

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

Sollecitazioni semplici

Corsi di Laurea in
Ingegneria Civile e Ambientale
Ingegneria Industriale
Ingegneria Navale

 Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura

Trieste, 18 agosto 2011

Indice

1 Tensioni nelle travi	1		
1.1 Tensione normale	1		
1.2 Tensione tangenziale	2		
1.3 Criteri di snervamento	4		
1.3.1 Tensione normale	4		
1.3.2 Tensione tangenziale	5		
2 Forza normale centrata	7		
2.1 Sezioni omogenee	7		
2.1.1 Integrazione in un campo di spostamenti	7		
2.1.2 Condizioni di snervamento	10		
2.2 Sezioni composte di più materiali	10		
2.3 Concentrazioni di sforzo	12		
3 Aste compresse	15		
3.1 Biforcazione dell'equilibrio	15		
3.2 Verifica di sicurezza di profilati metallici compressi	17		
3.3 Calcolo dei carichi critici col metodo statico	18		
3.3.1 Asta di Eulero	18		
3.3.2 Mensola	22		
3.3.3 Trave incastro-appoggio	23		
3.3.4 Trave incastrata	26		
3.3.5 Trave incastrata ad una estremità ed impedita di ruotare all'altra estremità	27		
3.3.6 Schemi riassuntivi	28		
3.3.7 Portali con traversi infinitamente rigidi	28		
3.4 Limiti di validità della formula di Eulero	29		
4 Flessione retta	31		
4.1 Sezioni omogenee	31		
4.1.1 Integrazione in un campo di spostamenti	32		
		4.1.2 Condizioni di snervamento	37
		4.1.3 Esercizio su una trave IPE	38
		4.2 Sezioni composte di più materiali	39
		4.2.1 Omogeneizzazione	39
		4.2.2 Sezione rettangolare in cemento armato	40
		4.3 Cenni al calcolo a rottura	43
		5 Flessione deviata	47
		5.1 Relazioni nel sistema principale (formula binomia)	47
		5.2 Relazioni nel sistema coniugato (formula monomia)	48
		Proprietà del coniugio	49
		5.3 Sezioni omogenee	51
		5.4 Proprietà dell'ellisse centrale di inerzia	52
		Proprietà delle tangenti	52
		Proprietà dei semidiametri	53
		5.5 Esercizio (sezione rettangolare con un intaglio)	54
		6 Forza normale eccentrica	59
		6.1 Asse neutro	59
		6.2 Tensione normale	61
		6.2.1 Formule binomia e monomia	61
		6.2.2 Formula trinomia	61
		6.2.3 Diagramma delle tensioni normali nel caso omogeneo	62
		6.3 Antipolarità di inerzia	63
		6.3.1 Equazione segmentaria dell'asse neutro	63
		6.3.2 antipolo e antipolare	64
		6.3.3 Prime proprietà dell'antipolarità di inerzia	65
		6.3.4 Teorema di reciprocità	65
		6.3.5 Polarità di inerzia	66
		6.4 Esercizio: sezione composta di due rettangoli	67
		6.5 Esercizio: sezione circolare composta di due materiali	71
		6.6 Nocciolo centrale di inerzia	75
		6.6.1 Contorno del nocciolo quale luogo di punti	75
		6.6.2 Contorno del nocciolo quale involuppo di rette	76
		6.6.3 Corrispondenza tra vertici e segmenti	77
		6.6.4 Sezione rettangolare	78
		6.6.5 Convessità del nocciolo centrale di inerzia	80
		6.6.6 Sezione non reagente a trazione	81
		6.7 Sistema di masse-momenti statici	83

6.7.1 Sezione rettangolare in cemento armato a doppia armatura	86	8.4.5 La sezione a L a lati uguali	142
6.8 Pressoflessione nelle travi snelle (teoria del secondo ordine) . .	88	8.4.6 La sezione a C	143
6.8.1 Esempio 1	88	8.4.6.1 Taglio T_y passante per il centro di taglio	144
6.8.2 Esempio 2	90	8.4.6.2 Centro di taglio	146
7 Torsione	93	8.4.6.3 Taglio T_x passante per il centro di taglio	147
7.1 La sezione circolare	93	8.4.7 Sezione a Z	148
7.2 La sezione circolare cava	94	8.5 Il taglio nelle travi di sezione sottile chiusa simmetrica	153
7.2.1 Esempio (mensola di sezione circolare cava)	95	8.5.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare)	154
7.3 La torsione nelle travi di sezione sottile chiusa	96		
7.3.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare)	99		
7.3.2 Fattore torsionale di rigidezza	100		
7.3.3 La torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse . .	102		
7.4 La torsione nelle travi di sezione sottile aperta	104		
7.4.1 La sezione rettangolare sottile	105		
7.4.2 La sezione sottile generica	109		
7.4.3 Semicirconferenza sottile	113		
7.4.4 La sezione a C	114		
7.4.4.1 Funzione di ingobbamento	114		
7.4.4.2 Centro di taglio	115		
7.4.4.3 Esempio numerico	116		
8 Taglio	117		
8.1 Centro di taglio	117		
8.2 Formula di Jourawski	118		
8.2.1 Formula di Jourawski binomia	118		
8.2.2 Formula di Jourawski monomia	120		
8.2.3 Esercizio: sezione a doppio T	121		
8.3 Il taglio nelle travi di sezione compatta simmetrica	123		
8.3.1 Sezione rettangolare	125		
8.3.2 Sezione circolare	126		
8.3.3 Esercizio: sezione triangolare equilatera	130		
8.4 Il taglio nelle travi di sezione sottile aperta	133		
8.4.1 Fattori di taglio	136		
8.4.2 Andamento qualitativo del diagramma delle tensioni tangenziali su tratti rettilinei a spessore costante	137		
8.4.3 Equilibrio in un nodo triplo	139		
8.4.4 La sezione a doppio T	140		

Capitolo 1

Tensioni nelle travi

Coerentemente con l'ipotesi di Saint-Venant si suppone che nell'intorno di una sezione retta A , di normale l'asse z , la matrice delle componenti del tensore degli sforzi nel riferimento locale sia almeno approssimativamente del tipo:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Ne risulta che la distribuzione delle componenti di tensione τ_{xz} , τ_{yz} e σ_z su una sezione retta è tutto quello che è necessario conoscere per avere il quadro completo dello stato tensionale nell'intorno della stessa sezione retta.

Nel seguito si studieranno le distribuzioni delle componenti di tensione su una sezione retta generica conseguenti ai vari tipi di *sollecitazioni semplici*, ovverossia di caratteristiche della sollecitazione, che possono trovarsi ad agire sulla stessa sezione retta. Si consideri che in ogni caso la soluzione conseguente all'applicazione di più caratteristiche della sollecitazione si può ottenere in generale per sovrapposizione degli effetti. Ciò non toglie comunque che a volte sia auspicabile anche lo studio diretto della distribuzione delle componenti di tensione conseguente a più caratteristiche della sollecitazione agenti contemporaneamente.

1.1 Tensione normale

La tensione normale σ_z è determinata dalla relazione costitutiva locale:

$$\sigma_z \mathbf{e}_z = E \epsilon \mathbf{e}_z + E \mathbf{k}_f \times (P - G), \quad (2)$$

dove $\mathbf{e}_z$ è il versore ortogonale alla sezione retta, ϵ è la dilatazione lineare della linea d'asse baricentrica e $\mathbf{k}_f$ è la curvatura flessionale. La semplicità della relazione (2) rende possibile sviluppare una casistica completa delle possibili distribuzioni di tensione normale.

Per individuare le distribuzioni della tensione normale corrispondenti alla forza normale N e al momento flettente $\mathbf{M}_f$ occorre associare alla (2) i legami costitutivi assiale:

$$N = \mathcal{M} \epsilon, \quad (3)$$

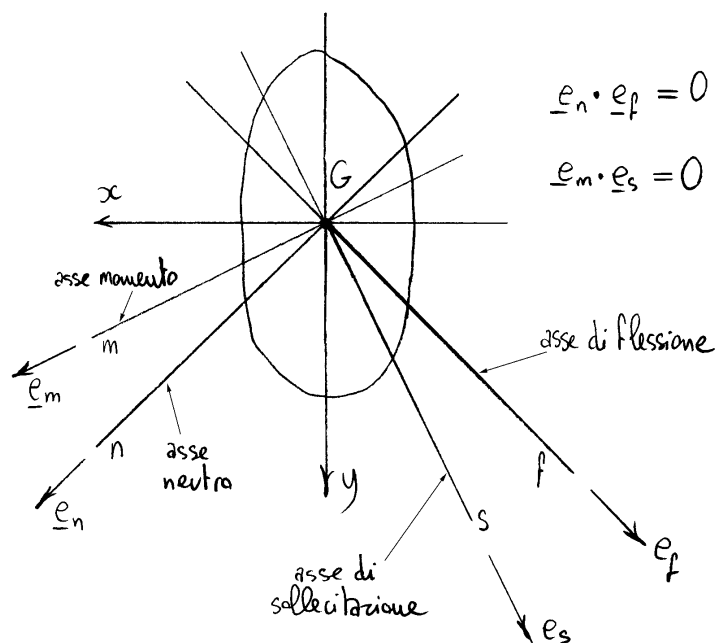
e flessionale:

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{J} \mathbf{k}_f. \quad (4)$$

Si ricorda che la validità delle (3) e (4) richiede la scelta del baricentro G quale polo per il calcolo sia del momento flettente $\mathbf{M}_f$ che della dilatazione ϵ .

L'asse baricentrico m , avente la direzione di $\mathbf{M}_f$, è detto *asse momento*, mentre l'asse baricentrico s ortogonale all'asse momento è detto *asse di sollecitazione*. Si noti che l'asse di sollecitazione è individuato dall'intersezione della sezione retta con il *piano di sollecitazione*, piano baricentrico contenente la coppia flettente $\mathbf{M}_f$.

L'asse baricentrico n , avente la direzione di $\mathbf{k}_f$, è detto *asse neutro*, mentre l'asse baricentrico f ortogonale all'asse neutro



è detto *asse di flessione*. Si ricordi che $\mathbf{k}_f$ è il vettore della rotazione relativa mentre $\epsilon \mathbf{e}_z$ è quello della traslazione relativa. Ne consegue che in presenza di sola flessione, cioè se $N = 0$, la sezione subisce una rotazione relativa attorno all'asse neutro e ne risulta che le fibre longitudinali individuate da tale asse hanno dilatazione nulla e quindi, in accordo con (2), tensione normale nulla. Questa doppia circostanza, statica e cinematica, giustifica il nome di asse neutro (della flessione). Si noti infine che l'asse di flessione è individuato dall'intersezione della sezione retta con il *piano di flessione*, piano baricentrico ortogonale all'asse neutro e quindi contenente, nell'intorno del baricentro, la linea d'asse deformata per effetto della sola flessione.

1.2 Tensione tangenziale

La distribuzione della tensione tangenziale τ_z , oppure delle sue due componenti τ_{xz} e τ_{yz} , è determinata dalle soluzioni del problema della torsione e del problema di torsione, taglio e flessione. Si ricorda che tale distribuzione è “esatta” se la trave soddisfa le condizioni del problema. Poiché queste soluzioni dipendono dalla integrazione della equazione di Laplace con opportune condizioni al contorno, integrazione in generale, per non dire quasi mai, eseguibile in forma chiusa, non solo non è possibile uno studio esauriente come nel caso della tensione normale, ma anche lo studio di un singolo caso può presentare notevoli difficoltà. Per tale motivo si preferisce, quando possibile, utilizzare dei metodi approssimati. Tenendo poi conto del fatto che il taglio, per via delle equazioni indefinite di equilibrio, si presenta quasi sempre in associazione col momento flettente a cui corrispondono dei valori di tensione prevalenti rispetto a quelli dovuti al taglio stesso, a volte è sufficiente che i metodi approssimati forniscano delle indicazioni di massima sui valori delle tensioni tangenziali dovute al taglio.

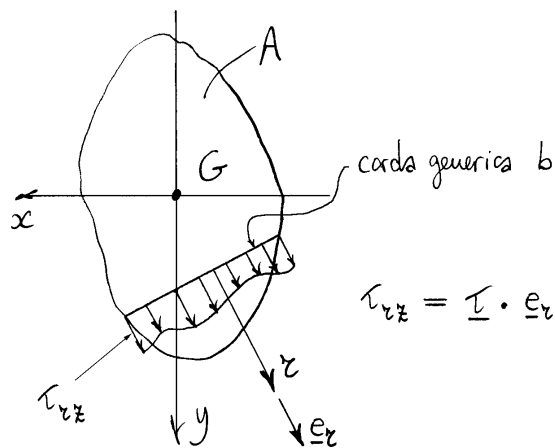
Quello che si farà nel seguito sarà uno studio di alcuni casi tecnicamente importanti. Per quel che riguarda la distribuzione della tensione tangenziale conseguente ad un dato momento torcente, non è possibile prescindere dalla soluzione del problema della torsione, indispensabile tra l'altro per la determinazione generale del centro di taglio. I casi particolari che si svilupperanno nel seguito saranno quindi basati sulla soluzione, eventualmente approssimata, del problema della torsione.

Per quel che riguarda invece la distribuzione della tensione

tangenziale conseguente ad una data forza di taglio, i casi particolari che si svilupperanno nel seguito non saranno basati sulla soluzione del problema di torsione, taglio e flessione. Ci si baserà invece sul fatto che una semplice equazione di equilibrio, nota col nome di *formula di Jourawski*, associata alla soluzione (2) nelle tensioni normali, sarà in grado di fornire, nel cilindro di Saint-Venant, la tensione tangenziale media lungo una corda qualunque della sezione retta, anche se solo per quel che riguarda la componente della tensione in direzione ortogonale alla corda stessa.

Allo scopo di ottenere la formula di Jourawski, si consideri una generica corda b (di lunghezza b) e sia $\bar{\tau}_{rz}$ la tensione tangenziale media su tale corda, relativamente alla componente nella direzione r ortogonale alla corda:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{1}{b} \int_b \tau_{rz} db. \quad (4)$$



Nella (4) τ_{rz} è la componente ortogonale alla corda della tensione tangenziale puntuale. Si consideri poi l'equilibrio alla traslazione in direzione dell'asse del cilindro di una sua porzione che si ottiene sezionando un elemento dz di cilindro (intorno della generica sezione di coordinata z) con un piano longitudinale passante per la corda b . Delle due porzioni si sceglie quella avente la direzione r positiva entrante e che nel seguito sarà indicata con A^* . Le componenti in direzione dell'asse z delle forze che agiscono sulla porzione di trave così individuata sono:

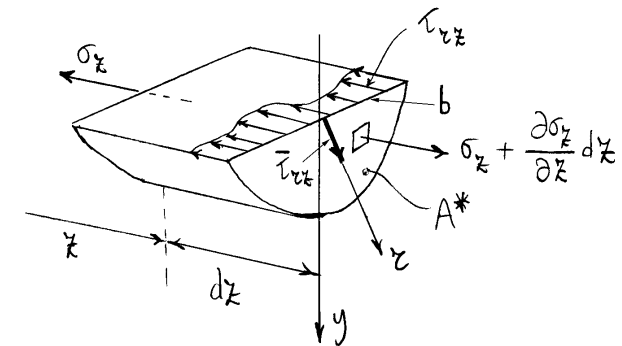
– σ_z , sulla porzione A^* della sezione di coordinata z ;

$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$, sulla porzione A^* della sezione di coordinata $z + dz$;

– τ_{rz} , sulla sezione longitudinale, avendo tenuto conto del teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali.

L'equilibrio si scrive pertanto:

$$-\int_{A^*} \sigma_z dA + \int_{A^*} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA - \int_b (\tau_{rz} dz) db = 0, \quad (5)$$



e cioè:

$$\int_b \tau_{rz} db = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA. \quad (6)$$

In virtù della (4), la tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{rz}$ risulta pertanto:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{1}{b} \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA. \quad (7)$$

La relazione (7) e le relazioni (2) e (3) relative alla tensione normale rendono determinato il problema del calcolo della tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{rz}$.

1.3 Criteri di snervamento

La distribuzione delle tensioni normali e quella delle tensioni tangenziali dedotte precedentemente dipendono strettamente dall'assunzione di un legame costitutivo locale elastico lineare. È già stato detto a suo tempo come implementare altri tipi di legame costitutivo nell'ambito del modello della trave inflessa. Se si vogliono effettuare delle verifiche di resistenza agli stati limite ultimi può essere indispensabile mettere in conto lo sviluppo di deformazioni plastiche oppure di danneggiamenti del materiale. In tal caso occorre quindi valutare il livello di snervamento, o di danneggiamento, corrispondente al dato stato tensionale, livello a partire dal quale iniziano a svilupparsi le plasticizzazioni, oppure i danneggiamenti, del materiale. Se si assume un comportamento elastico lineare nella fase precedente lo snervamento del materiale, come è sempre lecito fare per esempio nel caso di acciaio strutturale laminato a caldo, lo stato tensionale precedente il raggiungimento di tale limite è quello dedotto al paragrafo precedente.

1.3.1 Tensione normale

Per quel che riguarda il limite di snervamento, si noti che se sulla sezione retta della trave è presente la sola tensione normale allora la tensione nell'intorno di un punto risulta monoassiale, ovverossia dello stesso tipo di quella che si ha in un provino soggetto a trazione o a compressione semplice. In tal caso lo snervamento nell'intorno di un punto avviene quindi quando la tensione normale agente sulla sezione retta in corrispondenza del dato punto coincide con la tensione di snervamento. Se con σ_s^+ e σ_s^- si indicano i moduli della tensione di snervamento, rispettivamente a trazione e a compressione, lo snervamento viene quindi raggiunto quando la tensione normale σ soddisfa una delle due uguaglianze seguenti:

$$\sigma = \sigma_s^+, \quad \sigma = -\sigma_s^-, \quad (8)$$

mentre per la stretta appartenenza al dominio di elasticità si richiede che sia:

$$-\sigma_s^- < \sigma < \sigma_s^+. \quad (9)$$

Se il materiale presenta un uguale livello di snervamento σ_s a trazione e a compressione, come nel caso dei materiali metallici, è sufficiente confrontare con tale valore il modulo della tensione normale. Il criterio di snervamento e la stretta appartenenza al dominio di elasticità si esprimono quindi rispettivamente come segue:

$$|\sigma| = \sigma_s, \quad |\sigma| < \sigma_s. \quad (10)$$

Poiché la tensione normale varia in generale da punto a pun-

to della sezione retta, la verifica del raggiungimento della condizione di snervamento va eseguita nei punti maggiormente sollecitati.

La conoscenza del livello di snervamento del materiale e dello stato tensionale dedotto nell'ipotesi di materiale indefinitamente elastico, con la sola aggiunta di un "opportuno" coefficiente di sicurezza, permette anche di effettuare in modo molto semplice una verifica di resistenza alle tensioni ammissibili. Basta a tale scopo sfruttare la condizione (12) di appartenenza al dominio di elasticità, e richiedere quindi che la tensione normale σ soddisfi la condizione:

$$\frac{-\sigma_s^-}{\gamma} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_s^+}{\gamma}, \quad (11)$$

dove γ è un coefficiente di sicurezza maggiore dell'unità. È opportuno a questo punto ricordare che la semplicità della verifica (11) è figlia delle stesse ragioni che hanno reso obsoleto il metodo di verifica alle tensioni ammissibili.

1.3.2 Tensione tangenziale

Nel caso che sulla sezione retta della trave sia presente anche la tensione tangenziale, non è possibile confrontarsi direttamente con la tensione di snervamento, definita nel caso di uno stato di tensione monoassiale. Introducendo la tensione ideale σ_i , ovvero la tensione monoassiale equivalente, dal punto di vista dello snervamento, al dato stato tensionale, la condizione di appartenenza al dominio elastico richiede, analogamente alle (8) e (9):

$$-\sigma_s^- \leq \sigma_i \leq \sigma_s^+. \quad (12)$$

Limitandosi al caso dei materiali metallici, ovvero dei materiali duttili, ed utilizzando il criterio di Huber-von Mises, nel caso in cui sia presente la sola tensione tangenziale si ha:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau,$$

dove τ è il modulo della tensione tangenziale che agisce sulla sezione retta. Naturalmente la tensione tangenziale varia da punto a punto e quindi la verifica del raggiungimento della condizione di snervamento va eseguita nei punti maggiormente sollecitati. Se oltre al taglio e al momento torcente agiscono anche dei momenti flettenti e delle forze normali nella sezione è anche presente una tensione normale σ . In tal caso la tensione ideale, sempre utilizzando il criterio di Huber-von Mises, si calcola come segue:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

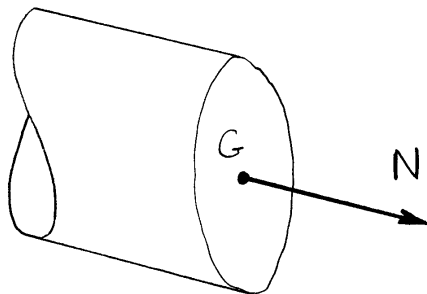
Si noti che tale formula, come d'altronde la precedente, fornisce sempre un valore positivo, il che non è limitativo poiché i materiali metallici hanno uguale snervamento a trazione e compressione.

