a)$$

$$\gamma = \mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z = \left(\frac{du}{ds} - \epsilon \right) \mathbf{e}_z - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z. \quad (6b)$$

In funzione della dilatazione ϵ e dello scorrimento γ lo spostamento relativo $\mathbf{d}$ risulta quindi:

$$\mathbf{d} = \gamma + \epsilon \mathbf{e}_z, \quad (7)$$

e ne consegue:

$$\epsilon \mathbf{e}_z + \gamma = \frac{du}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z. \quad (8)$$

Il vettore γ giace nel piano della sezione e lo si può quindi scomporre in due componenti:

$$\gamma = \gamma_x \mathbf{e}_x + \gamma_y \mathbf{e}_y,$$

dove γ_x e γ_y rappresentano gli scorrimenti tra linea d'asse e gli assi coordinati x ed y giacenti sulla sezione retta. Inoltre:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_t = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varphi_y \mathbf{e}_x - \varphi_x \mathbf{e}_y,$$

$$\frac{du}{ds} = \left(\frac{du}{ds} \cdot \mathbf{e}_x \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{du}{ds} \cdot \mathbf{e}_y \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{du}{ds} \cdot \mathbf{e}_t \right) \mathbf{e}_t.$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{du}{ds} \cdot \mathbf{e}_x - \varphi_y \\ \gamma_y = \frac{du}{ds} \cdot \mathbf{e}_y + \varphi_x \end{cases}.$$

La curvatura globale $\underline{\kappa}$ si scompone in una quota flettente $\underline{\kappa}_f$, detta curvatura flessionale, giacente sulla sezione retta, ed in una quota torcente $\odot$, detta

angolo unitario di torsione, perpendicolare alla sezione retta:

$$\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_f + \Theta \underline{e}_z.$$

La curvatura flessionale $\underline{\kappa}_f$ può poi scomporsi nelle componenti rispetto agli assi x e y , posti nel piano della sezione:

$$\underline{\kappa}_f = \kappa_x \underline{e}_x + \kappa_y \underline{e}_y.$$

11.3 Deformazioni nel caso di trave piana

Nel caso piano gli spostamenti avvengono nel piano yz della trave e le rotazioni attorno all'asse x ortogonale al piano della trave:

$$\underline{u} = v \underline{e}_y + w \underline{e}_z, \quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_x.$$

Ne consegue che il vettore scorrimento $\underline{\gamma}$ ha la sola componente in direzione y e la curvatura $\underline{\kappa}$ la sola componente flessionale relativa all'asse x :

$$\underline{\gamma} = \gamma \underline{e}_y, \quad \underline{\kappa} = \kappa \underline{e}_x,$$

e che le equazioni di congruenza si riducono alle equazio-

ni scalari:

$$\epsilon = \frac{du}{ds} \cdot \underline{e}_z,$$

$$\gamma = \frac{dv}{ds} \cdot \underline{e}_y + \varphi,$$

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds}.$$

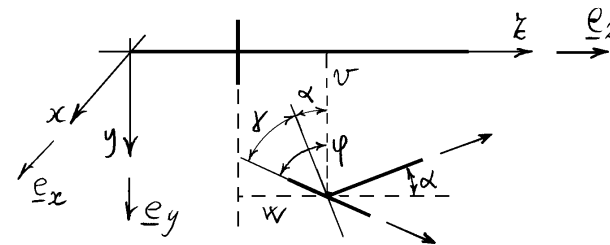
11.3.1 Trave piana ad asse rettilineo

Se la trave piana è ad asse rettilineo risulta poi:

$$\epsilon = \frac{dw}{dz},$$

$$\gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi,$$

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dz}.$$



L'angolo di rotazione della tangente vale:

$$\alpha = \varphi - \gamma = - \frac{dv}{dz}.$$

Curvatura geometrica dell'asse deformato, nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni:

$$c = \frac{d\alpha}{dz} = - \frac{d^2v}{dz^2}.$$

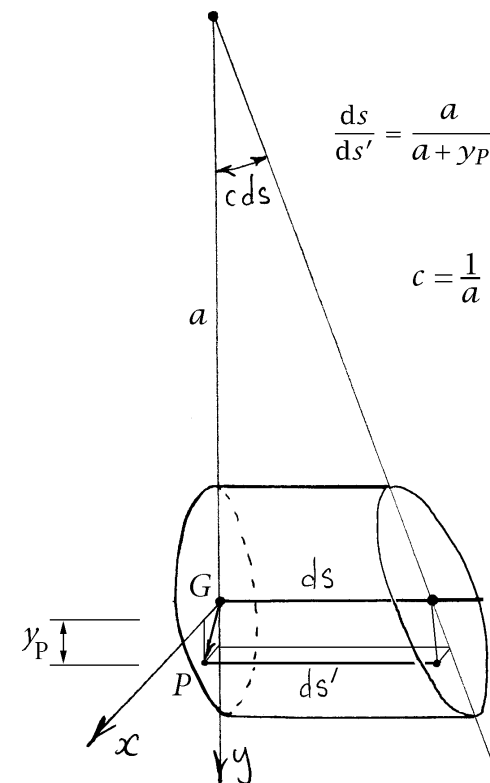
11.4 Dilatazione e scorrimento della generica fibra longitudinale

Nella descrizione del moto relativo interviene quale polo il punto O della sezione retta posto sulla linea d'asse. Lo spostamento relativo per unità di linea $\mathbf{d}$ e le sue componenti ϵ e γ dipendono dalla scelta del punto O , mentre la curvatura $\mathbf{k}$ e le sue componenti $\mathbf{k}_f$ e Θ ne sono indipendenti. Si ricordi che, come già detto, allo stato attuale delle cose la scelta della linea d'asse è, almeno in parte, arbitraria e ne consegue che la scelta del punto O quale polo per il calcolo dello spostamento relativo $\mathbf{d}$ non è obbligata. Si potrebbero anzi presentare delle circostanze particolari che potrebbero suggerire la scelta di un polo avente un significato fisico ben preciso. Per non perdere in generalità ci si riferisca allora ad un polo P distinto dal punto O posto sulla linea d'asse. Lo spostamento relativo per unità di linea d'asse $\mathbf{d}_P$, di polo P , valutato per il tramite dei parametri di moto relativo di polo O , risulta:

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d} + \mathbf{k} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (1)$$

Si consideri ora la *fibra longitudinale* della trave passante per P , ovverossia un elemento di linea per P ortogonale alla sezione retta e avente quindi la direzione della linea d'asse. Se l'asse y coincide con la normale principale alla linea d'asse, ad un elemento ds di linea d'asse corrisponde un elemento ds' di linea longitudinale per P tale che:

$$ds' = \frac{a + y_P}{a} ds = (1 + cy_P) ds, \quad (2)$$



dove a è il raggio di curvatura e c la curvatura della linea d'asse.

La dilatazione ϵ_P e lo scorrimento $\mathbf{y}_P$ della fibra longitudinale passante per il nuovo polo P della sezione retta soddisfano allora la relazione:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z + \mathbf{y}_P = \frac{1}{1 + c\gamma_P} \left\{ \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{k} \times (P - O) \right\}, \quad (3)$$

dalla quale si ottengono infine i valori di ϵ_P e $\mathbf{y}_P$:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z = \frac{1}{1 + c\gamma_P} \left\{ \epsilon \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - O) \right\}, \quad (4a)$$

$$\mathbf{y}_P = \frac{1}{1 + c\gamma_P} \left\{ \mathbf{y} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e}_z \times (P - O) \right\}. \quad (4b)$$

Se la trave è snella, che poi è quello che una trave deve normalmente essere per essere una trave, cioè se $c\gamma_P \ll 1$, si ha $1 + c\gamma_P \approx 1$ e risulta:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z \approx \epsilon \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - O), \quad (5a)$$

$$\mathbf{y}_P \approx \mathbf{y} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e}_z \times (P - O). \quad (5b)$$

Le (5) valgono in modo esatto, a parte naturalmente l'approssimazione dei piccoli spostamenti e delle piccole deformazioni, nel caso di trave ad asse rettilineo. Scelto infine un sistema di riferimento Oxy sulla sezione retta della trave le (5) diventano:

$$\epsilon_P = \epsilon + k_x \gamma_P - k_y x_P, \quad (6a)$$

$$\gamma_x^P = \gamma_x - \boldsymbol{\Theta} \gamma_P, \quad (6b)$$

$$\gamma_y^P = \gamma_y + \boldsymbol{\Theta} x_P, \quad (6c)$$

dove x_P e γ_P sono le coordinate del punto P nel dato sistema Oxy .

Le equazioni (5) e (6) mostrano che la dilatazione ϵ_P della fibra longitudinale dipende dalla dilatazione della linea d'asse e dalla curvatura flessionale così come lo scorrimento $\mathbf{y}_P$ della fibra longitudinale dipende dallo scorrimento della linea d'asse e dall'angolo unitario di torsione. Ne consegue che dilatazione e scorrimento sono indipendenti tra loro cosicché nulla obbliga a scegliere lo stesso polo, e quindi la stessa fibra longitudinale, al fine della definizione di tali deformazioni. Come già nello studio della sollecitazione, per non perdere generalità, quando e se sarà necessario, ci si riferirà a due poli distinti, G per il calcolo della dilatazione e C per il calcolo dello scorrimento, distinti a loro volta in generale dal punto O sulla linea d'asse. Se questo è il caso risulta allora:

$$\epsilon_G \mathbf{e}_z \approx \epsilon \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (G - O), \quad (7a)$$

$$\mathbf{y}_C \approx \mathbf{y} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e}_z \times (C - O), \quad (7b)$$

dove ϵ_G è la dilatazione della fibra longitudinale per il polo G mentre $\mathbf{y}_C$ è lo scorrimento tra la fibra longitudinale per il polo C e la sezione retta.

Si noti che la traslazione relativa $\epsilon \mathbf{e}_z$ dovuta alla sola dilatazione ϵ della fibra longitudinale, ortogonale alla sezione retta, e la rotazione relativa dovuta alla sola curvatura di flessione $\mathbf{k}_f$, di asse giacente sulla sezione retta e passante per il polo G , si combinano, se $\mathbf{k}_f \neq \mathbf{0}$, in una rotazione relativa $\mathbf{k}_f$ di asse parallelo al precedente e ancora appartenente alla sezione retta. Analogamente la traslazione relativa dovuta al solo scorrimento $\mathbf{y}$ della fibra longitudinale con la sezione retta, giacente nel

piano della sezione retta, e la rotazione relativa $\Theta \mathbf{e}_z$ dovuta al solo angolo unitario di torsione Θ , di asse ortogonale alla sezione retta e passante per il polo C , definiscono un moto rigido relativo nel piano della sezione e si combinano, se $\Theta \neq 0$, in una rotazione relativa $\Theta \mathbf{e}_z$ di asse parallelo al precedente.

Essendo 6 il numero delle componenti scalari delle caratteristiche della deformazione, risulta possibile rappresentare la deformazione nelle travi tramite un *vettore (algebrico) di deformazione* $\mathbf{D}$ di dimensione 6. Si noti che le (6) definiscono due gruppi di tre componenti di deformazione ciascuno, (ϵ, k_x, k_y) e $(\Theta, \gamma_x, \gamma_y)$, tali che le componenti di deformazioni di ogni gruppo siano legate tra loro e indipendenti da quelle dell'altro gruppo. Per tale motivo nel vettore di deformazione $\mathbf{D}$ si riporteranno per prime le componenti di deformazione del primo gruppo e a seguire quelle del secondo gruppo:

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \\ \Theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

dove in generale ϵ indicherà la dilatazione della fibra longitudinale per il polo G mentre γ_x e γ_y indicheranno le componenti di scorrimento relative alla fibra longitudinale per il polo C .

11.4.1 Integrazione delle equazioni di congruenza

Nel paragrafo 1 si sono dedotte le deformazioni, ossia i parametri $\mathbf{d}$ e $\mathbf{k}$ del moto rigido relativo per unità di linea, dalla conoscenza del moto rigido delle sezioni rette, ovvero della loro spostamenti $\mathbf{u}$ e rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$. Si vuole ora fare l'operazione inversa, ovvero dedurre gli spostamenti e le rotazioni delle sezioni rette supponendo note le deformazioni. A tale scopo, le equazioni di congruenza:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} = \mathbf{k}, \quad (1a)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \mathbf{d}, \quad (1b)$$

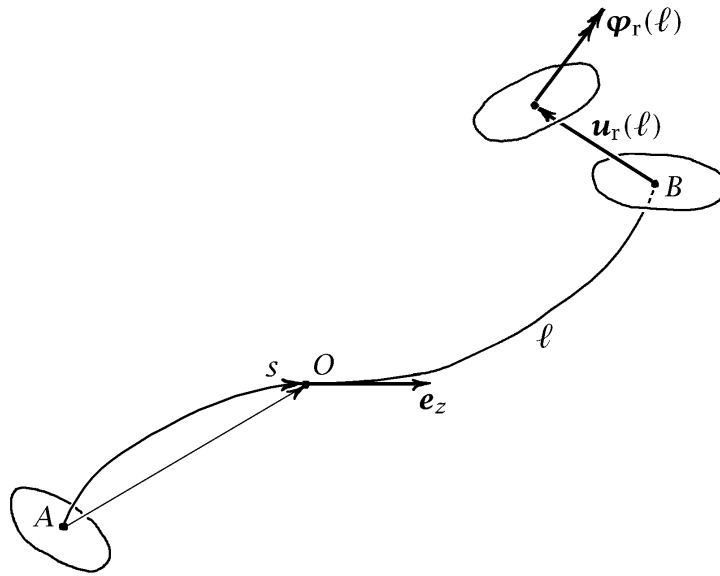
si possono interpretare come equazioni differenziali nelle funzioni incognite $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\varphi}$.

Si consideri allora un generica trave, o parte di trave, di linea d'asse ℓ compresa tra i due punti A , di prima estremità, e B , di seconda estremità, di coordinate curvilinee s_A e s_B rispettivamente. Integrando la (1a) lungo la linea d'asse si ottiene:

$$\boldsymbol{\varphi}_B - \boldsymbol{\varphi}_A = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} ds, \quad (2)$$

dove $\boldsymbol{\varphi}_A = \boldsymbol{\varphi}(s_A)$ e $\boldsymbol{\varphi}_B = \boldsymbol{\varphi}(s_B)$. Per integrare la (1b), si tenga conto innanzitutto che $\mathbf{e}_z = d\mathbf{O}/ds$, dove $\mathbf{O}$ è il generico punto della linea d'asse. Si tenga quindi conto che risulta:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \frac{d}{ds} \left(\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{O} - B) \right) - \mathbf{k} \times (\mathbf{O} - B), \quad (3)$$



avendo utilizzato il polo B per rendere più agevoli gli sviluppi seguenti. Integrando per parti si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z ds &= \left[\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{O} - \mathbf{B}) \right]_{s_A}^{s_B} - \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} \times (\mathbf{O} - \mathbf{B}) ds \\ &= \boldsymbol{\varphi}_A \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}) - \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} \times (\mathbf{O} - \mathbf{B}) ds, \quad (4) \end{aligned}$$

avendo tenuto conto che $\mathbf{O}(s_A) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{O}(s_B) = \mathbf{B}$. Integrando la (1b) si ottiene infine:

$$\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A - \boldsymbol{\varphi}_A \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{d} ds + \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} \times (\mathbf{B} - \mathbf{O}) ds, \quad (5)$$

dove $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}(s_A)$ e $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}(s_B)$. Si noti che al primo membro delle (2) e (5) compaiono i parametri $\mathbf{u}_r(\ell)$ e $\boldsymbol{\varphi}_r(\ell)$ del moto relati-

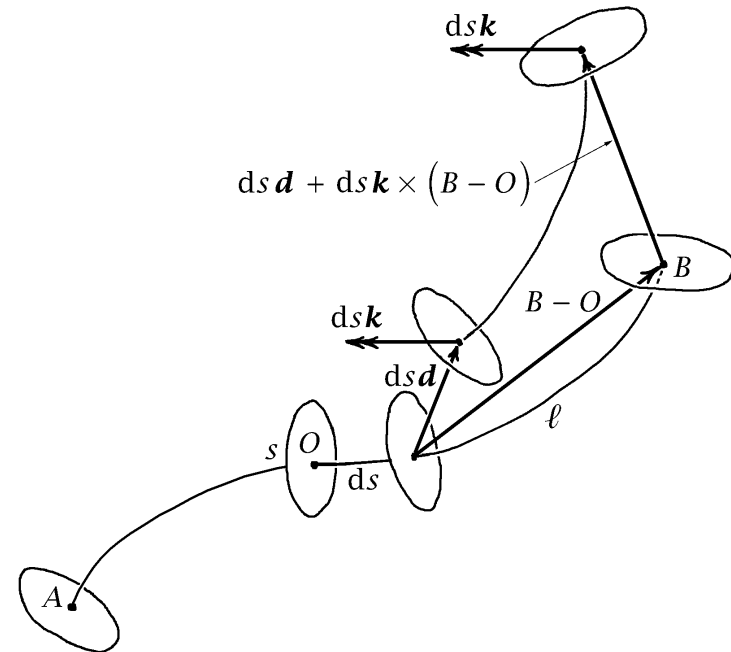
vo associato alla trave di linea d'asse ℓ , ovvero sia il moto della sezione retta di seconda estremità descritto dall'osservatore connesso alla sezione retta di prima estremità:

$$\mathbf{u}_r(\ell) = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A - \boldsymbol{\varphi}_A \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}), \quad (6a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_r(\ell) = \boldsymbol{\varphi}_B - \boldsymbol{\varphi}_A. \quad (6b)$$

Si noti che se la sezione iniziale in A ha rotazioni e spostamenti nulli rispetto all'osservatore esterno i parametri $\mathbf{u}_r(\ell)$ e $\boldsymbol{\varphi}_r(\ell)$ del moto relativo forniscono rispettivamente lo spostamento $\mathbf{u}_B$ e la rotazione $\boldsymbol{\varphi}_B$ della sezione finale in B rispetto all'osservatore esterno.

Si noti inoltre che le (2) e (5) hanno una semplicissima interpretazione fisica. Infatti per calcolare il moto relativo si tenga



fissa la prima estremità della trave e si sommino al limite, cioè si integrino sulla linea d'asse, i contributi allo spostamento e alla rotazione della seconda estremità dei singoli elementi di trave ds che compongono il tratto finito di trave ℓ . Poiché per l'ipotesi di piccoli spostamenti il contributo di un elemento è indipendente dal fatto che gli altri elementi siano già deformati oppure no e poiché la deformazione del generico elemento di trave ds genera un moto relativo, del tratto di trave che segue l'elemento di trave, di parametri $ds\mathbf{d}$ e $ds\mathbf{k}$, ne conseguono immediatamente le (2) e (5).

11.5 Trave inflessa

L'ipotesi di trave inflessa richiede alle sezioni rette *di conservarsi ortogonali alla linea d'asse*. Questa ipotesi equivale a *trascurare gli scorrimenti tra linea d'asse e sezioni rette*. Ricordando l'espressione dello scorrimento, il vincolo di trave inflessa si scrive:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \epsilon \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

e rappresenta un legame tra campo delle rotazioni e campo degli spostamenti. D'altronde se le sezioni restano ortogonali alla linea d'asse allora il campo degli spostamenti determina i piani delle sezioni nella configurazione deformata, in quanto determina la linea deformata a cui tali piani sono ortogonali. Ovvero, viene determinata in modo univoco la rotazione flessionale, restando indeterminata la sola rotazione torsionale della sezione. In componenti la (1) fornisce infatti:

$$\varphi_y = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_x, \quad \varphi_x = -\frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_y. \quad (2)$$

Nel caso di trave piana ad asse rettilineo resta significativa solo la seconda di queste e risulta:

$$\varphi = -\frac{dv}{ds}. \quad (3)$$

Si noti che senza l'ipotesi di trave inflessa le sezioni “rette” sono ortogonali alla linea d'asse in generale solo nella configurazione indeformata la cui descrizione risulta dunque particolare e non conforme alla configurazione deformata generica. Questo fatto non crea problemi nell'ambito di una teoria del primo ordine che permette di confondere la configurazione deformata con quella indeformata, dove le sezioni “rette” sono ortogonali alla linea d'asse. Ma già nell'ambito di una teoria del secondo ordine, quindi ancora basata sull'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, l'equilibrio viene scritto nella configurazione deformata dove in generale la normale ad una sezione “retta” non è tangente alla linea d'asse.

Lo scorrimento $\mathbf{y}$ tra linea d'asse e sezioni rette, insieme alla dilatazione della linea d'asse ϵ , compone lo spostamento relativo $\mathbf{d}$ per unità di linea. Questi, in base all'analisi del paragrafo precedente, provoca in generale degli spostamenti relativi tra le due sezioni di estremità di una trave trascurabili rispetto a quelli provocati dalla rotazione relativa $\mathbf{k}$ per unità di linea. Infatti la quota degli spostamenti provocati dalla rotazione relativa che si sviluppa in un elemento di trave sono proporzionali alla distanza dell'elemento dalla sezione di seconda estremità, a differenza di quelli dovuti alla sola traslazione relativa. Più

la trave è snella maggiori sono gli effetti amplificanti delle distanze in gioco sugli spostamenti dovuti alle rotazioni relative. Si tenga comunque conto che tale analisi è qualitativa e che l'effettiva trascurabilità dello spostamento relativo per unità di linea nel calcolo degli spostamenti di una trave o di un sistema di travi dipenderà da varie circostanze che andranno valutate di volta in volta e che in ogni caso dipenderà dal rapporto tra curvatura di deformazione e spostamento relativo per unità di linea.

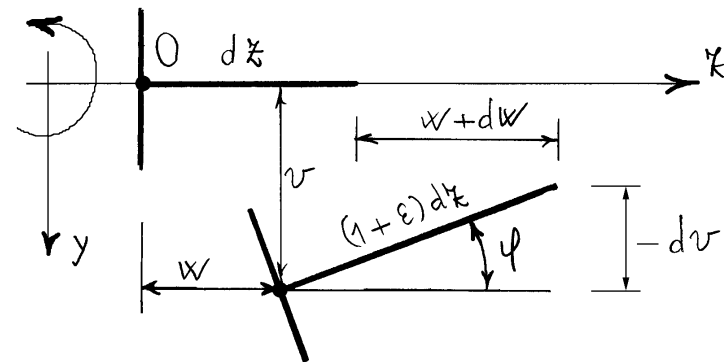
Tornando all'ipotesi di trave inflessa si consideri che intuitivamente la rotazione relativa per unità di linea è associata all'azione dei momenti flettenti e torcente mentre lo scorrimento tra linea d'asse e sezioni rette a quella del taglio. Le prime due equazioni scalari di equilibrio alla rotazione mostrano innanzitutto che il taglio è nullo se è nullo il momento totale salvo il caso particolare in cui agiscano delle coppie flettenti esterne distribuite lungo la linea d'asse. Escluso tale caso particolare, ne consegue che gli scorrimenti tra linea d'asse e sezioni rette sono sempre accompagnati da rotazioni relative per unità di linea e gli effetti di queste ultime sono in generale predominanti su quelle degli scorrimenti. In secondo luogo le prime due equazioni scalari di equilibrio alla rotazione permettono di determinare il taglio dalla conoscenza dei momenti flettenti e del momento torcente, ovvero il problema del taglio è *staticamente determinato dai momenti flettenti e dal momento torcente*. È quindi escluso che l'ipotesi di trave inflessa, che corrisponde ad un vincolo di rigidità interna, renda indeterminato il problema del taglio.

Si noti che un tale risultato non vale per la dilatazione della linea d'asse, associata intuitivamente all'azione della forza nor-

male. Infatti la forza normale non compare nelle equazioni scalari di equilibrio alla rotazione ed è quindi indipendente dalla presenza di momenti o meno. L'effetto della dilatazione della linea d'asse sarà spesso trascurabile, ma ci saranno in ogni caso delle situazioni in cui il trascurare i suoi effetti renderà indeterminato il problema della forza normale.

11.5.1 Esercizio: Determinazione diretta del vincolo di trave inflessa e della dilatazione della linea d'asse nel caso di trave piana inflessa ad asse rettilineo

Si consideri una generica sezione retta, la cui traccia è indicata nella figura, ed un elemento d'asse dx nel suo intorno. Poiché l'elemento dx deve restare ortogonale alla sezione retta, tale elemento deve



subire la stessa rotazione φ della sezione retta e quindi risulta:

$$-d\psi = (1 + \varepsilon) d\zeta \sin \varphi,$$

poichè la lunghezza dell'elemento $d\zeta$ dopo la deformazione vale $d\zeta + \varepsilon d\zeta$, per definizione di dilatazione lineare. Si ottiene quindi:

$$(1 + \varepsilon) \sin \varphi = -\frac{d\psi}{d\zeta}.$$

Se gli spostamenti sono piccoli si può porre $\sin \varphi \approx \varphi$ e trascurare il termine del secondo ordine $\varepsilon \varphi$ ottenendo:

$$\varphi = -\frac{d\psi}{d\zeta}.$$

Si consideri poi un punto O della linea d'asse ed un elemento d'asse $d\zeta$ nel suo intorno. Con riferimento la figura, risulta:

$$w + (1 + \varepsilon) d\zeta \cos \varphi = d\zeta + w + dw.$$

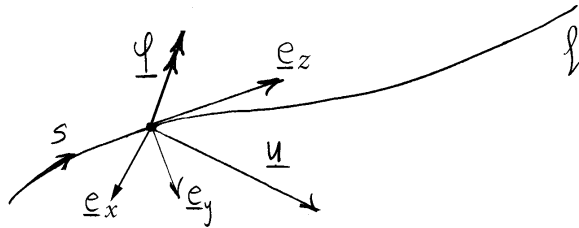
Nell'ipotesi di piccoli spostamenti è $\cos \varphi \approx 1$ e si ottiene allora l'equazione di congruenza:

$$\varepsilon = \frac{dw}{d\zeta}.$$

Capitolo 12

Principio dei lavori virtuali per le travi

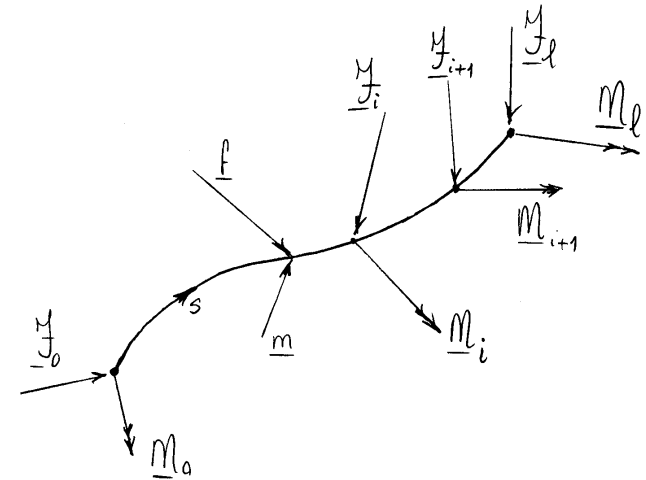
Sia data una generica configurazione ℓ di una trave non vincolata. Tale configurazione può essere una qualunque configurazione deformata che, comunque, nell'ipotesi di piccoli spostamenti coincide con la configurazione indeformata.



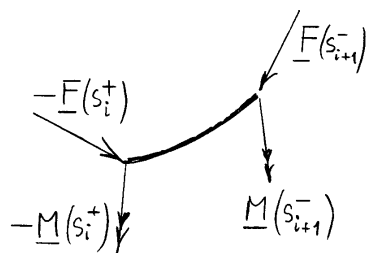
Sia poi dato un sistema di forze esterne $\underline{f}(s)$, $\underline{m}(s)$, $\underline{Y}_0, \underline{M}_0, \underline{Y}_\ell, \underline{M}_\ell, \underline{Y}_i, \underline{M}_i$ ($i=1, \dots, n$) e di caratteristiche della sollecitazione $\underline{F}, \underline{M}$. Il dato sistema di forze e di caratteristiche della sollecitazione è *equilibrato* se sono soddisfatte le equazioni indefinite di equilibrio, di equilibrio al contorno e di discontinuità in corrispondenza delle forze concentrate $\underline{Y}_i, \underline{M}_i$:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} = \underline{0} \\ \frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{m} = -\underline{e}_z \times \underline{F} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{F}(0) = -\underline{Y}_0 \\ \underline{F}(\ell) = \underline{Y}_\ell \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{M}(0) = -\underline{M}_0 \\ \underline{M}(\ell) = \underline{M}_\ell \end{cases}$$



$$\begin{cases} \underline{F}(s_i^+) - \underline{F}(s_i^-) + \underline{Y}_i = \underline{0} \\ \underline{M}(s_i^+) - \underline{M}(s_i^-) + \underline{M}_i = \underline{0} \end{cases} \quad i=1, \dots, n$$



Sia infine dato un sistema di spostamenti virtuali $\underline{u}$, $\underline{v}$ con le associate deformazioni virtuali $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\gamma}$, $\underline{\kappa}$. Uno spostamento virtuale è, per definizione, la parte lineare (o parte prima) di uno spostamento congruente.

Gli spostamenti e le deformazioni virtuali soddisfanno le equazioni di congruenza linearizzate:

$$\begin{cases} \underline{\gamma} + \varepsilon \underline{e}_z = \frac{d\underline{u}}{ds} - \underline{v} \times \underline{e}_z \\ \underline{\kappa} = \frac{d\underline{v}}{ds} \end{cases}.$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne per gli spostamenti virtuali vale:

$$\begin{aligned} L_{ve} = & \int_0^l (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{v}) ds + \underline{F}_l \cdot \underline{u}(l) + \underline{F}_0 \cdot \underline{u}(0) \\ & + \underline{M}_l \cdot \underline{v}(l) + \underline{M}_0 \cdot \underline{v}(0) \\ & + \sum_{i=1}^n (\underline{F}_i \cdot \underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot \underline{v}(s_i)) \end{aligned}$$

Il lavoro virtuale delle forze interne per le deformazioni virtuali vale:

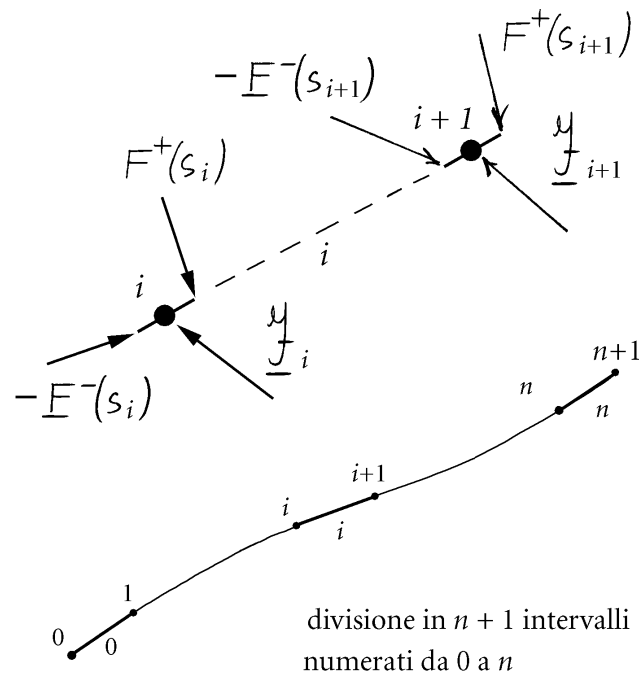
$$\begin{aligned} L_{vi} = & \int_0^l (N \varepsilon + \underline{T} \cdot \underline{\gamma} + M_t \Theta + \underline{M}_f \cdot \underline{\kappa}_f) ds \\ = & \int_0^l (N \varepsilon + T_x \gamma_x + T_y \gamma_y + M_t \Theta + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y) ds \\ = & \int_0^l \underline{S}^T \underline{D} ds. \end{aligned}$$

Il principio dei lavori virtuali può quindi scriversi:

$$L_{ve} = L_{vi}.$$

Dimostrazione.