Capitolo 2

Forza normale centrata

Si dice che una sezione è soggetta ad una forza normale centrata se l'unica caratteristica della sollecitazione che agisce nella sezione è la forza normale, avendo scelto quale polo di riduzione il baricentro della sezione stessa. Essendo $M_f = 0$ la tensione normale vale:

$$\sigma_z = E \frac{N}{\mathcal{M}}. \quad (1)$$

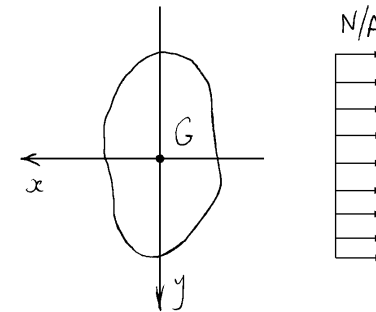


2.1 Sezioni omogenee

Nel caso di sezione omogenea, la tensione normale è costante nella sezione:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad (2)$$

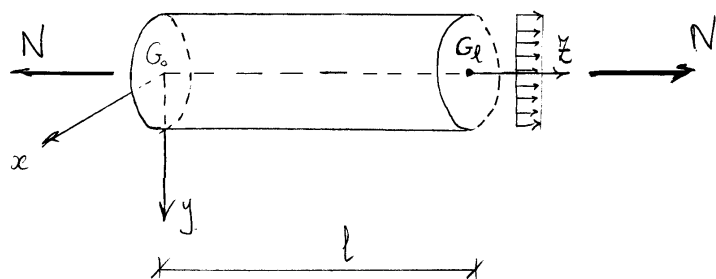
e rappresenta dunque la più semplice distribuzione di tensioni normali sulla sezione retta.



Si ricorda che se la forza normale è positiva è detta di trazione, se negativa di compressione.

2.1.1 Integrazione in un campo di spostamenti

Si consideri ora un cilindro omogeneo soggetto al campo di tensioni sopra descritto. Si vuole mostrare nel seguito che tale campo di tensioni rappresenta una soluzione particolare del problema di Saint-Venant. A tale scopo si trasforma innanzitutto il campo di tensioni in un campo di deformazioni applicando la legge di Hooke inversa, per poi integrare il campo di deformazioni così ottenuto in un campo di spostamenti.



risulta:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{N}{EA} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il campo tensionale soluzione risulta:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Il campo delle deformazioni si ottiene dalla relazione inversa di Hooke:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \underline{\sigma} - \nu (\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{I} \right\}.$$

Poiché:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{A} \end{bmatrix}, \quad \text{tr} \underline{\sigma} = \frac{N}{A},$$

Gradiente della rotazione locale rigida:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} = 0, \quad (i,j) = \begin{cases} (z,y) \\ (x,z) \\ (y,x) \end{cases}.$$

A meno di una inesistente rotazione rigida globale di tutto il cilindro risulta:

$$\begin{cases} \underline{\omega} = \underline{0} \\ \text{grad} \underline{u} = \underline{\varepsilon} \end{cases}, \quad \underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

Integrando si ottiene quindi:

$$u = -\nu \frac{N}{EA} x + f(y, z).$$

Risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f = g(z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow y = \text{cost}.$$

Una costante rappresenta una traslazione rigida, in tal caso nella direzione dell'asse x . A meno di tale traslazione rigida, la componente dello spostamento in direzione dell'asse x vale:

$$u = -\nu \frac{N}{EA} x.$$

Procedendo analogamente per v e w , si ottiene definitivamente il quadro completo delle componenti di spostamento:

$$u = -\frac{\nu N}{EA} x,$$

$$v = -\frac{\nu N}{EA} y,$$

$$w = \frac{N}{EA} z$$

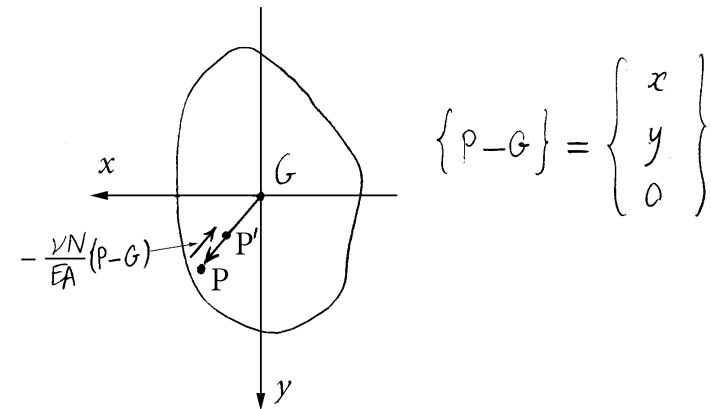
Tale campo di spostamenti può essere separato in due quote:

$$\underline{u} = \frac{N}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} - \frac{\nu N}{EA} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix},$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\underline{u} = \frac{N}{EA} z \underline{e}_z - \frac{\nu N}{EA} (\underline{P} - \underline{G}).$$

Il primo termine è indipendente da x ed y e quindi rappresenta una traslazione rigida della sezione (in direzione dell'asse z).



Il secondo termine ha componente $w = 0$ e dipende da x e da y . Rappresenta quindi una deformazione della sezione nel proprio piano.

Tale deformazione sposta un punto P in direzione della congiungente di P con G , e poiché il rapporto:

$$\frac{|P-P'|}{|P-G|} = \frac{\nu N}{EA},$$

è costante, cioè non dipende da P , tale deformazione rappresenta una omotetia.

Da tale decomposizione del campo degli spostamenti risulta evidente che la sezione resta piana.

2.1.2 Condizioni di snervamento

La situazione statica è quella che si ha in un provino soggetto a trazione o a compressione semplice. Per tale motivo occorre quindi confrontare direttamente la tensione normale agente sulla sezione con quella di snervamento (tensione al limite di elasticità, effettiva o convenzionale).

Se il materiale presenta un diverso livello di snervamento a trazione e a compressione, a seconda che N sia di trazione oppure di compressione occorre confrontarsi con la corrispondente tensione di snervamento, a trazione oppure a compressione. Le condizioni di appartenenza al dominio di elasticità risultano quindi:

$$\frac{N}{A} \leq \sigma_s^+ \quad \text{se} \quad N > 0,$$

$$\frac{N}{A} \geq -\sigma_s^- \quad \text{se} \quad N < 0,$$

dove σ_s^+ e σ_s^- sono le tensioni di snervamento a trazione e a compressione rispettivamente.

2.2 Sezioni composte di più materiali

Se la sezione è composta di più materiali, la tensione normale nel materiale i -esimo vale:

$$\sigma_i = E_i \frac{N}{M},$$

dove E_i è il modulo di Young dell' i -esimo materiale e la massa totale vale:

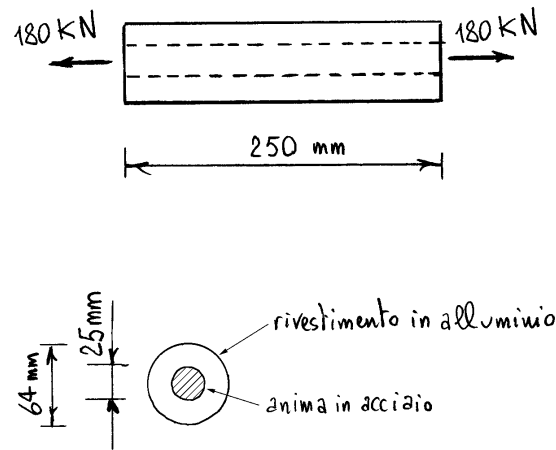
$$M = \sum_i E_i A_i,$$

dove A_i è l'area dell' i -esimo materiale.

Naturalmente, la condizione di snervamento va imposta per ogni materiale relativamente alla sua tensione di snervamento.

Come esempio, si consideri una barretta circolare costituita da un'anima in acciaio e da un rivestimento in alluminio, di moduli di Young rispettivamente:

$$\begin{cases} E_{ac} = 210 \text{ GPa} = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ E_{al} = 70 \text{ GPa} = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2 \end{cases}.$$



Risulta:

$$\begin{cases} A_{ac} = \frac{\pi}{4} (25 \text{ mm})^2 = 491 \text{ mm}^2 \\ A_{al} = \frac{\pi}{4} (64 \text{ mm})^2 - A_{ac} = 2726 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

e quindi:

$$M = E_{ac} A_{ac} + E_{al} A_{al} = 2.94 \times 10^8 \text{ N}.$$

Le tensioni normali σ_{ac} nell'acciaio e σ_{al} nell'alluminio valgono allora:

$$\sigma_{ac} = E_{ac} \frac{N}{M} = 129 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{al} = E_{al} \frac{N}{M} = 42.9 \text{ N/mm}^2,$$

e le quote N_{ac} e N_{al} di forza normale assorbite rispettivamente dall'area di acciaio e da quella di alluminio valgono infine:

$$N_{ac} = \sigma_{ac} A_{ac} = 63131 \text{ N},$$

e

$$N_{al} = \sigma_{al} A_{al} = 116869 \text{ N}.$$

Si noti che a seguito della maggior rigidità, ovvero sia del modulo di Young più elevato, l'anima in acciaio assorbe una quota di carico più che proporzionale rispetto all'area.

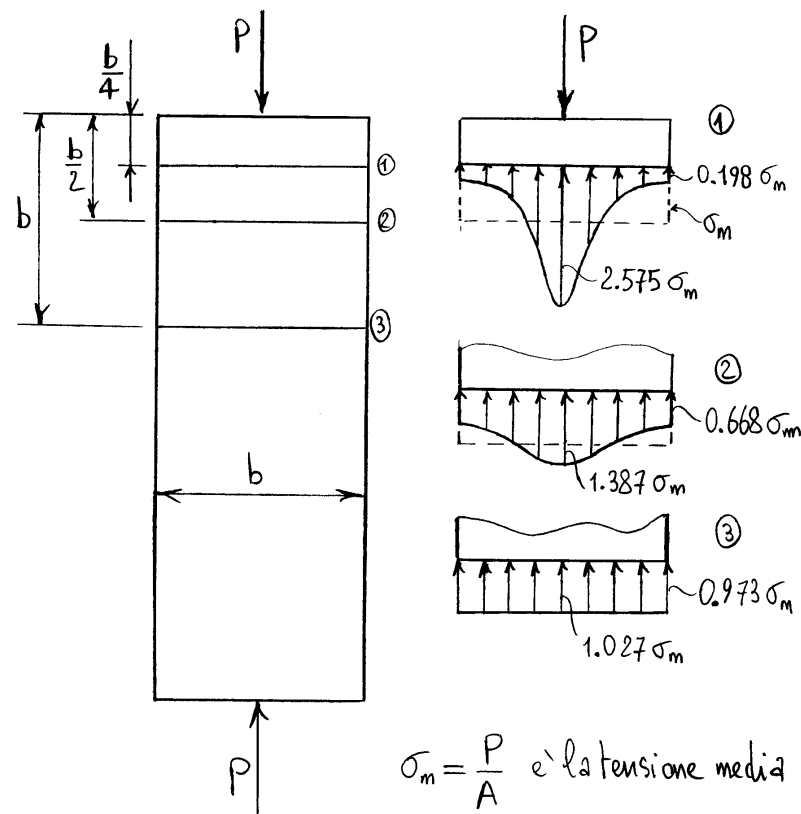
2.3 Concentrazioni di sforzo

Gli sforzi vicino ai punti di applicazione di carichi concentrati possono superare anche di molto lo sforzo medio. Stessa cosa succede quando un elemento strutturale contiene una discontinuità, come un foro oppure una brusca variazione di sezione. Spesso sono proprio le concentrazioni di sforzo che innescano la propagazione di una frattura.

Per quel che riguarda i carichi concentrati, prendiamo quale esempio una lastra di larghezza b e soggetta ad una estremità ad un carico concentrato. Nella figura seguente sono illustrati gli andamenti degli sforzi agenti in tre sezioni poste a distanze crescenti dal punto di applicazione del carico concentrato, andamenti dedotti nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità e confermati qualitativamente dall'analisi fotoelastica condotta su provini di materiale apposito. L'andamento tensionale illustrato è in accordo con il

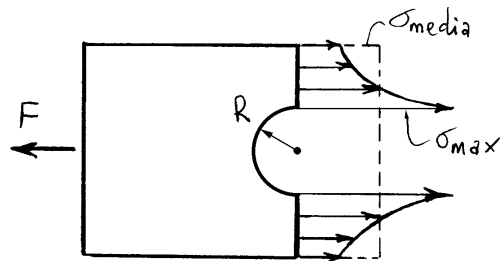
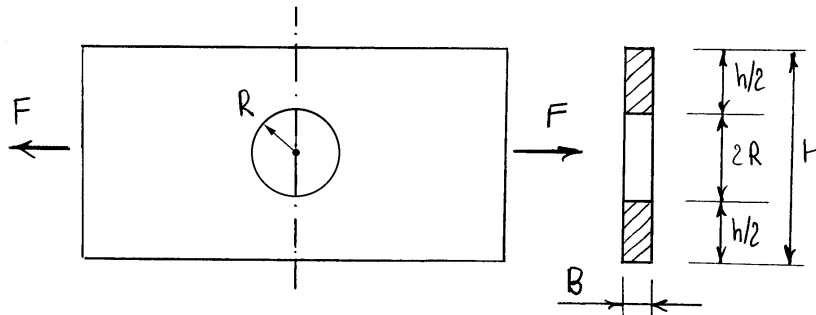
principio di Saint Venant :

"la distribuzione degli sforzi conseguente alla applicazione di carichi staticamente equivalenti è praticamente indipendente dalle effettive modalità di applicazione del carico, ad eccezione delle immediate vicinanze della zona di applicazione del carico."



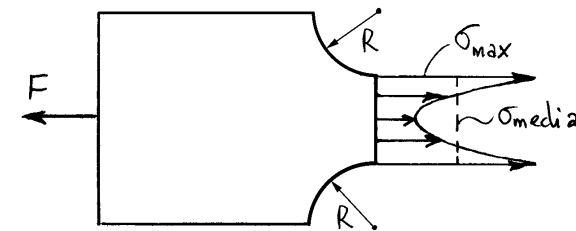
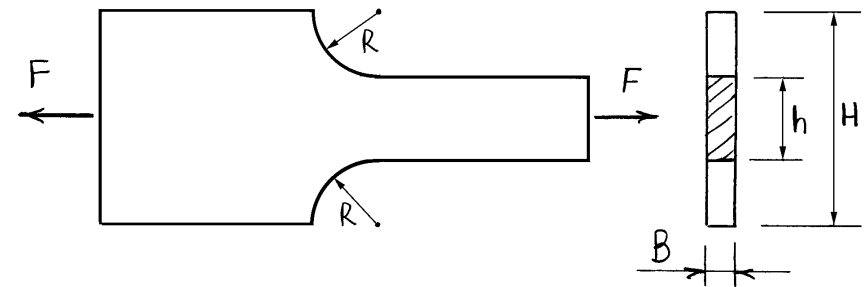
Si ricorda che è la validità di tale principio che consente di fondare una teoria della trave sulle caratteristiche della sollecitazione.

Nelle figure seguenti sono invece riportati gli andamenti tensionali in corrispondenza di un foro in una lastra e di una brusca variazione di sezione rispettivamente, dovuti all'applicazione di una forza normale centrata.



$$A = B h$$

$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$



$$A = B h$$

$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$

Per trattare questi casi di concentrazione di sforzo si introduce il concetto di fattore di concentrazione degli sforzi:

$$S = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{media}},$$

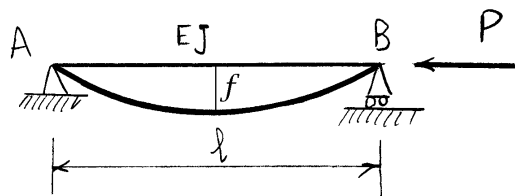
che si ritrova tabellato in manuali o in testi sull'argomento.

Capitolo 3

Aste compresse

È esperienza comune che un'asta flessibile compressa non resti rettilinea ma subisca invece un'inflessione laterale. Questa inflessione compare fin dall'inizio dell'applicazione del carico e aumenta all'aumentare del carico. Questo tipo di problemi si inquadra nell'ambito degli studi sulla *biforcazione dell'equilibrio* e sull'*instabilità dell'equilibrio* delle strutture.

Lo schema tipico di riferimento è quello dell'*asta di Eulero*, un'asta elastica lineare con un appoggio fisso ad una estremità e un carrello all'altra estremità e soggetta ad una forza normale P di compressione in corrispondenza del carrello.



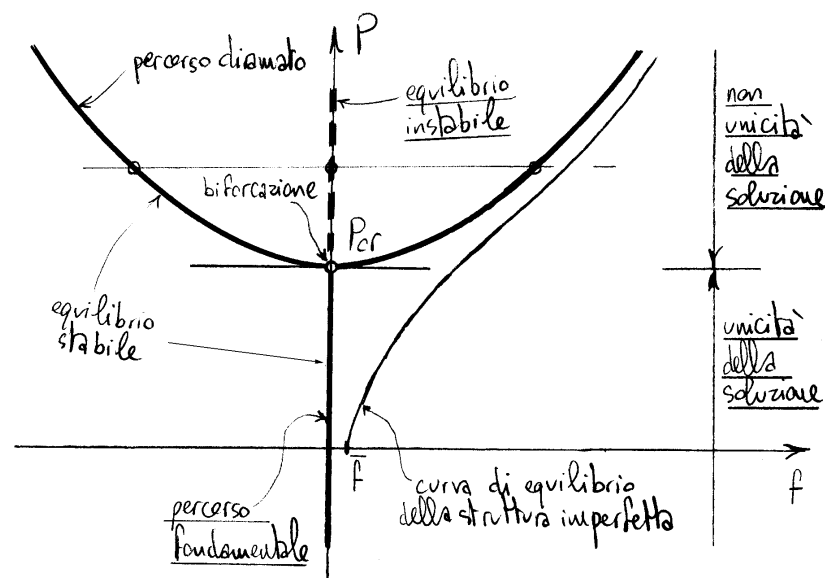
3.1 Biforcazione dell'equilibrio

Si consideri allora un'asta elastica lineare soggetta ad una forza normale P di compressione, per esempio l'asta di Eulero. Nell'analisi di questo tipo di problemi viene normalmente trascurata la deformabilità assiale dell'asta. In tale ipotesi la configurazione indeformata è equilibrata sotto l'azione del carico, qualunque sia il valore del carico. Viene così definito un *percorso di equilibrio fondamentale o naturale* nello spazio delle soluzioni che si ottiene aggiungendo la dimensione P del carico allo spazio (infinito dimensionale) delle configurazioni.

Il percorso di equilibrio fondamentale o naturale è l'unico percorso di equilibrio determinabile dalla teoria lineare, nell'ambito della quale la soluzione è unica. Se il problema dell'equilibrio di un'asta compressa, ancora considerata elastica lineare, viene affrontato mettendo in conto una cinematica finita, le teorie che si ottengono sono non lineari e si ottengono altri percorsi di equilibrio alcuni dei quali, se non tutti, intersecano il percorso fondamentale e per questo sono detti *percorsi di equilibrio biforcuto o diramati*. Il valore del carico corrispondente alla intersezione di un percorso diramato con quello fondamentale è detto carico critico. Dal punto di vista strutturale il carico critico più importante è il primo carico critico, ovvero quello più piccolo, poiché all'aumentare del carico a partire dalla configurazione naturale è il primo che si raggiunge e quindi il primo che segnala la comparsa di un nuovo fenomeno, nel caso oggetto di studio l'inflessione laterale. Il *comportamento post critico* dell'asta è individuato dalle caratteristiche del percorso di equilibrio che si dirama a partire dal carico critico più

piccolo, la più importante delle quali è rappresentata dal fatto che lungo il percorso diramato il carico sia crescente oppure decrescente.

Senza entrare in complessi dettagli, si segnala semplicemente che il post critico di un'asta compressa, tipo l'asta di Eulero, è a carico crescente e questo significa che un'asta indefinitamente elastica (che quindi non si plasticizza e non si frattura) può raggiungere stati di equilibrio corrispondenti ad un carico superiore al primo carico critico, anche se al prezzo di grandi spostamenti. Per disegnare in un piano il percorso di equilibrio fondamentale si scelga uno spostamento significativo dovuto alla flessione, per esempio la freccia f in mezzzeria della trave nel caso dell'asta di Eulero, per rappresentare lo spazio delle configurazioni.

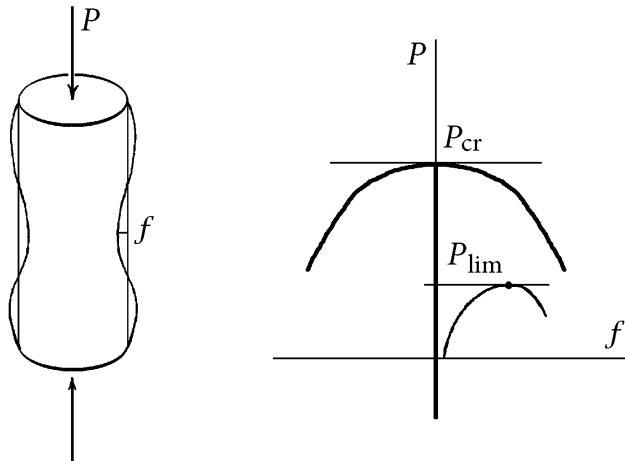


Dal punto di vista della stabilità dell'equilibrio, il percorso di equilibrio naturale viene separato in due parti dal primo carico critico, la parte inferiore comprendente stati di equilibrio stabili e la parte superiore instabili, mentre il percorso di equilibrio post critico è invece stabile, almeno nella prima parte, che poi è l'unica importante dal punto di vista strutturale.

Si tenga poi conto del fatto che una struttura "reale" presenta sempre delle "imperfezioni" rispetto al modello "perfetto", preso come base per i calcoli e per la realizzazione della struttura. Risulta quindi importante la valutazione del comportamento della struttura "imperfetta", sia che queste imperfezioni riguardino la configurazione geometrica della struttura oppure le forze applicate. La configurazione naturale della struttura imperfetta differisce da quella della struttura perfetta se l'imperfezione riguarda la geometria della struttura, come la presenza di una freccia iniziale nel caso dell'asta di Eulero. Il percorso di equilibrio della struttura imperfetta presenta fin dall'inizio le caratteristiche del percorso diramato post critico della struttura perfetta, dove invece compaiono solo all'atto della biforcazione dell'equilibrio. Per questo motivo tale percorso si presenta normalmente regolare, a differenza del passaggio tra il percorso fondamentale e quello diramato attraverso il punto di biforcazione dell'equilibrio. Poiché il percorso della struttura imperfetta si schiaccia al limite su quello della struttura perfetta, nel caso di piccole imperfezioni la qualità del percorso imperfetto è decisa dal percorso post critico. Per tale motivo strutture che come l'asta di Eulero hanno un post critico a carico crescente e stabile sono dette *non sensibili alle imperfezioni*.

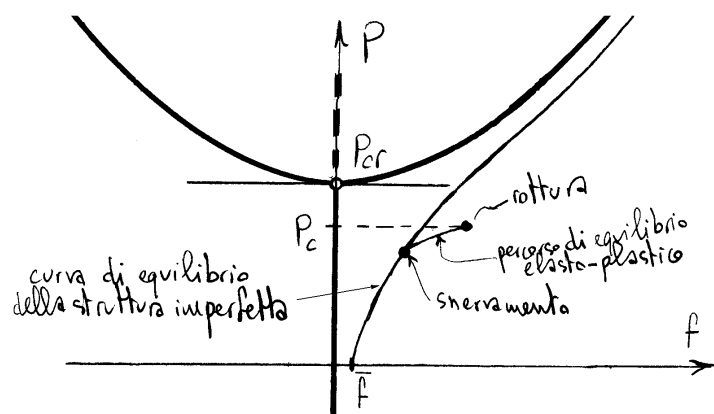
Se invece il post critico di una struttura è decrescente, e quin-

di instabile, si dice che la struttura stessa è *sensibile alle imperfezioni*, poiché in tal caso il valore del carico critico non può essere raggiunto, sul percorso di equilibrio imperfetto, nemmeno teoricamente. Tale situazione non si presenta nel caso oggetto di studio, che è quello di aste compresse che subiscono una flessione laterale, ma si presenta invece in altri casi tecnicamente molto importanti come, per esempio, quello dei cilindri cavi sottili compressi che possono subire, oltre alla inflessione laterale come una qualunque asta compressa, una deformazione ad onde lungo l'asse del cilindro, asse che resta rettilineo.



3.2 Verifica di sicurezza di profilati metallici compressi

Se si sottopone a prova di compressione un profilato metallico standard, le inevitabili imperfezioni geometriche insieme con le inevitabili imperfezioni nell'applicazione dello sforzo normale centrato, fanno sì che il profilato, se snello, si infletta fin dall'inizio del caricamento. Questo fatto ha come conseguenza la circostanza che lo snervamento prima e la rottura poi si sviluppano ad un livello inferiore del carico critico P_{cr} . Il livello P_c raggiunto a rottura viene assunto dalla normativa europea quale base per la verifica dei profilati metallici compressi. I carichi di rottura P_c sono stati determinati per vari tipi di profilati metallici



da ricerche sperimentali i cui risultati sono riportati nella normativa internazionale, tra cui quella italiana, e in particolare nella parte 1-1 “Regole generali e regole per gli edifici” dell’eurocodice 3 “UNI EN 1993 (2005) Progettazione delle strutture di acciaio”, in termini del rapporto χ tra la tensione normale massima σ_b e la tensione di snervamento f_y

$$\chi = \frac{\sigma_b}{f_y}.$$

3.3 Calcolo dei carichi critici col metodo statico

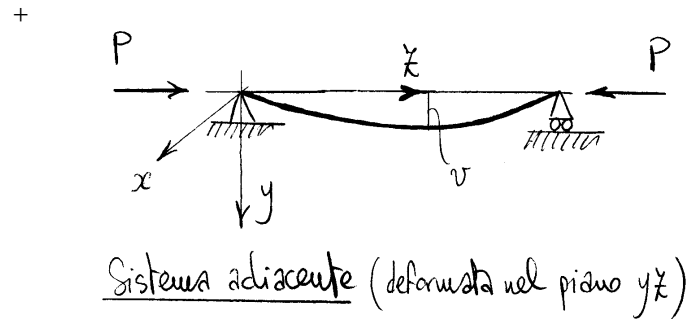
Un carico critico è caratterizzato dall'esistenza di configurazioni equilibrate inflesse nella vicinanza della configurazione equilibrata indeformata. L'intorno di tale configurazione può quindi essere esplorato tramite una cinematica linearizzata, ma l'equilibrio deve essere scritto nella configurazione deformata.

Tale metodo di calcolo dei carichi critici è detto *metodo statico*, mentre una configurazione nell'intorno della configurazione equilibrata indeformata, descritta relativamente a questa da una cinematica linearizzata, è detta essere una configurazione *adiacente* la configurazione equilibrata indeformata stessa.

3.3.1 Asta di Eulero

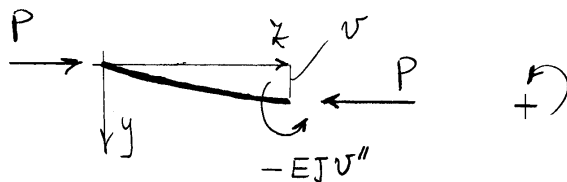
Si sceglie una configurazione deformata generica di tipo flessionale, adiacente la configurazione indeformata equilibrata. La configurazione deformata definisce il piano di flessione che viene fatto coincidere col piano yz .

Per gli equilibri globali alla traslazione verticale ed alla rotazione le reazioni verticali degli appoggi A e B sono nulle. Sezionando la trave in



Corrispondenza dell'ascissa ξ generica, si mette in evidenza un momento flettente proporzionale alla curvatura della trave, di asse momento in direzione x se e solo se y è principale di inerzia.

La forza verticale risulta nulla, per equilibrio alla traslazione verticale di una delle due parti in cui si è divisa la trave.



L'equilibrio alla rotazione della stessa parte è possibile solo se y è principale di inerzia, ed in tal caso si scrive:

$$-EJ v'' - P v = 0 .$$

Posto :

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ} ,$$

si ottiene:

$$v'' + \alpha^2 v = 0 . \quad (1)$$

L'equazione differenziale ottenuta è omogenea e quindi ammette la soluzione banale $v=0$. Si è così ottenuto un problema agli autovalori ed autovettori. Gli autovalori sono i carichi critici, che saranno determinati richiedendo che l'equazione omogenea ammetta soluzioni $v \neq 0$. Sostituendo un valore critico nell'equazione differenziale si

otteniamo poi i modi critici, cioè gli autovettori corrispondenti.

L'equazione algebrica associata all'equazione differenziale a coefficienti costanti (1) risulta:

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\alpha,$$

e quindi si ha il seguente integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(l) = 0 \Rightarrow C_1 \sin \alpha l = 0 \end{cases}.$$

Volendo ottenere delle soluzioni $v \neq 0$ occorre

che sia $C_1 \neq 0$. Dunque, l'equazione determinante dei carichi critici risulta:

$$\sin \alpha l = 0,$$

ovverossia:

$$\alpha l = n\pi \quad (n \text{ intero}),$$

da cui, tenendo conto della definizione di α :

$$P_{cr} = n^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Si hanno quindi infiniti carichi critici, uno per ogni valore di n . Il carico critico minimo, detto carico critico di Eulero o euleriano, si ottiene ponendo $n = 1$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

In sua corrispondenza, il modo critico risulta:

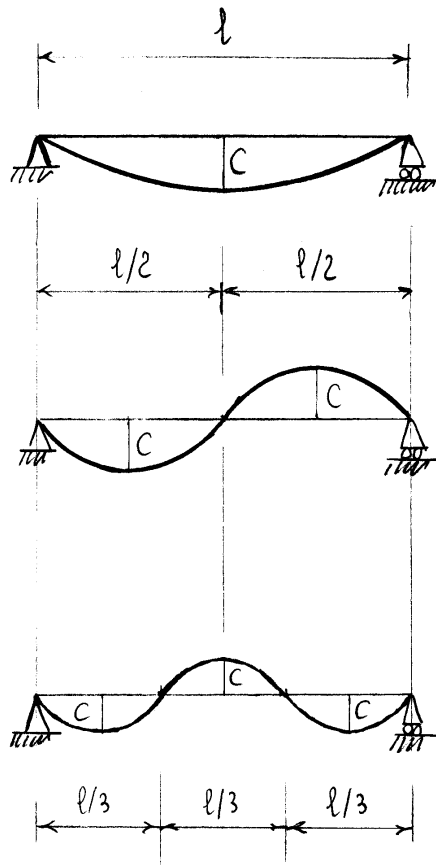
$$v = C \sin \frac{\pi}{l} x,$$

poiché, per $n = 1$, $\alpha l = \pi$. Ponendo poi $\alpha l = 2\pi$, $\alpha l = 3\pi$ e così via, si hanno i modi critici corrispondenti ai successivi carichi critici:

$$v = C \sin \frac{2\pi}{l} x \quad (n=2),$$

$$v = C \sin \frac{3\pi}{l} x \quad (n=3),$$

e così via.



$n=1$

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$n=2$

$$P_{cr} = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

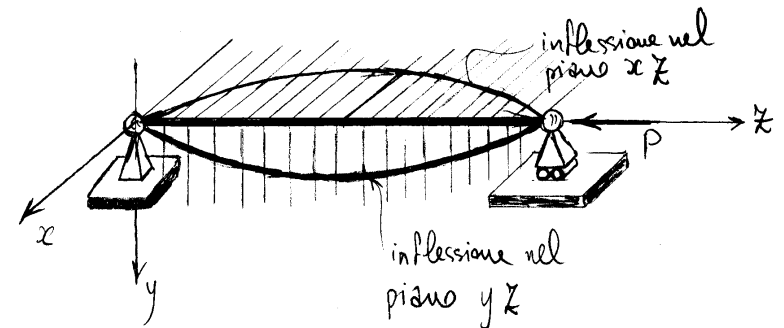
$n=3$

$$P_{cr} = 9\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

In generale il modo critico risulta:

$$v = C \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Se l'asta è libera di inflettersi in ogni piano e se le cerniere alle due estremità sono sferiche, l'asta può inflettersi in uno qualunque dei due piani longitudinali contenenti un'asse principale di inerzia della sezione.



In tal caso il minimo carico critico dell'asta è quello relativo alla inflessione nel piano di

minima rigidità, normale all'asse principale di inerzia di minimo momento di inerzia:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E J_{\min}}{l^2},$$

dove:

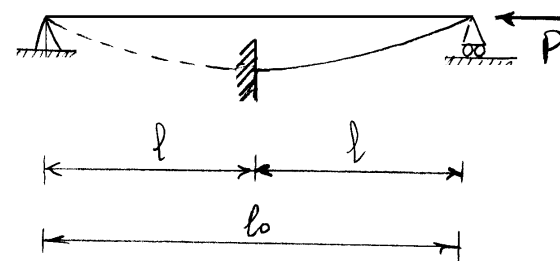
$$J_{\min} = \min \{ J_x, J_y \}.$$

Se, invece, le cerniere sono cilindriche, con l'asse del cilindro nella direzione x , per l'inflessione nel piano yz continua a valere la formula $P_{cr} = \pi^2 EJ_x / l^2$, mentre per l'inflessione nel piano xz occorre considerare le sezioni di estremità impedite di ruotare attorno all'asse y , e quindi come se fossero incastate.

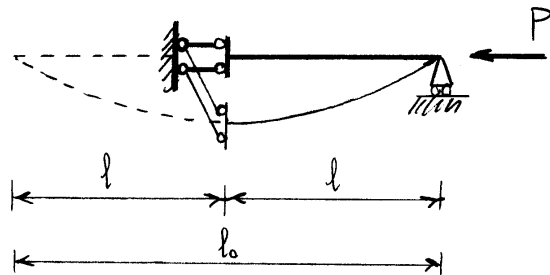
3.3.2 Mensola

Per simmetria, la sezione di mezzaria dell'asta incernata alle due estremità non ruota durante l'inflessione laterale. Questo significa che la mensola si comporta, a meno di una traslazione verticale, come una trave appoggiata di lunghezza $l_0 = 2l$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2} = \pi^2 \frac{EJ}{4l^2}.$$



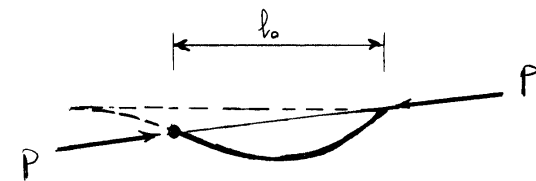
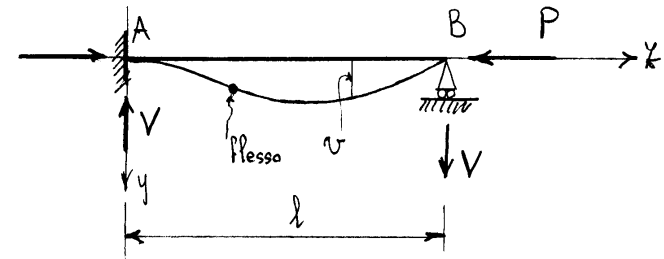
Analogo alla mensola e' l'asta incernierata ad una estremita' e con incastro scorrevole all'altra estremita'.



La lunghezza l_0 della trave appoggiata equivalente, che poi coincide con la distanza tra due flessi consecutivi della deformata critica, e' detta luce libera di inflessione.

3.3.3 Trave incastro-appoggio

La configurazione adiacente presenta almeno un punto di flesso intermedio, oltre al punto B in corrispondenza dell'appoggio. La parte di trave compresa tra i due flessi e'

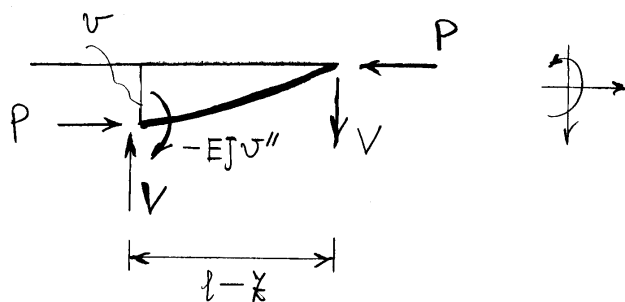


equivalente (nella cinematica linearizzata) alla trave appoggiata alle estremita'. Se l_0 indica la luce

libera di inflessione della trave, ovvero sia la distanza tra i due flessi, risulta quindi:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}.$$

La distanza l_0 non è però nota a priori. Per risolvere il problema,



consideriamo l'equilibrio alla rotazione di un tratto di trave:

$$EJ v'' + P v - V(l-x) = 0,$$

e cioè:

$$(1) \quad v'' + \alpha^2 v - \frac{V}{EJ}(l-x) = 0,$$

avendo ancora posto:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Un integrale particolare della (1) risulta:

$$v = \frac{V}{P}(l-x),$$

e quindi si ha il seguente integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \frac{V}{P}(l-x).$$

Le condizioni al contorno impongono:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{V}{P}l = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{V}{P}l$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow \alpha C_1 - \frac{V}{P} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{V}{\alpha P}$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow \frac{V}{\alpha P} \sin \alpha l - \frac{V}{P}l \cos \alpha l = 0$$

L'equazione determinante dei carichi critici risulta dunque:

$$\sin(\alpha l) - \alpha l \cos(\alpha l) = 0,$$

Si noti che se $\cos \alpha l = 0$ allora $\sin \alpha l \neq 0$ e l'equazione non è soddisfatta. Dividendo allora l'equazione per $\cos \alpha l$ si ottiene

la condizione equivalente:

$$\tan(\alpha l) = \alpha l.$$

Limitandosi a riportare cinque cifre significative, la soluzione più piccola risulta:

$$\alpha_{cr} l = 4.49341 = 1.43030 \pi.$$

Tenendo conto che $(1.43030)^2 = 2.04575$, il più piccolo carico critico vale:

$$P_{cr} = 2.04575 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Il modo critico corrispondente risulta poi:

$$v = \frac{V}{\alpha_{cr} P_{cr}} \left\{ \sin(\alpha_{cr} \bar{x}) - \alpha_{cr} l \cos(\alpha_{cr} \bar{x}) + \alpha_{cr} (1 - \bar{x}) \right\}$$

dove:

$$\alpha_{cr} = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EJ}} = 1.43030 \frac{\pi}{l}.$$

I punti di flesso sono definiti dalla condizione

$v'' = 0$, che risulta:

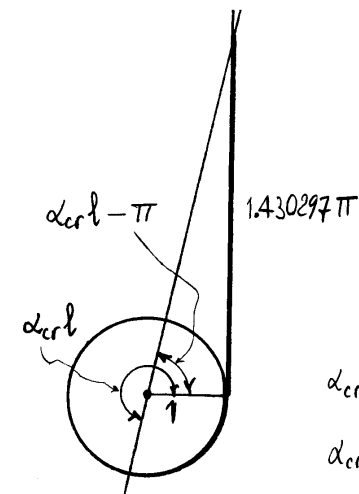
$$\tan(\alpha_{cr} \bar{x}) = \alpha_{cr} l.$$

Dato che α_{cr} soddisfa l'uguaglianza:

$$\tan(\alpha_{cr} l) = \alpha_{cr} l,$$

è evidente che $\bar{x} = l$ rappresenta una radice. La seconda radice (contenuta nell'intervallo $0 \leq \bar{x} \leq l$) la si ottiene osservando che $\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha$ e che dunque:

$$\tan(\alpha_{cr} l - \pi) = \alpha_{cr} l.$$



$$\alpha_{cr} l = 1.430297 \pi$$

$$\alpha_{cr} l - \pi = 0.430297 \pi$$

Quindi:

$$\alpha_{cr} \bar{x} = \alpha_{cr} l - \pi = (1.43030 - 1)\pi,$$

oppure, in definitiva:

$$\bar{x} = \frac{1.43030 - 1}{1.43030} l = 0.30084 l.$$

Riassumendo, le soluzioni risultano:

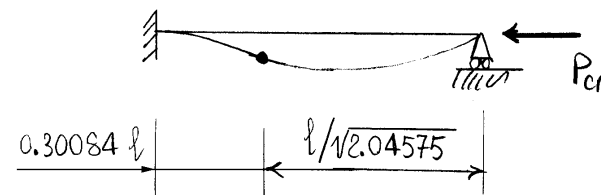
$$\bar{x} = \begin{cases} l \\ \frac{1.43030 - 1}{1.43030} l \end{cases} \Rightarrow l - \bar{x} = \frac{l}{1.43030}.$$

Poiché $(1.43030)^2 = 2.04575$, la luce libera di inflessione (distanza fra due flessi) risulta:

$$l_0 = l / \sqrt{2.04575},$$

e quindi il carico critico risulta:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{\left(l / \sqrt{2.04575}\right)^2}.$$

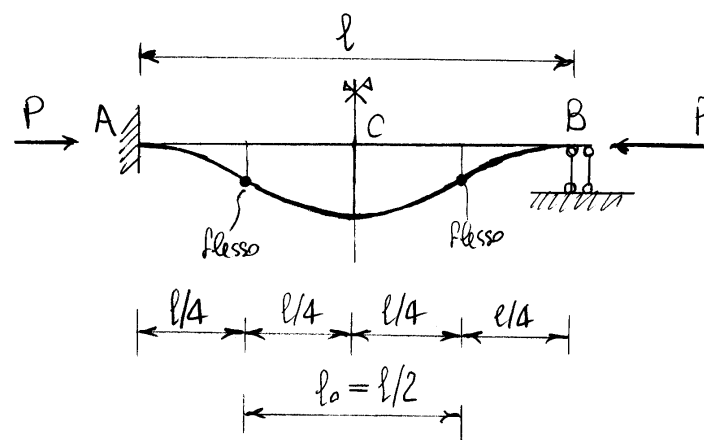


Una soluzione sufficientemente approssimata (2 sole cifre significative) lo si ha prendendo:

$$l_0 = l / \sqrt{2}.$$

3.3.4 Trave incastrata

La simmetria rispetto all'asse verticale per la sezione C di mezz'aria della trave impone che le reazioni



verticali degli incastri siano nulle e che la sezione di mezzaria non ruoti. Inoltre il numero minimo di flessi della configurazione adiacente è due, in posizione simmetrica. La sezione di mezzaria e i due flessi dividono la luce della trave in 4 parti equivalenti ad una configurazione adiacente ad una mensola. Il carico critico della trave deve coincidere quindi con il carico critico delle mensole. Ciò impone che i punti di flesso e la sezione di mezzaria dividano la luce della trave in 4 parti uguali e che risulti:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(2 \frac{l}{4})^2} = 4 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

La luce libera di inflessione risulta $l_0 = l/2$

ed ancora può scriversi:

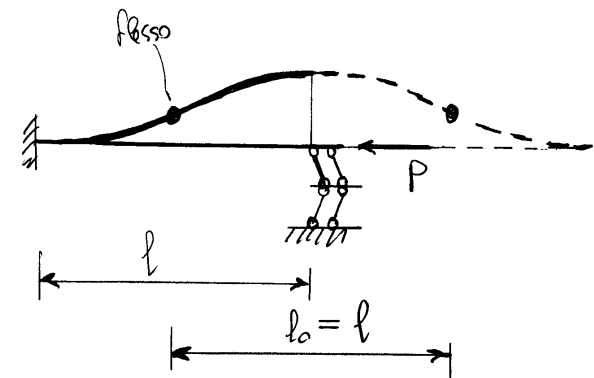
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}.$$

3.3.5 Trave incastrata ad una estremità ed impedita di ruotare all'altra estremità

Tale trave risulta equivalente ad una trave incastrata alle due estremità di luce doppia:

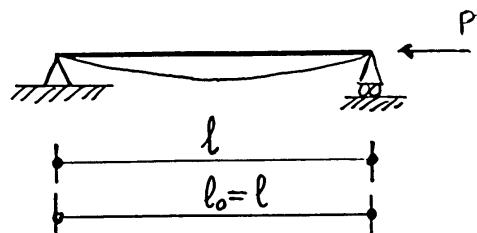
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

e la luce libera di inflessione coincide con la luce della trave.