Sotto l'ipotesi che le forze e le caratteristiche della sollecitazione siano equilibrate, posto $s_0 = 0$ e $s_{n+1} = l$, il lavoro



virtuale esterno vale:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_0^l (\underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{\varphi}) ds \\ &+ \sum_{i=0}^n \left\{ \underline{F}(s_{i+1}^-) \cdot \underline{u}(s_{i+1}) - \underline{F}(s_i^+) \cdot \underline{u}(s_i) \right\} \\ &+ \sum_{i=0}^n \left\{ \underline{M}(s_{i+1}^-) \cdot \underline{\varphi}(s_{i+1}) - \underline{M}(s_i^+) \cdot \underline{\varphi}(s_i) \right\} \\ &= \int_0^l (\underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{d}{ds} (\underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{\varphi}) \right\} ds \\ &= \int_0^l \left\{ \left(\frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} \right) \cdot \underline{u} + \left(\frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{m} \right) \cdot \underline{\varphi} \right. \\ &\quad \left. + \underline{F} \cdot \frac{d\underline{u}}{ds} + \underline{M} \cdot \frac{d\underline{\varphi}}{ds} \right\} ds = \\ &= \int_0^l \left(-\underline{\varphi} \times \underline{e}_z \cdot \underline{F} + \underline{F} \cdot \frac{d\underline{u}}{ds} + \underline{M} \cdot \frac{d\underline{\varphi}}{ds} \right) ds \\ &= \int_0^l \left\{ \underline{F} \cdot \left(\frac{d\underline{u}}{ds} - \underline{\varphi} \times \underline{e}_z \right) + \underline{M} \cdot \frac{d\underline{\varphi}}{ds} \right\} ds \\ &= \int_0^l \left\{ (N \underline{e}_z + T) \cdot (\varepsilon \underline{e}_z + \chi) + (M_t \underline{e}_z + M_f) \cdot (\theta \underline{e}_z + \kappa_f) \right\} ds, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. L'inverso è immediato. ■

La quantità L_{vi} viene chiamata lavoro virtuale interno poiché dipende dalle caratteristiche della sollecitazione, che rappresentano appunto le azioni interne, e dalle caratteristiche della deformazione virtuale.

Si noti che, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, uno spostamento reale soddisfa le equazioni linearizzate di congruenza e quindi rappresenta uno spostamento virtuale.

Capitolo 13

Teoria tecnica delle travi

13.1 Elasticità lineare

Con riferimento al caso di un legame costitutivo locale, la sollecitazione nell'intorno di una sezione retta di una trave dipenderà solo dalla deformazione agente nello stesso intorno. Il modo più semplice di ottenere un legame costitutivo locale è quello di descrivere la deformazione e la sollecitazione nell'intorno di una sezione retta tramite lo spostamento relativo per unità di linea $\mathbf{d}$ e la curvatura di deformazione $\mathbf{k}$ e, rispettivamente, le caratteristiche della sollecitazione $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{d}(\tau), \mathbf{k}(\tau), \quad -\infty < \tau \leq t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(t), \mathbf{M}(t). \quad (1)$$

Se la trave è elastica la sollecitazione $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ ad un dato istante dipenderà solo dalla deformazione $\mathbf{d}$ e $\mathbf{k}$ allo stesso istante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{d}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{d}, \mathbf{k}). \quad (2)$$

Con riferimento ai vettori algebrici di sollecitazione $\mathbf{S}$ e di deformazione $\mathbf{D}$ la (2) si scrive:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{D}). \quad (3)$$

Il legame elastico lineare più generale possibile si scrive allora, in forma matriciale:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (4)$$

dove $\mathbf{E}$ è la *matrice di elasticità* di dimensione 6×6 . Per esteso:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_z^f & E_{zx}^f & E_{zy}^f & E_z^{ft} & E_{zx}^{ft} & E_{zy}^{ft} \\ E_{xz}^f & E_x^f & E_{xy}^f & E_{xz}^{ft} & E_x^{ft} & E_{xy}^{ft} \\ E_{yz}^f & E_{yx}^f & E_y^f & E_{yz}^{ft} & E_{yx}^{ft} & E_y^{ft} \\ E_z^t & E_{zx}^t & E_{zy}^t & E_z^t & E_{zx}^t & E_{zy}^t \\ E_{xz}^t & E_x^t & E_{xy}^t & E_{xz}^t & E_x^t & E_{xy}^t \\ E_{yz}^t & E_{yx}^t & E_y^t & E_{yz}^t & E_{yx}^t & E_y^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \\ \Theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Nella (5) si sono usate delle opportune linee orizzontali e verticali al fine di ritagliare in due parti, una *assiale e flessionale* e una *tagliante e torsionale*, i vettori algebrici di sollecitazione $\mathbf{S}$ e di deformazione $\mathbf{D}$. Precisamente, le parti assiali e flessionali $\mathbf{S}_f$ e $\mathbf{D}_f$ sono:

$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \end{bmatrix}, \quad (6)$$

mentre quelle taglienti e torsionali $\mathbf{S}_t$ e $\mathbf{D}_t$ sono:

$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \Theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Si è visto a suo tempo che al moto rigido delle sezioni rette, che descrive approssimativamente la cinematica del solido trave, corrisponde innanzitutto una dilatazione della generica fibra longitudinale che dipende esclusivamente dalla dilatazione della fibra di riferimento e dalla curvatura flessionale, ovvero dalla parte assiale e flessionale $\mathbf{D}_f$ della deformazione. Analogamente, al moto rigido delle sezioni rette corrisponde

uno scorrimento della generica fibra longitudinale che dipende esclusivamente dall'angolo unitario di torsione e dallo scorrimento della fibra di riferimento, ovvero dalla parte tagliente e torsionale D_t della deformazione. Si tenga poi conto che nella prova di trazione semplice, che genera uno stato di tensione monoassiale ed una dilatazione longitudinale omogenei, si è messa in relazione la dilatazione con la tensione normale, mentre nella prova di torsione, che genera uno stato di tensione di taglio semplice ed uno scorrimento omogenei, si è messo in relazione lo scorrimento con la tensione tangenziale. Si ricordi infine che alla tensione normale corrispondono la forza normale e il momento flettente, ovvero la parte assiale e flessionale S_f della sollecitazione, mentre alla tensione tangenziale il momento torcente e il taglio, ovvero quella tagliente e torsionale S_t . Risulta allora realistico un legame costitutivo elastico lineare in cui la parte assiale e flessionale della sollecitazione non dipenda dalla parte tagliente e torsionale della deformazione e, viceversa, la parte tagliente e torsionale della sollecitazione non dipenda dalla parte assiale e flessionale della deformazione. Il legame costitutivo si scinde allora in due parti, una assiale e flessionale:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_z^f & E_{zx}^f & E_{zy}^f \\ E_{xz}^f & E_x^f & E_{xy}^f \\ E_{yz}^f & E_{yx}^f & E_y^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

e una tagliente e torsionale:

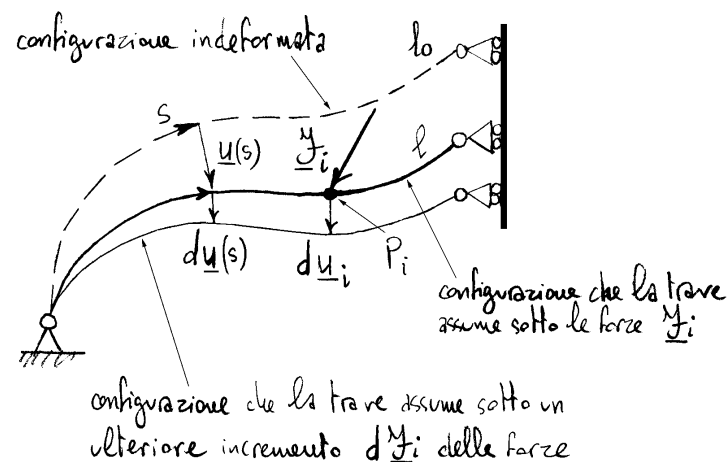
$$\begin{Bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_z^t & E_{zx}^t & E_{zy}^t \\ E_{xz}^t & E_x^t & E_{xy}^t \\ E_{yz}^t & E_{yx}^t & E_y^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

13.2 Lavoro di deformazione

Si ricorda che il lavoro di deformazione rappresenta l'effettiva lavoro che le forze applicate compiono per effetto degli spostamenti che le stesse forze provocano.

Sotto l'azione dei carichi $\underline{f}$, $\underline{m}$, $\underline{Y}_i$, $\underline{M}_i$ ($i=0,1,\dots,n,l$) la trave assume una configurazione equilibrata distinta da quella naturale di riferimento.

Tale configurazione è individuata dagli spostamenti



$\underline{u}(s)$ dei punti della linea d'asse e dalle rotazioni
 $\underline{\varphi}(s)$ delle sezioni rette.

Siano $\underline{S}(N, \underline{T}, M_t, \underline{M}_f)$ e $\underline{D}(\underline{\varepsilon}, \underline{\gamma}, \Theta, \underline{\kappa}_f)$
 le caratteristiche della sollecitazione e della deformazione
 conseguenti ai dati carichi esterni, e siano $d\underline{D}$
 $(d\underline{\varepsilon}, d\underline{\gamma}, d\Theta, d\underline{\kappa}_f)$ gli incrementi di deformazione
 conseguenti ad un incremento $d\underline{F}, d\underline{m}, d\underline{F}_i, d\underline{M}_i$
 dei carichi esterni. Per il principio dei lavori virtuali
 l'incremento del lavoro dei carichi esterni che
 rappresenta il lavoro di deformazione:

$$dL_d = \int_0^l (\underline{F} \cdot d\underline{u} + \underline{m} \cdot d\underline{\varphi}) ds \\ + \sum_{i=0}^{n+1} (\underline{F}_i \cdot d\underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot d\underline{\varphi}(s_i)),$$

vale:

$$dL_d = \int_0^l \underline{S}^T d\underline{D} ds \\ = \int_0^l (N d\underline{\varepsilon} + \underline{T} \cdot d\underline{\gamma} + M_t d\Theta + \underline{M}_f \cdot d\underline{\kappa}_f) ds.$$

Questa espressione differenziale è effettivamente nota
 se è noto il percorso di carico e deformazione a
 cui è soggetta la trave. Infatti, anche nel
 caso in cui le forze applicate sono indipendenti
 dalla deformazione e quindi note a priori, gli
 incrementi di spostamento dei punti carichi, in
 corrispondenza ad un certo livello raggiunto dai
 carichi, sono noti solo se è noto il percorso
 di deformazione susseguente all'applicazione

di quei carichi.

Se il percorso di carico-deformazione a partire da una configurazione l_1 fino ad una configurazione l_2 , susseguente all'applicazione di certi carichi, è nota, l'espressione differenziale può essere integrata (lungo il percorso) ottenendone il lavoro di deformazione totale lungo il dato percorso:

$$L_d = \int_{l_1}^{l_2} \left(\int_0^l \underline{S}^T d\underline{D} \right) ds.$$

13.3 Energia elastica di deformazione

Affinchè esista una energia elastica di deformazione il lavoro di deformazione non deve dipendere dal percorso, ma solo dagli stati iniziali e finali.

Questo significa che dL_d deve essere un

differenziale esatto, e quindi che esiste una funzione energia potenziale elastica per unità di linea $\phi(\underline{D})$ funzione della sola deformazione tale che:

$$d\phi = \underline{S}^T d\underline{D},$$

o, per esteso:

$$d\phi = N d\varepsilon + \underline{T} \cdot d\underline{\gamma} + M_t d\theta + \underline{M}_f \cdot d\underline{k}_f.$$

Ne consegue:

$$\underline{S} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}},$$

oppure, per esteso:

$$\begin{cases} N = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \\ \underline{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\gamma}} \\ M_t = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \underline{M}_f = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{k}_f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_x = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_x} \\ T_y = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_y} \\ M_x = \frac{\partial \phi}{\partial k_x} \\ M_y = \frac{\partial \phi}{\partial k_y} \end{cases}.$$

Nel caso di elasticità lineare deve risultare:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} = \underline{E} \underline{D}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial D_i} = \sum_j E_{ij} D_j,$$

e quindi:

$$E_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial D_i \partial D_j}.$$

L'integrazione è possibile se e solo se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial D_i \partial D_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial D_j \partial D_i},$$

cioè se e solo se la matrice di elasticità è simmetrica:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^T, \quad E_{ij} = E_{ji}.$$

Si integri allora dallo stato naturale allo stato finale caratterizzato dalla deformazione $\mathbf{D}$ e dalla sollecitazione $\mathbf{S} = \mathbf{E}\mathbf{D}$. Uno stato intermedio vale $\lambda\mathbf{D}$ e $\lambda\mathbf{S}$, con $\lambda \in [0, 1]$. Ad un incremento $d\mathbf{D} = (d\lambda)\mathbf{D}$ di deformazione corrisponde l'incremento $d\phi = \lambda(\mathbf{S}^T \mathbf{D}) d\lambda$ dell'energia elastica di deformazione. Integrando si ottiene quindi:

$$\phi = \int_0^1 \lambda(\mathbf{S}^T \mathbf{D}) d\lambda = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{D},$$

avendo scelto di porre $\phi(0) = 0$. Inserendo il legame costitutivo elastico lineare si ottiene infine:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D}.$$

La richiesta che il lavoro di deformazione sia positivo (a partire dalla configurazione naturale) implica la definitività positiva di $\mathbf{E}$ e la sua invertibilità.

Detta $\mathbf{C}$ la matrice inversa della $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1},$$

si ha quindi:

$$\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \underline{\mathbf{S}}.$$

È anche assicurata l'esistenza dell'energia complementare per unità di linea che vale:

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{S}}^T \mathbf{C} \underline{\mathbf{S}},$$

tale che:

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}},$$

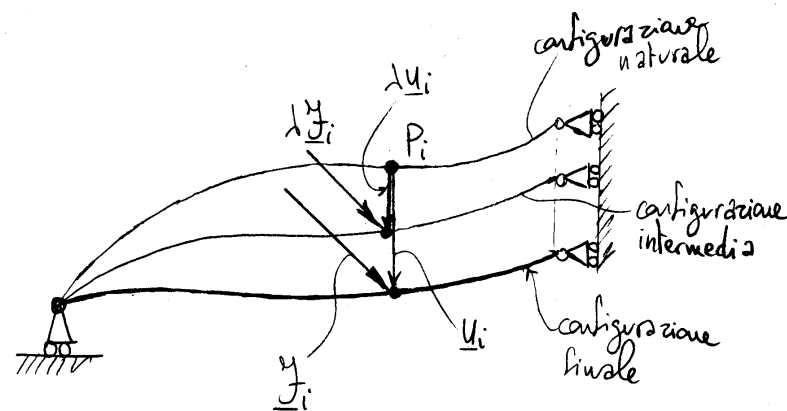
oppure, per esteso:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial N} \\ \gamma_x = \frac{\partial \psi}{\partial T_x} \\ \gamma_y = \frac{\partial \psi}{\partial T_y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Theta = \frac{\partial \psi}{\partial M_t} \\ K_x = \frac{\partial \psi}{\partial M_x} \\ K_y = \frac{\partial \psi}{\partial M_y} \end{cases}.$$

13.4 Teoremi sul lavoro di deformazione

13.4.1 Teorema di Clapeyron

Nell'ambito dell'elasticità lineare gli spostamenti sono proporzionali alle forze applicate. Se le forze $\underline{F}_i$ provocano gli spostamenti $\underline{u}_i$ dei punti di applicazione, le forze $\lambda \underline{F}_i$, dove λ è un generico scalare, provocano gli spostamenti $\lambda \underline{u}_i$. Poiché il lavoro di deformazione è indipendente dal percorso, lo si può calcolare scegliendo di incrementare tutte le forze in modo proporzionale fra loro, da zero fino al loro valore finale $\underline{F}_i$. Uno stato intermedio è dunque individuato dalle forze $\lambda \underline{F}_i$ con $0 < \lambda < 1$.



Se alle forze finali corrispondono gli spostamenti $\underline{u}_i$ allora alle forze $\lambda \underline{F}_i$ corrispondono gli spostamenti $\lambda \underline{u}_i$. L'incremento dei carichi lungo il percorso scelto vale $d\lambda \underline{F}_i$ e il conseguente incremento degli spostamenti risulta $d\lambda \underline{u}_i$. Ne consegue:

$$L_d = \sum_i \int_0^1 (\lambda \underline{F}_i) \cdot (d\lambda \underline{u}_i) = \sum_i (\underline{F}_i \cdot \underline{u}_i) \int_0^1 \lambda d\lambda,$$

e infine:

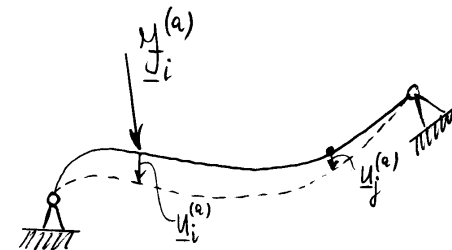
$$L_d = \frac{1}{2} \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u}_i \quad (\text{Teorema di Clayperon}).$$

A parole, il lavoro di deformazione due le forze applicate compiono a partire da zero fino al loro valore finale e' pari a metà del lavoro compiuto dalle stesse forze se avessero dall'inizio alla fine il loro valore finale.

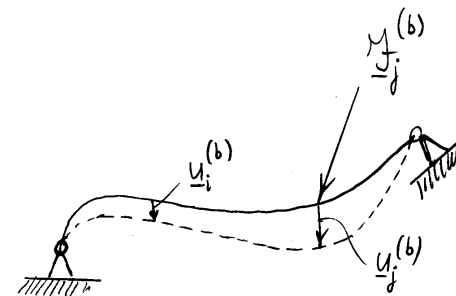
13.4.2 Teorema di Betti

Per il lavoro di deformazione non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti ad un sistema di forze $\underline{F}_i^{(a)}$ compete il seguente lavoro di deformazione:

$$L_d^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot \underline{u}_i^{(a)},$$



sistema (a)



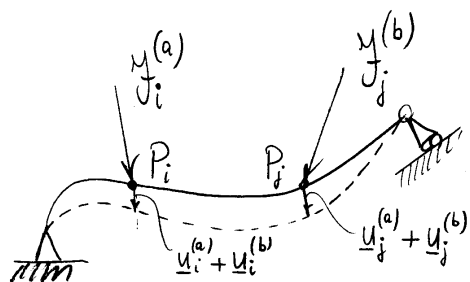
sistema (b)

mentre ad un sistema di forze $\underline{F}_j^{(b)}$ compete il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_j \underline{F}_j^{(b)} \cdot \underline{u}_j^{(b)}.$$

Al sistema di forze somma dei due sistemi precedenti compete quindi il lavoro:

$$\begin{aligned} L_d^{(a+b)} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot (\underline{u}_i^{(a)} + \underline{u}_i^{(b)}) + \sum_j \underline{F}_j^{(b)} \cdot (\underline{u}_j^{(a)} + \underline{u}_j^{(b)}) \right\} \\ &= L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{ba}) \end{aligned}$$



sistema (a)+(b)

dove:

$$L_{ab} = \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot \underline{u}_i^{(b)}$$

$$L_{ba} = \sum_j \underline{F}_j^{(b)} \cdot \underline{u}_j^{(a)}.$$

I lavori L_{ab} e L_{ba} rappresentano il lavoro mutuo che le forze del sistema (a) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema (b) se avessero sempre il loro valore finale e, rispettivamente, il lavoro mutuo che le forze del sistema (b) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema (a) se avessero sempre il loro valore finale.

Vogliamo mostrare che i due lavori mutui
 L_{ab} e L_{ba} coincidono (teorema di Betti).

Infatti, poiché il lavoro di deformazione non dipende dal percorso, il lavoro $L_d^{(a+b)}$ può essere calcolato applicando prima le forze del sistema (a) fino al loro valore finale, poi le forze del sistema (b) fino al loro valore finale. Alla fine dell'applicazione del sistema (a) il lavoro di deformazione vale $L_d^{(a)}$. L'applicazione del sistema (b) non solo genera il lavoro di deformazione $L_d^{(b)}$, ma, facendo lavorare anche il sistema di forze (a), che sono già al loro valore finale, genera anche il termine L_{ab} :

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + L_{ab} .$$

D'altronde, se si applica prima il sistema di

forze (b) fino al loro valore finale e indi il sistema di forze (a), si ottiene analogamente:

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(b)} + L_d^{(a)} + L_{ba} .$$

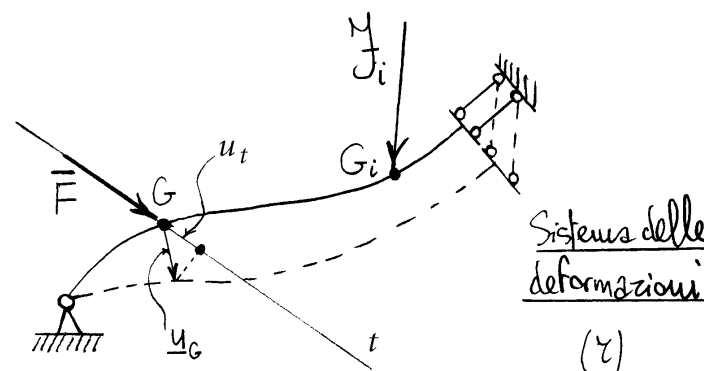
Ne risulta quindi:

$$L_{ab} = L_{ba} .$$

13.4.3 Teorema di Castigliano

Se i vincoli sono rigidi e' possibile calcolare lo spostamento, rispetto alla configurazione naturale, di un punto della linea d'asse in una data direzione eseguendo la derivata del lavoro di deformazione, espresso in funzione delle forze esterne, rispetto alla forza esterna applicata nello stesso punto della linea d'asse ed avente la direzione dello spostamento che si vuole calcolare. Tale derivata va valutata sul valore effettivo delle forze esterne. Se una forza applicata al punto di cui si vuole valutare lo spostamento ed avente la direzione richiesta non e' presente, occorre aggiun-

gerla e valutare la derivata del lavoro di deformazione in corrispondenza del valore nullo di tale forza.



Sia allora data una trave soggetta alle forze F_i ed alla forza F generica applicata in G ed avente una data direzione t . La componente u_t dello spostamento del punto G nella direzione e verso della forza F , dovuta alle forze F_i ed alla forza $\bar{F}$ effettivamente applicata in G , deve dunque valere:

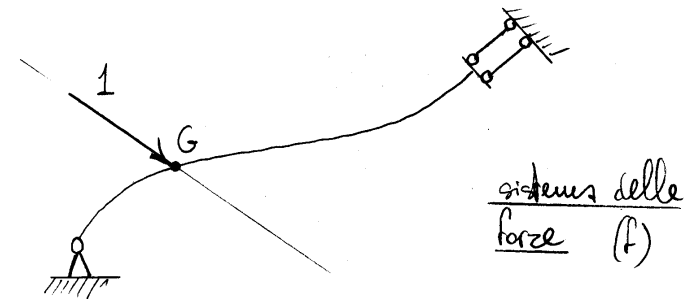
$$u_t = \left. \frac{\partial L_d}{\partial F} \right|_{F=\bar{F}},$$

dove $L_d = L_d(\mathcal{Y}_i; F)$. Se in G , nella direzione della forza esterna F , non è applicata nessuna forza ($\bar{F} = 0$) la derivata andrà calcolata sul valore $F=0$. È chiaro che invece di una forza F si può considerare una coppia M al fine di calcolare la rotazione di una sezione.

Dimostrazione

Si assuma la trave soggetta alle forze $\mathcal{Y}_i$ ed alla forza $\bar{F}$ (o coppia $\bar{M}$ nel caso si voglia valutare una rotazione) quale sistema di spostamenti-deformazione e si applichi il principio dei lavori virtuali assumendo quale sistema di forze-caratteristiche della

sollecitazione quello generato dalla forza unitaria avente la direzione e il verso dello spostamento che si vuole determinare.



Risulta:

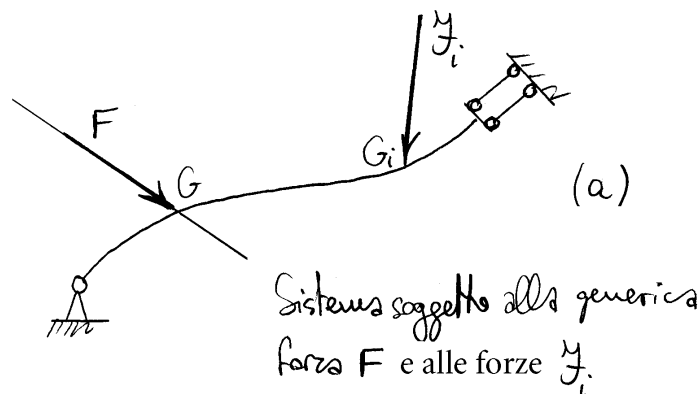
$$u_t = \int_L \underline{S}^{(f)T} \mathbf{C} \underline{S}^{(r)} ds.$$

Si consideri ora la trave soggetta alle forze $\mathcal{Y}_i$ ed alla generica forza F , avente direzione e verso dello spostamento che si vuole determinare. Il lavoro di deformazione, scritto in forma complementare, vale:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_l \underline{s}^{(a)T} \mathbf{C} \underline{s}^{(a)} ds,$$

e la sua derivata rispetto ad F :

$$\frac{\partial L_d}{\partial F} = \int_l \left(\frac{\partial \underline{s}^{(a)}}{\partial F} \right)^T \mathbf{C} \underline{s}^{(a)} ds.$$



Risulta:

$$\underline{s}^{(a)} \Big|_{F=\bar{F}} = \underline{s}^{(r)},$$

ed inoltre, per il principio di sovrapposizione degli effetti, risulta:

$$\underline{s}^{(a)} = F \underline{s}^{(f)} + \underline{s}^{(o)},$$

dove $\underline{s}^{(o)}$ sono le sollecitazioni dovute ai soli carichi esterni Y_i . Si ha quindi:

$$\frac{\partial \underline{s}^{(a)}}{\partial F} = \underline{s}^{(f)},$$

indipendentemente dal valore di F . In definitiva:

$$u_t = \int_l \left(\frac{\partial \underline{s}^{(a)}}{\partial F} \Big|_{F=\bar{F}} \right)^T \mathbf{C} \underline{s}^{(a)} \Big|_{F=\bar{F}} ds = \frac{\partial L_d}{\partial F} \Big|_{F=\bar{F}}$$

come volersi dimostrare. E' evidente che utilizzando il teorema di Castigliano occorre valutare $\underline{s}^{(a)}$ per $F = \bar{F}$ e $\partial \underline{s}^{(a)} / \partial F$, cioè occorre valutare le caratteristiche della sollecitazione nella struttura reale e nella struttura fittizia soggetta alla forza unitaria.

Si ricordi inoltre che

il risultato ottenuto dipende dall'ipotesi di vincoli

rigidi (e' così escluso il lavoro delle resistenze vincolari)

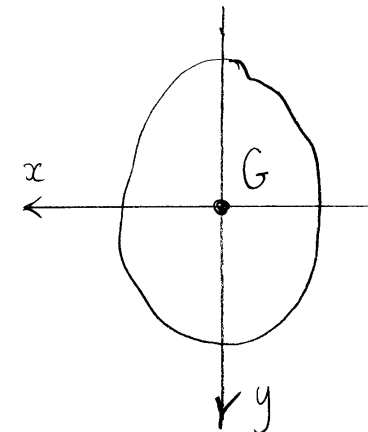
e fornisce lo spostamento a partire dalla configurazione naturale per effetto delle forze applicate, ovvero è escluso il calcolo di spostamenti dovuti a distorsioni (le deformazioni del

sistema reale dipendono così dalle sole sollecitazioni reali).

13.5 Centri di flessione e taglio

Nel seguito si suppone che esista l'energia elastica di deformazione e che quindi il legame costitutivo elastico lineare sia invertibile e le matrici di elasticità e di elasticità inversa siano simmetriche. Come già detto si suppone inoltre che la parte assiale e flessionale sia indipendente da quella tagliante e torsionale. Si faccia poi riferimento, per il momento, al punto O della linea d'asse per il calcolo di tutte le quantità che intervengono nel legame costitutivo. Si scelga infine, nel piano della sezione, un generico sistema di riferimento Oxy .

Ci si domanda ora se esistono due poli naturali, G di *flessione* e C di *taglio*, il primo per il calcolo del momento flettente e della dilatazione della fibra longitudinale per esso e il secondo per il calcolo del momento torcente e dello scorrimento della relativa fibra longitudinale, che scinda ulteriormente ognuna delle due parti del legame costitutivo in due parti indipendenti. La



risposta è positiva e il legame costitutivo, previa scelta dei due poli, risulta scisso in quattro parti indipendenti. La prima riguarda la forza normale N , di direzione assiale, e la dilatazione ϵ_G della fibra longitudinale per il centro di flessione, ovverossia di una fibra di direzione assiale, e costituisce quindi la parte *assiale* del legame costitutivo:

$$N = \mathcal{M}\epsilon_G. \quad (1)$$

La costante di proporzionalità $\mathcal{M}$, *rigidezza assiale* di un elemento di trave, ha dimensione F e può essere misurata per esempio in N. La seconda parte del legame costitutivo riguarda il momento flettente M_G valutato rispetto al centro di flessione e la curvatura flessionale k_f e ne costituisce quindi la parte *flessionale*:

$$M_G = J k_f. \quad (2)$$

Poiché M_G e k_f sono vettori nel piano della sezione, l'operatore lineare J che ne definisce il legame elastico lineare è di consanguenza un tensore del secondo ordine piano, il *tensore di rigidezza flessionale* di un elemento di trave, e le sue componenti hanno dimensione FL² e possono quindi essere misurate per esempio in N m². La terza parte del legame costitutivo riguarda il momento torcente M_C valutato rispetto al centro di taglio e l'angolo unitario di torsione Θ e ne costituisce quindi la parte *torsionale*:

$$M_C = J_t \Theta. \quad (3)$$

In tal caso la costante di proporzionalità J_t , *rigidezza torsionale* di un elemento di trave e detta più comunemente *fattore torsionale di rigidezza*, ha dimensioni FL² e può essere misurata per esempio in N m². Infine la quarta parte del legame costitutivo

riguarda il taglio T e lo scorrimento y_C della fibra longitudinale per il centro di taglio e ne costituisce quindi la parte *tagliante*:

$$T = \Gamma y_C. \quad (4)$$

Poiché T e y_C sono vettori nel piano della sezione, l'operatore lineare Γ che ne definisce il legame elastico lineare è di consanguenza un tensore del secondo ordine piano, il *tensore di rigidezza tagliante* di un elemento di trave, e le sue componenti hanno dimensione F e possono quindi essere misurate per esempio in N.

Dimostrazione dell'esistenza del centro di flessione. A tal fine, si inseriscano le formule di trasformazione della dilatazione delle fibre longitudinali e del momento flettente nel legame costitutivo della parte assiale e flessionale, scritto con riferimento al centro O sulla linea d'asse. Lo sviluppo del legame costitutivo fornisce:

$$N = E_z^f \left(\epsilon_G - k_x y_G + k_y x_G \right) + E_{zx}^f k_x + E_{zy}^f k_y, \quad (5)$$

che si riduce nella forma (1):

$$N = E_z^f \epsilon_G, \quad (6)$$

se e solo se si pone:

$$x_G = -\frac{E_{zy}^f}{E_z^f}, \quad y_G = \frac{E_{zx}^f}{E_z^f}. \quad (7)$$

Si ha poi:

$$M_x^G + N y_G = E_{xz}^f \left(\epsilon_G - k_x y_G + k_y x_G \right) + E_x^f k_x + E_{xy}^f k_y \quad (8)$$

che con le (6) e (7) diventa:

$$M_x^G = \left(E_x^f - \frac{(E_{zx}^f)^2}{E_z^f} \right) k_x + \left(E_{xy}^f - \frac{E_{zx}^f E_{zy}^f}{E_z^f} \right) k_y. \quad (9)$$

Analogamente si ottiene:

$$M_y^G = \left(E_{xy}^f - \frac{E_{zy}^f E_{zx}^f}{E_z^f} \right) k_x + \left(E_y^f - \frac{(E_{zy}^f)^2}{E_z^f} \right) k_y, \quad (10)$$

come volevasi dimostrare. ■

Dimostrazione dell'esistenza del centro di taglio. Conviene utilizzare, per la parte tagliente e torsionale del legame costitutivo, il legame costitutivo inverso scritto con riferimento al centro O sulla linea d'asse:

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z^t & C_{zx}^t & C_{zy}^t \\ C_{xz}^t & C_x^t & C_{xy}^t \\ C_{yz}^t & C_{yx}^t & C_y^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

poichè si ottengono così degli sviluppi formalmente analoghi a quelli della dimostrazione precedente. Infatti, si inseriscano nella (11) le formule di trasformazione dello scorrimento delle fibre longitudinali e del momento torcente. Lo sviluppo della (11) fornisce innanzitutto l'analoga della (5):

$$\Theta = C_z^t \left(M_C - T_x \gamma_C + T_y x_C \right) + C_{zx}^t T_x + C_{zy}^t T_y, \quad (12)$$

che si riduce nella forma inversa della (3):

$$\Theta = C_z^t M_C, \quad (13)$$

se e solo se si pone, analogamente alle (7):

$$x_C = -\frac{C_{zy}^t}{C_z^t}, \quad y_C = \frac{C_{zx}^t}{C_z^t}. \quad (14)$$

Si ha poi:

$$\gamma_x^C + \Theta \gamma_C = C_{xz}^t \left(M_C - T_x \gamma_C + T_y x_C \right) + C_x^t T_x + C_{xy}^t T_y, \quad (15)$$

che con le (13) e (14) diventa:

$$\gamma_x^C = \left(C_x^t - \frac{(C_{zx}^t)^2}{C_z^t} \right) T_x + \left(C_{xy}^t - \frac{C_{zx}^t C_{zy}^t}{C_z^t} \right) T_y. \quad (16)$$

Analogamente si ottiene:

$$\gamma_y^C = \left(C_{xy}^t - \frac{C_{zy}^t C_{zx}^t}{C_z^t} \right) T_x + \left(C_y^t - \frac{(C_{zy}^t)^2}{C_z^t} \right) T_y, \quad (17)$$

come volevasi dimostrare. ■

A seguito della scelta dei centri di flessione G e di taglio C quali poli per la descrizione del legame costitutivo delle travi occorre verificare che l'espressione del lavoro virtuale interno che compare nel principio dei lavori virtuali, e quindi le espressioni dell'energia elastica di deformazione, restano formalmente immutate.