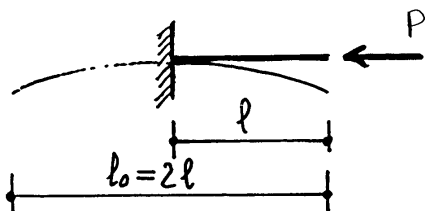


3.3.6 Schemi riassuntivi

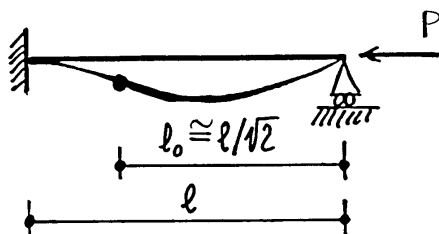
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_o^2} \quad l_o \equiv \text{lunghezza libera di inflessione}$$



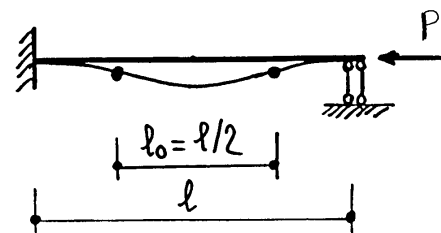
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



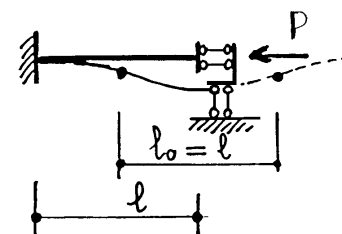
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$



$$P_{cr} \approx \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

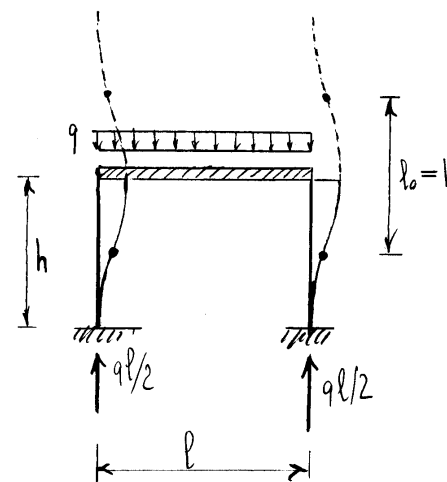


$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$



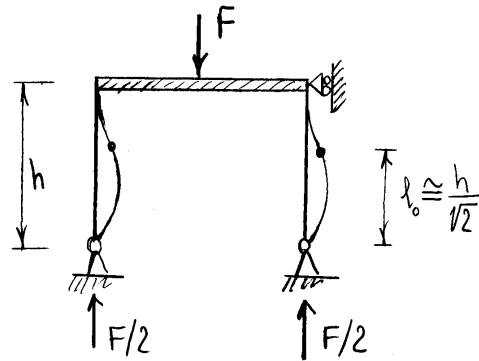
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

3.3.7 Portali con traversi infinitamente rigidi



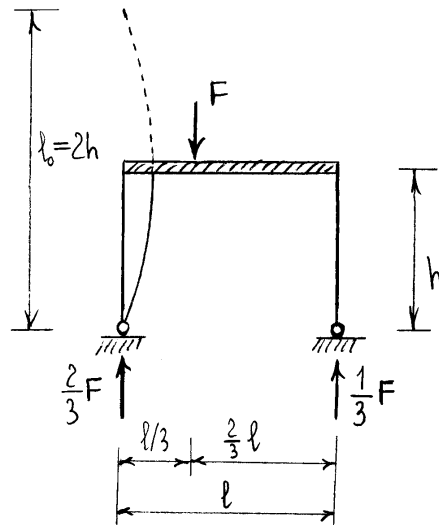
$$\frac{q_{cr} l}{2} = \pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$

$$q_{cr} = 2\pi^2 \frac{EJ}{l h^2}$$



$$\frac{F_{cr}}{2} \cong \pi^2 \frac{EJ}{(h/\sqrt{2})^2}$$

$$F_{cr} \cong 4\pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$



$$\frac{2}{3} F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(2h)^2}$$

$$F_{cr} = \frac{3}{8} \pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$

3.4 Limiti di validità della formula di Eulero

La formula di Eulero :

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{l_0^2},$$

può essere posta nella forma :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{A l_0^2} = \pi^2 E \frac{I_{min}^2}{I_0^2},$$

dove σ_{cr} è la tensione normale corrispondente al carico critico. Posto :

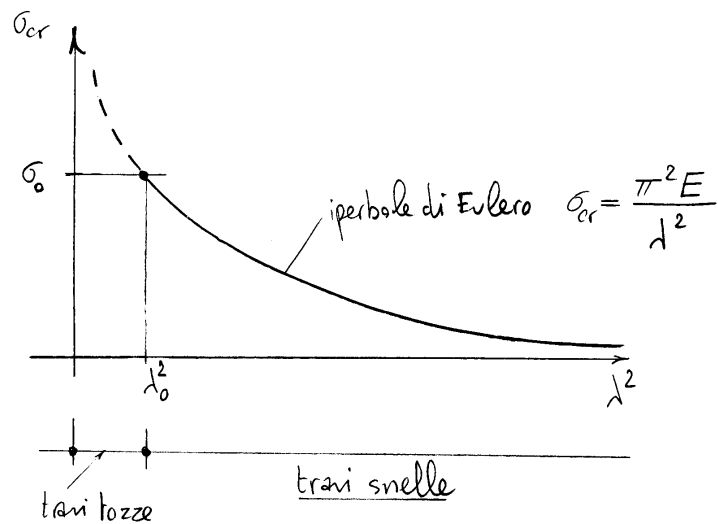
$$\lambda = l_0 / I_{min},$$

dove λ è detta snellezza dell'asta, la formula di Eulero diviene :

$$(1) \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Se si riportano in ascissa λ^2 ed in ordinata σ_{cr}

l'equazione (1) descrive un'iperbole detta iperbole di Euler.



$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2},$$

da cui:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}.$$

Se $\lambda > \lambda_0$ si dice che la trave è snella altrimenti che è tozza.

La formula di Euler è limitata in validità dalla richiesta che la σ_{cr} non superi il valore σ_0 della tensione normale al limite di proporzionalità. Il valore della snellezza corrispondente, λ_0 , detta snellezza limite, si ottiene imponendo che sia:

Capitolo 4

Flessione retta

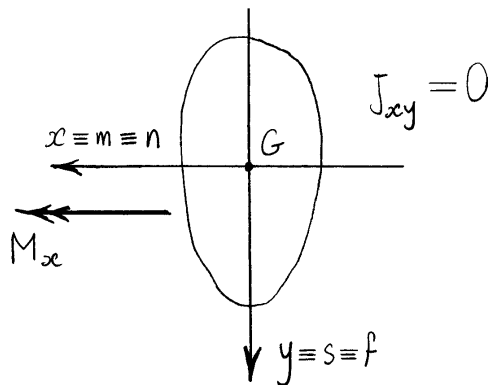
Si dice che una sezione è soggetta a *flessione retta* se l'unica caratteristica della sollecitazione che agisce nella sezione è un momento flettente di asse momento agente lungo una direzione principale di inerzia. Se l'asse momento m coincide con l'asse x del sistema principale $Gx\gamma$, risulta:

$$\mathbf{k}_f = k_x \mathbf{e}_x = \frac{M_x}{J_x} \mathbf{e}_x, \quad (1)$$

e quindi:

$$\sigma_z = E \frac{M_x}{J_x} y, \quad (2)$$

avendo tenuto conto che $P - G = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ e che $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$.



Si noti che nel caso descritto l'asse di sollecitazione s coincide con l'altro asse principale γ , l'asse neutro n con l'asse momento e l'asse di flessione f con l'asse di sollecitazione.

4.1 Sezioni omogenee

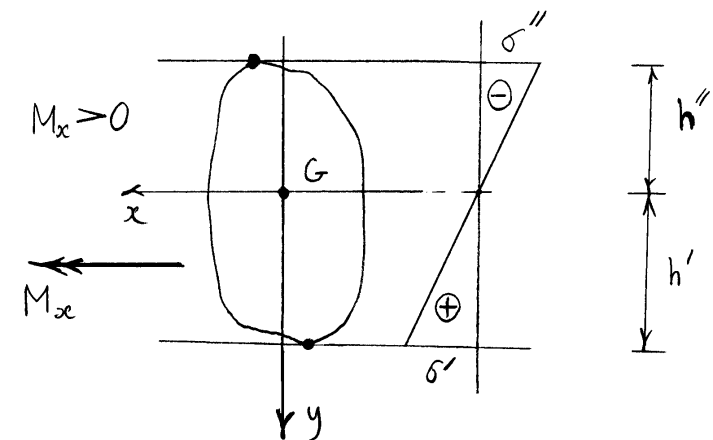
Nel caso di sezione omogenea risulta:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (3)$$

sottintendendo che in tal caso con J_x si indica il momento di inerzia della sola area. Si ricordi che con tale convenzione il momento di inerzia che compare nella (2) vale EJ_x .

L'andamento delle tensioni normali è lineare e queste si annullano sull'asse x . Se $M_x > 0$ le tensioni normali sono

positive per $y > 0$ e negative per $y < 0$, viceversa



se $M_x < 0$. Inevitabilmente ci saranno delle tensioni positive e delle tensioni negative. In corrispondenza dei punti più lontani dall'asse x si avranno le massime tensioni (in modulo). Se h' e h'' indicano tali distanze nella direzione delle y positive e negative rispettivamente le corrispondenti tensioni, in modulo, valgono:

$$\sigma' = \frac{|M_x|}{J_x} h' = \frac{|M_x|}{W_x'},$$

$$\sigma'' = \frac{|M_x|}{J_x} h'' = \frac{|M_x|}{W_x''},$$

dove :

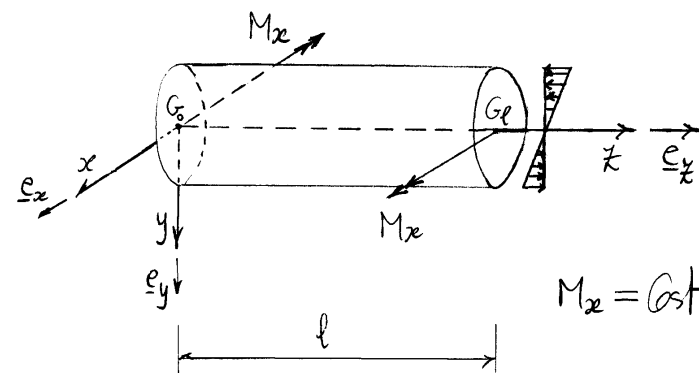
$$W_x' = \frac{J_x}{h'}, \quad W_x'' = \frac{J_x}{h''},$$

sono detti moduli di resistenza della sezione.

Si osservi che la dimensione di un modulo di resistenza, nell'attuale contesto di sezioni omogenee, è di una lunghezza al cubo (L^3).

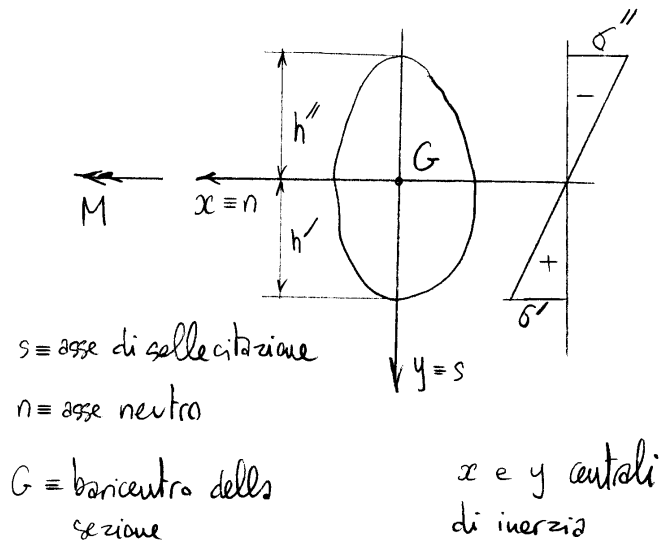
4.1.1 Integrazione in un campo di spostamenti

Si consideri ora un cilindro omogeneo soggetto al campo di tensioni sopra descritto. Si vuole mostrare nel seguito che tale campo di tensioni rappresenta una soluzione particolare del problema di Saint-Venant. A tale scopo si trasforma innanzitutto il campo di tensioni in un campo di deformazioni applicando la legge di Hooke inversa, per poi integrare il campo di deformazioni così ottenuto in un campo di spostamenti.



Il campo tensionale soluzione risulta:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$



$$[(tr \underline{\sigma}) \underline{I}] = \frac{M_x}{J_x} \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

ne consegue il seguente tensore di deformazione infinitesima:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{M_x}{E J_x} \begin{bmatrix} -\nu y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Tenendo conto che:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \underline{\sigma} - \nu tr \underline{\sigma} \underline{I} \},$$

e che in componenti risulta:

$$tr \underline{\sigma} = \sigma_z,$$

$$[\underline{\sigma}] = \frac{M_x}{J_x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

Notare che $\varepsilon = 0$ per $y = 0$, ovvero lungo l'asse neutro.

Ricordiamo che la rotazione rigida dell'intorno di un punto è rappresentata dal tensore di rotazione $\underline{\omega}$ emisimmetrico oppure dal vettore rotazione $\underline{\varphi}$:

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{xy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{xy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{ \underline{\varphi} \} = \begin{Bmatrix} \omega_{xy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix}.$$

Gradiente di $\underline{w}$:

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}.$$

Si noti che le componenti non nulle di $\underline{\varepsilon}$ sono $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ e che queste dipendono solo da y . Ne consegue che per avere derivate diverse dallo zero occorre che $x_j = y$ oppure $x_i = y$. Risulta:

$$[\text{grad } \underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} \begin{matrix} (k) & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} (ij) \\ xy \\ xz \\ yx \end{matrix},$$

e quindi:

$$w_{zy} = \frac{M_x}{EJ_x} z,$$

$$w_{xz} = 0,$$

$$w_{yx} = \nu \frac{M_x}{EJ_x} x,$$

a meno di inessenziali rotazioni rigide complessive di tutto il cilindro.

In definitiva:

$$[\underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} 0 & -\nu x & 0 \\ \nu x & 0 & -z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi:

$$[\text{grad } \underline{u}] = [\underline{\varepsilon} + \underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} -\nu y & -\nu x & 0 \\ \nu x & -\nu y & -z \\ 0 & z & y \end{bmatrix}.$$

Integrando negli spostamenti si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy + f(y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x + \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy + \text{cost}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{M_x}{E J_x} x \Rightarrow v = \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{E J_x} x^2 + f(y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{E J_x} y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{E J_x} y \Rightarrow f = -\frac{\nu}{2} \frac{M_x}{E J_x} y^2 + g(z) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M_x}{E J_x} z \Rightarrow \frac{dg}{dz} = -\frac{M_x}{E J_x} z \Rightarrow g = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{E J_x} z^2 \end{cases}$$

$$\boxed{v = \frac{M_x}{2 E J_x} \left\{ -z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right\} + Cost}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow w = w(y, z) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{M_x}{E J_x} z \Rightarrow w = \frac{M_x}{E J_x} y z + f(z) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{E J_x} y \Rightarrow \frac{M_x}{E J_x} y + \frac{df}{dz} = \frac{M_x}{E J_x} y \Rightarrow \frac{df}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{w = \frac{M_x}{E J_x} y z + Cost}$$

Quindi, a meno di un inessenziale moto rigido complessivo di traslazione, si ottiene il seguente campo continuo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = -\nu \frac{M_x}{E J_x} x y \\ v = \frac{M_x}{2 E J_x} \left\{ -z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right\} \\ w = \frac{M_x}{E J_x} y z \end{cases} .$$

Separando i vari contributi, è possibile scrivere tale campo di spostamenti in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_x}{EJ_x} z \\ 0 & \frac{M_x}{EJ_x} z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

traslazione
della sezione
in direzione y

Rotazione della sezione
attorno all'asse x
di ampiezza $M_x z / EJ_x$

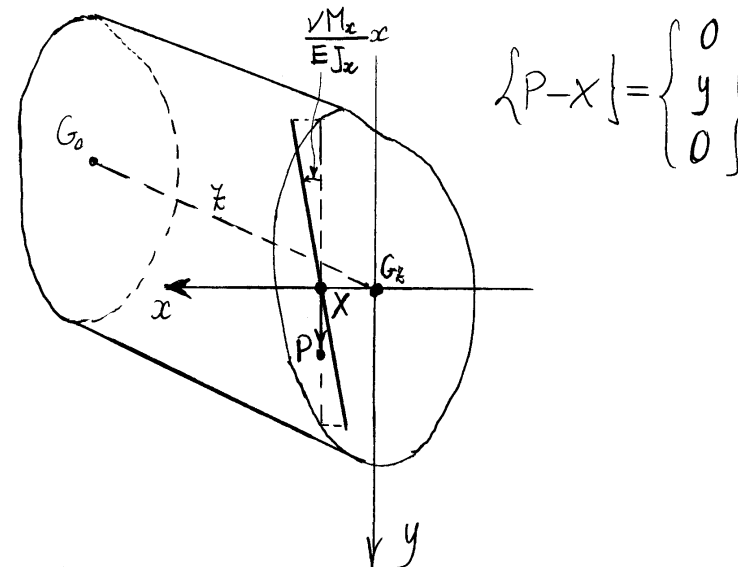
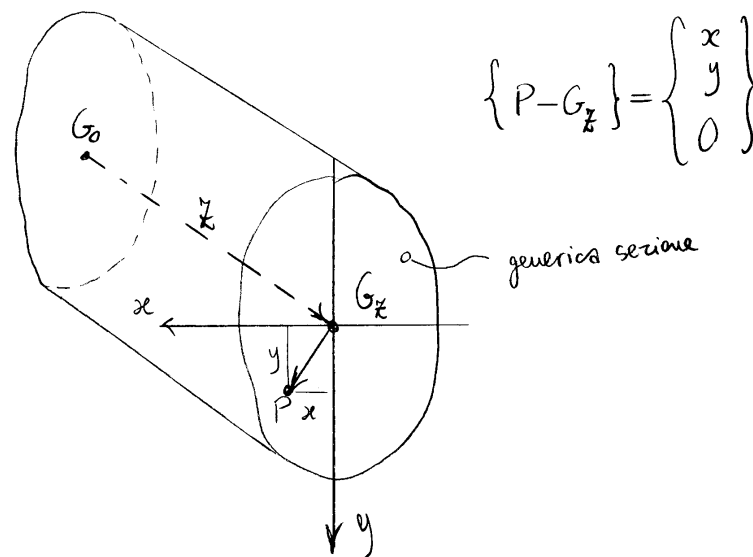
$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ \nu \frac{M_x}{2EJ_x} z^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{M_x}{EJ_x} z & 0 \\ \nu \frac{M_x}{EJ_x} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

traslazione del
segmento ortogonale
ad x lungo
la direzione y

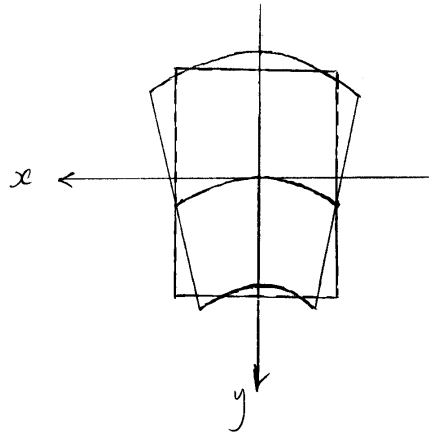
Rotazione, nel piano della sezione,
del segmento ortogonale ad x, attorno
al punto X intersezione del segmento
con l'asse x e di ampiezza $\nu \frac{M_x}{EJ_x} z$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ -\nu \frac{M_x}{2EJ_x} y^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Deformazione del
segmento ortogonale
a x nella propria
retta



Deformazione della sezione nel proprio piano:



È possibile scrivere il campo di spostamenti, in forma vettoriale, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \underline{u} = & -\frac{M_x}{2EI_x} x^2 \underline{e}_y + \frac{M_x}{EI_x} x \underline{e}_x (P - \frac{x}{2}) \\ & + \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EI_x} x^2 \underline{e}_y + \frac{\nu}{EI_x} x \underline{e}_x (P - x) \\ & - \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EI_x} y^2 \underline{e}_y \end{aligned}$$

4.1.2 Condizioni di snervamento

La condizione di appartenenza al dominio di elasticità richiede che le massime tensioni a trazione e a compressione non superino, in modulo, le corrispondenti tensioni di snervamento:

$$\begin{cases} \frac{M_x}{W_x'} \leq \sigma_s^+ \text{ e } \frac{M_x}{W_x''} \leq \sigma_s^- & \text{se } M_x > 0 \\ -\frac{M_x}{W_x''} \leq \sigma_s^+ \text{ e } -\frac{M_x}{W_x'} \leq \sigma_s^- & \text{se } M_x < 0 \end{cases}.$$

Se il materiale presenta lo stesso livello di snervamento a trazione e compressione si confronterà semplicemente la massima tensione in modulo con la tensione di snervamento:

$$\max \left\{ \frac{|M_x|}{W_x'}, \frac{|M_x|}{W_x''} \right\} \leq \sigma_s.$$

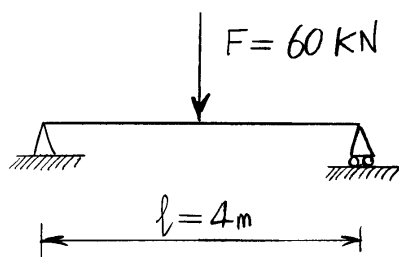
Se poi la sezione è simmetrica rispetto all'asse x , ovvero se $W_x' = W_x'' = W_x$, le tensioni massime a trazione e compressione sono uguali in modulo

e occorre richiedere che:

$$\frac{|M_x|}{W_{sx}} \leq \sigma_s.$$

4.1.3 Esercizio su una trave IPE

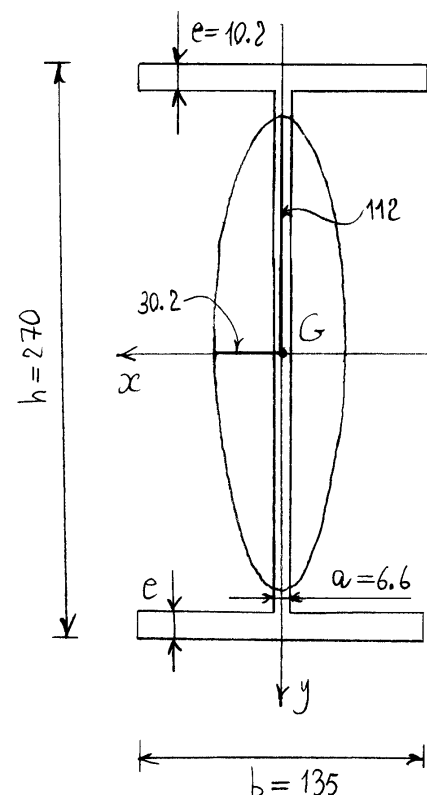
Sia data una trave appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico concentrato in mezzzeria di 60 kN.



La trave sia realizzata per il tramite di un profilato commerciale in acciaio tipo IPE 270. I profilati IPE sono di sezione sottile a doppio T allungata, cioè di altezza prevalente rispetto alla base, e sono adatti ad assorbire le sollecitazioni dovute ad un momento flettente.

Una sezione sottile a doppio T è la stessa cosa di una sezione sottile a I, il che spiega la iniziale della sigla IPE. Il resto della sigla sta per profilo europeo.

Le misure riportate nella figura seguente sono tratte dalle apposite tabelle riguardanti i profilati tipo IPE. In tali tabelle è consuetudine indicare i raggi di inerzia con il simbolo i .



IPE 270

$$A = 45.9\text{ cm}^2$$

$$J_x = 5790\text{ cm}^4$$

$$W_x = 429\text{ cm}^3$$

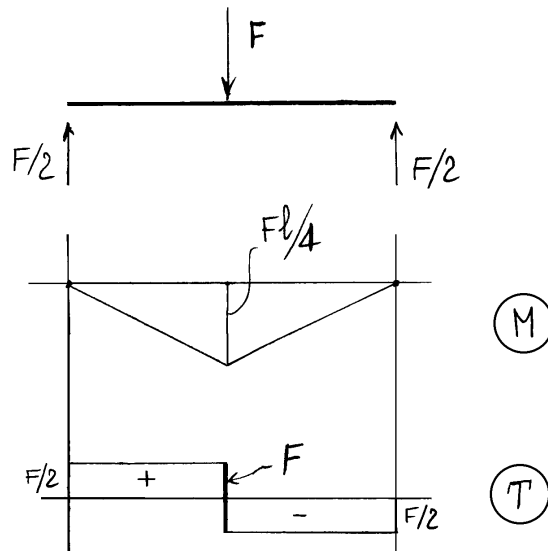
$$i_x = 11.2\text{ cm}$$

$$i_y = 3.02\text{ cm}$$

nella figura le misure sono in mm

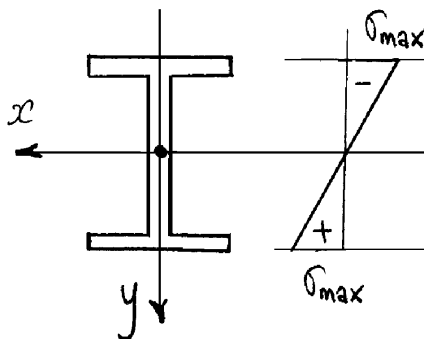
Il massimo momento flettente agisce nella sezione di mezzzeria e vale:

$$M_{\max} = \frac{F l}{4} = \frac{60\text{ kN} \times 4\text{ m}}{4} = 60\text{ kN m}.$$



La massima tensione normale vale quindi:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} \\ &= \frac{60 \times 10^6 \text{ Nmm}}{429 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 140 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$



4.2 Sezioni composte di più materiali

Se la sezione è composta di più materiali, la tensione normale nell' i -esimo materiale vale:

$$\sigma_z = E_i \frac{M_x}{J_x} y. \quad (4)$$

Nella (4) E_i è il modulo di Young dell' i -esimo materiale mentre J_x , di dimensione FL^2 , è il momento di inerzia generato dalla distribuzione nella sezione dei moduli di Young dei vari materiali e vale:

$$J_x = \sum_i E_i J_{xi}, \quad (5)$$

dove J_{xi} è il momento di inerzia della sola area A_i dell' i -esimo materiale, ovvero sia calcolato a meno della massa:

$$J_{xi} = \int_{A_i} y^2 dA, \quad (6)$$

4.2.1 Omogeneizzazione

In alternativa è possibile omogeneizzare l'area rispetto a uno dei materiali, per esempio il primo di modulo di Young E_1 . Si definiscono allora i *coefficienti di omogeneizzazione* n_i degli altri materiali:

$$n_i = \frac{E_i}{E_1}, \quad (7)$$

l'area omogeneizzata A^0 :

$$A^0 = A_1 + \sum_i n_i A_i, \quad (8)$$

e il momento di inerzia omogeneizzato J_x^0 :

$$J_x^0 = J_{x1} + \sum_i n_i J_{xi}, \quad (9)$$

dove la somma è estesa agli altri materiali. Con queste definizioni, il momento di inerzia generato dalla distribuzione nella sezione dei moduli di Young dei vari materiali vale:

$$J_x = E_1 J_x^0. \quad (10)$$

In un punto di coordinata y appartenente all'area A_1 del materiale rispetto al quale è fatta l'omogeneizzazione la tensione normale vale allora:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x^0} y, \quad (11)$$

mentre in un punto di coordinata y appartenente all'area A_i dell' i -esimo materiale si ha invece:

$$\sigma_z = n_i \frac{M_x}{J_x^0} y, \quad (12)$$

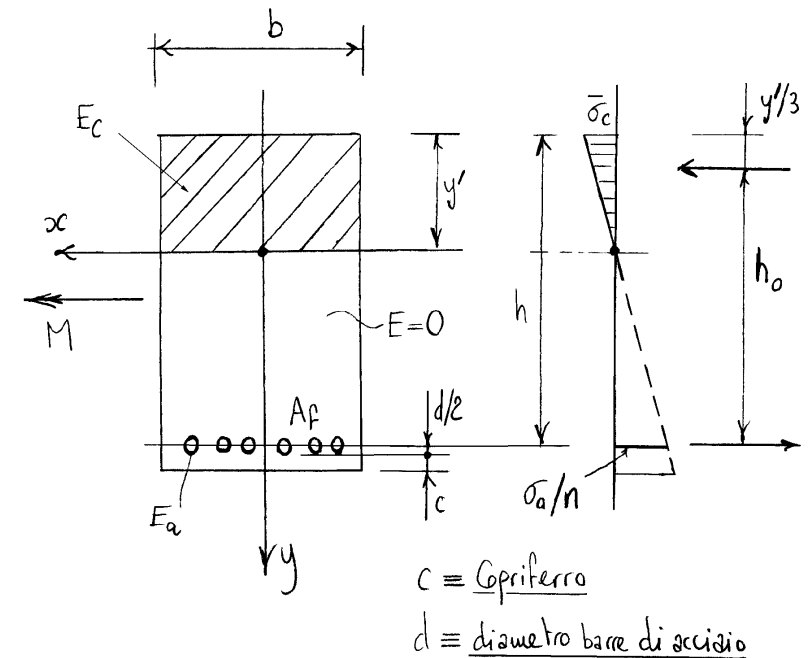
4.2.2 Sezione rettangolare in cemento armato

Come esempio di sezione composta di più materiali, si considera una sezione rettangolare in cemento armato a semplice armatura.

Per il calcolo degli spostamenti, e quindi anche delle integrità iperstatiche, una struttura in cemento armato è equiparata ad una struttura omogenea resistente anche a trazione e con modulo di Young pari al modulo del calcestruzzo. Le barre di armatura, assorbendo le tensioni di trazione che il calcestruzzo non è in grado di assorbire e limitando od eliminando, in tal modo, lo sviluppo delle fessurazioni, assicurano tale comportamento.

Il discorso cambia quando si voglia verificare, oppure progettare, una struttura in cemento armato.

In tal caso non si può prescindere dalla presenza delle armature e dallo sviluppo di eventuali fessurazioni. Il modo più semplice per tenere conto della scarsa resistenza a trazione del calcestruzzo, ai fini della verifica di resistenza, è quello di trascurarla del tutto. Si fa allora riferimento ad un modello deformativo nel quale la sezione retta reagisce solo in corrispondenza delle fibre compresse del calcestruzzo e non di quelle tese. Ne risulta che l'asse neutro divide in due zone la sezione retta, ad una delle quali compete il modulo E_c del calcestruzzo mentre all'altra compete il modulo nullo ($E=0$). All'area di armatura, che può considerarsi concentrata nei baricentri delle singole barre, compete il modulo E_a dell'acciaio. La posizione y'



dell'asse neutro risulta un'incognita del problema. Naturalmente si suppone la perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo e, in accordo con le assunzioni cinematiche fatte, che le sezioni restino piane. Il momento statico rispetto all'asse neutro vale:

$$S_x = -E_c \frac{b y'^2}{2} + E_a A_f (h - y').$$

Nella flessione retta l'asse neutro deve essere baricentrico. Imponendo tale condizione si ottiene un'equazione di secondo grado in y' :

$$S_x = 0 \Rightarrow y'^2 + 2 \frac{n A_f}{b} y' - 2 \frac{n A_f}{b} h = 0,$$

dove $n = E_a/E_c$ è il coefficiente di omogeneizzazione dell'acciaio rispetto al calcestruzzo e h è l'altezza utile della sezione, cioè la distanza del baricentro delle barre di armatura dal lembo superiore del calcestruzzo compresso. Delle due soluzioni dell'equazione di secondo grado l'una, negativa, è priva di significato per il nostro problema mentre l'altra, positiva, vale:

$$y' = \frac{n A_f}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b h}{n A_f}} \right\}.$$

Se con J_x si indica il momento di inerzia omogeneizzato all'area di calcestruzzo:

$$J_x = \frac{b y'^3}{3} + n A_f (h - y')^2,$$

la distribuzione della tensione normale nella sezione retta vale:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y, \quad (y < 0),$$

in corrispondenza del calcestruzzo compresso,

$$\sigma = \sigma_a = n \frac{M}{J_x} (h - y'),$$

in corrispondenza delle barre di armatura, ed infine è nulla in corrispondenza del calcestruzzo teso. Se con σ_c si indica poi la tensione di compressione (in modulo) al lembo superiore del calcestruzzo compresso, risulta anche:

$$\sigma_c = \frac{M}{J_x} y'.$$

Il braccio della coppia interna (risultante nel calcestruzzo compresso — risultante nell'acciaio teso), vale:

$$h_0 = h - \frac{y'}{3}.$$

La coppia interna ha dunque il valore:

$$M = \frac{1}{2} \sigma_c b y' h_0 = \sigma_a A_f h_0 ,$$

da cui si ottiene, in alternativa:

$$\sigma_a = \frac{M}{A_f h_0} , \quad \sigma_c = \frac{2M}{b y' h_0} .$$

Uguagliando le due diverse espressioni di σ_a e di σ_c si ottiene:

$$\frac{M}{A_f h_0} = n \frac{M}{J_x} (h - y') \Rightarrow h_0 = \frac{J_x}{n A_f (h - y')} ,$$

$$\frac{2M}{b y' h_0} = \frac{M}{J_x} y' \Rightarrow h_0 = \frac{2 J_x}{b y'^2} .$$

Le due espressioni sono senz'altro equivalenti, poiché la condizione $S_x = 0$ può essere posta nella forma:

$$-\frac{b y'^2}{2} + n A_f (h - y') = 0 .$$

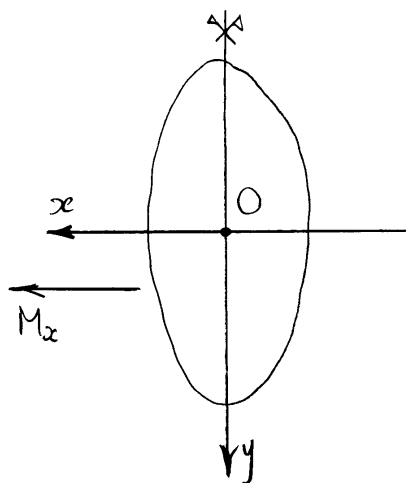
4.3 Cenni al calcolo a rottura

Quanto detto finora vale nell'ipotesi di legame costitutivo elastico lineare:

$$\sigma = E \varepsilon .$$

Come già detto tale legame lineare, sempre nell'ambito delle ipotesi cinematiche della trave inflessa, può essere sostituito da uno più generale in cui non solo l'elasticità può essere non lineare, ma il legame stesso può essere elastoplastico. È chiaro che generalizzazioni di questo tipo sono a volte indispensabili se si vogliono eseguire delle verifiche agli stati limite ultimi.

In tale contesto più generale, flessione retta significa asse neutro ortogonale all'asse di sollecitazione. Se la sezione ha un asse di simmetria e l'asse momento è ortogonale all'asse di simmetria (ovverossia la coppia agisce sul piano di simmetria) tale condizione è, per simmetria, senz'altro soddisfatta.



La condizione che individua l'asse neutro è $N=0$:

$$\int_A \sigma dA = 0.$$

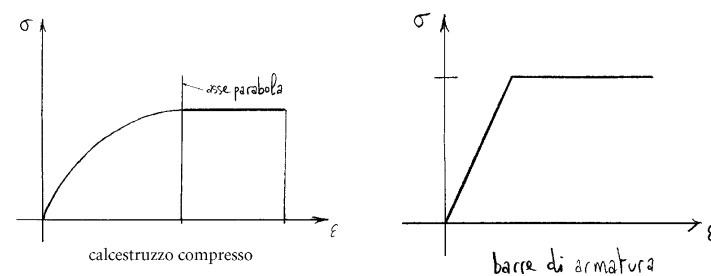
Si noti a tale proposito che i concetti di baricentro e di assi principali di inerzia sono strettamente connessi al legame lineare e non possono essere utilizzati in un contesto più generale. Assumendo un sistema di riferimento Oxy , con l'asse y coincidente con l'asse di simmetria, la coppia flettente risulta poi:

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

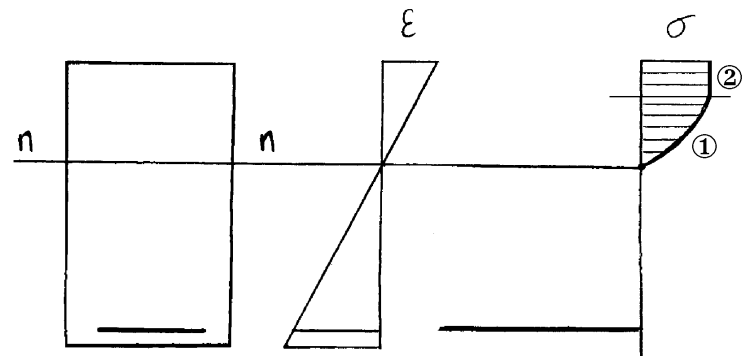
Inoltre, il legame tra la dilatazione ε della generica fibra longitudinale e le caratteristiche della deformazione ε_0 e K_x risulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + K_x y.$$

Per es., nel caso del calcestruzzo armato si può utilizzare, come già detto, un diagramma σ - ε parabolico nella parte elastica seguito da un tratto perfettamente plastico, per quel che riguarda il calcestruzzo compresso, mentre per le barre di armatura può essere scelto un diagramma bilineare.



La distribuzione delle tensioni normali nel calcestruzzo compresso è quindi non lineare nella parte di calcestruzzo in fase elastica e costante nella parte in fase plastica.



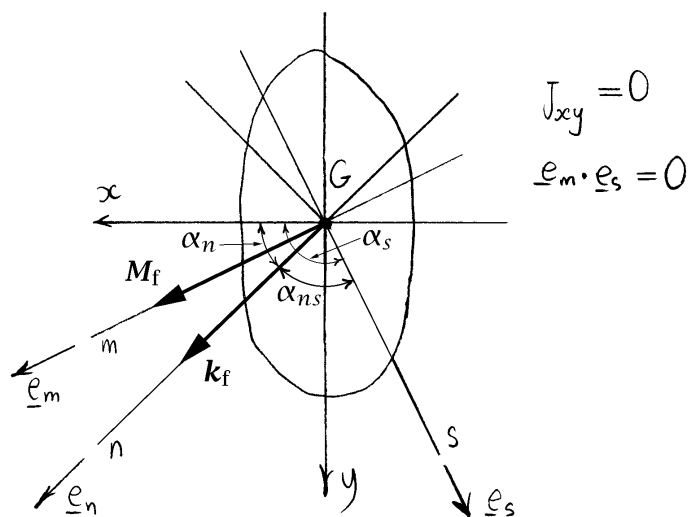
- ① fase elastica non lineare
- ② fase perfettamente plastica

Capitolo 5

Flessione deviata

Si ha flessione deviata quando la sezione è soggetta a solo momento flettente, di asse momento m non coincidente con un asse principale di inerzia.

In tal caso l'asse neutro n e quello di sollecitazione s sono sempre distinti e mai ortogonali. Infatti sia α_{ns} l'angolo compreso tra l'asse neutro n e quello di sollecitazione s . Se M_f e k_f sono rispettivamente il momento flettente e la curvatura flessionale, la condizione $\alpha_{ns} = 0$ è equivalente alla condizione $M_f \cdot k_f = 0$ e quindi, tenuto conto del legame costitutivo flessionale, alla condizione $k_f \cdot Jk_f = 0$. Dato che il tensore di inerzia J è definito positivo ne risulta che è sempre $\alpha_{ns} \neq 0$.



Inoltre non può che essere $\alpha_{ns} \neq \frac{\pi}{2}$, poiché se fosse $\alpha_{ns} = \frac{\pi}{2}$ allora k_f avrebbe la direzione di M_f e l'asse momento m sarebbe principale d'inerzia.

Gli assi n e s , sempre distinti e mai ortogonali, sono detti *assi coniugati* e costituiscono un sistema Gns baricentrico di assi cartesiani non ortogonali detto *sistema coniugato*.