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} N\epsilon + \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{k}_f \\ = (N\mathbf{e}_z) \cdot \left(\epsilon_G \mathbf{e}_z - \mathbf{k}_f \times (G - O) \right) \\ + \left(\mathbf{M}_G + (G - O) \times (N\mathbf{e}_z) \right) \cdot \mathbf{k}_f \end{aligned}$$

$$= N\epsilon_G + \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{k}_f$$

e analogamente risulta:

$$\begin{aligned} M_t\Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= \{M_C\mathbf{e}_z + (C - O) \times \mathbf{T}\} \cdot (\Theta\mathbf{e}_z) \\ &\quad + \mathbf{T} \cdot \{\boldsymbol{\gamma}_C - \Theta\mathbf{e}_z \times (C - O)\} \\ &= M_C\Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C \\ &\quad + \{(C - O) \times \mathbf{T}\} \cdot (\Theta\mathbf{e}_z) - \mathbf{T} \cdot \{\Theta\mathbf{e}_z \times (C - O)\} \\ &= M_C\Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C. \end{aligned}$$

Ne risultano allora le seguenti espressioni del lavoro virtuale interno, dell'energia elastica di deformazione e di quella complementare:

$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_{\ell} (N\epsilon_G + \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{k}_f + M_C\Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C) ds \\ &= \int_{\ell} \left(N\epsilon_G + M_x^G k_x + M_y^G k_y + M_C\Theta + T_x \gamma_x^C + T_y \gamma_y^C \right) ds, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{M}\epsilon_G^2 + \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{J} \mathbf{k}_f + J_t \Theta^2 + \boldsymbol{\gamma}_C \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\gamma}_C \right\}, \quad (18b)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\mathcal{M}} N^2 + \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_G + \frac{1}{J_t} M_C^2 + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{T} \right\}. \quad (18c)$$

Capitolo 14

Legame costitutivo per la trave inflessa

Si costruirà nel seguito la teoria di Eulero-Bernoulli della trave elastica inflessa, innestando una semplice assunzione costitutiva nel quadro cinematico sviluppato in precedenza. La prima versione di tale teoria è dovuta a Giacomo Bernoulli.¹ In seguito Eulero,² su suggerimento di Daniele Bernoulli,³ risolse basandosi sulla teoria di Giacomo il problema della determinazione della *elastica*, cioè della forma che una trave elastica molto snella assume sotto diverse condizioni di carico.

Le più ampie applicazioni in sede tecnica della teoria della trave inflessa si riferiscono alla sua versione ristretta alle ipotesi di un legame costitutivo di tipo elastico lineare inserito nel quadro cinematico valido sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti. Tuttavia, come vedremo, nello spirito della teoria delle travi inflesse risulta possibile considerare anche altri tipi di legami costitutivi, per esempio elastici non lineari oppure elastoplastici od ancora viscoplastici. D'altronde spesso non è possibile prescindere da tali tipi più generali di legami costitutivi, per esempio se si vogliono eseguire delle verifiche agli stati limite ultimi.

La teoria della trave inflessa si presta bene ad affrontare lo studio delle travi piane, travi che non sono soggette a deformazione di tipo torsionale. In tal caso si potrebbe anche considerare, senza problemi, un quadro cinematico di riferimento non limitato ai piccoli spostamenti. Nel caso di travi

¹Giacomo [Jakob, Jacob, Jacques] Bernoulli (1654-1705), nato a Basilea. La versione definitiva della teoria della trave inflessa fu da lui pubblicata in "Histoire de l'Académie des Sciences de Paris," 1705.

²Leonardo [Leonhard, Leonard] Eulero [Euler] (1707-1783), nato a Basilea. I suoi principali risultati sullo studio delle travi elastiche sono riportati in appendice al suo libro "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", pubblicato nel 1744, nel quale le soluzioni di svariati problemi sono ottenute sistematicamente con metodi variazionali.

³Daniele [Daniel] Bernoulli (1700-1782), figlio di Giovanni [Johann] Bernoulli (1667-1748), fratello di Giacomo. Daniele propose ad Eulero il problema della determinazione della forma di una trave inflessa con una lettera del 1742.

spaziali, si presta invece ad affrontare lo studio della sola parte flessionale della deformazione. In tal caso l'ipotesi di piccoli spostamenti diventa indispensabile, o comunque di difficoltosa rimozione, per la necessità di separare la deformazione nella parte flessionale e in quella torsionale, agevole solo sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti.

La versione della teoria ristretta ad un legame elastico lineare, alle piccole deformazioni ed alle travi ad asse rettilineo omogenee e a sezioni rette costanti (solido cilindrico) è in accordo con la soluzione flessionale del problema di Saint-Venant. Osserviamo subito che le due teorie si intrecciano senza che l'una sia compresa nell'altra, dato che il problema di Saint-Venant è ristretto a tali assunzioni e quindi, da questo punto di vista, meno generale della teoria della trave inflessa, e nello stesso tempo risulta più generale in quanto è in grado di descrivere anche le parti tagliente e torsionale del legame costitutivo che invece uno schema analogo a quello della trave inflessa non è in grado di descrivere in forma accettabile.

Si conclude osservando che un pregio della teoria delle travi inflesse elastiche lineari è anche quello di mostrare esplicitamente le analogie esistenti tra la deformazione di una trave elastica inflessa ed il moto di un corpo rigido. Risulta allora chiaro perché la flessione di una trave dipende, come si vedrà più avanti, da un *vettore dei momenti statici* e da un *tensore di inerzia*, analogamente al moto di un corpo rigido, da cui la necessità dello sviluppo di una "geometria delle masse" nell'ambito della teoria delle travi inflesse.

14.1 Legame costitutivo nell'intorno di un punto

Al fine di implementare le parti assiale e flessionale del legame costitutivo si suppone innanzitutto che il moto rigido delle sezioni rette, che come detto descrive mediamente la cinematica della trave, dia una descrizione sufficientemente accurata delle dilatazioni puntuali delle fibre longitudinali. In secondo luogo si suppone che un elemento di fibra longitudinale si comporti come una barra sottoposta a trazione semplice (fig. 14.1). Questa

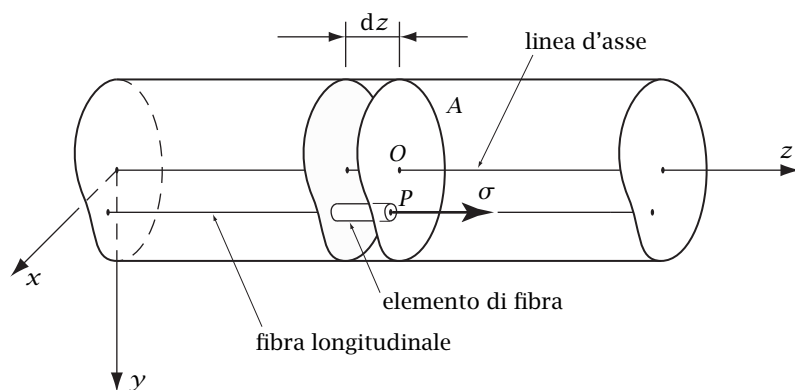


Figura 14.1: Generica fibra longitudinale

ipotesi caratterizza dunque il legame costitutivo nell'intorno di un punto per il tramite di un diagramma tensione-dilatazione. La dilatazione è quella, calcolata nel dato punto, della fibra longitudinale passante dal punto stesso mentre la tensione è quella agente, in corrispondenza del punto, sulla giacitura di normale la direzione della fibra stessa. Naturalmente la dilatazione delle fibre longitudinali, così come le corrispondenti tensioni, varieranno in generale sia lungo una data fibra che su una data sezione retta.

Si ricordi che nell'ipotesi di piccoli spostamenti l'equilibrio viene scritto nella configurazione indeformata, nella quale le fibre longitudinali sono sempre ortogonali alla sezione retta. In tale ipotesi la tensione è dunque ortogonale alla sezione retta, e ne consegue che alla dilatazione ϵ di una fibra longitudinale corrisponde una tensione normale σ agente sulla sezione retta in corrispondenza della sua intersezione con la fibra stessa.⁴

⁴Nel caso di *spostamenti finiti*, ovverossia se gli spostamenti non sono piccoli, le tensioni

Nel caso più generale possibile, la tensione normale agente in un dato punto ad un dato istante dipenderà dalla storia della corrispondente dilatazione fino a quell'istante (*legge di determinismo*). Qui ci si limiterà a considerare due legami costitutivi particolari, quello elastico, e in particolare elastico lineare, e quello elastoplastico. Nel seguito si svilupperà poi in forma completa il solo caso elastico lineare.

14.1.1 Legame costitutivo elastico

Se il materiale è elastico il diagramma *tensione normale-dilatazione* è univoco e viene seguito sia durante la fase di carico che in quella di scarico (fig. 14.2a). In altri termini ad una data dilatazione viene a corrispondere

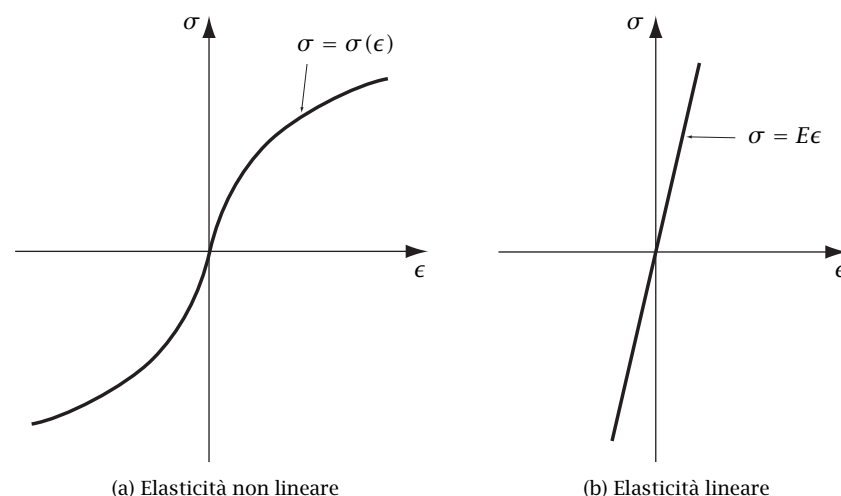


Figura 14.2: Elasticità

una ben precisa tensione normale. Dette ϵ la dilatazione, in un dato punto, della fibra longitudinale passante dallo stesso punto e σ la corrispondente tensione normale agente sulla sezione retta nello stesso punto, il più

devono considerarsi agenti nella configurazione deformata. Le tensioni sono allora ortogonali alla sezione retta deformata solo se le fibre restano perpendicolari alla sezione retta anche dopo la deformazione. Per la trave che soddisfa il vincolo interno di ortogonalità tra asse e sezioni rette questa condizione è senz'altro vera solo in assenza di deformazione di torsione, come si verifica per esempio nel caso cinematicamente piano.

generale legame costitutivo elastico si scriverà pertanto nella forma:

$$\sigma = \sigma(\epsilon). \quad (14.1)$$

Si noti che tale legame rappresenta il comportamento del materiale di cui è composta la trave. Se la trave non è omogenea tale legame varierà da punto a punto.

Se il diagramma è lineare il legame costitutivo (14.1) diventa poi (fig. 14.2b):

$$\sigma = E\epsilon, \quad (14.2)$$

dove il coefficiente di proporzionalità E rappresenta il modulo di Young del dato materiale. Se la trave non è omogenea il modulo di Young può in generale variare da punto a punto, sia lungo una data fibra che nella sezione retta. Casi tecnicamente importanti di travi non omogenee si hanno, per esempio, nel caso di travi in *cemento armato*, realizzate con una gettata di calcestruzzo di cemento all'interno della quale sono annegate delle barre di acciaio, oppure nel caso di travi *lamine*, composte da strati di diverso materiale. In tutti questi casi il modulo di Young è costante a tratti.

14.1.2 Legame costitutivo elastoplastico

Se il materiale è elastoplastico il diagramma *tensione normale-dilatazione* non è più univoco poiché allo scarico, una volta superata la tensione di snervamento, viene seguito un diverso percorso elastico lineare. Il caso più semplice possibile è quello di un diagramma bilineare, elastico lineare prima e perfettamente plastico dopo lo snervamento, con uguale limite di snervamento a trazione e compressione (fig. 14.3), utilizzato per modellare sia gli acciai per cemento armato che quelli per strutture metalliche.⁵ Se in un percorso di carico viene superato il limite di snervamento la tensione normale non è più determinata univocamente dal valore attuale della dilatazione della fibra longitudinale, ma viene a dipendere dalla storia della dilatazione stessa precedente l'istante di tempo attuale. Si noti che risulta

⁵Al fine di eseguire verifiche agli stati limite gli eurocodici 2 e 3 permettono l'uso di diagrammi bilineari per gli acciai per cemento armato e, rispettivamente, per strutture metalliche. Il limite di snervamento in tali diagrammi è riferito allo snervamento caratteristico f_{yk} , eventualmente modificato tramite un opportuno coefficiente moltiplicativo α e opportunamente ridotto tramite un coefficiente di sicurezza γ_s : $\sigma_s = \alpha f_{yk} / \gamma_s$. Analogamente a qualunque valore caratteristico, lo *snervamento caratteristico* rappresenta il livello tensionale al disotto del quale ci si aspetta di trovare al più il 5% delle tensioni di snervamento relative a prove di trazione su provini del dato tipo di acciaio.

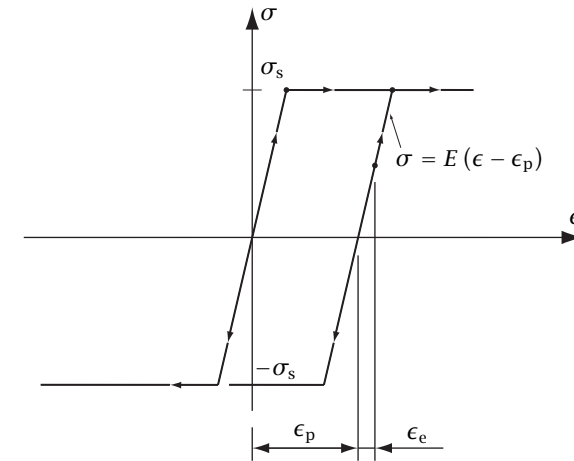


Figura 14.3: Elastoplasticità

possibile scaricare una deformazione permanente sviluppatasi per il superamento del limite di snervamento per esempio a trazione, scaricando prima e ricaricando poi fino a superare il limite di snervamento a compressione.

Le dilatazioni elastica ϵ_e , permanente ϵ_p e totale ϵ sono legate dalla relazione:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p. \quad (14.3)$$

Ne consegue la validità della seguente relazione elastica lineare allo scarico:

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad (14.4)$$

relazione che coincide con la (14.2) nel caso di provino vergine.

Un altro esempio di diagramma elastoplastico può essere quello riguardante il calcestruzzo compresso che, allo scopo di coglierne la forte non linearità, può essere modellato con un tratto parabolico nella parte elastica seguito da un tratto perfettamente plastico,⁶ come indicato in fig. 14.4.

⁶L'eurocodice 2, al fine di eseguire verifiche agli stati limite, permette l'uso per il calcestruzzo compresso di un diagramma del tipo di quello indicato in fig. 14.4. Il livello di snervamento σ_s del calcestruzzo compresso, come già per l'acciaio, è riferito allo snervamento caratteristico f_{ck} , eventualmente modificato tramite un opportuno coefficiente moltiplicativo α e opportunamente ridotto tramite un coefficiente di sicurezza γ_c : $\sigma_s = \alpha f_{ck} / \gamma_c$.

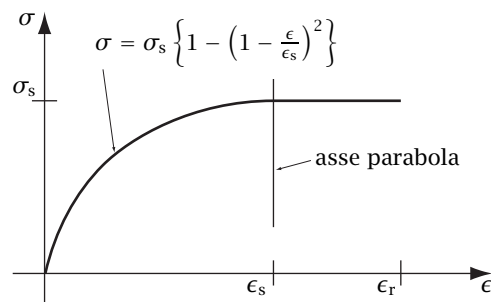


Figura 14.4: Calcestruzzo compresso

Occorre a questo punto precisare che un diagramma del tipo di quello riportato in fig. 14.3 risulta valido se sulla sezione retta non agiscono tensioni tangenziali, ovverossia se sono nulle le azioni taglianti e il momento torcente. Nel caso ciò non sia vero il diagramma è ancora valido fino al raggiungimento dello snervamento, quindi in fase elastica. Il livello tensionale che provoca lo snervamento dipende invece dalla contemporanea presenza della tensione normale e di quella tangenziale, così come il comportamento che ne consegue a seguito dello sviluppo delle deformazioni plastiche. Comunque tale dipendenza è spesso trascurabile quando si tratta di tensioni tangenziali dovute ad un'azione tagliante, almeno se il valore di questa azione è contenuto.

14.2 Legame costitutivo assiale

Integrando la tensione normale sulla sezione retta si ottiene la forza normale:

$$N \underline{e}_x = \int_A \sigma \underline{e}_x dA =$$

$$= \varepsilon \underline{e}_x \int_A E dA + \underline{\kappa}_f \times \int_A E (\underline{P} - \underline{O}) dA.$$

Utilizzando il linguaggio della geometria delle masse, riferendosi al modulo di Young quale "distribuzione di massa", si pone:

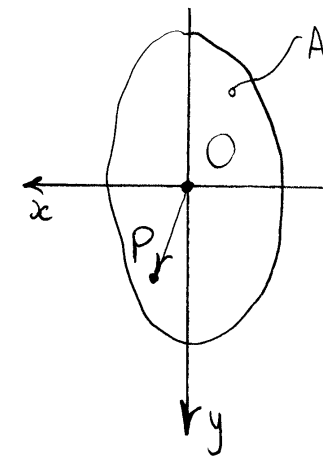
$$M = \int_A E dA, \quad (\text{Massa totale})$$

$$\underline{J}_O = \int_A E (\underline{P} - \underline{O}) dA, \quad (\text{Vettore dei momenti statici})$$

Il baricentro G della sezione retta è poi

definito come quel punto del piano della sezione tale che sia nullo il suo vettore dei momenti statici:

$$\int_A E (\underline{P} - \underline{G}) dA = \underline{0}.$$



Notiamo che al baricentro viene solo chiesto di appartenere al piano della sezione e non alla sezione stessa. Questo è perfettamente coerente poiché il moto rigido della sezione può estendersi a tutto il suo piano.

Se l'asse della trave si fa coincidere con l'asse dei baricentri si ottiene la seguente semplice espressione per la forza normale:

$$N = M \varepsilon_G$$

dove ε_G rappresenta la dilatazione dell'asse baricentrico. In seguito, salvo avviso contrario, l'asse della trave coinciderà sempre con l'asse dei baricentri.

Nel contesto del particolare legame costitutivo che si sta sviluppando il baricentro assume dunque il significato di centro di flessione e la massa totale quello di rigidità assiale.

Nel caso di travi a forte curvatura, il modulo di Young va diviso per il coefficiente $1 + cy$. La massa totale risulta in tal caso:

$$M = \int_A \frac{E}{1 + cy} dA.$$

14.3 Legame costitutivo flessionale

Il momento flettente di polo il baricentro risulta:

$$\underline{M}_f = \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \times (\sigma \underline{e}_x) dA =$$

$$= \left(\int_A E (\underline{P} - \underline{G}) dA \right) \times (\varepsilon_G \underline{e}_x) + \int_A E (\underline{P} - \underline{G}) \times \{ \underline{K}_f \times (\underline{P} - \underline{G}) \} dA.$$

Tenendo conto della proprietà che definisce il baricentro G e sviluppando il doppio prodotto vettoriale si ottiene poi:

$$\underline{M}_f = \int_A E \left\{ (\underline{P} - \underline{G}) \cdot (\underline{P} - \underline{G}) dA \right\} \underline{I} + \int_A E \left\{ (\underline{P} - \underline{G}) \otimes (\underline{P} - \underline{G}) \right\} \underline{K}_f dA$$

Introducendo il tensore di inerzia (relativo al baricentro):

$$\underline{J} = \int_A E \left\{ (\underline{P} - \underline{G}) \cdot (\underline{P} - \underline{G}) dA \right\} \underline{I} - \int_A E \left\{ (\underline{P} - \underline{G}) \otimes (\underline{P} - \underline{G}) \right\} dA$$

si ottiene infine:

$$\underline{M}_f = \underline{J} \underline{K}_f.$$

Il tensore di inerzia assume quindi il ruolo di tensore di rigidità flessionale.

14.4 Travi omogenee a piccola curvatura

Se la trave è a piccola curvatura ed omogenea nella sezione retta ($E = \text{cost}$) si può scrivere:

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon_G \\ \underline{M}_f = E \underline{J}^{(A)} \underline{K}_f \end{cases},$$

dove ora :

$$A = \int_A dA ,$$

rappresenta l'area totale della sezione e

$$\underline{J}^{(A)} = \int_A \left\{ (\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) \underline{I} - (\underline{P}-\underline{G}) \otimes (\underline{P}-\underline{G}) \right\} dA ,$$

dipende solo dalla forma della sezione retta e non dal materiale. Si ottiene in tal caso una geometria delle aree.

14.5 Travi piane

Se la trave è piana, con coincidenza dei piani di flessione e di sollecitazione, risulta:

$$\begin{cases} \underline{M}_f = M \underline{e}_x , \\ \underline{K}_f = K \underline{e}_x , \end{cases}$$

e quindi :

$$M \underline{e}_x = K \underline{J} \underline{e}_x \Rightarrow \underline{J} \underline{e}_x = \frac{M}{K} \underline{e}_x .$$

Quindi nel caso piano $\underline{e}_x$ rappresenta un autovettore di $\underline{J}$ con autovalore J tale che:

$$J = \frac{M}{K} .$$

Risulta quindi :

$$M = J K .$$

oppure, nel caso omogeneo:

$$M = E J K .$$

La direzione associata ad un autovettore di $\underline{J}$ viene detta direzione principale di inerzia.

14.6 Legame costitutivo tagliante e torcente dedotto dal campo di spostamenti rigidi delle sezioni rette

Si supponga la validità di un legame costitutivo, valido localmente, del tipo:

$$\underline{\tau} = G \underline{\gamma}_P.$$

Utilizzando la relazione tra $\underline{\gamma}_P$ e lo scorrimento $\underline{\gamma}$ tra linea d'asse e sezione retta:

$$\underline{\tau} = G \underline{\gamma} + G \odot \underline{e}_z \times (P - O),$$

e quindi integrando sulla sezione retta si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \int_A \underline{\tau} dA \\ &= \left(\int_A G dA \right) \underline{\gamma} + \odot \underline{e}_z \times \int_A G (P - O) dA. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora il linguaggio della geometria delle masse, riferendosi ora al modulo di elasticità tangenziale G quale "distribuzione di massa", si pone:

$$\mathcal{M} = \int_A G dA, \quad (\text{Massa totale})$$

$$\underline{J}_O = \int_A G (P - O) dA, \quad (\text{Vettore dei momenti statici})$$

Il centro di taglio C della sezione retta è poi definito come quel punto del piano della sezione tale che sia nullo il suo vettore dei momenti statici:

$$\int_A G (P - C) dA = \underline{0}.$$

Se l'asse della trave ci fa coincidere con l'asse dei centri di taglio si ottiene la seguente semplice espressione per la forza di taglio:

$$\underline{T} = \mathcal{M} \underline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \underline{\gamma} = \frac{1}{\mathcal{M}} \underline{T}.$$

Il momento torcente di polo il centro di taglio risulta:

$$\begin{aligned}
 M_t \underline{e}_z &= \int_A (\underline{P} - \underline{C}) \times \underline{\tau} dA = \left(\int_A G (\underline{P} - \underline{C}) dA \right) \times \underline{\tau} \\
 &\quad + \ominus \int_A G (\underline{P} - \underline{C}) \times \{ \underline{e}_z \times (\underline{P} - \underline{C}) \} dA \\
 &= \left(\ominus \int_A G (\underline{P} - \underline{C}) \cdot (\underline{P} - \underline{C}) dA \right) \underline{e}_z \\
 &\quad - \ominus \int_A G (\underline{P} - \underline{C}) \cdot \underline{e}_z \{ (\underline{P} - \underline{C}) dA = \ominus J_C \underline{e}_z,
 \end{aligned}$$

cioè:

$$M_t = J_C \ominus \quad \Rightarrow \quad \ominus = \frac{M_t}{J_C},$$

dove:

$$J_C = \int_A G (\underline{P} - \underline{C}) \cdot (\underline{P} - \underline{C}) dA,$$

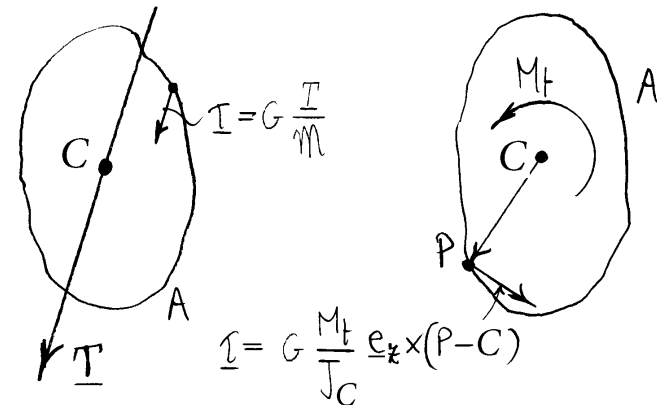
viene detto momento di inerzia polare (di polo il centro di taglio).

Quindi:

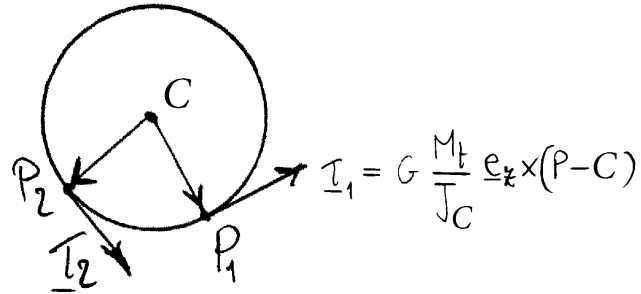
$$\underline{\tau} = G \frac{T}{M} + G \frac{M_t}{J_C} \underline{e}_z \times (\underline{P} - \underline{C}).$$

Si noti che in tal caso il centro di taglio coincide con il baricentro (del modulo di elasticità tangenziale), il fattore torsionale di rigidezza con il momento di inerzia polare rispetto al centro di taglio e infine il tensore di rigidezza tagliante è sferico.

La $\underline{\tau}$ che si è così ottenuta soddisfa le condizioni al contorno solo nel caso di sezione circolare non soggetta a taglio ($T=0$). Infatti, le tensioni tangenziali associate ad un taglio T risultano di direzione costante e quindi non possono essere tangenti ovunque al contorno. Lo stesso caso succede per le tensioni tangenziali associate al momento torcente, tensioni che hanno



La direzione ortogonale al vettore posizione $P-C$,
salvo che per la sezione circolare.



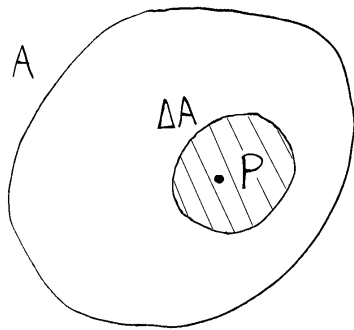
E' evidente che il legame costitutivo così ottenuto
non e' accettabile.

Capitolo 15

Geometria delle masse

15.1 Masse distribuite su un'area piana

Sia data un'area piana A . Una massa m distribuita nell'area è una funzione di "insieme"



che ad ogni parte ΔA di A associa uno scalare $m(\Delta A)$. La massa per unità di superficie :

$$\mu(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow P} \frac{m(\Delta A)}{\Delta A},$$

rappresenta una funzione del punto. La massa

associata all'area ΔA è recuperabile tramite una integrazione :

$$m(\Delta A) = \int_{\Delta A} \mu \, dA.$$

Lo studio del legame costitutivo delle travi inflesse si inquadra in questo contesto "astratto" tradizionale, qualora il modulo di Young E delle fibre longitudinali della trave, definito quindi in tutti i punti di una sezione retta, sia interpretato quale massa per unità di superficie. Le dimensioni di E sono quelle di una forza per unità di superficie : $E \equiv F L^{-2}$. Quindi la massa associata ad un'area ha le dimensioni di una forza.

In conseguenza della derivazione del legame costitutivo delle travi inflesse da un moto rigido

della sezione retta, permane una struttura formale analogia a quella alla base della descrizione del moto rigido. Tuttavia occorre tenere presente che i significati fisici in gioco sono del tutto diversi e che in conseguenza di ciò gli sviluppi nei due casi possono notevolmente divergere.

La massa totale rappresenta la massa associata all'intera area:

$$M = m(A) = \int_A \mu dA .$$

15.2 Vettore dei momenti statici

Si definisce vettore dei momenti statici rispetto ad un generico punto O del piano il vettore:

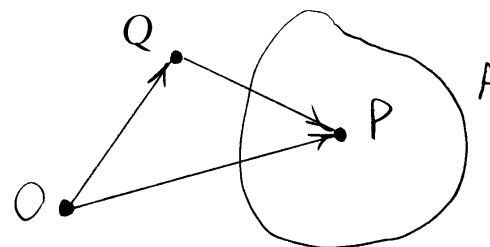
$$\underline{s} = \int_A \mu (P-O) dA .$$

Si è così costruito un campo vettoriale definito nel piano della sezione. Se O e Q sono due punti del piano, dalla identità vettoriale:

$$P-Q = (P-O) - (Q-O),$$

si trae la relazione:

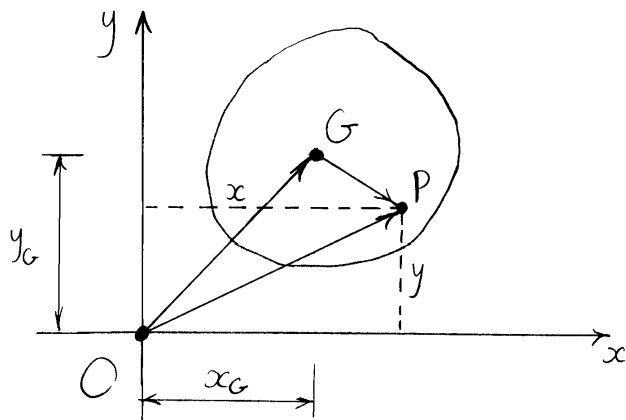
$$\underline{s}(Q) = \underline{s}(O) - M(Q-O),$$



che descrive il campo vettoriale noto il suo valore in un punto O . Se $M \neq 0$ (come nel caso di un sistema di masse tutte positive) il vettore dei momenti statici si annulla in uno e un solo punto del piano G , detto baricentro del sistema di masse. Posto $Q \equiv G$, dalla condizione $\underline{s}(G) = \underline{0}$ si trae:

$$G - O = \frac{1}{M} \underline{s}(O) .$$

In componenti in un sistema cartesiano



ortogonale Oxy risulta:

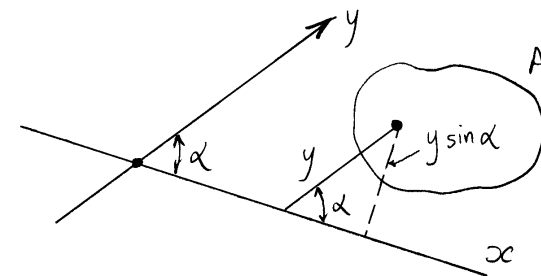
$$\{P-O\} \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \{G-O\} \equiv \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix}.$$

Se ne deduce:

$$\{\underline{s}(O)\} = \begin{Bmatrix} \int_A \mu x dA \\ \int_A \mu y dA \end{Bmatrix}.$$

15.2.1 Momenti statici

Data una retta x non orientata nel piano delle masse ed una associata retta orientata y , non



parallela a x , si definisce momento statico del sistema di masse rispetto all'asse x la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per la

distanza con segno da x , valutata nella direzione di y :

$$S_x = \int_A \mu y dA .$$

Si dice che la retta y orienta esternamente la retta x , e, in contrapposizione, che la retta y è orientata internamente. Se con $\bar{S}_x$ indichiamo il momento statico ottenuto valutando le distanze nella direzione ortogonale ad x , sempre con l'orientazione esterna indotta da y , si ottiene:

$$\bar{S}_x = \int_A \mu y \sin \alpha dA = S_x \sin \alpha .$$

In un sistema cartesiano ortogonale Oxy , gli assi cartesiani si orientano esternamente vicendevolmente e i relativi momenti statici risultano:

$$\begin{cases} S_x = \int_A \mu y dA \\ S_y = \int_A \mu x dA \end{cases} ,$$

da cui l'interpretazione delle componenti del vettore dei momenti statici:

$$\{\underline{S}\} \equiv \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} .$$

Le coordinate del baricentro risultano dunque:

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{M} \\ y_G = \frac{S_x}{M} \end{cases} .$$

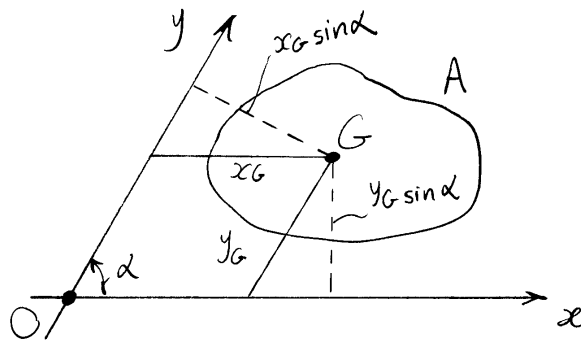
Queste relazioni restano valide anche in un sistema di riferimento obliquo. Infatti in tal caso risulta:

$$y_G \sin \alpha = \frac{\bar{S}_x}{M} = \frac{S_x \sin \alpha}{M} ,$$

e analogamente:

$$x_G \sin \alpha = \frac{\bar{S}_y}{M} = \frac{S_y \sin \alpha}{M},$$

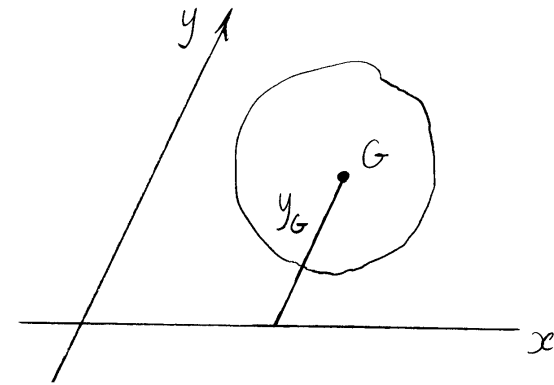
dove, ancora, $\bar{S}_x$ e $\bar{S}_y$ sono i momenti statici valutati con distanze ortogonali a x e y rispettivamente.



15.2.2 Proprietà del baricentro

Ricavando i momenti statici rispetto agli assi in funzione delle coordinate del baricentro si ottiene il teorema di Varignon, che afferma:

Nota il baricentro, e quindi nota la sua distanza da una qualunque retta del piano, per es. la

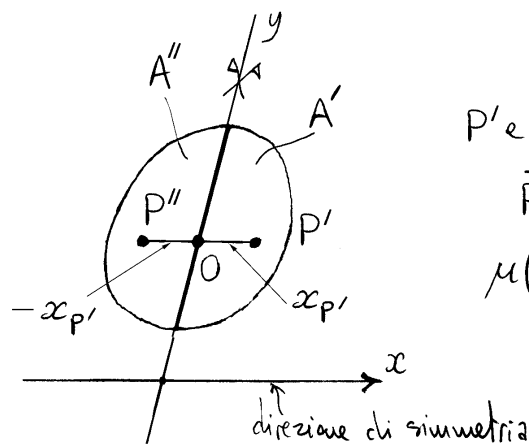


retta x , il momento statico rispetto a tale retta, orientata esternamente da una retta y , si ottiene moltiplicando la massa totale per la distanza dotata del segno indotto da y :

$$S_x = M y_G.$$

E' evidente da tale risultato che il momento statico si annulla in corrispondenza e solo in corrispondenza delle rette baricentriche, e questo indipendentemente dalla direzione rispetto alla quale sono valutate le distanze.

Da ciò consegue che se il sistema di masse possiede un asse di simmetria (anche obliqua) allora tale asse contiene il baricentro. Infatti, sia y un asse di simmetria dell'area piana A e sia x un asse avente la direzione di simmetria.



P' e P'' simmetrici:

$$\overline{P'O} = \overline{P''O}$$

$$\mu(P') = \mu(P'')$$

L'asse y divide l'area in due parti A' e A'' tali che:

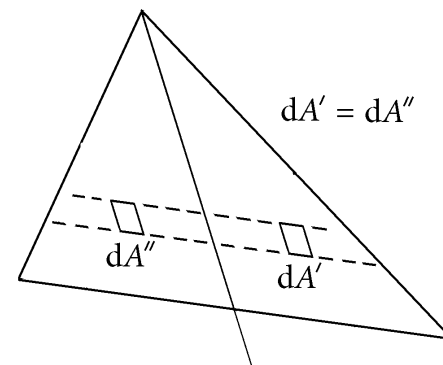
$$\int_{A'} \mu x dA = - \int_{A''} \mu x dA,$$

poichè ad ogni punto P' in A' avente distanza con segno $x_{P'}$ da y e massa μ' , corrisponde il punto simmetrico

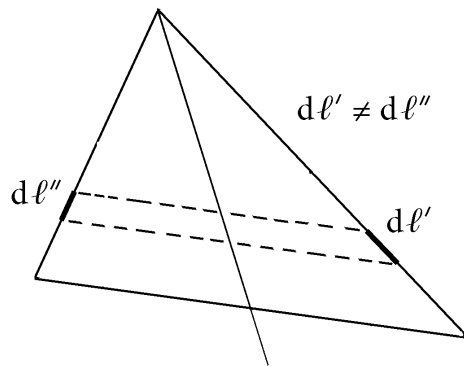
co P'' in A'' avente stessa massa e distanza con segno opposto. Risulta quindi:

$$S_y = \int_{A'} \mu x dA + \int_{A''} \mu x dA = 0.$$

Se la sezione non è omogenea occorre che in posizione simmetrica ci sia la stessa massa elementare, ovvero sia in posizione simmetrica devono essere uguali il prodotto della distribuzione di massa per la misura dell'elemento geometrico. Se la sezione è omogenea occorre che in posizione simmetrica ci siano elementi geometrici di uguale misura. In quest'ultimo caso è quello che succede in un generico triangolo rispetto ad una mediana.



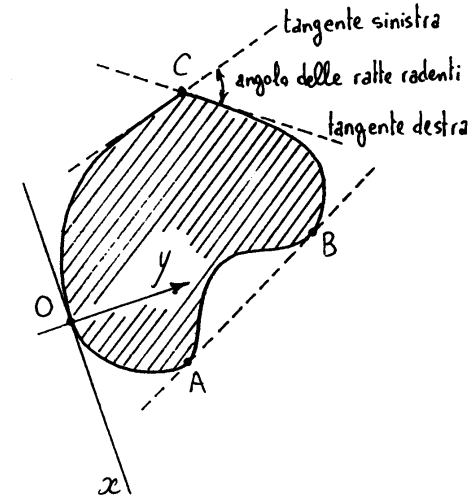
Ma se si considera una sezione sottile di linea media triangolare, con lo spessore concentrato sulla linea media, gli elementi di linea media in posizione simmetrica rispetto ad una mediana non hanno in generale la stessa misura. Se allora lo spessore è costante la sezione sottile non è in generale simmetrica ri-



petto ad una mediana. Questo è in accordo col fatto che se la sezione sottile omogenea la si considera come area, per avere simmetria rispetto alla mediana occorre che gli spessori siano uguali in posizione simmetrica ma valutati nella direzione della simmetria. Questo comporta che in generale, se c'è simmetria, gli spessori ortogonali alla linea media in posizione simmetrica non sono uguali tra loro.

Vale inoltre la proprietà: se le masse sono tutte positive e non allineate allora il baricentro è interno all'involuppo delle rette radenti, ovvero sia di quelle rette che toccano la figura senza tagliarla.

Infatti, data una qualunque retta radente x orientata esternamente da una retta y entrante nel



semipiano contenente le masse risulta:

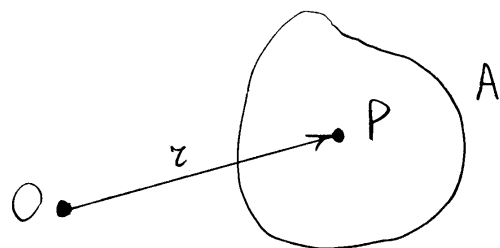
$$S_x > 0 \quad \text{e dunque} \quad y_G = S_x / M > 0.$$

Quindi il baricentro si trova, rispetto all'asse x , dalla parte delle masse. Poiché questo deve valere per ogni retta radente, il baricentro è interno al loro involuppo.

15.3 Tensore di inerzia

Si definisce tensore di inerzia, relativo ad un generico punto O del piano, il seguente tensore doppio:

$$\underline{\underline{J}} = \int_A \mu \{ (P-O) \cdot (P-O) \underline{\underline{I}} - (P-O) \otimes (P-O) \} dA.$$



Si definiscono poi, relativamente allo stesso punto O del piano, il tensore di Eulero:

$$\underline{\underline{y}} = \int_A \mu (P-O) \otimes (P-O) dA,$$

e il momento di inerzia polare:

$$J_O = \int_A \mu (P-O) \cdot (P-O) dA = \int_A \mu r^2 dA,$$

dove r è la distanza del generico punto dal polo O .

Con queste convenzioni il tensore di inerzia risulta:

$$\underline{\underline{J}} = J_O \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{y}}.$$

In componenti, in un sistema cartesiano ortogonale Oxy , risulta:

$$\{ P-O \} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},$$

$$[(P-O) \otimes (P-O)] = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix},$$

$$(P-O) \cdot (P-O) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = x^2 + y^2,$$

$$[(P-O) \cdot (P-O) \underline{\underline{I}}] = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi:

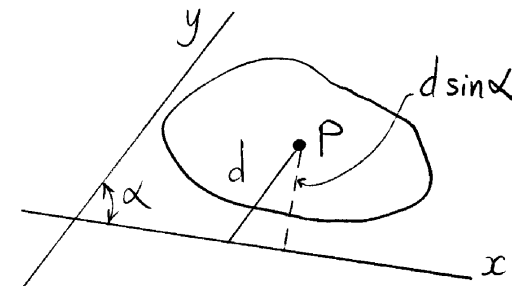
$$[\underline{I}] = \begin{bmatrix} \int_A \mu y^2 dA & -\int_A \mu xy dA \\ -\int_A \mu xy dA & \int_A \mu x^2 dA \end{bmatrix},$$

$$[\underline{y}] = \begin{bmatrix} \int_A \mu x^2 dA & \int_A \mu xy dA \\ \int_A \mu xy dA & \int_A \mu y^2 dA \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \int_A \mu (x^2 + y^2) dA.$$

15.3.1 Momenti di inerzia

Data una retta non orientata x nel piano delle masse ed una direzione y non parallela ad x si definisce momento di inerzia del sistema di masse rispetto all'asse x la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per il quadrato della



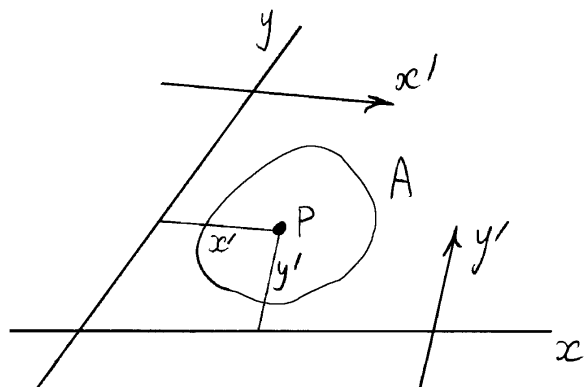
distanza dall'asse x valutata nella direzione y :

$$J_x = \int_A \mu d^2 dA.$$

Se con $\bar{J}_x$ si indica il momento di inerzia che si ottiene valutando le distanze nella direzione ortogonale ad x si ottiene poi:

$$\bar{J}_x = \int_A \mu (d \sin \alpha)^2 dA = J_x \sin^2 \alpha.$$

Analogamente, dati due assi x e y orientati esternamente dalle rette orientate y' e x' rispettivamente, si definisce momento centrifugo del sistema di masse rispetto agli assi x e y la



somma delle singole masse moltiplicate ognuna per le distanze dagli assi x e y valutate, in segno, nella direzione di y' e x' rispettivamente:

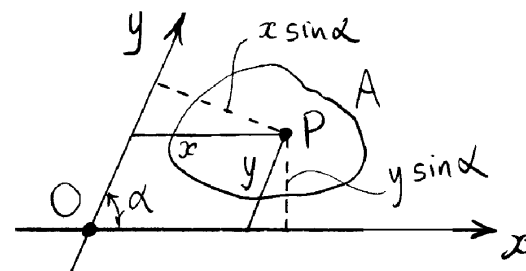
$$I_{xy} = \int_A \mu x' y' dA.$$

Dato un sistema cartesiano Oxy , in generale obliquo, ciascuno degli assi orienta esternamente l'altro. Valutando il momento centrifugo legato a tali orientazioni si ottiene:

$$I_{xy} = \int_A \mu xy dA.$$

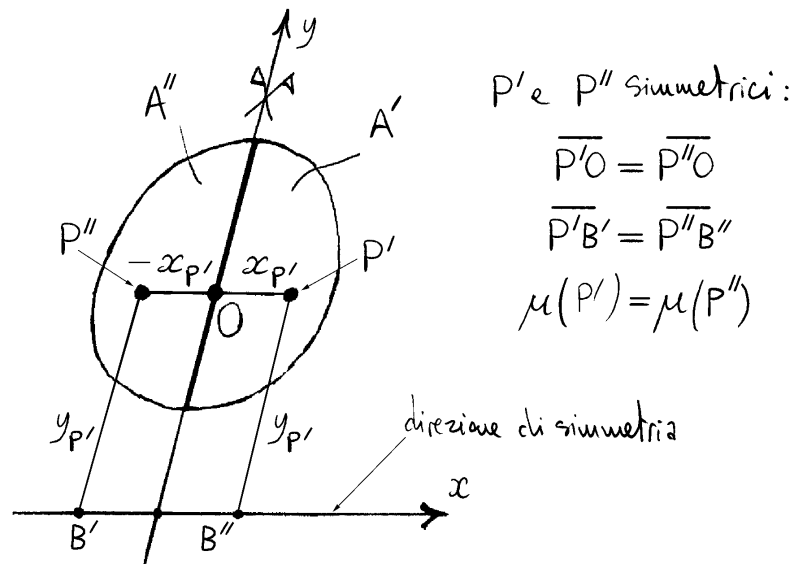
Valutando poi il momento centrifugo $\bar{I}_{xy}$ legato alle direzioni ortogonali agli assi x e y , con le orientazioni indotte da tali assi, si ha:

$$\bar{I}_{xy} = \int_A \mu (x \sin \alpha) (y \sin \alpha) dA = I_{xy} \sin^2 \alpha.$$



Se la sezione possiede un asse di simmetria anche obliqua, il momento centrifugo rispetto all'asse di simmetria e ad un qualunque asse avente la direzione della simmetria e' nullo.

Infatti sia y un asse di simmetria dell'area piana A e sia x un asse avente la direzione di simmetria e si considerino le due aree A' e A'' in cui l'area A e' divisa dall'asse y . Poiche' ad ogni punto P' di A'

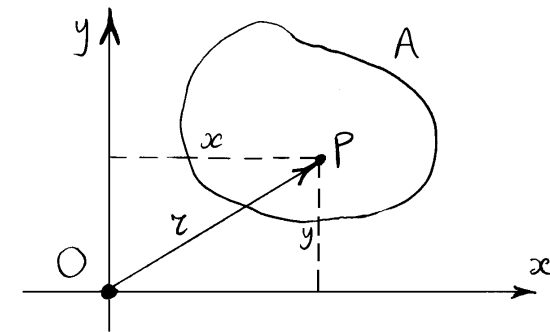


corrisponde il punto simmetrico P'' avente stessa massa, uguale distanza con segno dall'asse x e distanza con segno opposta dall'asse y risulta:

$$\int_{A''} \mu xy dA = - \int_{A'} \mu xy dA,$$

da cui segue immediatamente che $J_{xy} = 0$.

Cio' premesso, le rappresentazioni dei tensori di inerzia $\underline{J}$ e di Eulero $\underline{y}$ e del momento di inerzia



polare J_0 in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy diventano:

$$[\underline{J}] \equiv \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix},$$

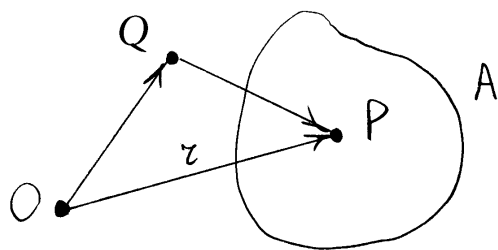
$$[\underline{y}] \equiv \begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix},$$

$$J_0 = J_x + J_y,$$

dove i momenti di inerzia J_x e J_y e il momento centrifugo J_{xy} sono relativi agli assi coordinati.

15.3.2 Formule di trasposizione o del trasporto (teorema di Huyghens-Steiner)

Il tensore di inerzia $\underline{J}$ e il tensore di Eulero $\underline{y}$ costituiscono due campi tensoriali definiti in tutti i punti del piano delle masse.



Se O e Q sono due punti del piano, dalla identità vettoriale:

$$P - O = (P - Q) + (Q - O),$$

risulta:

$$(P - O) \otimes (P - O) = (P - Q) \otimes (P - Q) + (Q - O) \otimes (Q - O) + (P - Q) \otimes (Q - O) + (Q - O) \otimes (P - Q),$$

Ne consegue:

$$\underline{y}(O) = \underline{y}(Q) + M(Q - O) \otimes (Q - O) + \underline{s}(Q) \otimes (Q - O) + (Q - O) \otimes \underline{s}(Q).$$

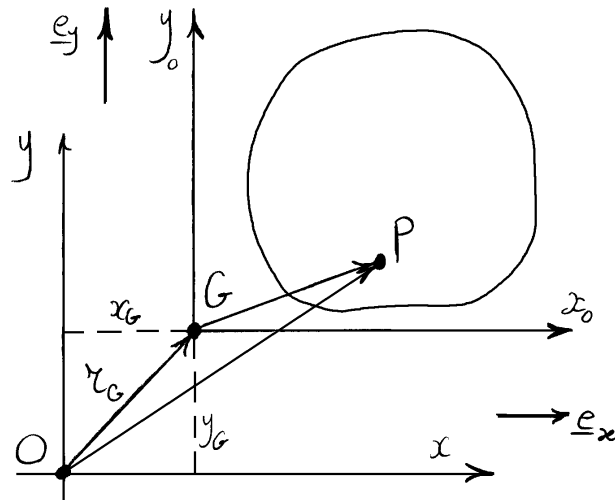
In particolare, se si fa coincidere il punto Q con il baricentro G , si ottiene:

$$\underline{y}(O) = \underline{y}(G) + M(G - O) \otimes (G - O),$$

poiché $\underline{s}(G) = \underline{0}$.

Noti i momenti d'inerzia J_{x_0}, J_{y_0} e il momento centrifugo $J_{x_0 y_0}$ relativi ad una coppia $G x_0 y_0$ di assi baricentrici, componenti del tensore di Eulero $\underline{y}(G)$, e' quindi possibile determinare i momenti J_x, J_y e J_{xy} relativamente ad una coppia di assi Oxy paralleli ai precedenti, componenti del tensore di Eulero $\underline{y}(O)$. A tal fine basta mettere in componenti la relazione precedente, tenendo conto che:

$$\{(G - O)\} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix},$$



$$[(G-O) \otimes (G-O)] = \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix},$$

dove x_G e y_G sono le coordinate del baricentro nel sistema non baricentrico Oxy , risulta:

$$\begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{y_0} & J_{x_0 y_0} \\ J_{x_0 y_0} & J_{x_0} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix}.$$

Si ottengono così le formule di trasposizione per i momenti di inerzia e centrifugo:

$$\begin{cases} J_x = J_{x_0} + M y_G^2 \\ J_y = J_{y_0} + M x_G^2 \\ J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G \end{cases}.$$

Da queste formule è evidente che in un fascio di rette parallele il minimo momento di inerzia si ha rispetto all'asse baricentrico, almeno nel caso di sistemi di masse positive.

Sommando le due formule di trasposizione relative ai momenti di inerzia si ottiene la formula di trasposizione per il momento polare:

$$J_0 = J_G + M r_G^2,$$

dove $r_G^2 = x_G^2 + y_G^2$ è il quadrato della distanza del punto O dal baricentro e dove si è tenuto conto che

$$J_0 = J_x + J_y \quad \text{e} \quad J_G = J_{x_0} + J_{y_0}.$$

15.3.3 Direzioni e momenti principali di inerzia

Le direzioni principali ξ e η del tensore di inerzia sono dette *direzioni principali di inerzia*, il sistema principale $O\xi\eta$ è detto *sistema principale di inerzia*, mentre i valori principali di inerzia coincidono con i momenti di inerzia rispetto agli assi principali J_ξ e J_η , che per tale motivo vengono detti *momenti principali di inerzia*. Nel sistema principale di inerzia la rappresentazione del momento di inerzia polare e dei tensori di inerzia e di Eulero risultano:

$$J_O = J_\xi + J_\eta,$$

$$[\underline{J}] \equiv \begin{bmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\eta \end{bmatrix},$$

$$[\underline{y}] \equiv \begin{bmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\xi \end{bmatrix}.$$

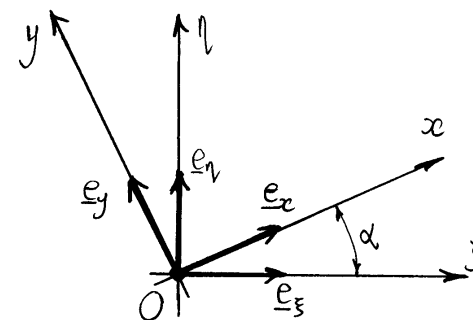
Si noti che nel caso di un sistema di masse positive i momenti principali J_ξ e J_η sono entrambi positivi e il determinante del tensore di inerzia $\underline{J}$ è quindi positivo:

$$\det \underline{J} = J_\xi J_\eta > 0.$$

Ne consegue che in tal caso il tensore di inerzia $\underline{J}$ è simmetrico e definito positivo, in accordo con l'analoga richiesta per la matrice di elasticità.

15.3.4 Formule di rotazione

Siano $O\xi\eta$ e Oxy rispettivamente il sistema principale e un generico sistema di riferimento, entrambi di centro O .



Noti i momenti principali J_ξ e J_η e l'angolo α che l'asse x forma con l'asse ξ , positivo se antiorario, le formule di rotazione forniscono in tal caso i momenti di inerzia J_x e J_y e il momento centrifugo J_{xy} in funzione dell'angolo α :

$$\begin{cases} J_x = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \sin^2 \alpha \\ J_y = J_\xi \sin^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \alpha \\ J_{xy} = (J_\xi - J_\eta) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}.$$

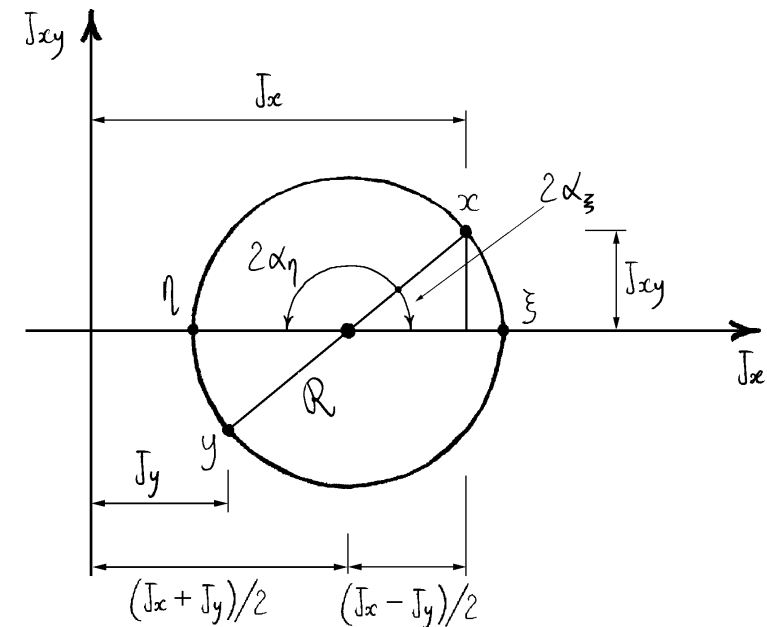
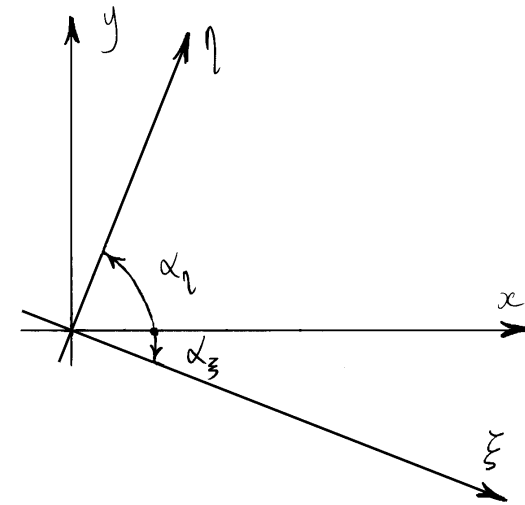
15.3.5 Circonferenza di Mohr

Per costruire la circonferenza a partire dai momenti di inerzia J_x e J_y e dal momento centrifugo J_{xy} relativi ad un generico sistema Oxy occorre considerare che il punto x è individuato dalla coppia (J_x, J_{xy}) mentre il punto y dalla coppia $(J_y, -J_{xy})$.

Unendo i due punti si ottiene un diametro, la sua intersezione con l'asse delle ascisse determina il centro e infine l'intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse individua i punti ξ e η corrispondenti degli assi principali. Tenendo poi conto che le rotazioni nel piano delle masse sono concordi in segno e pari alla metà di quelle nel piano di Mohr, è possibile individuare le direzioni principali ξ e η a partire dagli assi x e y .

Dalla circonferenza si ottiene inoltre che:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \\ C = \frac{J_x + J_y}{2} \end{cases},$$



e si riottengono i momenti principali di inerzia:

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = c \pm R.$$

Sempre dalla circonferenza si ottiene infine che:

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y},$$

dove α_0 indica uno qualsiasi dei due angoli che individuano le direzioni principali di inerzia.

Si noti che la circonferenza di Mohr associata ad un tensore di inerzia è sempre situata dalla parte positiva dell'asse dei momenti di inerzia, essendo questi sempre positivi.

15.3.6 Raggi di inerzia

Un momento di inerzia J_x , valutato rispetto ad un generico asse x , ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato. Se lo si divide per la massa totale e si estrae la radice quadrata si ottiene una quantità omogenea ad una lunghezza che prende il

nome di raggio di inerzia (relativo all'asse x):

$$l_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}}.$$

Il significato fisico di raggio di inerzia l_x è quello di distanza dall'asse x a cui occorre concentrare la massa totale M per ottenere lo stesso momento di inerzia rispetto all'asse x .

Dividendo le due formule di trasposizione e le due formule di rotazione relative ai momenti di inerzia per la massa totale M si ottengono le analoghe formule di trasposizione:

$$\left\{ \begin{matrix} l_x^2 = l_{x_0}^2 + y_G^2 \\ l_y^2 = l_{y_0}^2 + x_G^2 \end{matrix} \right.$$

e di rotazione:

$$\left\{ \begin{matrix} l_x^2 = l_{\xi}^2 \cos^2 \alpha + l_{\eta}^2 \sin^2 \alpha \\ l_y^2 = l_{\xi}^2 \sin^2 \alpha + l_{\eta}^2 \cos^2 \alpha \end{matrix} \right.$$

per i raggi di inerzia.

15.3.7 Ellisse centrale di inerzia (o ellisse di Culmann)

L'ellisse centrale di inerzia o ellisse di Culmann è la curva di equazione:

$$M (P-G) \cdot \underline{J}^{-1} (P-G) = 1,$$

dove $\underline{J}^{-1}$ è l'inverso del tensore di Eulero relativo al baricentro.

Infatti, in componenti nel sistema principale Gxy risulta:

$$[\underline{J}^{-1}] \equiv \begin{bmatrix} 1/J_y & 0 \\ 0 & 1/J_x \end{bmatrix}, \quad \{P-G\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},$$

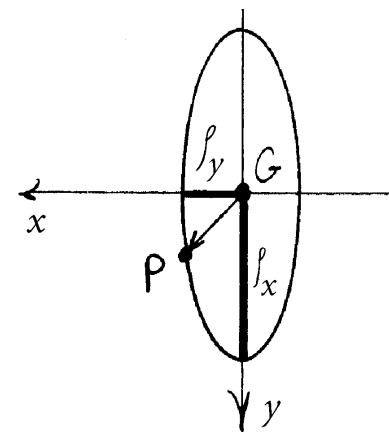
e l'equazione (12) diventa:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/J_y & 0 \\ 0 & 1/J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 1.$$

Poiché $M/J_y = 1/\rho_y^2$ e $M/J_x = 1/\rho_x^2$ si ottiene infine:

$$\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1.$$

Tale relazione rappresenta l'equazione di un'ellisse, che ha quali semidiametri ρ_y lungo l'asse x e ρ_x lungo l'asse y .



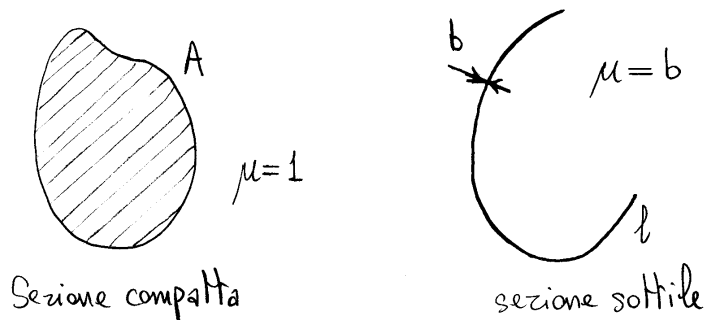
Occorre prestare attenzione al fatto che il raggio di inerzia ρ_x rispetto all'asse x è calcolato con le distanze valutate nella direzione dell'asse y . Coerentemente con tale circostanza ρ_x coincide con il semidiametro lungo l'asse y . Un'analoga considerazione vale per il raggio di inerzia ρ_y rispetto all'asse y .

Capitolo 16

Sezioni omogenee

Nel seguito si considerano delle sezioni omogenee. Questo significa che i calcoli vengono fatti a meno del modulo di Young, che nel nostro caso rappresenta la distribuzione di massa. In definitiva si considera una "geometria delle aree", in cui la "massa" è costituita dalla stessa area e la distribuzione di massa è adimensionale e vale 1. Ne risulta che i momenti statici hanno dimensione L^3 e i momenti di inerzia, centrifughi e polari L^4 .

Nel caso delle sezioni sottili la lunghezza della generica corda si concentra, approssimativamente, sulla



linea media. Ne risulta che tale caso viene studiato come quello di una massa distribuita su di una linea piana l con distribuzione di massa pari allo spessore b . Quindi la distribuzione di massa, in tal caso su una linea, ha la dimensione di una lunghezza.

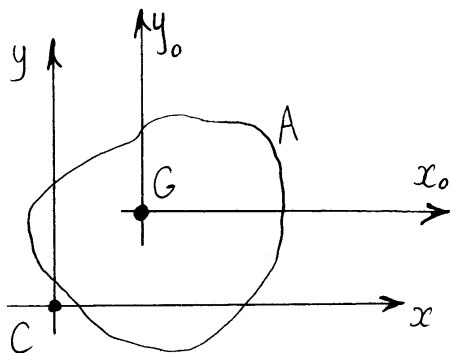
Scopo dello studio di una sezione è innanzitutto quello della determinazione del baricentro, del sistema principale di inerzia baricentrico e del calcolo dei momenti principali di inerzia baricentrici.