Il momento flettente M_f e la curvatura flessionale k_f si possono scrivere nella forma:

$$M_f = M e_m, \quad k_f = k e_n. \quad (1)$$

5.1 Relazioni nel sistema principale (formula binomia)

Si consideri ora il sistema principale di inerzia Gxy . Siano poi α_n e α_s gli angoli che determinano rispettivamente l'asse neutro n e l'asse di sollecitazione s nel sistema principale. L'angolo α_{ns} compreso tra l'asse neutro n e quello di sollecitazione s vale allora:

$$\alpha_{ns} = \alpha_s - \alpha_n. \quad (2)$$

L'angolo α_m che determina l'asse momento m nel sistema principale vale invece:

$$\alpha_m = \alpha_s - \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Le componenti del momento flettente e della curvatura flessionale nel sistema principale di inerzia Gxy risultano allora rispettivamente:

$$M_x = M \sin \alpha_s, \quad M_y = -M \cos \alpha_s, \quad (4)$$

e:

$$k_x = k \cos \alpha_n, \quad k_y = k \sin \alpha_n. \quad (5)$$

Valutando l'equazione costitutiva flessionale nel sistema principale di inerzia:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

si ottiene:

$$M_x = J_x k_x, \quad M_y = J_y k_y. \quad (7)$$

Dal rapporto tra le (7), tenendo conto delle (4) e (5), discende la cosiddetta *relazione di coniugio* tra gli angoli α_n e α_s che determinano rispettivamente la posizione dell'asse neutro e dell'asse di sollecitazione nel sistema principale di inerzia:

$$\tan \alpha_n \tan \alpha_s = -\frac{J_x}{J_y} = -\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2}. \quad (8)$$

Si noti che il segno negativo a secondo membro della (8) indica che gli angoli α_n e α_s hanno tangente di segno opposto. Da ciò consegue che le due direzioni coniugate appartengono a quadranti diversi tra quelli individuati dalle direzioni principali.

La tensione normale σ_z può poi essere calcolata considerando che:

$$\begin{aligned} \sigma_z \mathbf{e}_z &= E \mathbf{k}_f \times (P - G) \\ &= E \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ k_x & k_y & 0 \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = E (k_x y - k_y x) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizzando le (7) si ottiene infine la seguente *formula binomia*

della flessione deviata:

$$\sigma_z = E \frac{M_x}{J_x} y - E \frac{M_y}{J_y} x, \quad (10)$$

equivalente alla sovrapposizione di due flessioni rette, una secondo l'asse x e l'altra secondo l'asse y . Il segno negativo del secondo addendo dipende dal fatto che invertendo l'ordine degli assi x e y , la coppia di assi diventa sinistra. D'altronde un momento M_y positivo tende le fibre dalla parte delle x negative. Con l'ausilio delle (4) la (10) si può anche scrivere nella forma:

$$\sigma_z = EM \left(\frac{\sin \alpha_s}{J_x} y + \frac{\cos \alpha_s}{J_y} x \right) \quad (11)$$

Annullando la (10) si ottiene l'equazione dell'asse neutro:

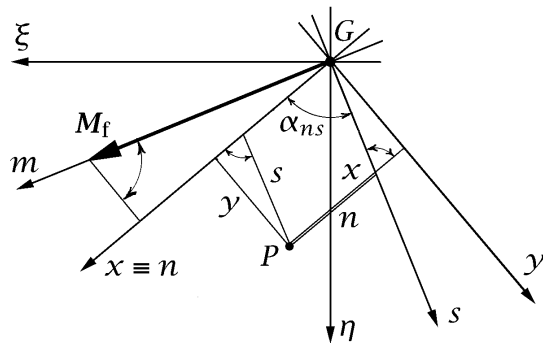
$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0. \quad (12)$$

5.2 Relazioni nel sistema coniugato (formula monomia)

Si consideri ora il sistema di riferimento coniugato Gns . Essendo tali assi obliqui, si considererà anche un sistema ortogonale Gxy non principale di inerzia avente l'asse x coincidente con l'asse neutro n e quindi l'asse y con l'asse di flessione f .

Le componenti del momento flettente e della curvatura flessionale nel sistema non principale di inerzia Gxy risultano rispettivamente:

$$M_x = M \sin \alpha_{ns}, \quad M_y = -M \cos \alpha_{ns}, \quad (13)$$



e:

$$k_x = k, \quad k_y = 0. \quad (14)$$

Valutando l'equazione costitutiva flessionale nel sistema non principale Gxy :

$$\begin{Bmatrix} M \sin \alpha_{ns} \\ -M \cos \alpha_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

si ottiene allora:

$$M \sin \alpha_{ns} = J_x k, \quad -M \cos \alpha_{ns} = -J_{xy} k. \quad (16)$$

Dal rapporto tra le (16) si ottiene la relazione definente l'angolo α_{ns} tra asse neutro e asse di sollecitazione nel sistema non principale Gxy :

$$\tan \alpha_{ns} = \frac{J_x}{J_{xy}}. \quad (17)$$

Proprietà del coniugio. L'asse n è l'asse neutro corrispondente all'asse di sollecitazione s se e solo se $J_{ns} = 0$.

Dimostrazione. Il generico punto P della sezione ha coordinate (x, y) e (n, s) , rispettivamente nel sistema non principale Gxy e in quello coniugato Gns , che soddisfano le seguenti formule di trasformazione:

$$n = x - \frac{y}{\tan \alpha_{ns}}, \quad s = \frac{y}{\sin \alpha_{ns}}. \quad (18)$$

Il momento di inerzia J_{ns} rispetto agli assi n e s vale quindi:

$$\begin{aligned} J_{ns} &= \int_A E n s \, dA = \int_A E \left(x - \frac{y}{\tan \alpha_{ns}} \right) \frac{y}{\sin \alpha_{ns}} \, dA \\ &= \frac{1}{\sin \alpha_{ns}} \left(J_{xy} - \frac{J_x}{\tan \alpha_{ns}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

da cui discende che $J_{ns} = 0$ è equivalente alla (17), come volevasi dimostrare. ■

Si consideri ora la formula di trasformazione tra i momenti di inerzia J_x e J_n rispetto all'asse neutro valutati con distanze rispettivamente ortogonali e in direzione dell'asse di sollecitazione s :

$$J_x = J_n \sin^2 \alpha_{ns}. \quad (20)$$

Utilizzando tale trasformazione, dalla prima delle (16) si ottiene il legame costitutivo nel sistema coniugato:

$$M = J_n k \sin \alpha_{ns}, \quad (21)$$

dove, per quanto detto, $J_n = \int_A E s^2 \, dA$ è il momento di inerzia rispetto all'asse neutro valutato con le distanze prese in direzione dell'asse di sollecitazione s .

La tensione normale σ_z risulta:

$$\begin{aligned}\sigma_z \mathbf{e}_z &= E \mathbf{k}_f \times (P - G) \\ &= E k \mathbf{e}_x \times (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y) = E k y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y. \quad (22)\end{aligned}$$

Dalla (22), con l'ausilio della (21), si ottiene:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n \sin \alpha_n} y, \quad (23)$$

e per via della seconda delle (18), si ha infine la *formula monomia della flessione deviata*:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n} s. \quad (24)$$

Le quantità che compaiono nella (24) si possono calcolare nel sistema principale di inerzia che nel seguito, per distinguerlo dal sistema non principale Gxy , sarà indicato con $G\xi\eta$. Tenendo conto delle formule di rotazione, il momento di inerzia J_x rispetto all'asse neutro valutato con distanze ortogonali vale:

$$J_x = J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n, \quad (25)$$

dove J_ξ e J_η sono i momenti principali e α_n è l'angolo che determina l'asse neutro n nel sistema principale. Il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro valutato con distanze in direzione dell'asse di sollecitazione s , tenendo conto della (20) e della (2), vale allora:

$$J_n = \frac{J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)}, \quad (26)$$

dove α_s è l'angolo che determina l'asse di sollecitazione s nel sistema principale.

Si consideri poi che tra le coordinate (ξ, η) principali e quelle (x, y) nel sistema non principale Gxy vale la seguente formula di trasformazione:

$$y = \eta \cos \alpha_n - \xi \sin \alpha_n. \quad (27)$$

Tenendo allora conto della seconda delle (18) e della (2) si ottiene la coordinata s nel sistema coniugato Gns :

$$s = \frac{\eta \cos \alpha_n - \xi \sin \alpha_n}{\sin (\alpha_s - \alpha_n)}. \quad (28)$$

Dalla (26), utilizzando la formula di coniugio (8) nella forma:

$$\frac{J_\xi}{J_\eta} = - \frac{\sin \alpha_n \sin \alpha_s}{\cos \alpha_n \cos \alpha_s}, \quad (29)$$

e la relazione trigonometrica:

$$\sin (\alpha_s - \alpha_n) = \sin \alpha_s \cos \alpha_n - \cos \alpha_s \sin \alpha_n, \quad (30)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}J_n &\left(\frac{\cos^2 \alpha_s}{J_\eta} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{J_\xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)} \left(\frac{J_\xi}{J_\eta} \cos^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_s + \sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_s \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \alpha_n \sin^2 \alpha_s + \frac{J_\eta}{J_\xi} \sin^2 \alpha_n \sin^2 \alpha_s \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin^2(\alpha_s - \alpha_n)} \left(-\sin \alpha_n \sin \alpha_s \cos \alpha_n \cos \alpha_s + \sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_s \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 \alpha_n \sin^2 \alpha_s - \sin \alpha_n \sin \alpha_s \cos \alpha_n \cos \alpha_s \right) \\
&= \frac{1}{\sin^2(\alpha_s - \alpha_n)} \left\{ -\cos \alpha_s \sin \alpha_n (\sin \alpha_s \cos \alpha_n - \cos \alpha_s \sin \alpha_n) \right. \\
&\quad \left. + \sin \alpha_s \cos \alpha_n (\sin \alpha_s \cos \alpha_n - \cos \alpha_s \sin \alpha_n) \right\} \\
&= \frac{\sin^2(\alpha_s - \alpha_n)}{\sin^2(\alpha_s - \alpha_n)} = 1 \quad (31)
\end{aligned}$$

Ne risulta allora la seguente relazione alternativa della (32):

$$\frac{1}{J_n} = \frac{\cos^2 \alpha_s}{J_\eta} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{J_\xi}. \quad (32)$$

5.3 Sezioni omogenee

Nel caso di sezione omogenea la formula binomia (10), valida nel sistema principale Gxy , si scrive:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x, \quad (33)$$

dove ora è sottinteso che $J_x = \int_A y^2 dA$ e $J_y = \int_A x^2 dA$ sono i momenti di inerzia principali della sola area, ovvero sia calcolati a meno del modulo di Young. L'equazione (33) è lineare in x e y . Nel caso di sezione composta da più materiali, quindi omogenea a tratti, la tensione normale è invece lineare solo limitatamente alle aree dei vari materiali.

Ancora nel caso di sezione omogenea, valida nel sistema co-

niugato Gns , la formula monomia (24) si scrive:

$$\sigma_z = \frac{M}{J_n} s, \quad (34)$$

avendo sottinteso che $J_n = \int_A s^2 dA$ è il momento di inerzia rispetto all'asse neutro della sola area, quindi calcolato a meno del modulo di Young. Dalla (34) consegue immediatamente che le tensioni normali, che si annullano sull'asse neutro, sono costanti su linee parallele all'asse neutro.

Si usa disegnare il diagramma delle tensioni normali prendendo quale fondamentale una parallela all'asse di sollecitazione e mandando le parallele all'asse neutro. Le rette radenti la sezione parallele all'asse neutro individuano i punti dove le tensioni normali sono massime e minime, mentre l'asse neutro individua i punti dove le tensioni sono nulle.

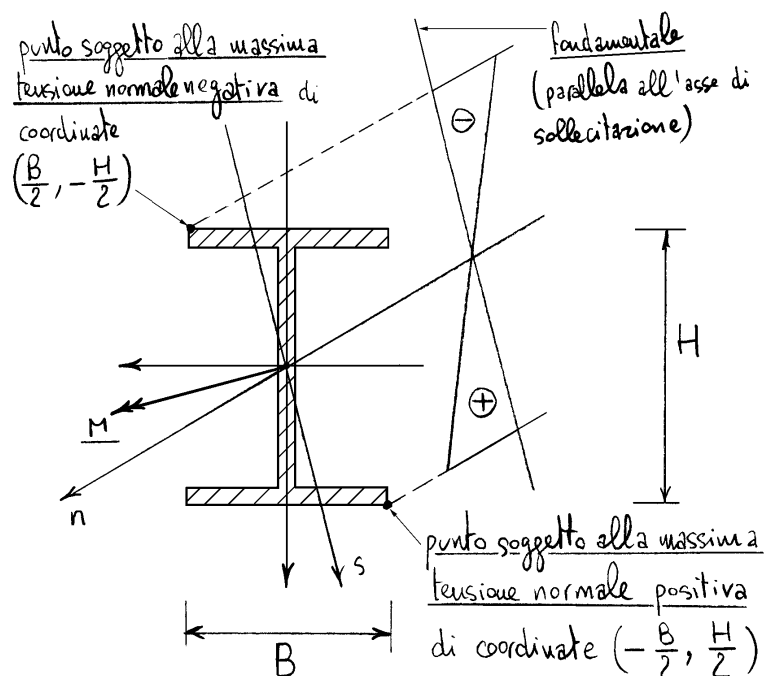
Il segno del momento stabilisce da quale parte rispetto all'asse neutro le tensioni normali sono positive. Nella figura è illustrato il caso di una sezione a doppio T. Data la doppia simmetria le tensioni normali massime e minime hanno lo stesso modulo e valgono:

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} + \frac{M_y}{J_y} \frac{B}{2} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_{x \min} = -\frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} - \frac{M_y}{J_y} \frac{B}{2} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Se la sezione è in acciaio, avente uguale snervamento a trazione e compressione, la condizione che assicura alla tensione di essere interna al dominio di elasticità si scrive:

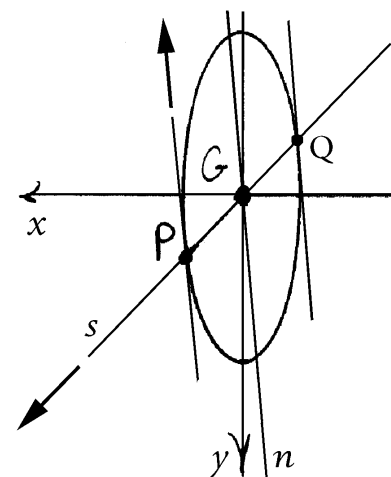
$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_s.$$



5.4 Proprietà dell'ellisse centrale di inerzia

L'ellisse centrale d'inerzia, definito nel capitolo sulla geometria delle masse, racchiude in sé le proprietà di coniugio e inerziali delle rette baricentriche, proprietà che sono alla base, come visto, dello studio della flessione nelle travi.

Proprietà delle tangenti. La direzione n , coniugata di una retta s che interseca l'ellisse nei punti P e Q , è fornita dalle tangenti all'ellisse negli stessi punti P e Q (che, per la simmetria dell'ellisse rispetto ai propri assi, sono parallele tra loro).



Dimostrazione. Infatti, siano e_s e e_n i versori rispettivamente della direzione orientata del vettore $P - G$ e della tangente all'ellisse nel punto P . Derivando l'equazione dell'ellisse rispetto alla coordinata lunghezza d'arco n definita a partire da un

punto arbitrario dell'ellisse, si ottiene allora:

$$2\overline{MPG}\mathbf{e}_s \times (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{e}_n) = 0, \quad (35)$$

avendo tenuto conto della simmetria del tensore di Eulero $\mathbf{J}$, del fatto che la derivata del punto $\frac{dP}{dn}$ uguaglia il versore $\mathbf{e}_n$ e avendo indicato con $\mathcal{M}$ la massa totale e con $\overline{PG}$ il modulo del vettore $P - G$. Se α_n e α_s sono gli angoli che individuano, nel sistema principale di inerzia Gxy , le direzioni orientate dei versori $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}_s$ rispettivamente, la rappresentazione algebrica della (35) nel sistema principale si scrive:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_s & \sin \alpha_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_n \\ \sin \alpha_n \end{Bmatrix} = 0. \quad (36)$$

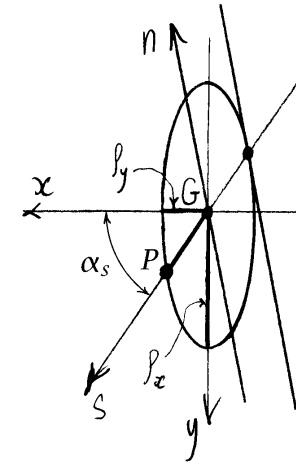
Lo sviluppo della (36) conduce alla relazione di coniugio:

$$\tan \alpha_n \tan \alpha_s = -\frac{J_x}{J_y}, \quad (37)$$

come volevasi dimostrare. ■

Proprietà dei semidiametri. Il generico semidiametro dell'ellisse, individuato dal generico punto P , ha quale valore il raggio di inerzia ρ_n relativo all'asse n coniugato dell'asse s contenente il semidiametro stesso, raggio di inerzia calcolato con distanze valutate in direzione s .

Dimostrazione. Infatti, se $\mathbf{e}_s$ è il versore della direzione orientata del vettore $P - G$, la rappresentazione algebrica dell'equazio-



ne dell'ellisse nel sistema principale di inerzia Gxy si scrive:

$$\overline{PG}^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha_s & \sin \alpha_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_s \\ \sin \alpha_s \end{Bmatrix} = 1. \quad (38)$$

Lo sviluppo della (38) conduce alla relazione:

$$\overline{PG}^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha_s}{\rho_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{\rho_x^2} \right) = 1. \quad (39)$$

Tenendo conto che moltiplicando la (32) per la massa totale $\mathcal{M}$, nell'attuale contesto in cui il sistema principale è indicato con Gxy , risulta:

$$\frac{1}{\rho_n^2} = \frac{\cos^2 \alpha_s}{\rho_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{\rho_x^2}, \quad (40)$$

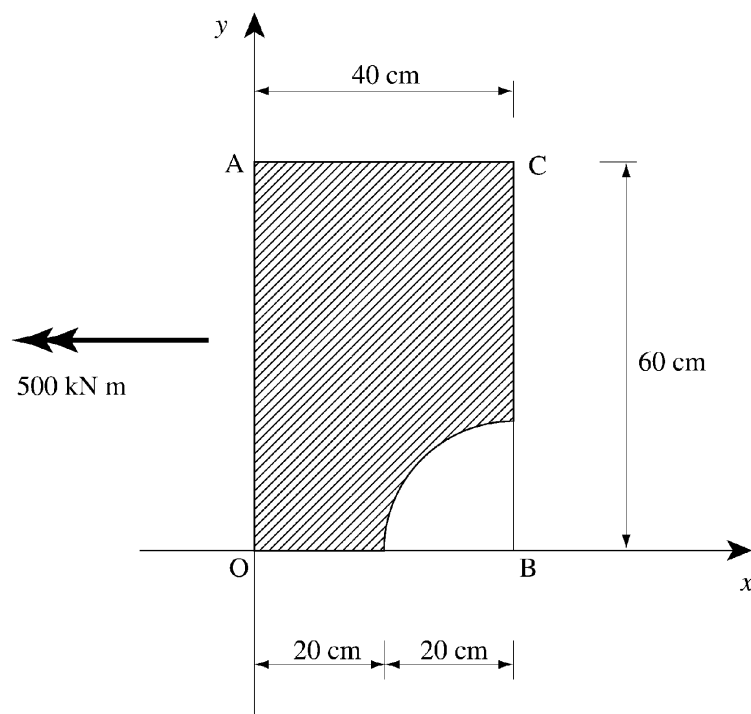
dalla (39) si ottiene:

$$\overline{PG}^2 = \rho_n^2, \quad (41)$$

come volevasi dimostrare. ■

5.5 Esercizio (sezione rettangolare con un intaglio)

Si consideri la seguente sezione rettangolare con un intaglio in forma di settore circolare, già in precedenza risolta per quel che riguarda le sue proprietà inerziali. Si supponga agente una coppia flettente di 500 kN m di asse momento orizzontale.

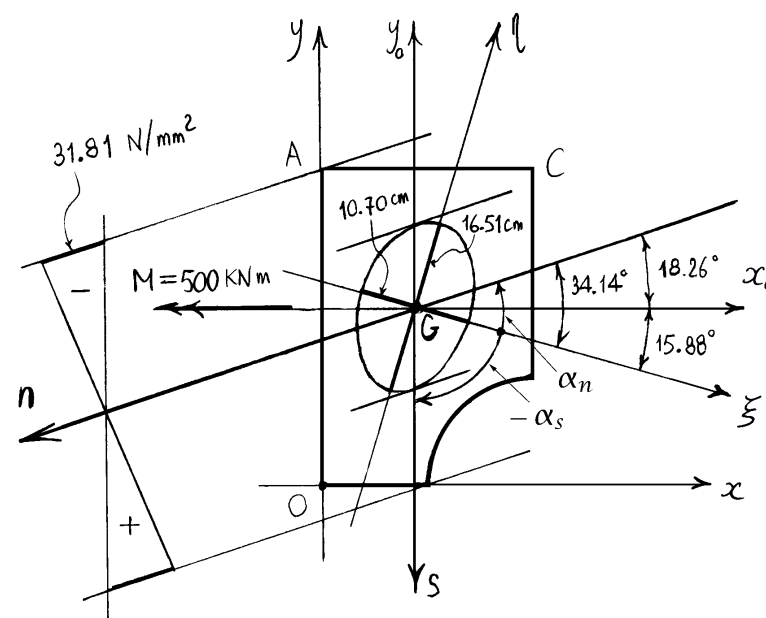


Poiché le direzioni principali sono inclinate rispetto alla orizzontale, la flessione è deviata.