La conoscenza del baricentro e della massa totale permette di determinare il momento statico rispetto ad un qualunque asse, grazie al teorema di Varignon. La conoscenza del sistema e dei momenti principali di inerzia permette di determinare i momenti di inerzia e centrifughi di coppie di assi ortogonali generici, grazie alle formule di rotazione e del trasporto.

Nell'applicare le formule del trasporto si tenga conto che il momento di inerzia diminuisce se da

assi non baricentrici si passa ad assi baricentrici mentre aumenta nel caso contrario. Si tenga poi conto che è indifferente riferirsi alle coordinate del baricentro (x_G, y_G) nel sistema Cxy non baricentrico oppure alle coordinate (x_C, y_C) del punto C nel sistema baricentrico Gx_0y_0 , poiché tali coordinate sono uguali in modulo e opposte in segno e conducono pertanto agli stessi risultati:

$$x_G^2 = x_C^2, \quad y_G^2 = y_C^2, \quad x_G y_G = x_C y_C.$$



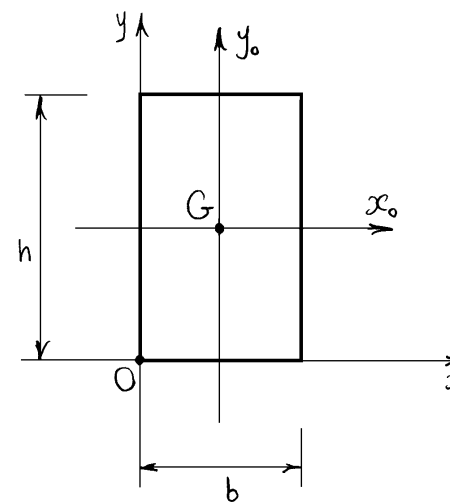
16.1 Sezioni tipiche

16.1.1 Rettangolo

Un rettangolo ha due assi di simmetria. Il baricentro coincide con la loro intersezione e i due assi sono principali di inerzia. Se x_0 e y_0 rappresentano gli assi principali di inerzia si ha quindi:

$$J_{x_0 y_0} = 0.$$

Si calcoli innanzitutto il momento di inerzia rispetto



$$A = bh$$

$$x_G = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_{y_0} = \frac{b^3h}{12}$$

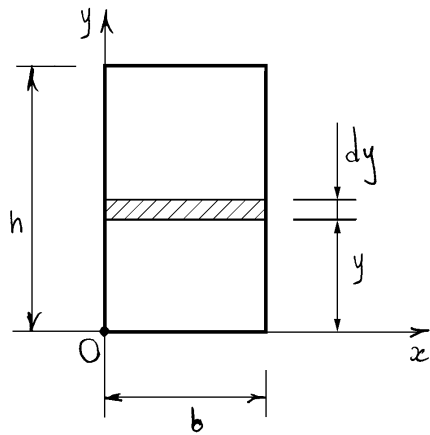
$$J_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$J_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

to ad una base :

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h b y^2 dy = \frac{b h^3}{3}.$$



Utilizzando le formule del trasporto e' poi possibile calcolare il momento principale di inerzia J_{x_0} e il momento centrifugo J_{xy} rispetto alle basi:

$$J_{x_0} = \frac{b h^3}{3} - (b h) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12},$$

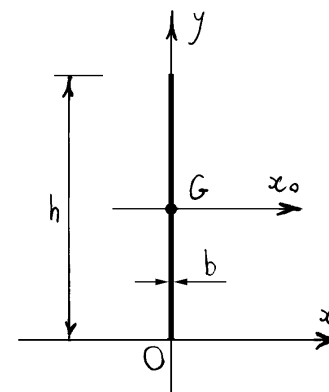
$$J_{xy} = 0 + (b h) \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Invertendo infine il ruolo di base e altezza si hanno le analoghe formule per J_y e J_{y_0} :

$$J_y = \frac{b^3 h}{3}, \quad J_{y_0} = \frac{b^3 h}{12}.$$

16.1.2 Rettangolo sottile

Nel caso di un rettangolo sottile, il momento di inerzia J_y , relativo all'asse di simmetria che contiene la linea media, e' nullo, se si concentra lo spessore lungo



$$A = b h \quad J_{x_0} = \frac{b h^3}{12}$$

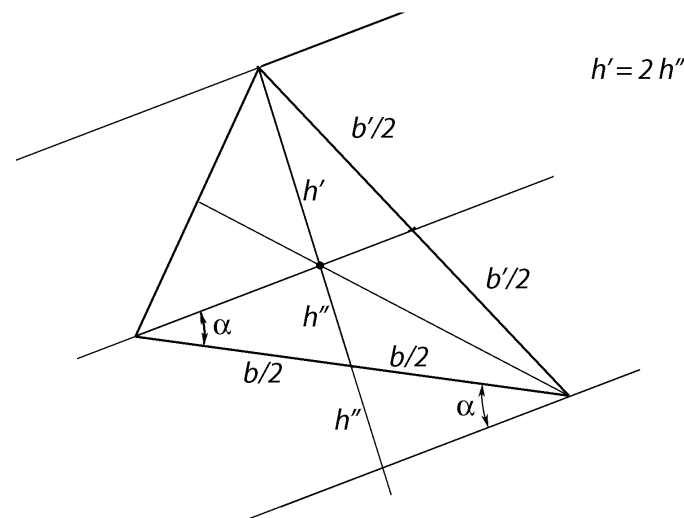
$$y_G = \frac{h}{2} \quad J_y = 0$$

$$J_x = \frac{b h^3}{3}$$

la linea media. E' chiaro che per un effettivo rettangolo sottile la quantità $b^3h/12$, anche se piccola, e' l'unica che contribuisce al momento d'inerzia J_y . In tal caso si potrà ritenere $J_y = 0$ solo se gli effetti flessionali che ne dipendono sono trascurabili. Se invece il rettangolo sottile fa parte di una sezione sottile complessa la quantità $b^3h/12$ e' solo una delle tante che contribuisce al calcolo delle quantità inerziali e come tale e' trascurabile se $b \ll h$, indipendentemente dagli effetti che tale quantità avrebbe per il singolo rettangolo.

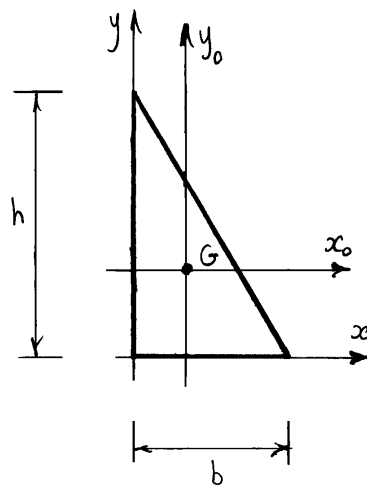
16.1.3 Triangolo rettangolo

Poiche' le mediane di un triangolo sono assi di simmetria obliqua, nel loro punto di incontro si trova il baricentro. La mediana viene divisa nelle proporzioni $1/3$ e $2/3$, come si può dedurre dallo schema seguente.



Ne consegue che nel sistema di riferimento Oxy individuato dalle basi, le coordinate del baricentro valgono:

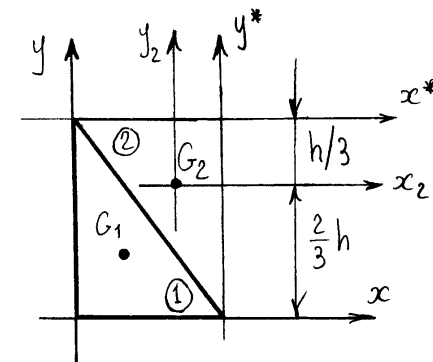
$$x_G = \frac{b}{3} \quad , \quad y_G = \frac{h}{3} \quad .$$



$$\begin{aligned} J_{x_0 y_0} &= -\frac{b^2 h^2}{72} & J_{x_0} &= \frac{bh^3}{36} \\ J_{xy} &= \frac{b^2 h^2}{24} & J_{y_0} &= \frac{b^3 h}{36} \\ A &= \frac{bh}{2} & J_x &= \frac{bh^3}{12} \\ x_G &= \frac{b}{3} & J_y &= \frac{b^3 h}{12} \\ y_G &= \frac{h}{3} \end{aligned}$$

Si tenga ora conto che dalla somma di due triangoli rettangoli di uguali dimensioni si ottiene un rettangolo di uguale base e altezza. Con le convenzioni di figura, si ha:

$$J_x^{①} = J_{x^*}^{②} \quad , \quad J_{xy}^{①} = J_{x^* y^*}^{②} \quad .$$



Tenendo allora conto che le quantità relative al rettangolo, già note, possono calcolarsi sommando i contributi dovuti ai due triangoli si ha:

$$\begin{aligned} \frac{bh^3}{3} &= 2J_x - \left(\frac{bh}{2}\right) \left(\frac{h}{3}\right)^2 + \left(\frac{bh}{2}\right) \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow J_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{4}{18} \right) bh^3 = \frac{bh^3}{12} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b^2 h^2}{4} &= 2J_{xy} - \left(\frac{bh}{2}\right) \frac{b}{3} \frac{h}{3} + \left(\frac{bh}{2}\right) \frac{2}{3} b \frac{2}{3} h \Rightarrow \\ \Rightarrow J_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{4}{18} \right) b^2 h^2 = \frac{b^2 h^2}{24} \quad , \end{aligned}$$

e dunque:

$$y_G = \frac{S_x}{A} = R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}.$$

Poiché è sempre $\tan \vartheta > \vartheta$ (per $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$)
risulta:

$$\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} > \cos \vartheta \Rightarrow y_G > R \cos \vartheta,$$

e ne consegue che G è interno all'involuppo delle
rette radenti, come deve essere.

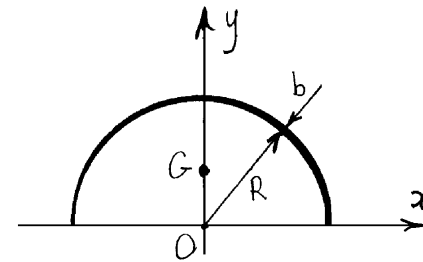
Infine risulta:

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\vartheta} b R^3 \cos^2 \alpha \, d\alpha = \\ &= 2 b R^3 \int_0^{\vartheta} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = b R^3 \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right), \end{aligned}$$

$$I_y = 2 \int_0^{\vartheta} b R^3 \sin^2 \alpha \, d\alpha =$$

$$= 2 b R^3 \int_0^{\vartheta} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = b R^3 \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right).$$

Come casi particolari si ottengono la semicircon-
ferenza sottile ponendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

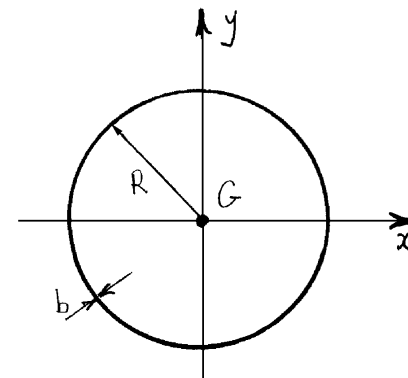


$$A = \pi R b$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi b R^3}{2}$$

e la circonferenza sottile ponendo $\vartheta = \pi$:



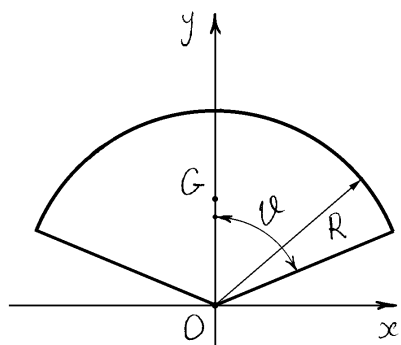
$$A = 2\pi R b$$

$$I_x = I_y = \pi b R^3$$

16.1.5 Settore circolare

Anche il settore circolare possiede un asse di simmetria, che risulta quindi principale di inerzia e contiene il baricentro. Tenendo conto che il settore può pensarsi suddiviso in triangoli infinitesimi che hanno baricentro a $(2/3)R$ dal centro del settore, il suo baricentro può calcolarsi concentrando l'area dei triangoli nel loro baricentro ottenendo così un arco circolare di raggio $(2/3)R$:

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta},$$



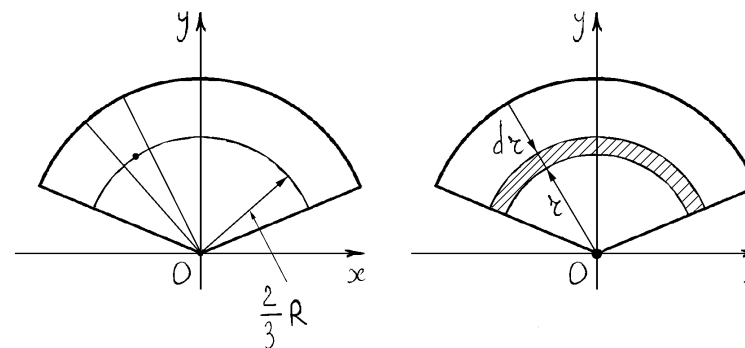
$$A = \vartheta R^2$$

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

$$J_x = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

$$J_y = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

dove ϑ è ancora la semiampiezza e avendo anche in questo caso assunto un sistema di riferimento Oxy con l'asse y coincidente con l'asse di simmetria e il punto O con il centro del settore.

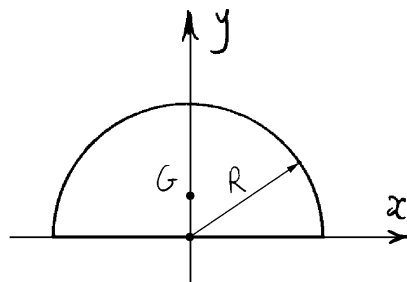


I momenti di inerzia J_x e J_y possono calcolarsi dividendo il settore in archi circolari di spessore dr e di raggio r variabile da 0 a R :

$$J_x = \int_0^R r^3 \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) dr = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right),$$

$$J_y = \int_0^R r^3 \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) dr = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right).$$

Come casi particolari si ottengono il semicerchio ponendo $\vartheta = \pi/2$:

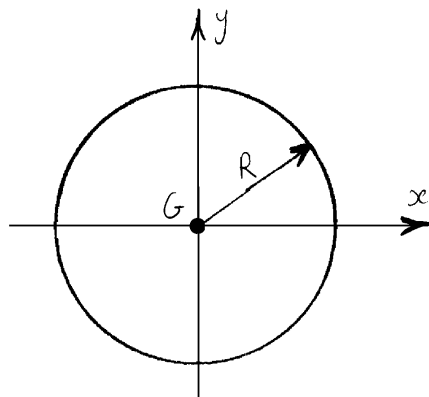


$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_G = \frac{4}{3\pi} R$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

e il cerchio ponendo $\vartheta = \pi$:



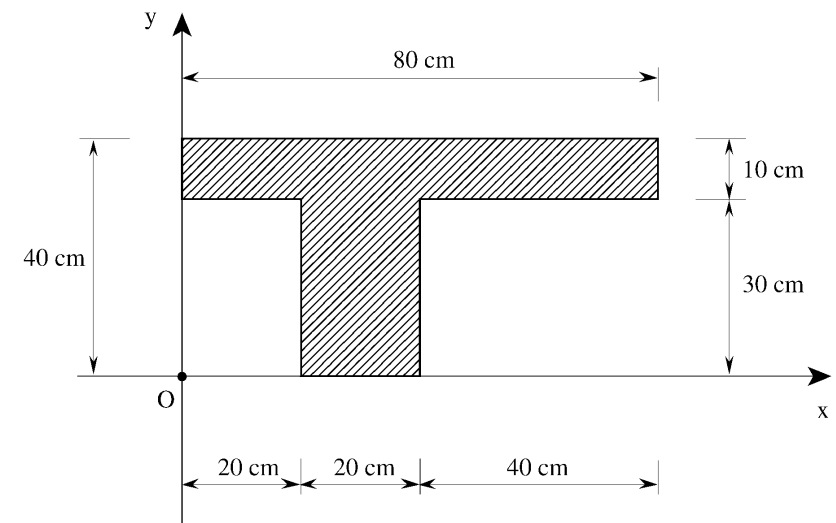
$$A = \pi R^2$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

16.2 Sezioni composte di parti semplici

Le quantità inerziali sono additive, ovvero si possono calcolare sommando i contributi delle singole parti che compongono la sezione. Se allora la sezione è composta di parti semplici, delle quali siano note le quantità inerziali, questa proprietà permette di calcolare le quantità inerziali di tutta la sezione.

16.2.1 Esempio 1: Sezione composta di due rettangoli



$$A^{①} = 10 \times 80 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A^{②} = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A = 1400 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{①} = A^{①} \times 35 = 28000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{②} = A^{②} \times 15 = 9000 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 37000 \text{ cm}^3$$

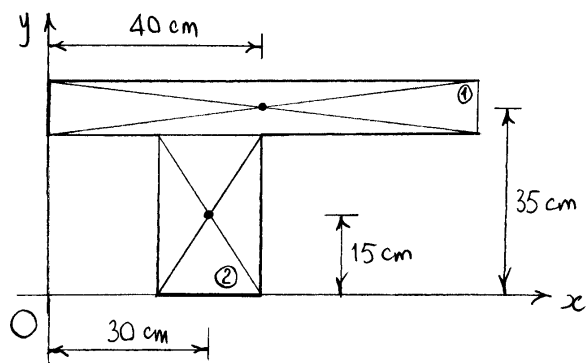
$$S_y^{①} = A^{①} \times 40 = 32000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{②} = A^{②} \times 30 = 18000 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 50000 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 26.43 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 35.71 \text{ cm}$$



$$J_{x_0}^{①} = \frac{80 \times 10^3}{12} + A^{①} (35 - y_G)^2 = 65442 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0}^{②} = \frac{20 \times 30^3}{12} + A^{②} (15 - y_G)^2 = 123367 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0} = 188810 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0}^{①} = \frac{10 \times 80^3}{12} + A^{①} (40 - x_G)^2 = 441361 \text{ cm}^4$$

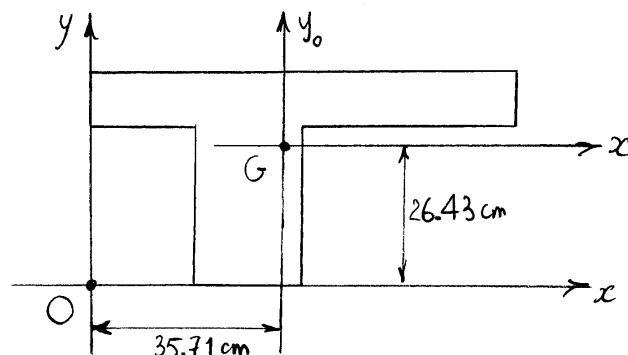
$$J_{y_0}^{②} = \frac{30 \times 20^3}{12} + A^{②} (30 - x_G)^2 = 39592 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0} = 480952 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{①} = A^{①} (35 - y_G)(40 - x_G) = 29388 \text{ cm}^4$$

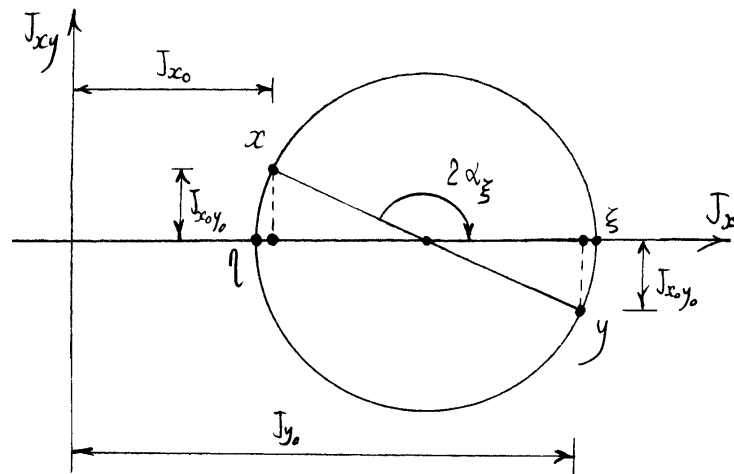
$$J_{x_0 y_0}^{②} = A^{②} (15 - y_G)(30 - x_G) = 39184 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0} = 68571 \text{ cm}^4$$



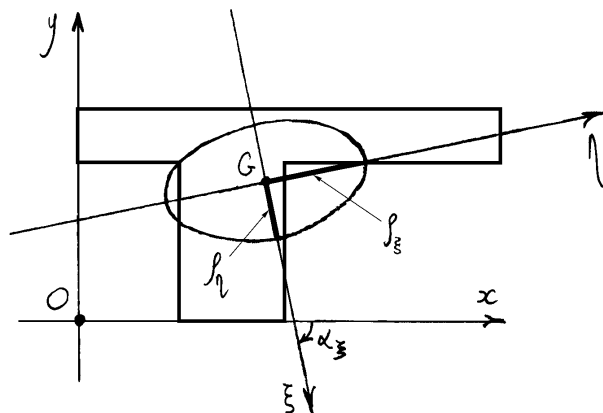
$$\left. \begin{array}{l} J_z \\ J_\eta \end{array} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4 J_{x_0 y_0}^2}$$

$$= \begin{cases} 496247 \text{ cm}^4 \\ 173515 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



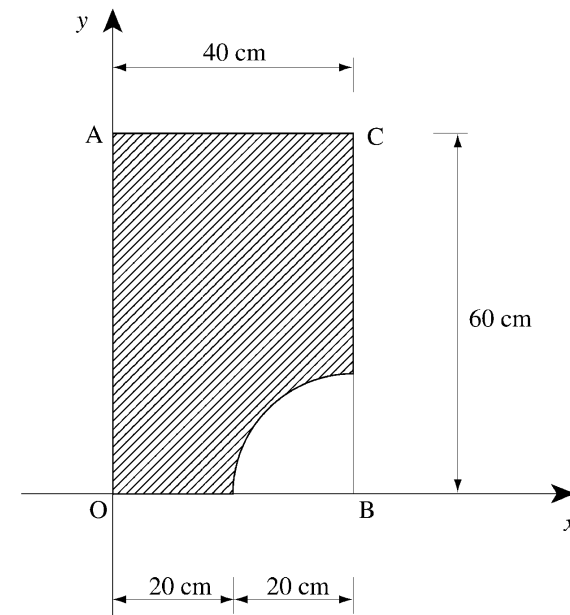
$$\begin{cases} l_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 18.83 \text{ cm} \\ l_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 11.13 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\alpha_{\xi} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x_0} - J_{\xi}}{J_{x_0} y_0} \right\} = -77.43^{\circ}$$



16.2.2 Esempio 2: Sezione rettangolare con un intaglio

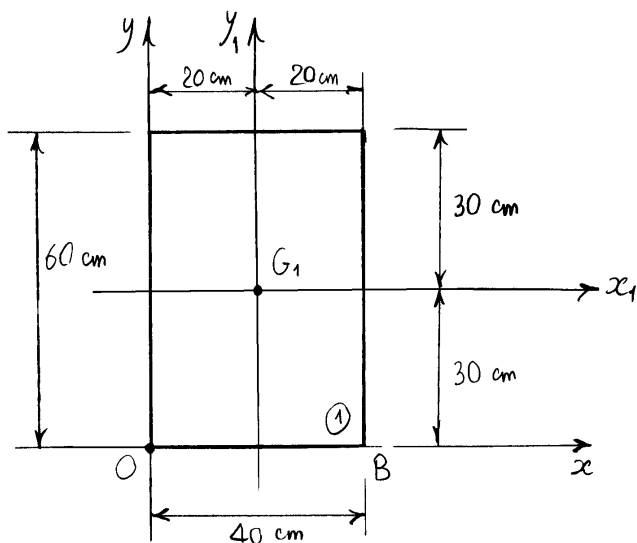
La sezione seguente non è la somma ma la differenza di due parti semplici, una rettangolare e una in forma di settore circolare di semiampiezza pari a $\pi/4$ radianti. Quindi tutti i contributi del settore circolare



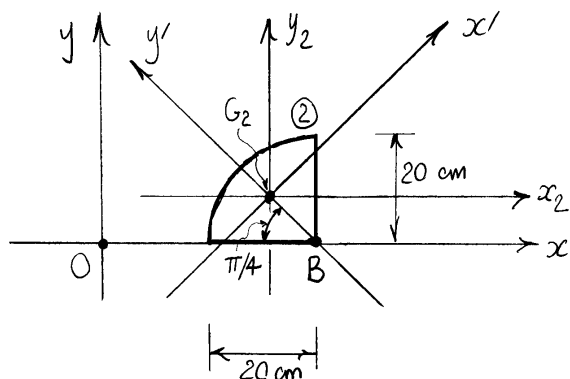
vanno sottratti da quelli del rettangolo. In tali casi a volte si parla di masse negative e i calcoli si svolgono, in conseguenza, associando una distribuzione di massa -1 alla parte che va sottratta.

Questo ultimo modo di procedere è senz'altro indicato se si deve scrivere un programma di calcolo. Nel caso si debba manualmente risolvere un problema è più indicato sottrarre direttamente le quantità, come fatto nel seguito.

Rettangolo



Settore circolare (da sottrarre)



$$A^{①} = 40 \times 60 = 2400 \text{ cm}^2$$

$$A^{②} = \frac{\pi}{4} 20^2 = 314.16 \text{ cm}^2$$

$$A = A^{①} - A^{②} = 2085.8 \text{ cm}^2$$

$$\overline{BG}_2 = \frac{2}{3} 20 \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = 12.00 \text{ cm}$$

$$\begin{cases} x_{G1} = 20 \text{ cm} \\ y_{G1} = 30 \text{ cm} \end{cases}, \begin{cases} x_{G2} = 40 - \overline{BG}_2 \cos \frac{\pi}{4} = 31.51 \text{ cm} \\ y_{G2} = \overline{BG}_2 \cos \frac{\pi}{4} = 8.488 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_x^{①} = A^{①} y_{G1} = 72000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{②} = A^{②} y_{G2} = 2666.7 \text{ cm}^3$$

$$S'_x = S_x^{①} - S_x^{②} = 69333 \text{ cm}^3 \Rightarrow y_G = \frac{S'_x}{A} = 33.24 \text{ cm}$$

$$S_y^{①} = A^{①} x_{G1} = 48000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{②} = A^{②} x_{G2} = 9899.7 \text{ cm}^3$$

$$S'_y = S_y^{①} - S_y^{②} = 38100 \text{ cm}^3 \Rightarrow x_G = \frac{S'_y}{A} = 18.27 \text{ cm}$$

$$J_{x'}^{(2)} = \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \right\} - A^{(2)} \overline{BG}_2^2 = 6145.2 \text{ cm}^4$$

$$J_{y'}^{(2)} = \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \right\} = 11416 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{(1)} = \frac{40 \times 60^3}{12} + A^{(1)} (y_G - y_{G1})^2 = 745190 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{(2)} = J_{x'}^{(2)} \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + J_{y'}^{(2)} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (y_G - y_{G2})^2 = 201250 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o} = J_{x_o}^{(1)} - J_{x_o}^{(2)} = 543940 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{(1)} = \frac{60 \times 40^3}{12} + A^{(1)} (x_G - x_{G1})^2 = 327210 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{(2)} = J_{x'}^{(2)} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + J_{y'}^{(2)} \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (x_G - x_{G2})^2 = 63898 \text{ cm}^4$$

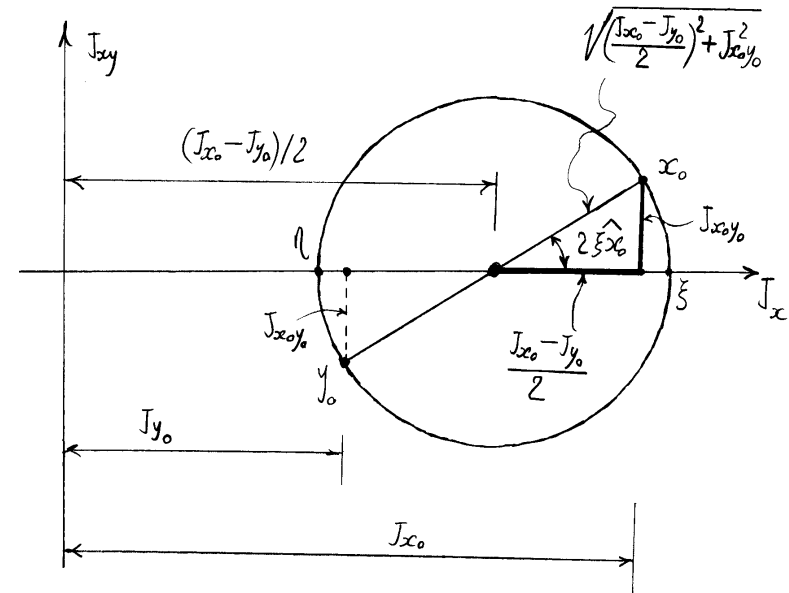
$$J_{y_o} = J_{y_o}^{(1)} - J_{y_o}^{(2)} = 263320 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{(1)} = A^{(1)} (x_G - x_{G1}) (y_G - y_{G1}) = -13482 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{(2)} = (J_{x'}^{(2)} - J_{y'}^{(2)}) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (x_G - x_{G2}) (y_G - y_{G2}) = -100360 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o} = J_{x_o y_o}^{(1)} - J_{x_o y_o}^{(2)} = 86880 \text{ cm}^4$$

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_o} - J_{y_o}}{2}\right)^2 + J_{x_o y_o}^2} = \left\{ \begin{matrix} 568660 \text{ cm}^4 \\ 238600 \text{ cm}^4 \end{matrix} \right.$$



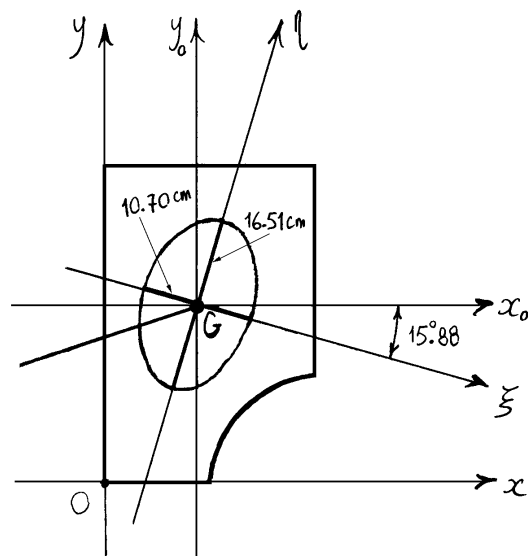
$$\tan(2\hat{\xi}_{x_o}) = \frac{J_{x_o y_o}}{(J_{x_o} - J_{y_o})/2} \Rightarrow \alpha_{\xi} = 15.88^\circ \text{ (orario)}$$

oppure:

$$\alpha_{\xi} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x_o} - J_{\xi}}{J_{x_o y_o}} \right\} = -15.88^\circ.$$

$$l_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 16.51 \text{ cm}$$

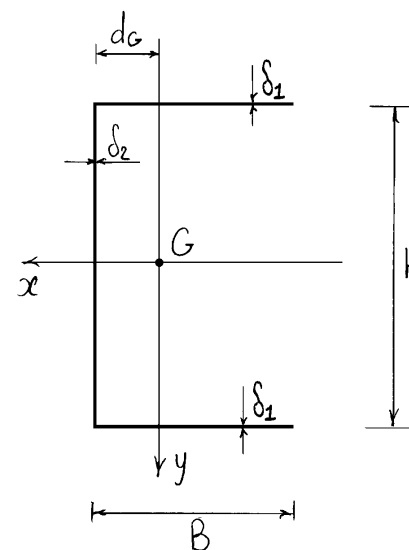
$$l_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 10.70 \text{ cm}$$



16.2.3 La sezione a C sottile

La sezione a C ha un asse di simmetria che contiene il baricentro ed è principale di inerzia.

La sezione risulta inoltre composta di tre rettangoli sottili. Si fa riferimento alla linea media della sezione sottile dove viene concentrato lo spessore.



$$A = 2\delta_1 B + \delta_2 H$$

Determinazione del baricentro ($S_y = 0$):

$$H\delta_2 d_G - 2B\delta_1 \left(\frac{B}{2} - d_G \right) = 0 \implies$$

$$\Rightarrow d_G = \frac{\delta_1 B^2}{2\delta_1 B + H\delta_2}.$$

Momenti di inerzia:

$$J_x = \frac{\delta_2 H^3}{12} + 2(\delta_1 B) \left(\frac{H}{2}\right)^2,$$

$$J_y = 2 \left\{ \frac{\delta_1 B^3}{12} + (\delta_1 B) \left(\frac{B}{2} - d_G\right)^2 \right\} + \delta_2 H d_G^2,$$

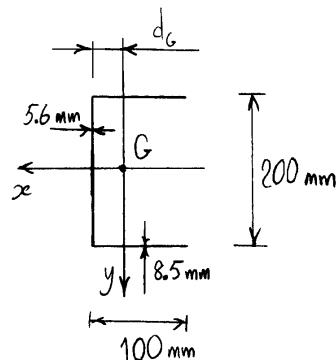
↓
termine di trasporto

cioè:

$$J_x = \frac{\delta_1 B H^2}{2} + \frac{\delta_2 H^3}{12},$$

$$J_y = \frac{\delta_1 B^3}{6} + 2\delta_1 B \left(\frac{B}{2} - d_G\right)^2 + \delta_2 H d_G^2.$$

Per esempio:



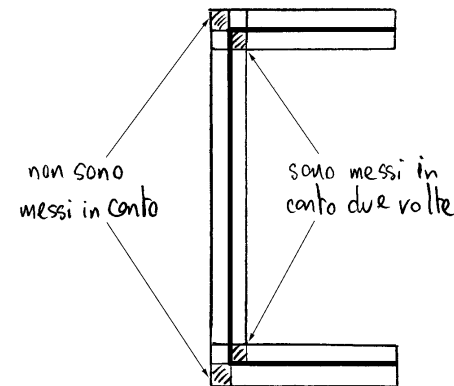
$$A = 2820 \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

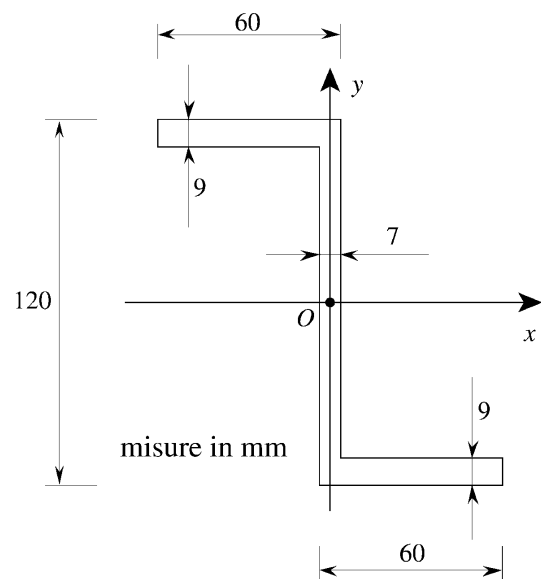
$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Si noti che l'approssimazione di sezione sottile ha condotto a tenere conto due volte di due rettangoli di dimensione $\frac{\delta_1}{2} \times \frac{\delta_2}{2}$ e a non tenere conto di altri due rettangoli di uguali dimensioni. Inoltre nel calcolo dei momenti di inerzia si sono trascurati i momenti $b\delta_1^3/12$ e $H\delta_2^3/12$ relativi agli assi baricentrici dei singoli rettangoli, quantità che sono piccole rispetto ai termini di trasporto.

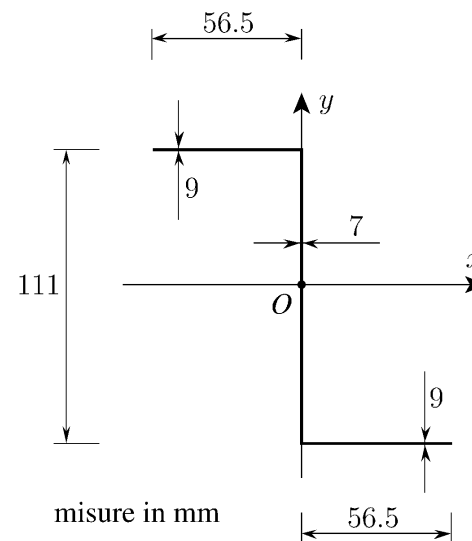


16.2.4 Sezione a Z



Si risolve la sezione concentrando lo spessore sulla linea media. La figura presenta una simmetria polare di polo O (invarianza per rotazioni di 180° attorno al punto O). Questa condizione è sufficiente per affermare che il baricentro coincide con il polo O , poiché il suo vettore dei momenti statici :

$$\underline{s}(O) = \int_A (\mathbf{P}-O) dA ,$$



è senz'altro nullo dato che ad ogni vettore posizione $(\mathbf{P}-O)$ ne corrisponde uno uguale ed opposto per la condizione di polar simmetria.

Quantità inerziali:

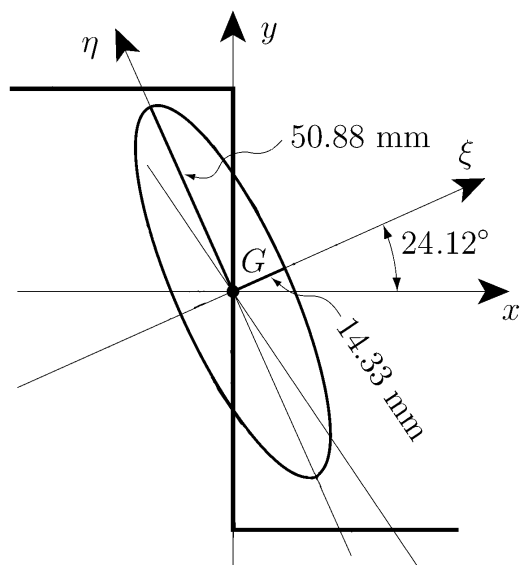
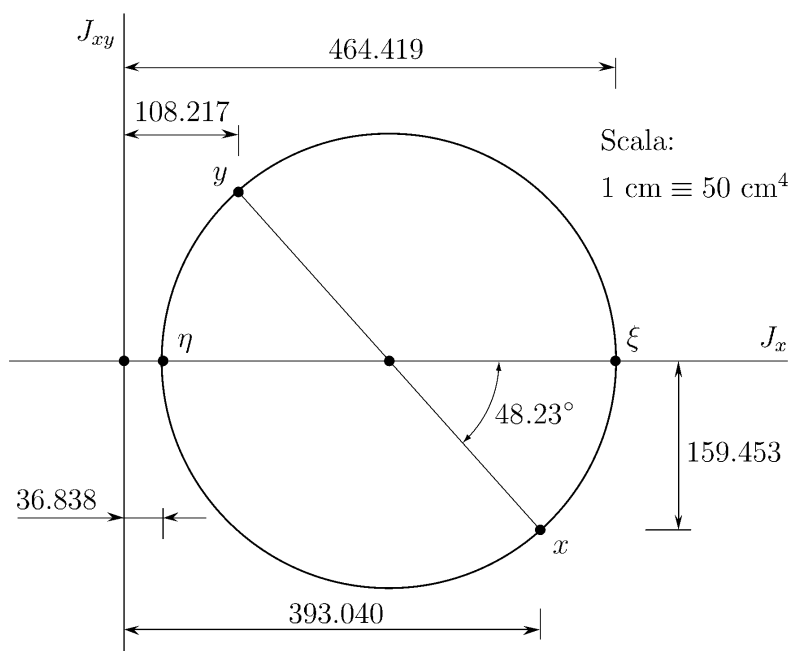
$$A = 17.94 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_\xi = 48^\circ.23 \\ \alpha_\xi = 24^\circ.12 \end{cases}$$

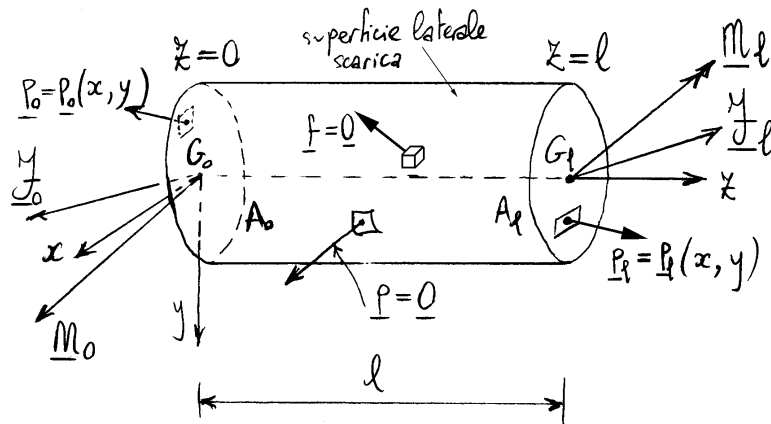


Capitolo 17

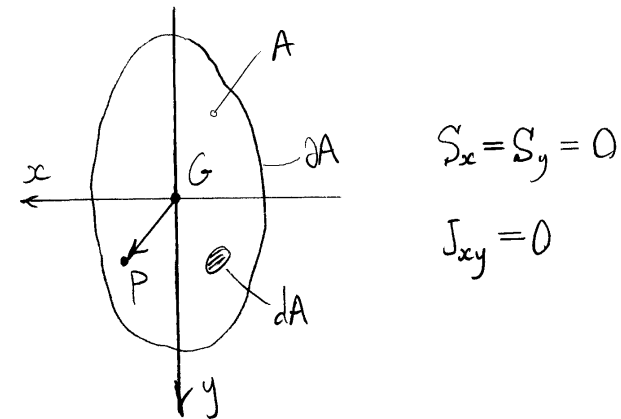
Problema di Saint-Venant

17.1 Schematizzazione della trave nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità

Quale modello semplificato di trave, ci proponiamo di studiare, nell'ambito della teoria generale dell'elasticità, un corpo cilindrico non vincolato e caricato solo nelle due sezioni di estremità. Geometricamente, un corpo cilindrico rappresenta una trave ad asse rettilineo ed a sezione costante.



La linea d'asse della trave viene scelta coincidente con il baricentro, mentre gli assi x e y sono scelti coincidenti con gli assi principali di inerzia. Questo significa che i momenti statici S_x e S_y , così come il momento centrifugo J_{xy} , sono nulli.



Poiché la trave non è vincolata occorre imporre le condizioni di equilibrio globale. L'equilibrio alla traslazione richiede:

$$\int_{A_0} \mathbf{p}_0 dA + \int_{A_l} \mathbf{p}_l dA = \mathbf{0},$$

da cui:

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_l = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F}_0$ e $\mathbf{F}_l$ sono le risultanti globali sulla sezione di prima e, rispettivamente, di seconda estremità. L'equilibrio alla rotazione richiede invece:

$$\int_{A_0} (\mathbf{P} - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{p}_0 dA + \int_{A_l} (\mathbf{P} - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{p}_l dA = \mathbf{0}.$$

Tenendo conto che su A_l risulta:

$$P - G_0 = (P - G_\ell) + (G_\ell - G_0).$$

si ha infine:

$$\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_\ell + (G_\ell - G_0) \times \mathcal{F}_\ell = \mathbf{0},$$

dove $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_\ell$ sono i momenti risultanti globali sulla sezione di prima e, rispettivamente, di seconda estremità. Ne risulta che la risultante $\mathcal{F}_0$ e il momento risultante $\mathcal{M}_0$ agenti sulla base di prima estremità dipendono dalla risultante $\mathcal{F}_\ell$ e dal momento risultante $\mathcal{M}_\ell$ agenti sulla base di seconda estremità:

$$\mathcal{F}_0 = -\mathcal{F}_\ell,$$

$$\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_\ell - (G_\ell - G_0) \times \mathcal{F}_\ell.$$

17.2 Caratteristiche della sollecitazione

Siano F_x , F_y e F_z le componenti della risultante $\mathcal{F}_\ell$ agente sulla sezione di seconda estremità e, analogamente, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ e $\mathcal{M}_z$ le componenti del momento risultante $\mathcal{M}_\ell$. L'equilibrio del generico tronco di trave compreso tra la sezione retta generica e la sezione di seconda estremità conduce ai seguenti valori delle caratteristiche della sollecitazione:

$$N = F_z,$$

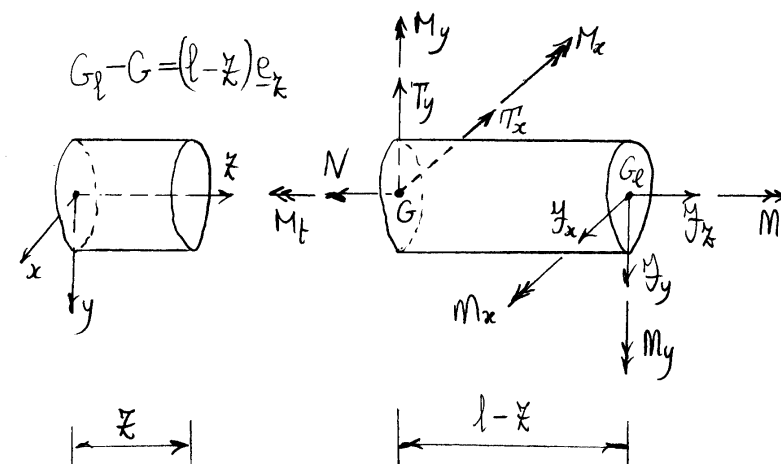
$$M_t = \mathcal{M}_z,$$

$$M_x = \mathcal{M}_x - F_y (\ell - z),$$

$$T_x = F_x,$$

$$M_y = \mathcal{M}_y + F_x (\ell - z),$$

$$T_y = F_y.$$



Si noti che lo sforzo normale e le componenti di taglio sono costanti lungo l'asse della trave e che tali valori uguagliano le corrispondenti componenti F_z , F_x e F_y della forza risultante agente sulla base di seconda estremità. Analogamente, il momento torcente è costante lungo l'asse della trave e tale valore uguaglia la corrispondente componente $\mathcal{M}_z$ del momento risultante agente sulla base di seconda estremità. Le uniche caratteristiche della sollecitazione in generale variabili (linearmente) lungo l'asse della trave sono dunque le componenti del momento flettente, componenti che per i risultati precedenti possono porsi nella forma:

$$M_x = \mathcal{M}_x - F_y (\ell - z),$$

$$M_y = \mathcal{M}_y + F_x (\ell - z).$$

Ne risulta che occorre tenere distinte dalle caratteristiche della sollecitazione le sole componenti $\mathcal{M}_x$ e $\mathcal{M}_y$ del momento risultante $\mathcal{M}_\ell$ agente sulla base di seconda estremità.

17.3 Principio e ipotesi di Saint-Venant

Il problema così impostato si presenta di difficile soluzione se non si pongano limiti alla distribuzione dei carichi nelle due sezioni di estremità. Scorre, a tale proposito, il principio di Saint-Venant. Tale principio afferma che due diverse distribuzioni di forze sulle sezioni di estremità aventi uguali risultante e momento risultante provocano effetti sensibilmente differenti solo in prossimità delle sezioni di estremità. Può essere allora possibile scegliere, fra le diverse soluzioni corrispondenti a distribuzioni di forze sulle due basi aventi uguali risultante e momento risultante, una soluzione particolarmente semplice.

Precisamente, si cercano quelle soluzioni che

soddisfanno le seguenti condizioni restrittive sul tensore degli sforzi (ipotesi di Saint-Venant):

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

ovverossia:

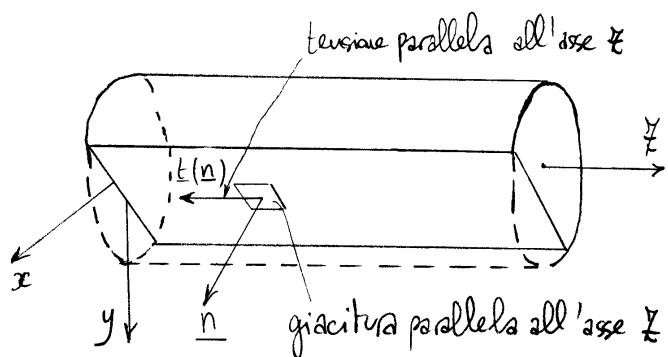
$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Tale richiesta è giustificata innanzitutto dal fatto che le componenti della terza colonna del tensore degli sforzi devono essere in generale diverse dallo zero per poter generare delle caratteristiche della sollecitazione generiche sulle sezioni rette (di normale z). Se poi le altre componenti sono nulle il problema delle tensioni tangenziali viene drasticamente semplificato dal fatto che queste (come si vedrà nel seguito) diventano indipendenti dalla coordinata z sulla linea d'asse.

Si noti anche che la (1) equivale fisicamente a richiedere che le fibre della trave (stese parallelamente all'asse z) interagiscano fra di loro solo attraverso un vettore di tensione di direzione z . Infatti se $\underline{n} = (n_x, n_y, 0)$ è la normale di un elemento di area

parallelo all'asse z allora:

$$\{\underline{\sigma} \underline{n}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{Bmatrix}.$$



E' chiaro che a priori non e' detto che tra le soluzioni "equivalenti" nel senso del principio di Saint-Venant ce ne sia una avente la forma (1), cioe' che giustifica la denominazione di ipotesi data alle condizioni (1).

17.4 Problema di Saint-Venant

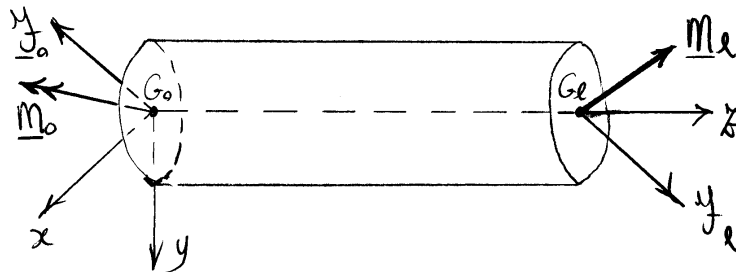
Possiamo, a questo punto, enunciare il problema di Saint-Venant:

"Dato un corpo cilindrico B caricato solo alle estremita' determinare un campo di tensioni $\underline{\sigma}$, di deformazioni $\underline{\varepsilon}$ e di spostamenti $\underline{u}$ tali che siano soddisfatte le seguenti equazioni nel volume B :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{0} & \text{(equazione indefinita di equilibrio)} \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + \operatorname{grad} \underline{u}^T) & \text{(congruenza)} \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \underline{\sigma} - \nu (\operatorname{tr} \underline{\sigma}) \underline{I} \} & \text{(legame costitutivo)} \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 & \text{(ipotesi di Saint-Venant)} \end{cases},$$

le seguenti condizioni al contorno locali sulla superficie laterale:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0},$$



e le seguenti condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette delle travi:

$$\mathbf{F} = \int_A \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_z dA, \quad \mathbf{M} = \int_A (\mathbf{P} - \mathbf{G}) \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_z) dA,$$

dove $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ sono le caratteristiche della sollecitazione. Si noti che tali condizioni scritte per le due basi del cilindro equivalgono alle condizioni globali di equilibrio al contorno sulle stesse basi. D'altronde le condizioni globali di equilibrio al contorno sulle basi del cilindro insieme alle equazioni indefinite di equilibrio impongono la validità delle condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette delle travi.

Vediamo di esprimere in componenti le varie equazioni, ancora assumendo che l'asse z coincida con l'asse della trave e l'origine con il baricentro di una sezione di estremità.

Equazioni indefinite di equilibrio ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Legame costitutivo ($\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_z$):

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \nu \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \right\},$$

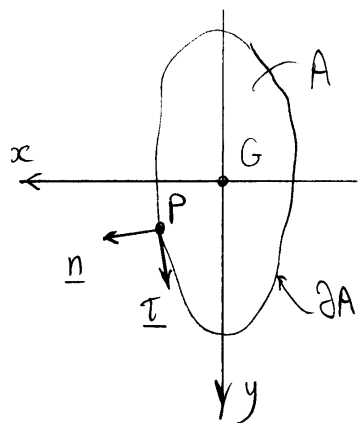
e quindi:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu \sigma_z & 0 & (1+\nu) \tau_{xz} \\ 0 & -\nu \sigma_z & (1+\nu) \tau_{yz} \\ (1+\nu) \tau_{xz} & (1+\nu) \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Equilibrio sulla superficie laterale

$$\{\underline{\sigma n}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma n} = \underline{0} \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0} \Rightarrow \boxed{\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0}$$



normale $\underline{n}$ alla
superficie laterale:

$$\{\underline{n}\} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tensione tangenziale totale $\underline{\tau}$ in un punto P appartenente al contorno ∂A di una generica sezione retta deve essere tangente al contorno della sezione.

Equivalenza statica nelle sezioni rette

La tensione σe_z ha le seguenti componenti:

$$\{\sigma e_z\} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Il momento della tensione σe_z rispetto al baricentro risulta:

$$(P-G) \times \sigma e_z = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

e quindi si hanno le componenti:

$$\{(P-G) \times \sigma e_z\} = \begin{bmatrix} \sigma_z y \\ -\sigma_z x \\ \tau_{yz} x - \tau_{xz} y \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{A_\ell} \sigma_z dA = N \\ \int_{A_\ell} \sigma_z y dA = M_x - T_y (\ell - z) \\ \int_{A_\ell} \sigma_z x dA = -M_y - T_x (\ell - z) \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA = M_t \\ \int_A \tau_{xz} dA = T_x \\ \int_A \tau_{yz} dA = T_y \end{array} \right. .$$

17.5 Energia complementare elastica

Sotto l'ipotesi di Saint-Venant ($\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0$)
l'energia complementare elastica per unità di
volume assume l'aspetto:

$$\begin{aligned} \Psi_v &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II} \\ &= \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} . \end{aligned}$$

L'energia complementare elastica per unità di linea
si ottiene integrando nell'area la Ψ_v :

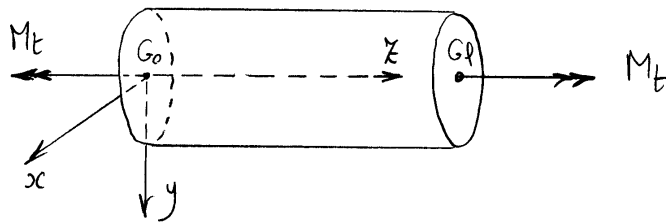
$$\Psi_\ell = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA + \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA .$$

Capitolo 18

Problema della torsione

18.1 Funzione di ingobbamento

Si ha sollecitazione di torsione quando il cilindro di Saint-Venant è soggetto alle due estremità ad una coppia torcente M_t .



Poiché il momento torcente dipende solo dalla tensione tangenziale è lecito ipotizzare che non vi siano tensioni normali agenti su una qualunque sezione retta del cilindro. Risultano pertanto nulle le dilatazioni delle linee appartenenti alla sezione retta. Dato

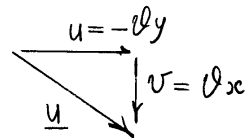
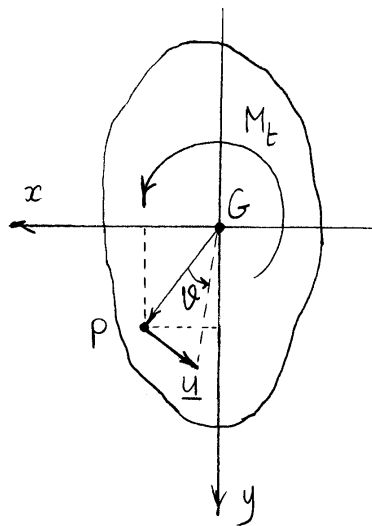
che la condizione $\tau_{xy} = 0$ impone $\gamma_{xy} = 0$, sono nulli anche gli scorrimenti di tali linee. Questo significa che non vi è deformazione della sezione nel proprio piano. Si tenga conto che ciò non esclude un ingobbamento della sezione al di fuori del proprio piano.

Si assuma allora che la sezione retta generica, quindi dipendente dalla coordinata z , subisca un moto rigido di rotazione nel proprio piano più una componente di spostamento nella direzione ortogonale alla sezione retta variabile da punto a punto, componente che in generale provocherà un ingobbamento della stessa sezione. Quindi, se la componente di spostamento ortogonale alla sezione non risulterà nulla a meno di un moto rigido la sezione non si conserverà piana.

Assumendo quale centro della rotazione il baricentro G , il moto rigido della sezione nel proprio piano si comporrà di una rotazione torsionale ϑ attorno all'asse z baricentrico.

Poiché le tensioni normali sono nulle per ipotesi deve essere nulla la dilatazione ϵ_z delle fibre parallele a z :

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y).$$



La componente di spostamento w è dunque indipendente da z . Le componenti di spostamento risultano:

$$u = \vartheta y,$$

$$v = \vartheta x,$$

$$w = w(x, y).$$

Le uniche componenti di deformazione non nulle sono (come deve essere) gli scorrimenti γ_{xz} e γ_{yz} :

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = -\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}.$$

dove:

$$\vartheta = \frac{d\vartheta}{dz} \quad (\text{angolo unitario di torsione})$$

Le corrispondenti tensioni tangenziali risultano:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G \left(-\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = G \left(\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases}.$$

Poiché tali tensioni devono essere indipendenti da z deve essere:

$$\vartheta = \text{cost.}$$

Quindi la rotazione ϑ può porsi nella forma:

$$\vartheta = \vartheta z,$$

a meno di inessenziabili moti rigidi di rotazione e di traslazione globali.

La costante con ξ di Θ permette poi di scrivere:

$$w = \Theta \omega(x, y),$$

dove la funzione $\omega(x, y)$ viene detta funzione di ingobbamento. Il campo degli spostamenti diventa quindi:

$$u = -\Theta y \xi,$$

$$v = \Theta x \xi,$$

$$w = \Theta \omega(x, y).$$

Si noti che nel moto rigido di rotazione attorno al baricentro la generica linea longitudinale passante per un punto C si inclina di un angolo $\Theta |C - G|$ nella direzione ortogonale al vettore posizione $C - G$. Risulta quindi possibile raddrizzare tale linea longitudinale, rendendola in tal modo centro della rotazione torsionale, aggiungendo al campo degli spostamenti precedenti un moto rigido di rotazione attorno ad un asse passante per il baricentro della sezione di prima estremità caratterizzato dal vettore rotazione:

$$\varphi = \Theta (C - G). \quad (1)$$

Si ottiene il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_c \\ 0 & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \xi \end{Bmatrix} + \Theta \begin{Bmatrix} -y \xi \\ x \xi \\ w \end{Bmatrix}$$

e cioè:

$$u = -\Theta (y - y_c) \xi,$$

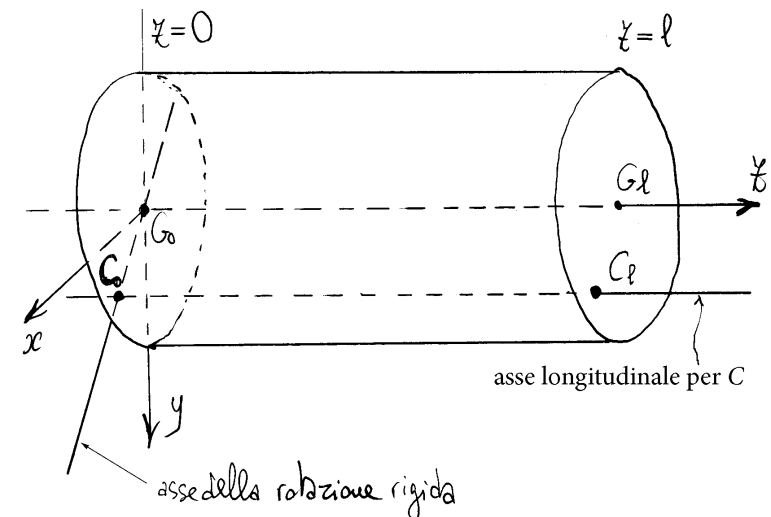
$$v = \Theta (x - x_c) \xi,$$

$$w = \Theta \omega_c(x, y).$$

dove:

$$\omega_c = \omega - y_c x + x_c y,$$

è la funzione di ingobbamento relativa al centro C .



Utilizzando, come visto senza perdita di generalità, il campo di spostamenti relativo alla scelta del baricentro quale centro di rotazione delle sezioni rette, si ottengono allora i seguenti campi di deformazione e di tensione:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} = \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{xz} = G \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = G \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{cases},$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\underline{\gamma} = \Theta \left\{ \text{grad } w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\},$$

$$\underline{\tau} = G \Theta \left\{ \text{grad } w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\},$$

dove $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è il tensore rotazione di 90° in direzione antioraria.

La terza equazione indefinita di equilibrio richiede:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \text{div } \underline{\tau} = 0,$$

dato che $\sigma_z = 0$. Quindi:

$$G \Theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = G \Theta \text{div}(\text{grad } w) = 0,$$

ovverossia:

$$\nabla^2 w = \text{div}(\text{grad } w) = 0.$$

Alla funzione di ingobbamento è dunque richiesto di soddisfare l'equazione di Laplace. Le condizioni al contorno sulla superficie laterale richiedono invece:

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0,$$

quindi deve risultare:

$$G \Theta \left(\text{grad } w \cdot \underline{n} + [\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-G)] \cdot \underline{n} \right) = 0,$$

e in definitiva:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = [\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G)] \cdot \underline{n} = y n_x - x n_y.$$

In conclusione, la funzione w deve soddisfare il seguente problema di Neumann (dipendente solo

dalla forma geometrica della sezione retta):

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial w}{\partial n} = y n_x - x n_y & \text{su } \partial A \end{cases}.$$

La soluzione del problema di Neumann esiste ed è unica (a meno di una inesistente costante arbitraria) se è soddisfatta la condizione:

$$\int_{\partial A} \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0.$$

Verifichiamo che tale condizione è soddisfatta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \int_{\partial A} (y n_x - x n_y) ds \stackrel{(*)}{=} (\text{formula di Green}) \\ &= \int_A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) dA = 0. \end{aligned}$$

La relazione tra funzione di ingobbamento w relativa al baricentro e quella w_c relativa al generico punto C permette poi di affermare che w_c è soluzione del seguente problema di Neumann:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{dw_c}{dn} = (y - y_c) n_x - (x - x_c) n_y \end{cases}.$$

Inoltre, dato che la sezione circolare è l'unica nella quale il modello costitutivo locale dipendente dal moto rigido della sezione conduce a delle tensioni tangenziali soddisfacenti le condizioni al contorno, ci si può aspettare che questo sia l'unico caso in cui la funzione di ingobbamento si annulli, cioè che risulti $w = 0$, naturalmente a meno di una costante additiva. Infatti nel caso, e solo nel caso, di sezione circolare il termine non omogeneo

$$\left[\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (\underline{p} - \underline{G}) \right] \cdot \underline{n}$$

nella condizione al contorno si annulla, le condizioni al contorno diventano omogenee e il problema di Neumann ammette di conseguenza la soluzione nulla, come volevasi dimostrare.

18.2 Fattore torsionale di rigidezza

A questo punto resta solo da imporre la condizione globale di equilibrio sulle basi:

$$\int_A (\tau_{yx} x - \tau_{xy} y) dA = M_t.$$

Si ottiene:

$$G\Theta \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) y \right\} dA = M_t.$$

Definendo il fattore torsionale di rigidezza:

$$\begin{aligned} J_t &= \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) y \right\} dA \\ &= \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} x - \frac{\partial w}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA, \end{aligned}$$

risulta:

$$\Theta = \frac{M_t}{G J_t}.$$

Nel caso di sezione circolare in cui, come visto, $w=0$, risulta:

$$J_t = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_G,$$

dove J_G è il momento di inerzia polare rispetto al baricentro.

La soluzione del problema della torsione (via funzione di ingobbamento) risulta quindi:

$$\begin{cases} u = -\frac{M_t}{G J_t} z y \\ v = \frac{M_t}{G J_t} z x \\ w = \frac{M_t}{G J_t} \omega(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{xz} = \frac{M_t}{J_t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J_t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{cases},$$

oppure:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad } w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\}.$$

Si noti che la funzione di ingobbamento w e il fattore di rigidezza torsionale dipendono solo dalla forma geometrica della sezione retta.

18.3 Energia complementare

Energia complementare per unità di linea:

$$\begin{aligned}\psi_\ell &= \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA = \\ &= \frac{M_t^2}{2G J_t^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA \\ &= \frac{M_t^2}{2G J_t^2} \left\{ \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) y \right] dA \right. \\ &\quad \left. + \int_A \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \right] dA \right\}.\end{aligned}$$

Poichè risulta:

$$\begin{aligned}&\int_A \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \right] dA \\ &= \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial w}{\partial x} - w y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial w}{\partial y} + w x \right) \right\} dA \\ &= \int_{\partial A} w \left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y - y n_x + x n_y \right) dA = 0,\end{aligned}$$

l'energia complementare assume l'aspetto:

$$\psi_\ell = \frac{M_t^2}{2G J_t}.$$

18.4 Funzione delle tensioni

La terza condizione indefinita di equilibrio richiede:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Una qualunque funzione scalare $F(x, y)$ tale che:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

o, equivalentemente:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad } F,$$

ove al solito $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è il tensore rotazione di 90° in senso antiorario, rende automaticamente soddisfatta l'equazione indefinita di equilibrio. Una funzione F cosiffatta è detta *funzione delle tensioni*.