L'asse di sollecitazione è verticale e la sua inclinazione α_s rispetto alla direzione principale ξ vale:

$$\alpha_s = -(90^\circ - \hat{x}_0) = -74.12^\circ,$$

essendo $\hat{x}_0 = 15.88^\circ$. L'inclinazione α_n dell'asse neutro si ottiene allora applicando la formula di coniugio:



$$\tan \alpha_n \tan \alpha_s = -\frac{J_\xi}{J_\eta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 34.14^\circ.$$

avendo tenuto conto che:

$$\begin{cases} J_\xi = 568\,660 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 238\,600 \text{ cm}^4 \end{cases}.$$

Le componenti della coppia flettente nel riferimento principale valgono:

$$\begin{cases} M_\xi = -M \cos \hat{\xi} \hat{x}_0 = -480.91 \text{ kNm} \\ M_\eta = -M \sin \hat{\xi} \hat{x}_0 = -136.83 \text{ kNm} \end{cases}.$$

L'equazione della tensione normale si può scrivere nella forma:

$$\sigma_x = \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi.$$

Uguagliando a zero si ottiene l'equazione dell'asse neutro e indi, in accordo con la formula di coniugio:

$$\tan \alpha_n = \frac{M_\eta}{M_\xi} \frac{J_\xi}{J_\eta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 34.14^\circ,$$

avendo tenuto conto che se il punto di coordinate (ξ, η) sta sull'asse neutro allora $\eta/\xi = \tan \alpha_n$.

Il punto con la massima tensione di compressione è il punto A, di coordinate:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 60 \text{ cm} \end{cases},$$

nel sistema di coordinate Oxy . Ricordando che le coordinate del baricentro, sempre nel sistema Oxy , valgono:

$$\begin{cases} x_G = 18.27 \text{ cm} \\ y_G = 33.24 \text{ cm} \end{cases}.$$

si ottengono immediatamente per traslazione le coordinate del punto A nel sistema baricentrico Gx_0y_0 :

$$\begin{cases} x_{0A} = x_A - x_G = -18.27 \text{ cm} \\ y_{0A} = y_A - y_G = 27.76 \text{ cm} \end{cases}.$$

Per determinare le coordinate del punto A nel sistema principale baricentrico si consideri il vettore $A - G$ di componenti:

$$\{A - G\} = \begin{Bmatrix} x_{0A} \\ y_{0A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18.27 \text{ cm} \\ 27.76 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

rispetto alla base $\mathbf{e}_i$ associata al sistema Gx_0y_0 . Detta $\mathbf{e}_i^*$ la base associata al sistema principale $G\xi\eta$ risulta:

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R}_{\alpha_\xi} \mathbf{e}_i,$$

dove $\mathbf{R}_{\alpha_\xi}$ è la rotazione di $\alpha_\xi = -15.88^\circ$ dal sistema Gx_0y_0 a quello principale $G\xi\eta$. Si ha allora:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{G}) \cdot \mathbf{e}_i^* = (\mathbf{A} - \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{R}_{\alpha_\xi} \mathbf{e}_i) = \left\{ \mathbf{R}_{\alpha_\xi}^T (\mathbf{A} - \mathbf{G}) \right\} \cdot \mathbf{e}_i,$$

e le coordinate di $\mathbf{A} - \mathbf{G}$ nel sistema principale coincidono, come già si sapeva, con quelle di $\mathbf{R}_{\alpha_\xi}^T (\mathbf{A} - \mathbf{G})$ nel sistema Gx_0y_0 .

La matrice rotazione $\mathbf{R}_{\alpha_\xi}$ dal sistema Gx_0y_0 al sistema $G\xi\eta$ vale:

$$\mathbf{R}_{\alpha_\xi} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & -\sin \alpha_\xi \\ \sin \alpha_\xi & \cos \alpha_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9618 & 0.2737 \\ -0.2737 & 0.9618 \end{bmatrix}.$$

e dunque le coordinate (ξ_A, η_A) valgono:

$$\begin{Bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9618 & -0.2737 \\ 0.2737 & 0.9618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -18.27 \text{ cm} \\ 27.76 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -24.89 \text{ cm} \\ 20.74 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

La tensione σ_A vale infine:

$$\sigma_A = \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A = -31.81 \text{ N/mm}^2$$

Se si vuole invece applicare la formula monomia occorre calcolare il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro. Utilizzando le formule di rotazione si ottiene:

$$J_n = \frac{J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 \hat{n}s} = 515280 \text{ cm}^4,$$

con $\alpha_n = 34.14^\circ$ e dove si è tenuto conto che la formula di rotazione fornisce il momento di inerzia valutato con distanze ortogonali mentre nella formula monomia interviene il momento di inerzia valutato con distanze nella direzione dell'asse di sollecitazione. L'angolo $\hat{n}s$ tra asse di sollecitazione e asse neutro vale:

$$\hat{n}s = (90^\circ - \hat{x}_0n) = 71.74^\circ,$$

essendo:

$$\hat{x}_0n = \hat{\xi}n - \hat{\xi}x_0 = 34.14^\circ - 15.88^\circ = 18.26^\circ.$$

La coordinata di A in direzione s nel sistema Gns vale:

$$s_A = -(60\text{ cm} - y_G) - x_G \tan \hat{x}_0 n = -32.79\text{ cm}.$$

Risulta quindi:

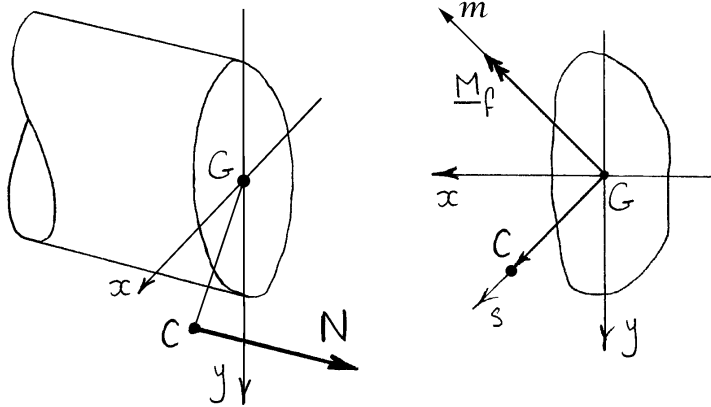
$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M}{J_n} s_A = - \frac{5 \times 10^8 \text{ N mm}}{5.1528 \times 10^9 \text{ mm}^4} 327.9 \text{ mm} = \\ &= -31.81 \text{ N/mm}^2,\end{aligned}$$

in accordo con il risultato della formula binomia.

Capitolo 6

Forza normale eccentrica

Si ha *forza normale eccentrica* quando la sezione è soggetta ad una forza normale N con retta d'azione non baricentrica. Si ricorda che il punto C intersezione tra sezione e retta d'azione è detto *centro di sollecitazione*.



La forza normale eccentrica si compone della somma di una forza normale centrata di uguale valore N e di una flessione, in generale deviata, dovuta al momento M_f di N rispetto al baricentro:

$$M_f = M \mathbf{e}_m = (C - G) \times N \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

dove $\mathbf{e}_z$ è il versore normale alla sezione retta e m quello dell'asse momento. Dalla (1) risulta che M_f è ortogonale al vettore $C - G$, il che comporta che la direzione di tale vettore individua

l'asse s di sollecitazione della flessione dovuta alla forza normale eccentrica. L'asse coniugato di s , cioè l'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica, nel presente contesto sarà indicato con il simbolo r .

6.1 Asse neutro

Si assume come riferimento il sistema baricentrico coniugato non ortogonale $Gr s$ definito dalla flessione associata alla forza normale eccentrica. Il moto relativo della sezione retta rispetto ad una sezione vicina si compone di una traslazione nella direzione ortogonale z di ampiezza ϵds , con ϵ dilatazione della linea d'asse baricentrica, e di una rotazione $k_f ds$ attorno all'asse neutro r baricentrico della flessione associata alla forza normale eccentrica:

$$k_f = k \mathbf{e}_r. \quad (2)$$

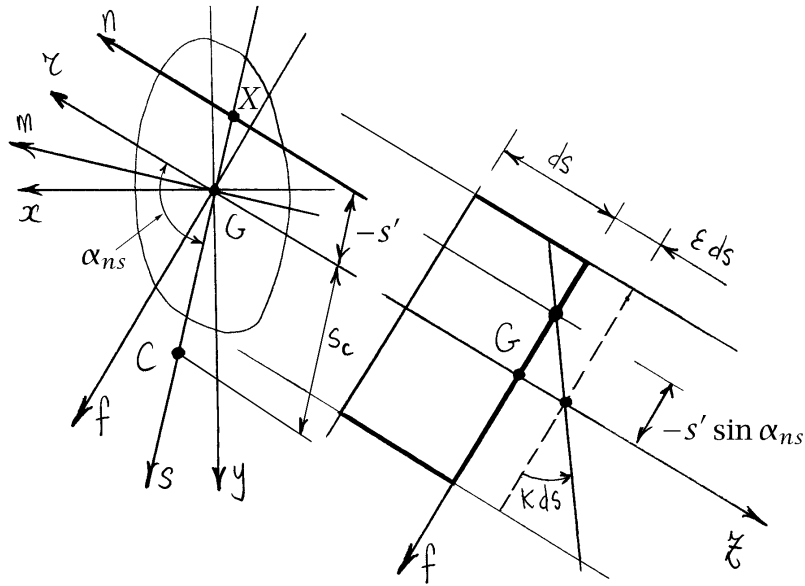
La dilatazione della fibra longitudinale per il generico punto P della sezione vale allora:

$$\epsilon_P = \epsilon + k (s \sin \alpha_{ns}), \quad (3)$$

dove $s \sin \alpha_{ns}$ è la coordinata f del punto P nel sistema ortogonale $Gr f$ individuato dall'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica. La (3) si annulla nei punti di una retta n di equazione:

$$s = -\frac{\epsilon}{k \sin \alpha_{ns}}, \quad (4)$$

che assume quindi il significato di *asse neutro della forza nor-*



male eccentrica. Si noti che tale asse risulta essere parallelo all'asse neutro r della flessione associata alla forza normale eccentrica. Si noti anche che globalmente la sezione ruota di $k ds$ attorno a tale asse. Inoltre l'intersezione X tra asse neutro n e asse di sollecitazione s è individuata, sull'asse di sollecitazione, dalla coordinata s' che per la (4) vale:

$$s' = -\frac{\epsilon}{k \sin \alpha_{ns}}. \quad (5)$$

Da quanto detto e se si assume quale riferimento il sistema non ortogonale Xns , consegue che:

$$\epsilon_P = k (s \sin \alpha_{ns}). \quad (6)$$

Si faccia attenzione al fatto che ora s indica la coordinata del

generico punto P ancora in direzione dell'asse di sollecitazione ma nel sistema non ortogonale Xns .

Valutando la relazione (1) nel sistema ortogonale Gms :

$$M \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_z \\ 0 & s_C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}, \quad (7)$$

si ottiene:

$$M = N s_C, \quad (8)$$

dove s_C è la coordinata del centro di sollecitazione C sia nel sistema ortogonale Gms che nel sistema coniugato $Gr s$. Dai legami costitutivi assiale e flessionale, tenendo anche conto della (8), si ottiene:

$$\epsilon = \frac{N}{\mathcal{M}}, \quad k = \frac{M}{J_r \sin \alpha_{ns}} = \frac{N}{\mathcal{M}} \frac{s_C}{\rho_r^2 \sin \alpha_{ns}}, \quad (9)$$

dove $\mathcal{M}$ è la massa totale della sezione retta e $J_r = \int_A E s^2 dA$ il momento di inerzia rispetto all'asse r con distanze valutate nella direzione coniugata s . Inserendo le (9) nella (5) si ottiene infine l'intersezione tra asse neutro e asse di sollecitazione nella forma:

$$s' = -\frac{\rho_r^2}{s_C}. \quad (10)$$

Si noti che il segno negativo a secondo membro dell'uguaglianza significa che il centro di sollecitazione e l'asse neutro sono da parte opposta rispetto al baricentro.

6.2 Tensione normale

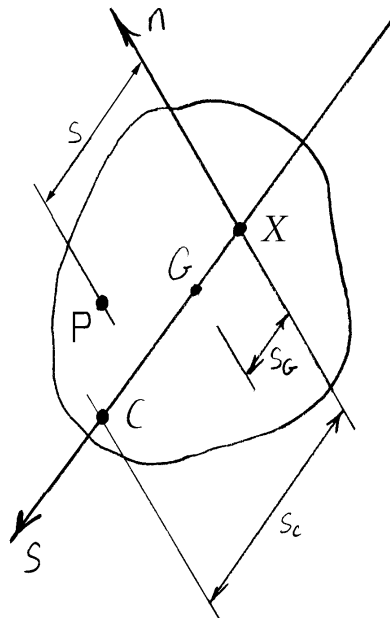
6.2.1 Formule binomia e monomia

Nel generico punto P della sezione retta la tensione normale risulta $\sigma_z = E\epsilon_P$. Dalle (3) e (9) si ottiene allora la seguente *formula binomia della forza normale eccentrica*:

$$\sigma_z = E \left(\frac{N}{\mathcal{M}} + \frac{M}{J_r} s \right). \quad (11)$$

Dalla (6), valida nel sistema Xns , si ottiene invece:

$$\sigma_z = E (k \sin \alpha_{ns}) s. \quad (12)$$



Detta σ_z^r la tensione normale in corrispondenza dell'asse neutro r della flessione associata alla forza normale eccentrica, asse definito da $s = 0$ nel sistema $Gr s$ e da $s = s_G$ nel sistema Xns , si ha, come si evince dalla (11):

$$\sigma_z^r = E \frac{N}{\mathcal{M}}. \quad (13)$$

Valutando allora la (12), valida nel sistema Xns , per $s = s_G$ e ricordando il teorema di Varignon, si ottiene:

$$k \sin \alpha_{ns} = \frac{N}{\mathcal{M}s_G} = \frac{N}{S_n}, \quad (14)$$

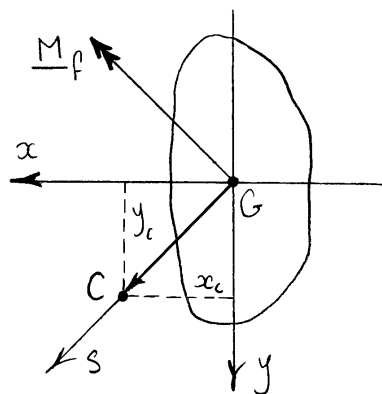
dove $S_n = \int_A E s \, dA$ rappresenta il momento statico rispetto all'asse neutro n della forza normale eccentrica, con distanze valutate nella direzione coniugata s . Inserendo la (14) nella (12) si ottiene infine la seguente *formula monomia della forza normale eccentrica*:

$$\sigma_z = E \frac{N}{S_n} s. \quad (15)$$

6.2.2 Formula trinomia

In componenti nel sistema principale di inerzia $Gx y$ risulta:

$$\underline{M}_f = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = N y_c \underline{e}_x - N x_c \underline{e}_y,$$



$$= E \frac{N}{M} \left(1 + \frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x \right), \quad (17)$$

dove $\rho_x^2 = J_x/M$ e $\rho_y^2 = J_y/M$ rappresentano i quadrati dei raggi di inerzia principali.

Nel caso omogeneo la (16) prende il nome di formula di Navier e assume la forma:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x, \quad (18)$$

dove ora J_x e J_y sono i momenti di inerzia della sola area (con distribuzione di massa $\mu = 1$).

e quindi:

$$\begin{cases} M_x = N y_c \\ M_y = -N x_c \end{cases}.$$

La tensione normale può quindi essere espressa, relativamente al sistema Gxy principale di inerzia, tramite la seguente formula trinomia:

$$\sigma_z = E \frac{N}{M} + E \frac{M_x}{J_x} y - E \frac{M_y}{J_y} x. \quad (16)$$

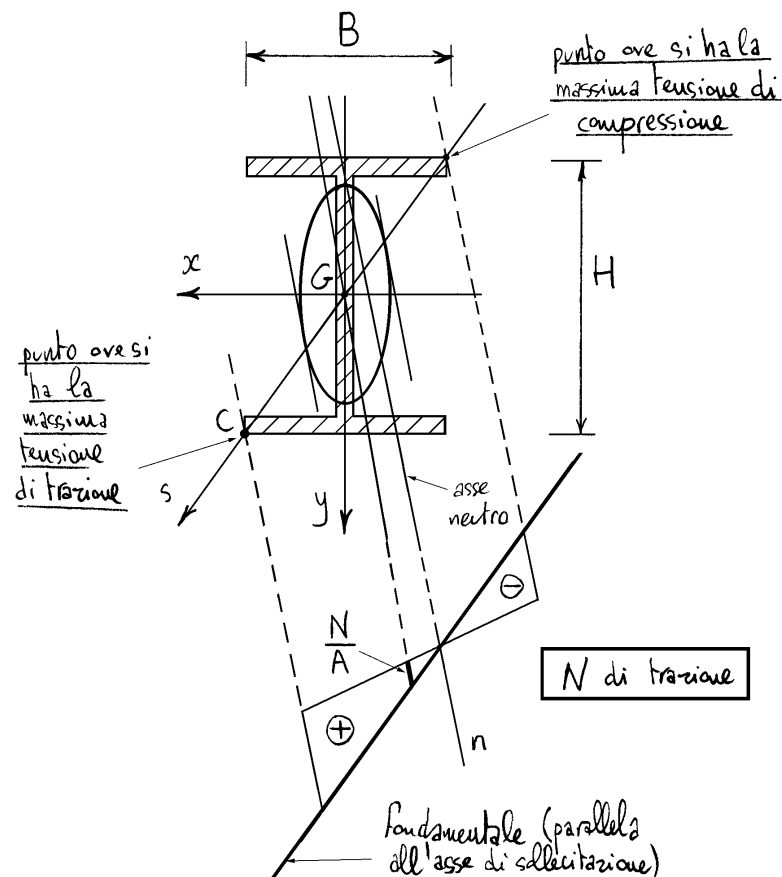
Questa può poi porsi nella forma:

$$\sigma_z = E \left(\frac{N}{M} + \frac{N y_c}{J_x} y + \frac{N x_c}{J_y} x \right) =$$

6.2.3 Diagramma delle tensioni normali nel caso omogeneo

Le tensioni normali si annullano sull'asse neutro e sono costanti su rette parallele all'asse neutro. È allora consuetudine di riportare tale valore costante nella direzione dell'asse neutro a partire da una retta parallela

all'asse di sollecitazione, presa quale riferimento. Le rette radenti parallele all'asse neutro individuano i punti di massima tensione normale a trazione e a compressione, nel caso l'asse neutro tagli la sezione. Se invece l'asse neutro non taglia la sezione, allora le



tensioni normali sono tutte dello stesso segno, positivo se lo sforzo normale è positivo e negativo nel caso opposto. In tal caso la tensione normale massima si ha in corrispondenza del punto (o dei punti) individuati dalla retta radente più lontana dall'asse neutro.

L'appartenenza al dominio di elasticità richiede alle massime tensioni, di trazione e di compressione, di essere inferiori alle rispettive tensioni di snervamento.

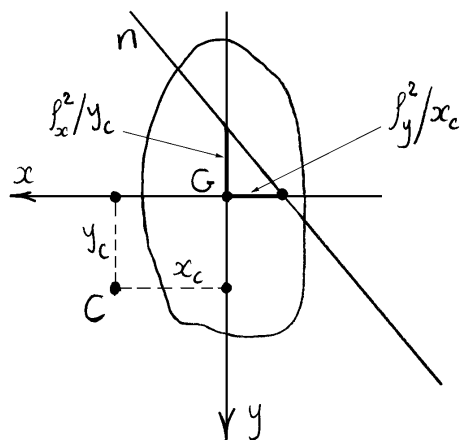
6.3 Antipolarità di inerzia

6.3.1 Equazione segmentaria dell'asse neutro

L'equazione dell'asse neutro nel sistema baricentrico Gxy si può ottenere uguagliando a zero la (17) ottenendo così la seguente equazione segmentaria dell'asse neutro:

$$\frac{x}{-I_y^2/x_c} + \frac{y}{-I_x^2/y_c} = 1.$$

Le intersezioni x' e y' dell'asse neutro con gli assi x (di equazione $y=0$) e y (di equazione $x=0$) rispetti=



valente, valgono:

$$\begin{cases} x' = -\frac{l_y^2}{x_c} \\ y' = -\frac{l_x^2}{y_c} \end{cases}$$

6.3.2 antipolo e antipolare

Si noti che, data una retta n non baricentrica, è possibile ricavare le coordinate del centro di sollecitazione C al quale corrisponde n quale asse neutro:

$$\begin{cases} x_c = -\frac{l_y^2}{x'} \\ y_c = -\frac{l_x^2}{y'} \end{cases}$$

dove ancora x' e y' sono le intersezioni con gli assi x e y dell'asse n .