Dal confronto con la soluzione in termini di funzione di ingobbamento si ottiene:

$$\text{grad } w = \frac{J_t}{M_t} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P - G) = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \left\{ \frac{J_t}{M_t} \text{grad } F + (P - G) \right\},$$

oppure, in componenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial y} + y \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial x} - x \end{cases}.$$

Derivando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x ed uguagliando si ottiene la condizione necessaria (e sufficiente se la sezione è monoconnessa) di integrabilità nella funzione w di ingobbamento (angolatura). Si ottiene:

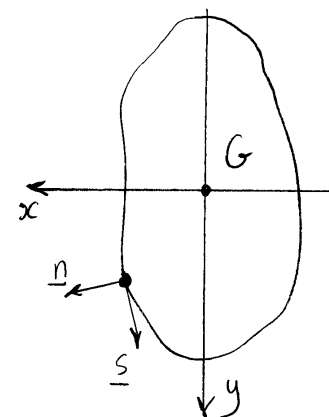
$$\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 1 = -\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 1,$$

ovverossia F deve soddisfare la seguente equazione di Poisson:

$$\nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t}.$$

Per quel che riguarda la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0,$$



$$\underline{n} \cdot \underline{s} = 0$$

$$\{\underline{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

$$\{\underline{s}\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \end{Bmatrix}$$

questa diventa:

$$\left(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad} F \right) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Applicando la definizione di tensore trasposto si ha poi:

$$\text{grad} F \cdot \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{n} = 0,$$

e poiché ruotando il versore normale al contorno della sezione retta di 90° in senso antiorario si ottiene il versore tangente s si ha infine:

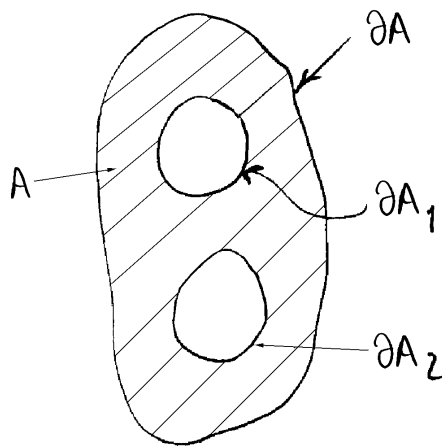
$$\text{grad} F \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

Quindi F è costante sul contorno, e, poiché una costante non modifica lo stato tensionale, può essere annullata.

La funzione delle tensioni è dunque soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t} & \text{in } A \\ F = 0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Notiamo che se la sezione è pluriconnessa, si può porre $F=0$ sul contorno esterno, ma non sugli altri contorni, dove a questo punto è solo possibile dire che $F = \text{cost.}$



La condizione di integrabilità in una funzione ω di ingobbamento richiede che sia soddisfatta la condizione di circolazione sui contorni interni:

$$\int_{\partial A_i} \text{grad } \omega \cdot \mathbf{s} \, ds = 0.$$

dove l'indice i si riferisce all' i -esimo contorno interno.

Tenendo conto delle relazioni esistenti tra ω e F si ottiene infine:

$$\iint_{\partial A_i} \left\{ \frac{J_t}{M_t} \text{grad } F + (P - G) \right\} \cdot \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{s} \, ds = 0.$$

Quindi ogni contorno interno introduce una incognita (il valore della F sul contorno) ed una equazione.

Con n circuiti interni si può procedere risolvendo il problema di Dirichlet in funzione dei valori F_i incogniti sui contorni interni, dopo di che le n condizioni di circolazione diventano n equazioni nelle n incognite F_i .

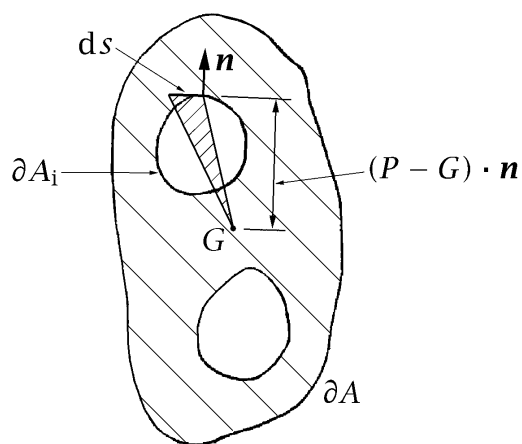
Per determinare il fattore torsionale di rigidezza J_t per il mezzo della funzione delle tensioni F , si imponga la condi-

zione di equivalenza statica:

$$\begin{aligned}
 M_t &= \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA \\
 &= \int_A \left(-\frac{\partial F}{\partial x}x - \frac{\partial F}{\partial y}y \right) dA \\
 &= \int_A \left\{ 2F - \left[\frac{\partial(Fx)}{\partial x} + \frac{\partial(Fy)}{\partial y} \right] \right\} dA \\
 &= \int_A \left\{ 2F - \operatorname{div} [F(P - G)] \right\} dA \\
 &= 2 \int_A F dA - \int_{\partial A} F(P - G) \cdot \mathbf{n} ds - \sum_i \int_{\partial A_i} F(P - G) \cdot \mathbf{n} ds.
 \end{aligned}$$

Nel caso generale di una sezione pluriconnessa, tenendo conto che sul contorno esterno ∂A si è posto $F = 0$ e che sui contorni interni ∂A_i risulta $F = F_i = \text{cost}$, si ottiene:

$$M_t = 2 \int_A F dA - \sum_i F_i \int_{\partial A_i} (P - G) \cdot \mathbf{n} ds.$$



Dato che:

$$\int_{\partial A_i} F_i(P - G) \cdot \mathbf{n} ds = 2A_i,$$

dove A_i è l'area racchiusa dal contorno interno ∂A_i , ovvero sia l'area dell' i -esimo foro, si ottiene infine:

$$M_t = 2 \left(\int_A F dA - \sum_i F_i A_i \right). \quad (1)$$

Nel caso di sezione monoconnessa la condizione diventa:

$$M_t = 2 \int_A F dA. \quad (2)$$

La soluzione in F del problema di Dirichlet è data in termini di M_t che è noto e di J_t che è incognito. La condizione (1), oppure (2), permette di determinare il fattore di rigidezza torsionale J_t .

Verifichiamo infine che la soluzione ottenuta soddisfa la condizione $\underline{T} = \underline{0}$.

Inoltre, da $\underline{\tau} = \underline{R}^T \operatorname{grad} F$ si ottiene:

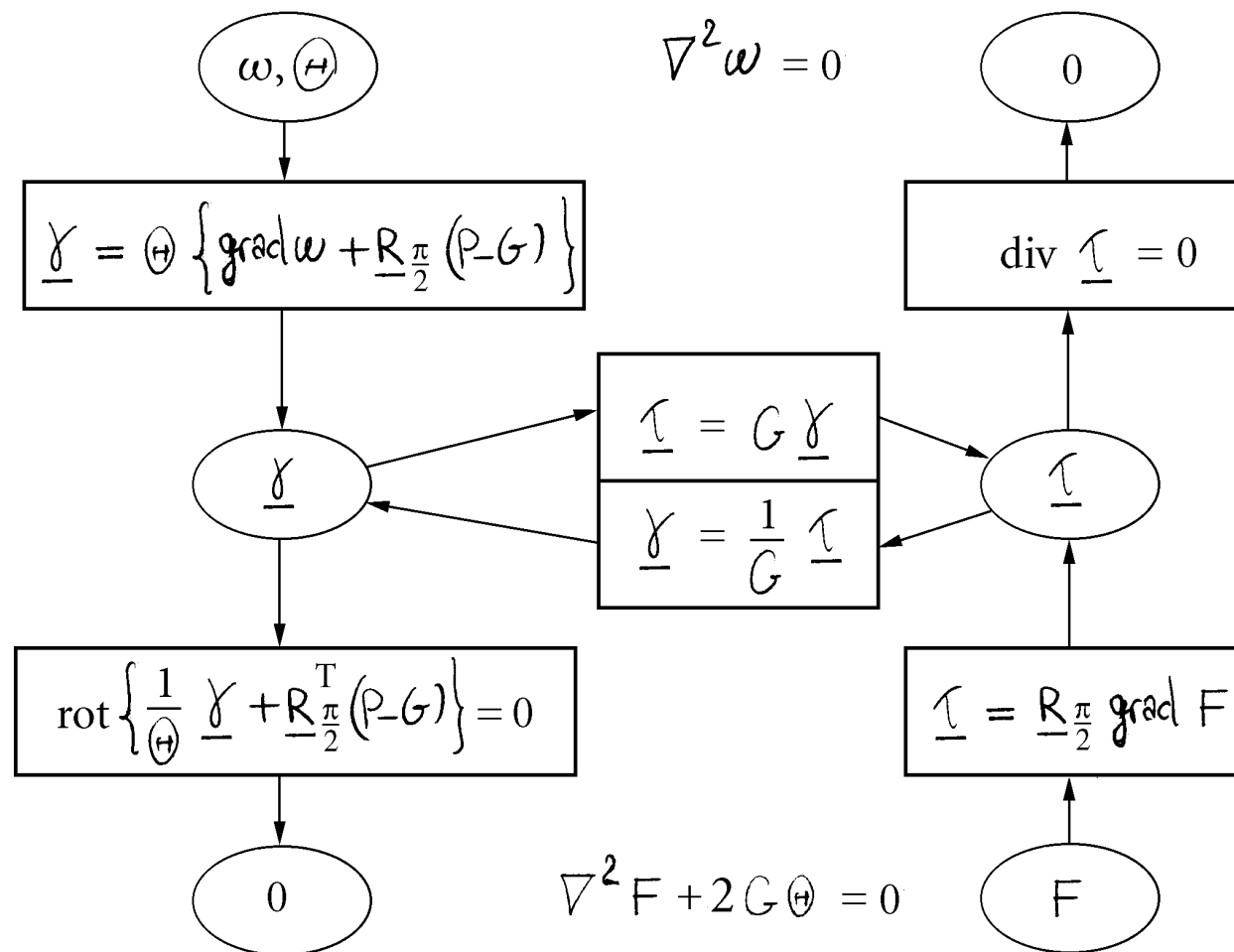
$$\underline{T} = \int_A \underline{R}^T \operatorname{grad} F dA = \underline{R}^T \int_A \operatorname{grad} F dA =$$

$$= \mathbf{R}^T \left(\int_{\partial A} F \mathbf{n} ds + \sum_i \int_{\partial A_i} F \mathbf{n} ds \right)$$

$$= \mathbf{R}^T \sum_i F_i \int_{\partial A_i} 1 \mathbf{n} ds$$

$$= \mathbf{R}^T \sum_i F_i \int_A \text{grad } 1 \, dA = \underline{0},$$

come volevasi dimostrare.



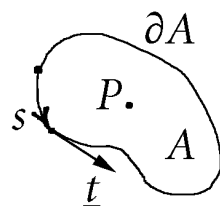
$$\text{rot } \underline{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\text{div } \underline{\tau} = \text{rot} \left(\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{\tau} \right)$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad } F = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (p-G) = \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}$$

Campo vettoriale
 $\underline{v}$ piano
 Area piana A



Circolazione di $\underline{v}$ sul contorno ∂A di A : $c(A) = \int_{\partial A} \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds$

Rotore di $\underline{v}$ (circolazione per unità di area): $\text{rot } \underline{v} = \lim_{A \rightarrow P} \frac{c(A)}{A}$

Capitolo 19

Estensione del problema di Saint-Venant

Si estende al caso della trave generica, quindi anche ad asse curvo, caricata sulla superficie laterale e a sezione variabile, l'espressione dell'energia elastica complementare per unità di linea che si ottiene nel caso del problema di S. Venant:

$$\Psi_\ell = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA + \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA.$$

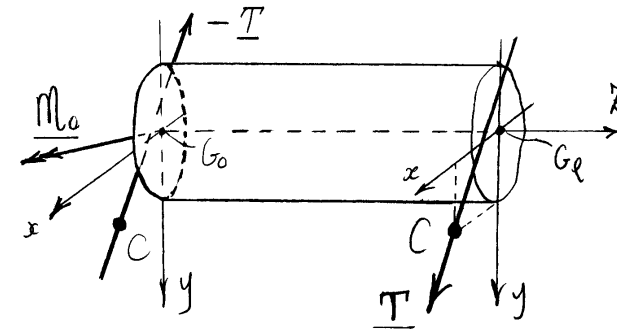
dove si suppone che τ_{xz} e τ_{yz} sono funzioni solo di τ_x , τ_y e M_t .

19.1 problema di flessione, taglio e torsione

Come prima cosa si determinerà il *centro di taglio* quale centro che renda ortogonali energeticamente il momento torcente M_t e le componenti di taglio T_x e T_y e a tale scopo sarà necessario impostare, anche se non risolvere, il *problema di flessione, taglio e torsione*.

Si ha sollecitazione di flessione, taglio e torsione se la sezione di estremità $x=l$ è soggetta ad un taglio $\underline{T}$ generico, non necessariamente passante per il baricentro.

Sulla base $x=l$ sono dunque presenti le due componenti T_x e T_y della forza di taglio e il

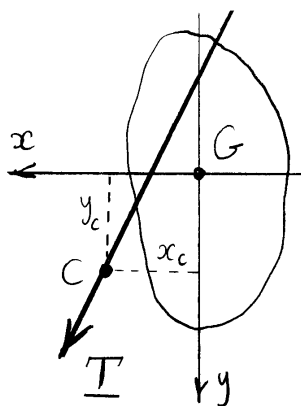


momento torcente M_t dovuto all'eccentricità della forza di taglio rispetto al baricentro. Se $C \equiv (x_c, y_c)$ è un punto appartenente alla retta d'azione del taglio il momento torcente risulta:

$$M_t = T_y x_c - T_x y_c.$$

Inoltre, per l'equilibrio alla rotazione del cilindro, sulla base $z=0$ è presente un momento esterno $\underline{M}_0$ di espressione:

$$\underline{M}_0 = -(G_l - G_0) \times \underline{T},$$



e di componenti:

$$\begin{cases} M_x^o = T_y l \\ M_y^o = -T_x l \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{componenti dell'azione} \\ \text{globale } \underline{M}_0 \text{ agente sulla prima} \\ \text{sezione di estremità} \end{array} \right)$$

Inoltre la caratteristica della sollecitazione momento flettente ha componenti:

$$\begin{cases} M_x(z) = -T_y (l - z) \\ M_y(z) = T_x (l - z) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{caratteristiche} \\ \text{della sollecitazione} \end{array} \right)$$

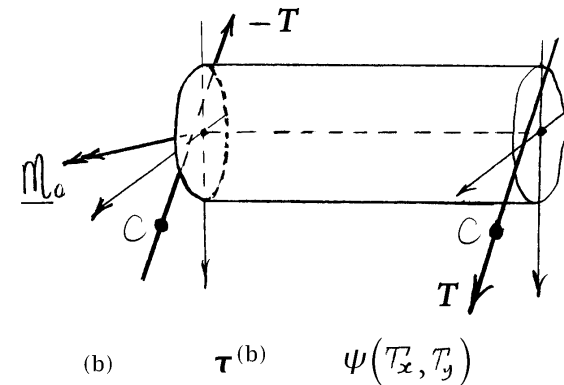
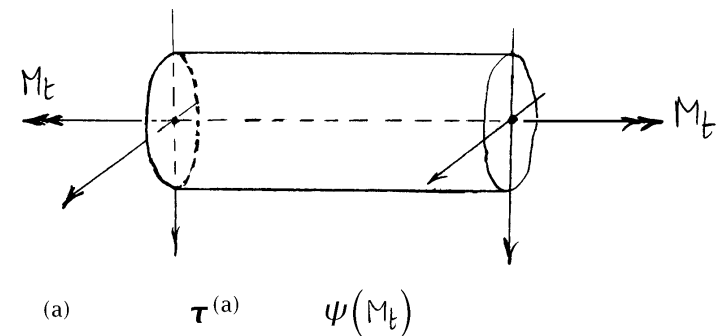
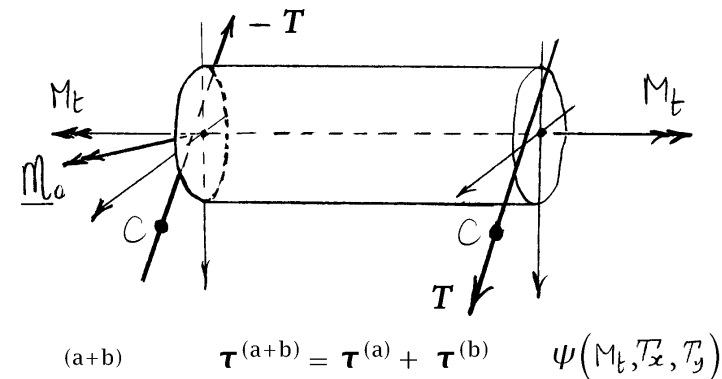
19.2 Centro di taglio

Cerchiamo il centro di taglio C quale punto per il quale occorre far passare la sollecitazione di taglio $\underline{T}$ affinché i due problemi della torsione e della flessione, taglio e torsione siano ortogonali energeticamente.

Estendendo i risultati ottenuti alla teoria della trave attraverso l'energia di deformazione (nella forma complementare), nell'ambito e solo nell'ambito della teoria della trave il centro di taglio così definito assume il significato cinematico di essere quel punto per il quale deve passare la retta d'azione dello sforzo di taglio al fine di non avere deformazioni torsionali.

Si considerino allora i due problemi (a) della torsione e (b) di flessione taglio e torsione e siano $\tau^{(a)}$ e $\tau^{(b)}$ le tensioni tangenziali associate ai problemi (a) e (b) rispettivamente. Per la sovrapposizione degli effetti al problema (a)+(b), somma dei due problemi precedenti corrisponderanno le tensioni somma e l'energia complementare ψ per unità di linea dovuta alle sole tensioni tangenziali vale quindi:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(a+b)} \cdot \tau^{(a+b)} dA \\ &= \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(a)} dA + \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(b)} \cdot \tau^{(b)} dA \\ &\quad + \frac{1}{G} \int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(b)} dA\end{aligned}$$



Quindi il problema della determinazione del centro di taglio richiede di annullare il termine mutuo dell'energia:

$$\int_A \boldsymbol{\tau}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = 0.$$

Ricordando la soluzione nelle tensioni normali, nel problema della flessione, taglio e torsione la tensione normale vale:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(b)} &= \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \\ &= - \frac{T_y(l-z)}{J_x} y - \frac{T_x(l-z)}{J_y} x. \end{aligned}$$

Le $\boldsymbol{\tau}^{(b)}$ sono costanti con z e devono soddisfare la terza equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(b)}}{\partial y} = - \frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x,$$

ovverossia:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(b)} = - \frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x.$$

Le $\boldsymbol{\tau}^{(b)}$ devono inoltre soddisfare la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{\tau}^{(b)} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

e alle condizioni globali di equilibrio sulle sezioni rette:

$$\int_A \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = \mathbf{T},$$

$$\left\{ \int_A (P-G) \times \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA \right\} \cdot \mathbf{e}_z = T_y x_c - T_x y_c.$$

Le tensioni associate alla sollecitazione semplice di torsione valgono invece:

$$\boldsymbol{\tau}^{(a)} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \operatorname{grad} w + \underline{\underline{R}}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\}.$$

L'equazione determinatrice del centro di taglio risulta dunque:

$$\frac{M_t}{J_t} \int_A \left\{ \operatorname{grad} w + \underline{\underline{R}}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = 0.$$

Poiché:

$$\operatorname{div} (w \boldsymbol{\tau}^{(b)}) = \operatorname{grad} w \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} + w \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(b)},$$

$$\underline{\underline{R}}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) = \mathbf{e}_z \times (P-G),$$

come è facile verificare, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left\{ \text{grad } w + \frac{R\pi}{2} (P-G) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA \\
 &= \int_A \left\{ \text{div} (w \boldsymbol{\tau}^{(b)}) - w \text{div} \boldsymbol{\tau}^{(b)} \right\} dA \\
 &\quad + \int_A \left\{ (P-G) \times \boldsymbol{\tau}^{(b)} \right\} \cdot \mathbf{e}_z dA \\
 &= \int_{\partial A} w \boldsymbol{\tau}^{(b)} \cdot \mathbf{n} ds + \int_A w \left\{ \frac{T_y}{J_x} y + \frac{T_x}{J_y} x \right\} dA \\
 &\quad + T_y x_c - T_x y_c \\
 &= \frac{T_x}{J_y} \int_A w x dA + \frac{T_y}{J_x} \int_A w y dA \\
 &\quad + T_y x_c - T_x y_c
 \end{aligned}$$

L'equazione determinatrice del centro di taglio risulta infine:

$$\begin{aligned}
 & T_y \left(x_c + \frac{1}{J_x} \int_A w y dA \right) \\
 & - T_x \left(y_c - \frac{1}{J_y} \int_A w x dA \right) = 0.
 \end{aligned}$$

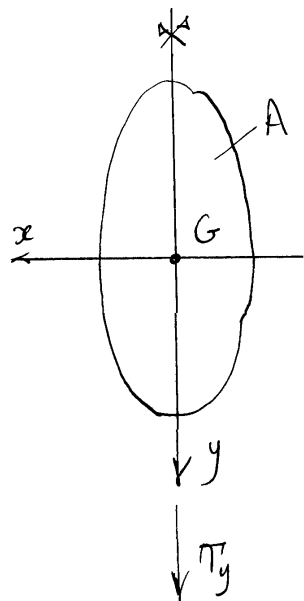
Per l'arbitrarietà delle componenti T_x e T_y si ottengono infine le coordinate del centro di taglio:

$$\begin{aligned}
 x_c &= - \frac{1}{J_x} \int_A w y dA, \\
 y_c &= \frac{1}{J_y} \int_A w x dA.
 \end{aligned}$$

Si noti che tali coordinate dipendono solo dalla forma della sezione retta.

Verifichiamo che, nel caso di sezione dotata di un asse di simmetria il centro di taglio deve appartenere all'asse di simmetria. Infatti in tal caso il momento torcente risulta una sollecitazione emisimmetrica e quindi tali risultano sia le deformazioni che la funzione di ingobbamento.

Se l'asse di simmetria coincide con l'asse y la funzione



ce y risulta emisimmetrica e dunque il suo integrale sull'area è nullo.

Oppure, si soggetti la sezione a un taglio T_y passante per il baricentro G . Tale sollecitazione è

simmetrica e dunque simmetriche risultano le tensioni tangenziali $\underline{\tau}^{(b)}$. Invece le tensioni tangenziali $\underline{\tau}^{(a)}$ dovute al momento torcente sono emisimmetriche. La funzione $\underline{\tau}^{(b)} \cdot \underline{\tau}^{(a)}$ che esprime il termine mutuo dell'energia complementare è dunque emisimmetrica e il suo integrale sull'area è nullo. Risulta quindi nullo il termine mutuo dell'energia complementare e dunque la retta y contiene il centro di taglio.

19.3 Energia complementare

Esprimendo l'energia complementare associata alle tensioni tangenziali in funzione del momento torcente M_C valutato rispetto al centro di taglio C e tenendo conto della soluzione del problema della torsione, si avrà:

$$\psi(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{M_C^2}{GJ_t} + aT_x^2 + bT_y^2 + cT_xT_y \right\},$$

dove G e J_t sono rispettivamente il modulo di elasticità tangenziale e il fattore torsionale di rigidezza mentre le costanti a , b e c dipendono dalla soluzione del problema di flessione, taglio e torsione. È prassi di porre tali costanti nella forma χ_x/GA , χ_y/GA e $2\chi_{xy}/GA$ rispettivamente, dove A è l'area della sezione retta e le costanti adimensionali χ_x , χ_y e χ_{xy} sono dette *fattori di taglio*. Questi rappresentano le componenti, nel sistema Gxy , di un tensore doppio piano $\mathbf{X}$, detto *tensore dei fattori di taglio*:

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} \chi_x & \chi_{xy} \\ \chi_{xy} & \chi_y \end{bmatrix}.$$

Si noti che il tensore dei fattori di taglio $\mathbf{X}$ coincide, a meno del coefficiente GA , con l'inverso del tensore di rigidezza tagliente $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{X} = GA\mathbf{F}^{-1}. \quad (1)$$

Come ogni tensore doppio simmetrico, anche il tensore dei fattori di taglio ha in generale due direzioni principali, in tal caso di *taglio*, ortogonali tra loro che diagonalizzano la matrice delle componenti. In generale le direzioni principali di taglio differiscono da quelle principali di inerzia. Un asse di simme-

tria, come già noto, contiene il baricentro e il centro di taglio ed è principale di inerzia. Inoltre risulta essere anche principale di taglio. Infatti un taglio diretto come l'asse di simmetria è simmetrico e non può quindi generare uno scorrimento nella direzione ortogonale all'asse di simmetria, essendo tale scorrimento emisimmetrico. D'altronde un taglio diretto come l'asse di simmetria è simmetrico e genera delle tensioni tangenziali simmetriche, mentre un taglio ortogonale all'asse di simmetria è emisimmetrico e genera delle tensioni tangenziali emisimmetriche. L'energia complementare mutua è dunque nulla e quindi è nullo anche il fattore di taglio mutuo, come volevasi dimostrare.

Mettendo in conto sia le tensioni normali che quelle tangenziali, l'espressione dell'energia complementare risulta allora:

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_c^2}{GJ_t} + \chi_x \frac{T_x^2}{GA} + \chi_y \frac{T_y^2}{GA} + 2\chi_{xy} \frac{T_x T_y}{GA} \right\},$$

oppure, in forma indipendente dal sistema Gxy :

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{1}{E} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_f + \frac{M_c^2}{GJ_t} + \frac{1}{GA} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\chi} \mathbf{T} \right\}.$$

19.4 Legami costitutivi

Derivando l'energia complementare si ottengono i legami costitutivi:

1. Sforzo normale:

$$\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{N}{EA} \quad \Rightarrow \quad N = EA\epsilon,$$

dove la dilatazione ϵ è quella della fibra baricentrica;

2. Momento flettente:

(a) forma algebrica:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\partial \psi}{\partial M_x} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad \Rightarrow \quad M_x = EJ_x k_x, \\ k_y &= \frac{\partial \psi}{\partial M_y} = \frac{M_y}{EJ_y} \quad \Rightarrow \quad M_y = EJ_y k_y, \end{aligned}$$

dove M_x M_y sono le componenti del momento flettente valutato rispetto al baricentro e il sistema di riferimento Gxy è principale di inerzia;

(b) forma vettoriale:

$$\mathbf{k}_f = \frac{1}{E} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_f \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_f = E \mathbf{J} \mathbf{k}_f,$$

dove il momento flettente $\mathbf{M}_f$ è valutato rispetto al baricentro;

3. Momento torcente:

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial M_C} = \frac{M_C}{GJ_t} \quad \Rightarrow \quad M_C = GJ_t \Theta,$$

dove il momento torcente è valutato rispetto al centro di taglio;

4. Taglio:

(a) forma algebrica:

$$\gamma_x^C = \frac{\partial \psi}{\partial T_x} = \chi_x \frac{T_x}{GA} + \chi_{xy} \frac{T_y}{GA},$$

$$\gamma_y^C = \frac{\partial \psi}{\partial T_y} = \chi_{xy} \frac{T_x}{GA} + \chi_y \frac{T_y}{GA},$$

dove gli scorrimenti γ_x^C e γ_y^C sono valutati rispetto alla fibra longitudinale per il centro di taglio;

(b) forma vettoriale:

$$\boldsymbol{\gamma}_C = \frac{1}{GA} \boldsymbol{\chi} \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = GA \boldsymbol{\chi}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_C,$$

dove lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_C$ è valutato rispetto alla fibra longitudinale per il centro di taglio.

Dalle relazioni costitutive inverse si ottiene la seguente matrice elastica inversa:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GJ_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\chi_x}{GA} & \frac{\chi_{xy}}{GA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\chi_{xy}}{GA} & \frac{\chi_y}{GA} \end{bmatrix}.$$

Inserendo invece i legami costitutivi diretti nell'espressione dell'energia complementare, si ottiene poi l'energia elastica di deformazione:

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ EA \epsilon_G^2 + E \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{J} \mathbf{k}_f + GJ_t \Theta^2 + GA \boldsymbol{\gamma}_C \cdot \boldsymbol{\chi}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_C \right\}.$$

Capitolo 20

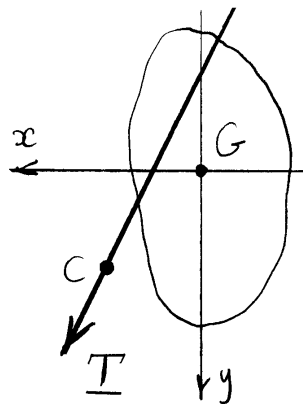
Travi elastiche lineari

20.1 Equazioni della teoria tecnica delle travi

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \Theta \underline{e}_z + \underline{\kappa}_f = \frac{d\underline{\varphi}}{ds} \\ \underline{\varepsilon} \underline{e}_z + \underline{\gamma}_c - \Theta \underline{e}_z \times (C - G) = \frac{d\underline{u}}{ds} - \underline{\varphi} \times \underline{e}_z \end{cases},$$

poichè $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_c - \Theta \underline{e}_z \times (C - G)$.



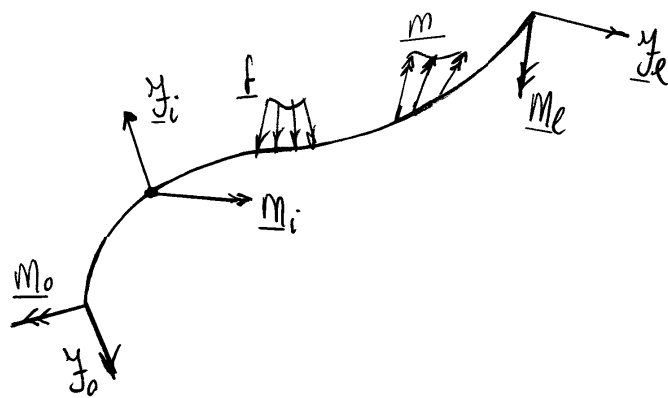
Si ottiene:

$$\begin{cases} \Theta = \frac{d\underline{\varphi}}{ds} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{\kappa}_f = \frac{d\underline{\varphi}}{ds} - \left(\frac{d\underline{\varphi}}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z \\ \underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{u}}{ds} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{\gamma}_c = \frac{d\underline{u}}{ds} - \left(\frac{d\underline{u}}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z - \underline{\varphi} \times \underline{e}_z \\ \quad + \left(\frac{d\underline{\varphi}}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z \times (C - G) \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} (\underline{N} \underline{e}_z + \underline{T}) + \underline{f} = \underline{0} \\ \frac{d}{ds} (\underline{M}_c \underline{e}_z + (C - G) \times \underline{T} + \underline{M}_f) + \underline{m} + \underline{e}_z \times \underline{T} = \underline{0} \end{cases},$$

poichè $\underline{M}_t \underline{e}_z = \underline{M}_c \underline{e}_z + (C - G) \times \underline{T}$.



Equazioni di equilibrio al contorno

$$\begin{cases} N e_k + T \big|_{s=0} = - y_0 \\ M_c e_k + (C-G) \times T + M_f \big|_{s=0} = - m_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N e_k + T \big|_{s=l} = y_l \\ M_c e_k + (C-G) \times T + M_f \big|_{s=l} = m_l \end{cases}$$

Equazioni di discontinuità

$$\begin{cases} (\Delta N e_k + \Delta T)_i + y_i = 0 \\ (\Delta M_c e_k + (C-G) \times \Delta T + \Delta M_f)_i + m_i = 0 \end{cases}$$

Legami costitutivi

$$\begin{cases} N = EA \epsilon \\ M_f = E J K_f \end{cases} \quad \begin{cases} M_c = G J_t \Theta \\ T = GA \chi_c^{-1} \chi_c \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{cases} L_{ve} = \int_l (f \cdot u + m \cdot \varphi) ds + y_0 \cdot u_0 + m_0 \cdot \varphi_0 \\ \quad + y_l \cdot u_l + m_l \cdot \varphi_l + \sum_i (y_i \cdot u_i + m_i \cdot \varphi_i) \\ L_{vi} = \int_l (N \epsilon + M_f \cdot K_f + M_c \Theta + T \cdot \chi_c) ds \end{cases}$$

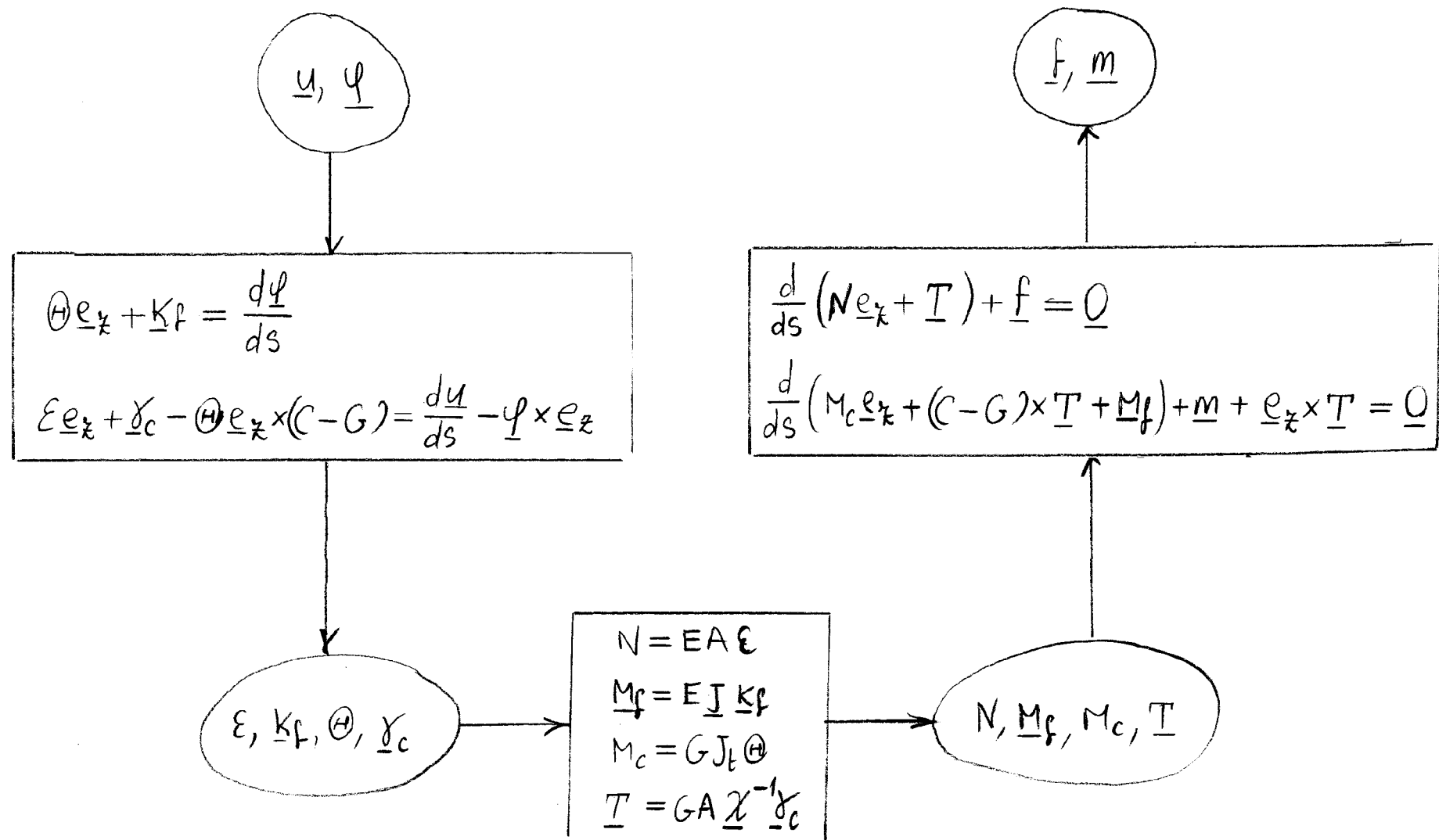
Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} (EA \epsilon^2 + E J K_f \cdot J K_f + G J_t \Theta^2 + GA \chi_c \cdot \chi_c^{-1} \chi_c)$$

Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{1}{E} M_f \cdot J^{-1} M_f + \frac{M_c^2}{G J_t} + \frac{1}{GA} T \cdot \chi T \right)$$

Diagramma teoria tecnica delle travi



20.2 Trave di Timoshenko

Trave piana elastica lineare ad asse rettilineo.

Forze esterne

Forze distribuite : q, p

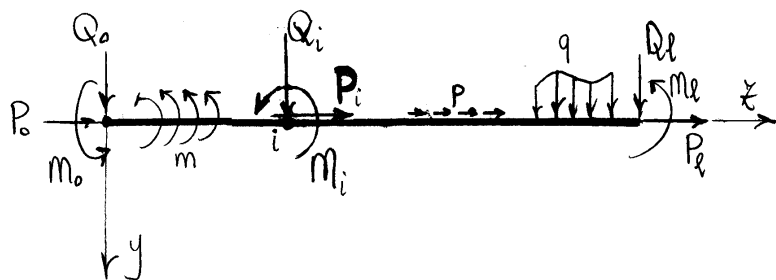
Momenti distribuiti : m

Forze concentrate: Q, P

Momenti concentrati: M

Forze e momenti alle due estremità:

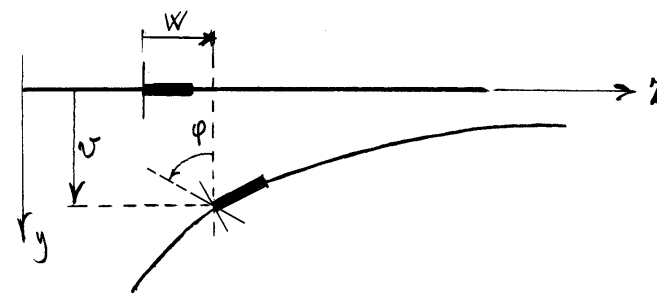
$Q_0, P_0, M_0; \quad Q_\ell, P_\ell, M_\ell$



Variabili cinematiche

Spostamenti dei punti della linea d'asse: v, w

Rotazione della sezione: φ



Deformazioni

Dilatazione della linea d'asse: ε

Curvatura flessionale: k

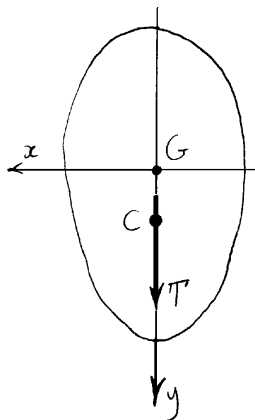
Scorrimento tra linea d'asse e sezione retta: γ

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{dw}{dz} \\ k = \frac{d\varphi}{dz} \\ \gamma = \varphi + \frac{dv}{dz} \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m = T \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio al contorno:

$$\begin{cases} N(0) = -P_0 \\ T(0) = -Q_0 \\ M(0) = -M_0 \end{cases} \quad \begin{cases} N(l) = P_l \\ T(l) = Q_l \\ M(l) = M_l \end{cases}$$

Equazioni di discontinuità

$$\begin{cases} (\Delta N)_i + P_i = 0 \\ (\Delta T)_i + Q_i = 0 \\ (\Delta M)_i + M_i = 0 \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^l (p w + q v + m \varphi) dz \\ &\quad + P_0 w_0 + Q_0 v_0 + M_0 \varphi_0 + P_l w_l + Q_l v_l + M_l \varphi_l \\ &\quad + \sum_i (P_i w_i + Q_i v_i + M_i \varphi_i) \end{aligned}$$

$$L_i = \int_0^l (N \varepsilon + M \kappa + T \gamma) dz$$

Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} \left(EA \varepsilon^2 + EJ \kappa^2 + \frac{GA}{\chi} \gamma^2 \right)$$

Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} + \chi \frac{T^2}{GA} \right)$$

Equazioni di legame

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon \\ M = EJ \kappa \\ T = \frac{GA}{\chi} \gamma \end{cases}$$

Equazioni fondamentali

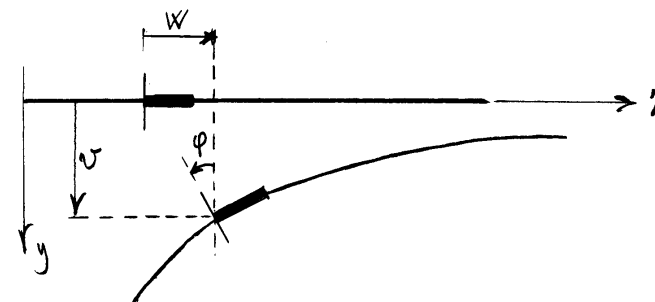
$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d}{dz} \left\{ \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) \right\} + q = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d\varphi}{dz} \right) - \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) + m = 0 \end{cases}$$

Equazioni che permettono di imporre le condizioni al contorno

$$\begin{cases} N = EA \frac{dw}{dz} \\ M = EJ \frac{d\varphi}{dz} \\ T = \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) \end{cases}$$

20.3 Trave piana inflessaVariabili cinematiche

Spostamenti dei punti della linea d'asse: v, w



Vincolo interno sulla rotazione φ della sezione

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = - \frac{dv}{dz}$$

Deformazioni

Dilatazione della linea d'asse: ε

Curvatura flessionale: κ

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{dw}{dz} \\ \kappa = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2} \end{cases}$$

Taglio in funzione dei momenti esterni ed interni

$$T = m + \frac{dM}{dz} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{dm}{dz} + \frac{d^2M}{dz^2}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{d^2M}{dz^2} + \frac{dm}{dz} + q = 0 \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{aligned} \int_0^l m \varphi \, dz &= - \int_0^l m \frac{dv}{dz} \, dz \\ &= \int_0^l \frac{dm}{dz} v \, dz - [m v]_0^l \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^l (q v + m \varphi) \, dz + Q_0 v(0) + Q_l v(l) &= \\ &= \int_0^l \left(q + \frac{dm}{dz} \right) v \, dz \\ &\quad + (Q_0 + m(0)) v(0) + (Q_l - m(l)) v(l) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^l (q v + p w + m \varphi) \, dz \\ &\quad + Q_0 v(0) + P_0 w(0) + M_0 \varphi(0) + Q_l v(l) + P_l w(l) + M_l \varphi(l) \\ &\quad + \sum_i (Q_i v_i + P_i w_i + M_i \varphi_i) = \\ &= \int_0^l \left\{ \left(q + \frac{dm}{dz} \right) v + p w \right\} \, dz \\ &\quad + (Q_0 + m(0)) v(0) + P_0 w(0) + M_0 \varphi(0) \\ &\quad + (Q_l - m(l)) v(l) + P_l w(l) + M_l \varphi(l) \\ &\quad + \sum_i (Q_i v_i + P_i w_i + M_i \varphi_i), \end{aligned}$$

$$L_i = \int_0^l (N \varepsilon + M \kappa) \, dz$$

Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} (EA \epsilon^2 + EJ \kappa^2)$$

Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right)$$

Equazioni di legame

$$\begin{cases} N = EA \epsilon \\ M = EJ \kappa \end{cases}$$

Tali equazioni impongono $N=0$ e $M=0$

se $\epsilon=0$ e $\kappa=0$, cioè se la trave è indeformata.

Questo significa che tali equazioni sono valide sotto

l'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida

con la configurazione naturale della trave, che

rappresenta appunto quella configurazione in corrispondenza

della quale le sollecitazioni interne si annullano.

Equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + P = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = \left(q + \frac{dm}{dz} \right) \end{cases}$$

Equazioni che permettono di imporre le condizioni al contorno

$$\begin{cases} T-m = - \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \\ M = - EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ N = EA \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

Condizioni al contorno

$$\begin{cases} EA w'(0) = -P_0 \\ EJ v''(0) = M_0 \\ (EJ v'')'(0) = Q_0 + m_0 \\ EA w'(l) = P_l \\ EJ v''(l) = -M_l \\ (EJ v'')'(l) = -(Q_l - m_l) \end{cases}$$

Se $m=0$ le equazioni divergono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = - \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \\ M = - EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ N = EA \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

Travi elastiche inflesse omogenee a sezione costante ($m=0$)

$$\begin{cases} EA \frac{d^2 w}{dz^2} + p = 0 \\ EJ \frac{d^4 v}{dz^4} = q \end{cases}$$

Se $p = q = 0$

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \end{cases}$$

In entrambi i casi :

$$\begin{cases} N = EA \frac{dw}{dz} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ M = - EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ T = - EJ \frac{d^3 v}{dz^3} \end{cases}$$

Diagramma trave di Timoshenko

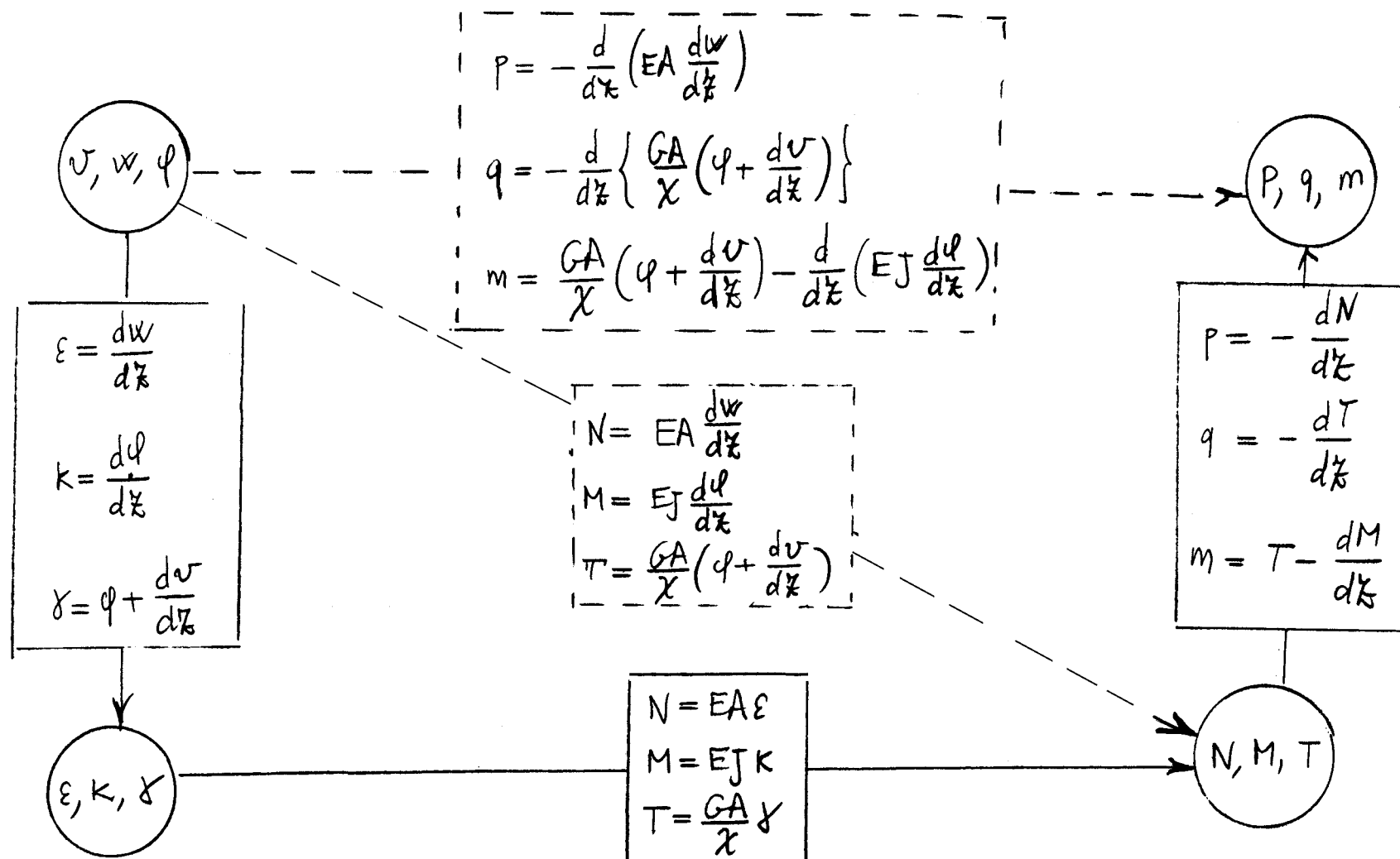
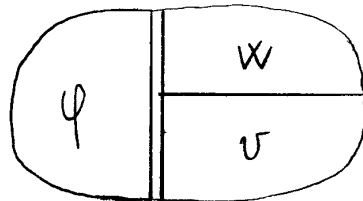


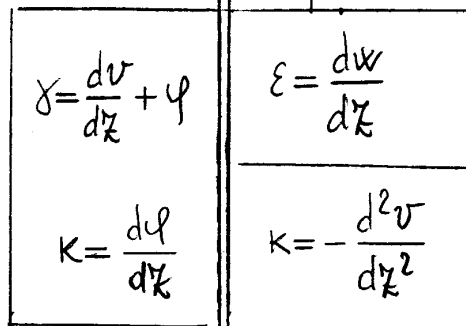
Diagramma trave piana inflessa ad asse rettilineo

VARIABILI CINEMATICHE

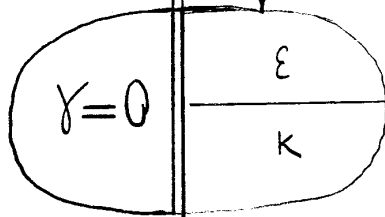
spostamenti
generalizzati:



Equazioni
di
Congruenza



caratteristiche
della
deformazione



$$\frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) = -P$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) = -q - \frac{dm}{dz}$$

Equazioni fondamentali

$$EA \frac{dw}{dz} = N$$

$$\frac{dv}{dz} = -\varphi$$

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} = -M$$

$$\frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) = -T + m$$

Condizioni al contorno

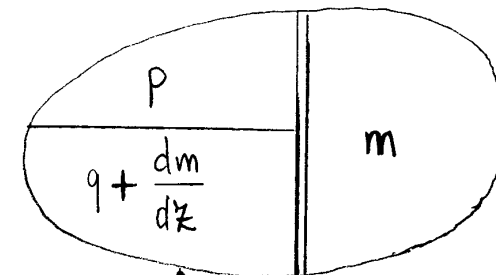
$$N = EA \epsilon$$

$$M = EJ \kappa$$

legami costitutivi

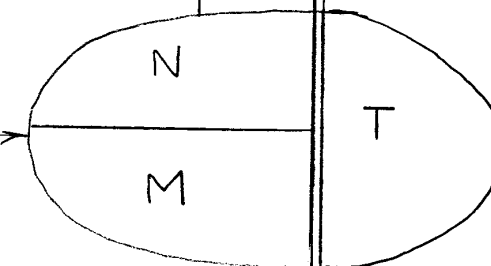
VARIABILI STATICHE

forze
esterne



Equazioni di equilibrio

$\frac{dN}{dz} = -P$	$\frac{dM}{dz} - T = -m$
$\frac{d^2M}{dz^2} = -q - \frac{dm}{dz}$	$\frac{dT}{dz} = -q$



Caratteristiche
della
sollcitazione

Diagramma relativo al problema dello sforzo assiale

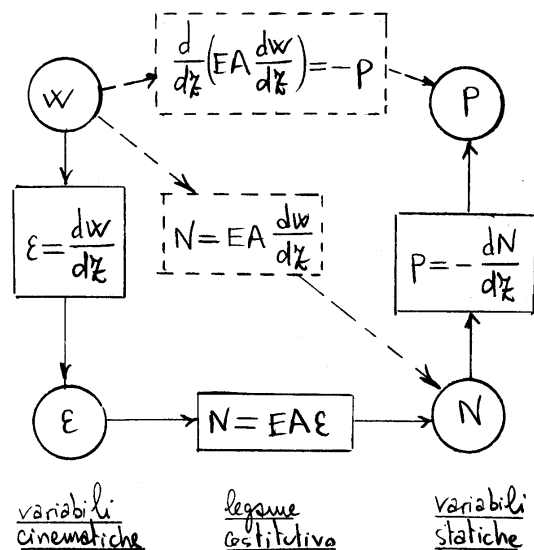
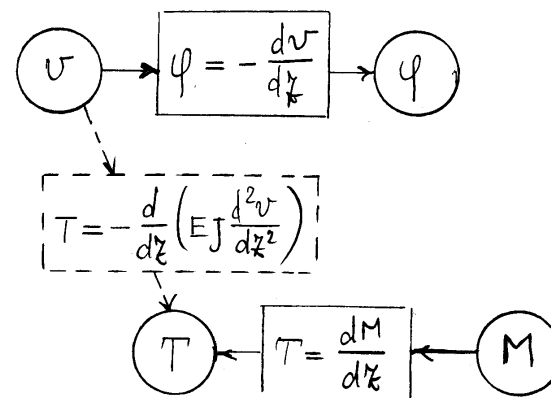
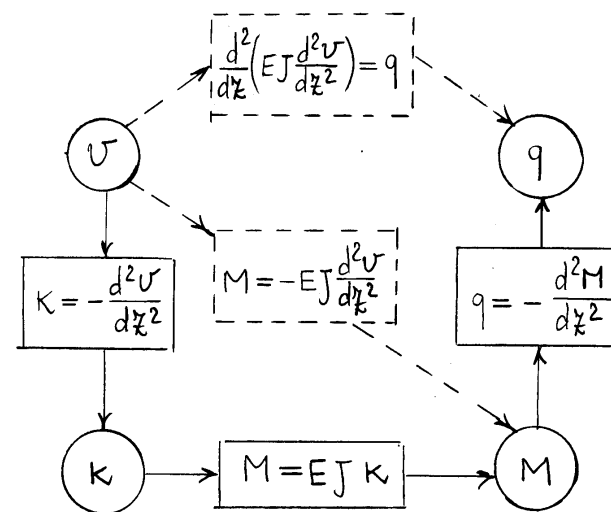


Diagramma relativo al problema flessionale ($m=0$)



20.4 Sovrapposizione degli effetti

Sia data una trave, un primo sistema di forze applicate e di condizioni al contorno e infine un secondo sistema di forze applicate e di condizioni al contorno. La soluzione (in termini delle caratteristiche della sollecitazione, delle caratteristiche della deformazione e degli spostamenti) corrispondente ai due sistemi di forze agenti contemporaneamente e alla somma delle condizioni al contorno è uguale alla somma delle soluzioni corrispondenti ai due sistemi di forze agenti separatamente, ognuno con le proprie condizioni al contorno (additività).

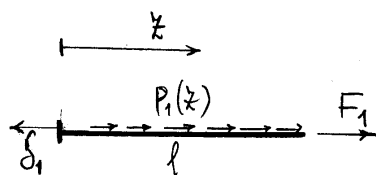
Inoltre, la soluzione corrispondente a un sistema di forze e condizioni al contorno, amplificate

entrambe da uno scalare α arbitrario, si ottiene amplificando, sempre tramite α , la soluzione che corrisponde al sistema di forze e condizioni al contorno non amplificate (omogeneità di grado 1).

Queste due proprietà sono la conseguenza della linearità delle equazioni che reggono il problema e del fatto che le equazioni indefinite di equilibrio sono scritte (per l'ipotesi delle piccole deformazioni) nella configurazione indeformata, che dunque non cambia al variare del sistema di forze applicate.

È chiaro che le condizioni al contorno, nei due sistemi, devono essere dello stesso tipo per poter essere sommate.

Come esempio, verifichiamo le due proprietà nel caso di trave rettilinea soggetta a sole forze di tipo assiale.

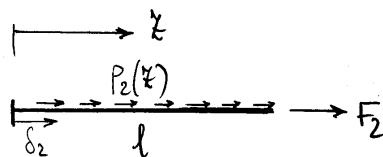
Sistema 1 :

La soluzione $w_1(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $N_1(z)$ soddisfa le equazioni :

$$\frac{dw_1}{dz} = \varepsilon_1, \quad N_1 = EA\varepsilon_1, \quad \frac{dN_1}{dz} + p_1 = 0,$$

e le condizioni al contorno :

$$w_1(0) = -\delta_1, \quad N(l) = F_1$$

Sistema 2 :

La soluzione $w_2(z)$, $\varepsilon_2(z)$, $N_2(z)$ soddisfa le equazioni :

$$\frac{dw_2}{dz} = \varepsilon_2, \quad N_2 = EA\varepsilon_2, \quad \frac{dN_2}{dz} + p_2 = 0,$$

e le condizioni al contorno :

$$w_2(0) = \delta_2, \quad N_2(l) = F_2.$$

Sistema 1 + Sistema 2

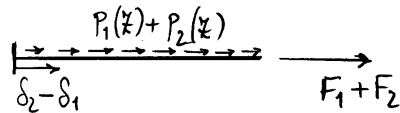
Le funzioni $w_1(z) + w_2(z)$, $\varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z)$, $N_1(z) + N_2(z)$ soddisfano le equazioni :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(w_1 + w_2) = \frac{dw_1}{dz} + \frac{dw_2}{dz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ N_1 + N_2 = EA\varepsilon_1 + EA\varepsilon_2 = EA(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \frac{d}{dz}(N_1 + N_2) + (p_1 + p_2) = \left(\frac{dN_1}{dz} + p_1\right) + \left(\frac{dN_2}{dz} + p_2\right) = 0 \end{cases},$$

e le condizioni al contorno :

$$\begin{cases} (w_1 + w_2)_{z=0} = w_1(0) + w_2(0) = \delta_2 - \delta_1 \\ (N_1 + N_2)_{z=l} = N_1(l) + N_2(l) = F_1 + F_2 \end{cases},$$

e dunque sono la soluzione corrispondente al sistema di forze e condizioni al contorno somma dei due sistemi:



Sistema 1 amplificato di α

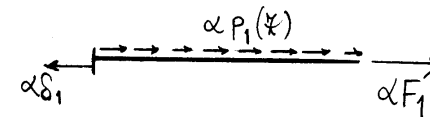
Le funzioni $\alpha w_1(z)$, $\alpha \varepsilon_1(z)$, $\alpha N_1(z)$ soddisfanno le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\alpha w_1) = \alpha \frac{dw_1}{dz} = \alpha \varepsilon_1 \\ \alpha N_1 = \alpha EA \varepsilon_1 = EA(\alpha \varepsilon_1) \\ \frac{d}{dz}(\alpha N_1) + \alpha p_1 = \alpha \left(\frac{dN_1}{dz} + p_1 \right) = 0 \end{cases}$$

e le condizioni al contorno:

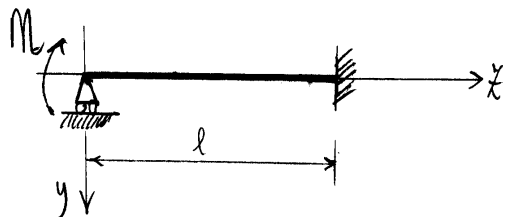
$$\begin{cases} (\alpha w_1)_{z=0} = \alpha w_1(0) = -\alpha \delta_1 \\ (\alpha N_1)_{z=l} = \alpha N_1(l) = \alpha F_1 \end{cases}$$

e dunque sono la soluzione corrispondente al primo sistema di forze e condizioni al contorno amplificato tramite lo scalare α :



20.5 Integrazione dell'equazione della linea elastica

20.5.1 Esempio: Trave incastro-appoggio



$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 & \Rightarrow w = a_1 z + a_2 \\ \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 & \Rightarrow \begin{cases} v = b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4 \\ \varphi = -3b_1 z^2 - 2b_2 z - b_3 \\ M = -EJ(6b_1 z + 2b_2) \\ T = -6b_1 EJ \end{cases} \end{cases}$$

Condizioni al contorno geometriche (essenziali):

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ \varphi(l) = 0 \\ w(l) = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno statiche (naturali):

$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ M(0) = M \end{cases}$$

$$N(0) = 0 \Rightarrow EJ \frac{dw}{dz} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow b_4 = 0$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow b_1 l^3 + b_2 l^2 + b_3 l = 0$$

$$\varphi(l) = 0 \Rightarrow -3b_1 l^2 - 2b_2 l - b_3 = 0$$

$$M(0) = M \Rightarrow -2b_2 EJ = M \Rightarrow b_2 = -\frac{M}{2EJ}$$

$$\begin{cases} b_1 l^2 + b_3 = \frac{1}{2} \frac{Ml}{EJ} \\ 3b_1 l^2 + b_3 = \frac{Ml}{EJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \frac{M}{EJl} \\ b_3 = \frac{1}{4} \frac{Ml}{EJ} \end{cases}$$

Soluzione del problema assiale:

$$\begin{cases} w=0 \\ N=0 \end{cases}$$

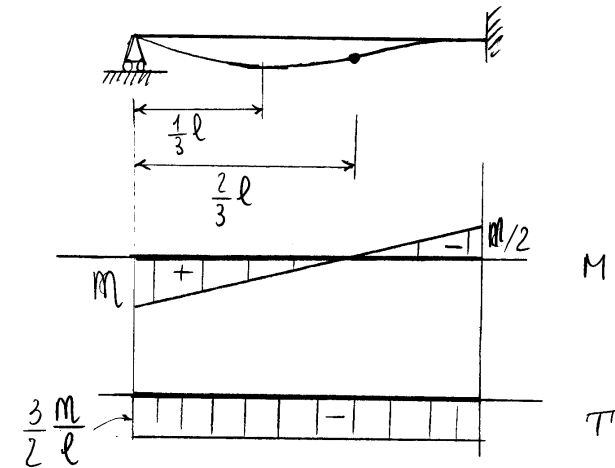
Soluzione del problema flessionale:

$$\begin{cases} v = \frac{Mz^3}{4EJl} - \frac{Mz^2}{2EJ} + \frac{Mlz}{4EJ} \\ \varphi = -\frac{3}{4} \frac{Mz^2}{EJl} + \frac{Mz}{EJ} - \frac{Ml}{4EJ} \\ M = -\frac{3Mz}{2l} + M \\ T = -\frac{3}{2} \frac{M}{l} \end{cases}$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow z^2 - 2\left(\frac{2}{3}l\right)z + \frac{l^2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{3}l \pm \sqrt{\frac{4}{9}l^2 - \frac{1}{3}l^2}$$

$$= \frac{2}{3}l \pm \frac{1}{3}l = \begin{cases} l \\ \frac{1}{3}l \end{cases}$$



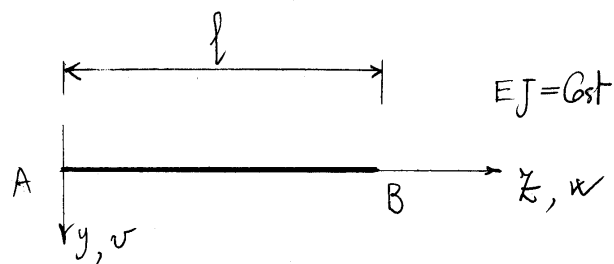
$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \frac{2}{3}l$$

$$v_{\max} = v\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{Ml^2}{27EJ}$$

$$\varphi(0) = -\frac{Ml}{4EJ}$$

20.5.2 Travi caricate solo alle estremità

Integrazione della linea elastica nel caso in cui non agiscano forze distribuite e le condizioni al contorno sono tutte sugli spostamenti:



$$\frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \\ \varphi = -3a_1 z^2 - 2a_2 z - a_3 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \Rightarrow w = a_5 z + a_6$$

$$\begin{cases} a_3 = -\varphi_A \\ a_4 = v_A \\ a_6 = w_A \end{cases}$$

$$w_B = a_5 l + w_A \Rightarrow a_5 = \frac{w_B - w_A}{l}$$

$$\begin{cases} v_B = a_1 l^3 + a_2 l^2 - \varphi_A l + v_A \\ \varphi_B = -3a_1 l^2 - 2a_2 l + \varphi_A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 l^2 + a_2 l = \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_A \\ -3a_1 l^2 - 2a_2 l = \varphi_B - \varphi_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 l^2 = 2 \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_B + \varphi_A \\ a_2 l = 3 \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_B + 2\varphi_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \frac{v_B - v_A}{l^3} - \frac{\varphi_B + \varphi_A}{l^2} \\ a_2 = 3 \frac{v_B - v_A}{l^2} + \frac{\varphi_B + 2\varphi_A}{l} \end{cases}$$

Quindi, dati gli spostamenti v_A, w_A, φ_A del punto A e v_B, w_B, φ_B del punto B, la situazione statica e cinematica della trave è definita. Ovverossia, noti gli spostamenti delle

estremità della trave sono note la deformata e le caratteristiche della sollecitazione.

Si osservi che imporre degli spostamenti significa vincolare la trave: la trave è obbligata a subire tali spostamenti.

Per quanto precede, una trave elastica piana non soggetta a forze lungo l'asse della trave risulta un sistema a 6 gradi di libertà.