Si vede così che sussiste una relazione biunivoca fra tutte le rette non baricentriche del piano e tutti i punti del piano (escluso il baricentro).

Questa corrispondenza tra punti e rette è detta antipolarità di inerzia. La retta n corrispondente ad un punto

C è detta antipolare di C , mentre il punto C corrispondente di una retta n è detto antipolo o centro relativo della retta n .

6.3.3 Prime proprietà dell'antipolarità di inerzia

Una prima proprietà dell'antipolarità di inerzia si ha notando che le intersezioni x' e y' dell'asse neutro hanno sempre segno opposto rispetto alle coordinate x_c e y_c del centro di sollecitazione, per cui l'asse neutro è sempre situato dalla parte opposta di C rispetto al baricentro, come d'altronde era già stato stabilito in precedenza.

Inoltre, come già visto, l'asse neutro n corrispondente al centro di sollecitazione C ha la direzione dell'asse τ coniugato dell'asse di sollecitazione s (direzione fornita dal vettore $C-G$). D'altronde l'asse neutro

ha equazione:

$$\frac{N}{M} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

mentre la sua parallela τ per il baricentro risulta:

$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0,$$

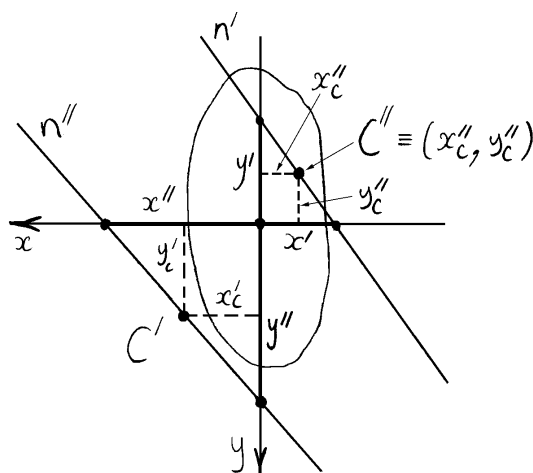
equazione dell'asse neutro nel caso in cui agisce il solo momento M_p .

Una conseguenza di questa proprietà è che tutte le rette parallele ad τ hanno centro di sollecitazione sull'asse s coniugato di τ .

6.3.4 Teorema di reciprocità

Si vuole poi mostrare che vale il teorema di reciprocità: "Se una retta n'' contiene il centro relativo C' di n' allora n' contiene il centro relativo C'' di n'' ".

Sia quindi n'' una generica retta passante per C' ed avente intersezioni x'' e y'' con gli assi x e y . La



sua equazione segmentaria vale :

$$\frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} = 1 ,$$

e quindi per ipotesi vale la condizione :

$$\frac{x'_c}{x''} + \frac{y'_c}{y''} = 1 ,$$

poiché n'' contiene C' . Il centro relativo C'' di n'' ha coordinate :

$$\begin{cases} x''_c = -\frac{I_y^2}{x''} \\ y''_c = -\frac{I_x^2}{y''} \end{cases} .$$

Poiché :

$$\frac{-I_y^2/x''}{-I_y^2/x'_c} + \frac{-I_x^2/y''}{-I_x^2/y'_c} = \frac{x'_c}{x''} + \frac{y'_c}{y''} = 1 ,$$

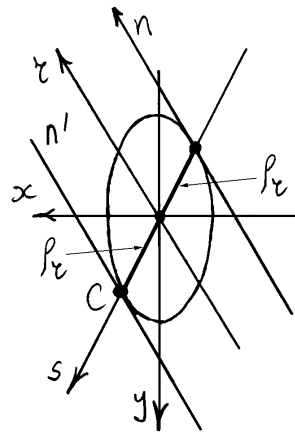
le coordinate del punto C'' soddisfanno l'equazione di n' :

$$\frac{x}{-I_y^2/x'_c} + \frac{y}{-I_x^2/y'_c} = 1 ,$$

e la retta n' contiene C'' , come volevasi dimostrare.

6.3.5 Polarità di inerzia

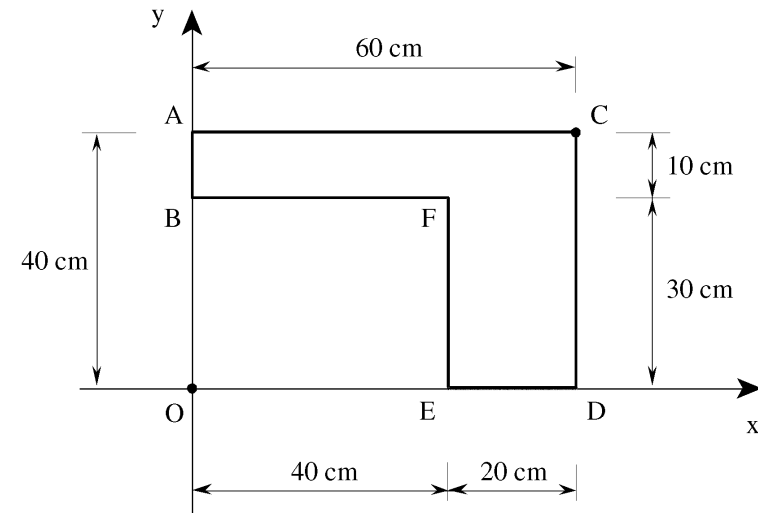
Infine, la condizione $s' = -I_x^2/s_c$ mostra che se $s_c = I_x$, cioè se C si trova sull'ellisse centrale di inerzia, allora $s' = I_x$, ovvero sia la retta n è tangente all'ellisse nel punto opposto in diametro a C . Se al punto C facciamo corrispondere la retta n' simmetrica alla n rispetto al baricentro, la retta n' contiene il punto C . In questa nuova corrispondenza,



detta polarità di inerzia, i punti contenuti nella retta corrispondente individuano l'ellisse centrale di inerzia (che assume quindi il ruolo di conica fondamentale nella polarità di inerzia).

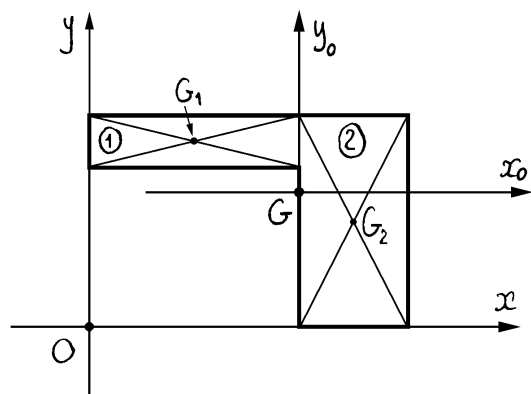
Non solo, ma la condizione $s' = -I_z^2/s_c$ ci informa anche del fatto che se $s_c > I_z$ (C esterno all'ellisse) allora $s' < I_z$ (n taglia l'ellisse) e viceversa.

6.4 Esercizio: sezione composta di due rettangoli



La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 200 kN, applicato in corrispondenza del punto C.

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η ;
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
- 6) Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
- 7) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



Aree e momenti statici (sistema Oxy):

	A/cm^2	x_G/cm	y_G/cm	S_x/cm^3	S_y/cm^3
①	400	20	35	14 000	8 000
②	800	50	20	16 000	40 000
TOT	1 200	40	25	30 000	48 000

Coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{48\,000 \text{ cm}^3}{1\,200 \text{ cm}} = 40 \text{ cm},$$

$$y_G = \frac{30\,000 \text{ cm}^3}{1\,200 \text{ cm}} = 25 \text{ cm}.$$

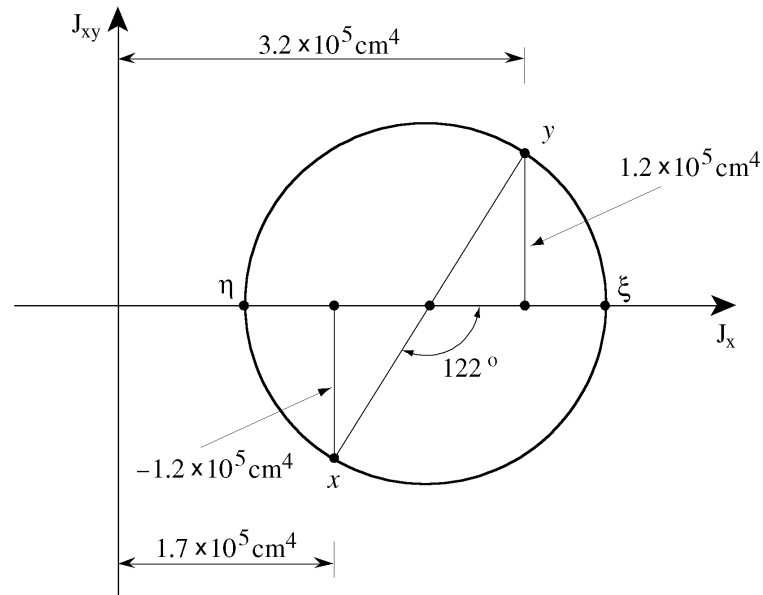
Momenti di inerzia e centrifugo rispetto agli assi x_0 e y_0 baricentrici:

$$\begin{cases} J_{x_0}^{①} = \frac{40 \text{ cm} \times (10 \text{ cm})^3}{12} + A^{①} (y_G - y_{G1})^2 \\ J_{x_0}^{②} = \frac{20 \text{ cm} \times (40 \text{ cm})^3}{12} + A^{②} (y_G - y_{G2})^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} J_{y_0}^{①} = \frac{10 \text{ cm} \times (40 \text{ cm})^3}{12} + A^{①} (x_G - x_{G1})^2 \\ J_{y_0}^{②} = \frac{40 \text{ cm} \times (20 \text{ cm})^3}{12} + A^{②} (x_G - x_{G2})^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} J_{x_0 y_0}^{①} = A^{①} (y_G - y_{G1}) (x_G - x_{G1}) \\ J_{x_0 y_0}^{②} = A^{②} (y_G - y_{G2}) (x_G - x_{G2}) \end{cases}.$$

	J_{x_0}/cm^4	J_{y_0}/cm^4	$J_{x_0 y_0}/\text{cm}^4$
①	43 333	213 333	-80 000
②	126 667	106 667	-40 000
TOT	170 000	320 000	-120 000



Momenti principali di inerzia:

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x0} + J_{y0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x0} - J_{y0})^2 + 4J_{x0y0}^2} = \begin{cases} 386\,510 \text{ cm}^4 \\ 103\,490 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

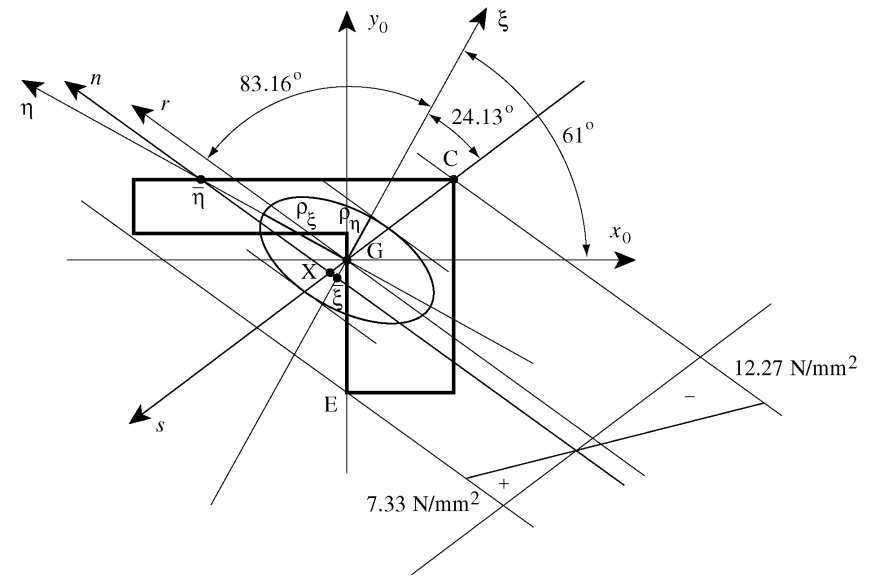
Raggi principali di inerzia:

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}} = 17.95 \text{ cm},$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{J_{\eta}}{A}} = 9.29 \text{ cm}.$$

Posizione degli assi principali di inerzia:

$$\alpha_{\xi} = \arctan \left\{ \frac{J_{x0} - J_{\xi}}{J_{x0y0}} \right\} = 61.00^\circ.$$



Rotazione dal sistema Gx_0y_0 al sistema $G\xi\eta$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\xi} & -\sin \alpha_{\xi} \\ \sin \alpha_{\xi} & \cos \alpha_{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4848 & -0.8746 \\ 0.8746 & 0.4848 \end{bmatrix}.$$

Coordinate dei punti C, B, E nel sistema principale:

$$\{C - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 60 \text{ cm} - 40 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} - 25 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.81 \text{ cm} \\ -10.22 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

$$\{B - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 0 \text{ cm} - 40 \text{ cm} \\ 30 \text{ cm} - 25 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15.02 \text{ cm} \\ 37.41 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

$$\{E - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 40 \text{ cm} - 40 \text{ cm} \\ 0 \text{ cm} - 25 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.87 \text{ cm} \\ -12.12 \text{ cm} \end{Bmatrix}.$$

Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\bar{\xi} = \frac{-\rho_{\eta}^2}{\xi_C} = -3.78 \text{ cm},$$

$$\bar{\eta} = \frac{-\rho_{\xi}^2}{\eta_C} = 31.51 \text{ cm}.$$

Caratteristiche della sollecitazione nel sistema principale:

$$N = -200 \text{ kN},$$

$$M_{\xi} = N\eta_C = 2\,044 \text{ kN cm},$$

$$M_{\eta} = -N\xi_C = 4\,563 \text{ kN cm},$$

Tensioni normali nei punti C, B, E:

$$\sigma_C = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_C - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_C = -12.27 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_B - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_B = 6.93 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_E - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_E = 7.33 \text{ N/mm}^2.$$

Inclinazione dell'asse di sollecitazione nel sistema principale:

$$\alpha_s = \arctan \left\{ \frac{\eta_C}{\xi_C} \right\} = -24.13^\circ.$$

Inclinazione dell'asse neutro nel sistema principale (due calcoli alternativi):

$$\alpha_n = \arctan \left\{ -\frac{J_{\xi}}{J_{\eta} \tan \alpha_s} \right\} = 83.16^\circ,$$

$$\alpha_n = \arctan \left\{ -\frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} \right\} = 83.16^\circ.$$

Angolo compreso tra l'asse di sollecitazione e l'asse neutro:

$$\widehat{sn} = 180^\circ - (\alpha_n - \alpha_s) = 72.71^\circ.$$

Momento e raggio di inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione):

$$J_r = \frac{J_{\xi} \cos^2 \alpha_n + J_{\eta} \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 \widehat{sn}} = 117\,920 \text{ cm}^4,$$

$$\rho_r = \sqrt{\frac{J_r}{A}} = 9.91 \text{ cm}.$$

Intersezione tra asse neutro e asse di sollecitazione:

$$\overline{CG} = \sqrt{\xi_C^2 + \eta_C^2} = 25 \text{ cm},$$

$$\overline{GX} = \frac{\rho_r^2}{\overline{CG}} = 3.93 \text{ cm}.$$

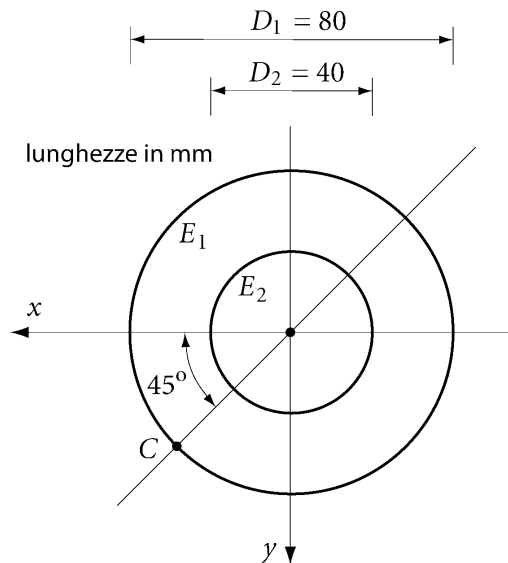
Momento statico rispetto all'asse neutro e tensione normale nel punto C (coordinate riferite al sistema Xns):

$$S_n = As_G = -4\,717 \text{ cm}^3, \quad \text{dove} \quad s_G = -\overline{GX},$$

$$\sigma_C = \frac{N}{S_n} s_C = -12.27 \text{ N/mm}^2, \quad \text{dove} \quad s_C = -(\overline{CG} + \overline{GX}).$$

6.5 Esercizio: sezione circolare composta di due materiali

Data la sezione circolare di figura composta di due materiali



di modulo di Young:

$$E_1 = 70 \text{ GPa}, \quad E_2 = 210 \text{ GPa},$$

e soggetta ad una forza normale N eccentrica di compressione di 250 kN applicata nel punto C :

1. calcolare il momento d'inerzia rispetto a un diametro (eventualmente omogeneizzato all'area di uno dei due materiali);
2. calcolare il raggio dell'ellisse centrale di inerzia;

3. disegnare l'asse di sollecitazione, l'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica (quotando la sua inclinazione) e l'asse neutro della forza normale eccentrica (quotando la sua intersezione con l'asse di sollecitazione);
4. valutare il momento statico rispetto all'asse neutro (della forza normale eccentrica);
5. disegnare il diagramma quotato delle tensioni normali.

1. Tutti gli assi contenenti i diametri sono di simmetria e inoltre la sezione è invariante per rotazioni generiche attorno al centro comune delle due circonferenze. Ne consegue che tutti gli assi contenenti i diametri sono principali di inerzia e che i momenti di inerzia rispetto a questi assi sono uguali.

Siano:

$$R_1 = \frac{D_1}{2} = 40 \text{ mm}, \quad R_2 = \frac{D_2}{2} = 20 \text{ mm},$$

i raggi del cerchio esterno ed interno rispettivamente. Il momento di inerzia della sola area J_1 della corona circolare 1 si valuta per differenza del contributo tra il cerchio esterno e quello interno:

$$J_1 = \frac{\pi}{4} (R_1^4 - R_2^4) = 1.8850 \times 10^6 \text{ mm}^4,$$

mentre il momento di inerzia J_2 della sola area del cerchio 2 vale:

$$J_2 = \frac{\pi}{4} R_2^4 = 1.2566 \times 10^5 \text{ mm}^4.$$

Il momento di inerzia J rispetto ad un asse contenente un

diametro vale allora:

$$\begin{aligned} J &= \sum_i E_i J_i \\ &= (70 \times 10^3) (1.8850 \times 10^6) + (70 \times 10^3) (1.8850 \times 10^6) \\ &= 1.5834 \times 10^{11} \text{ N mm}^2 . \end{aligned}$$

Se si omogeneizza all'area del materiale 1, il coefficiente di omogeneizzazione vale:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{210}{70} = 3.$$

Il momento di inerzia J^o dell'area omogeneizzata rispetto ad un asse contenente un diametro vale allora:

$$\begin{aligned} J^o &= J_1 + n J_2 = 1.8850 \times 10^6 + 3 \times (1.8850 \times 10^6) \\ &= 2.2619 \times 10^6 \text{ mm}^4 . \end{aligned}$$

2. Le aree A_2 e A_1 dei materiali 2 e 1 rispettivamente valgono:

$$A_2 = \pi R_2^2 = 1256.6 \text{ mm}^2 , \quad A_1 = \pi R_1^2 - A_2 = 3769.9 \text{ mm}^2 .$$

Ne risulta la seguente massa totale $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_i E_i A_i = (70 \times 10^3) \times 3769.9 + (210 \times 10^3) \times 1256.6 \\ &= 5.2779 \times 10^8 \text{ N} , \end{aligned}$$

oppure la seguente area omogeneizzata:

$$A^o = A_1 + n A_2 = 3769.9 + 3 \times 1256.6 = 7539.8 \text{ mm}^2 .$$

L'ellisse centrale di inerzia nel caso in esame è una circonferenza di raggio:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}}} = \sqrt{\frac{J^o}{A^o}} = 17.32 \text{ mm} .$$

3. L'asse di sollecitazione s coincide con la congiungente il baricentro G con il centro di sollecitazione C ed è principale di inerzia. L'asse neutro r della flessione associate alla forza normale eccentrica è baricentrico e ortogonale all'asse di sollecitazione e quindi inclinato di 45° rispetto all'asse x . L'asse neutro n della forza normale eccentrica è parallelo all'asse r , è situato dalla parte opposta rispetto al baricentro e taglia l'ellisse centrale di inerzia dato che il centro di sollecitazione C ne è esterno.

L'intersezione X tra asse neutro n e asse di sollecitazione s è posta alla seguente distanza $\overline{GX}$ da G :

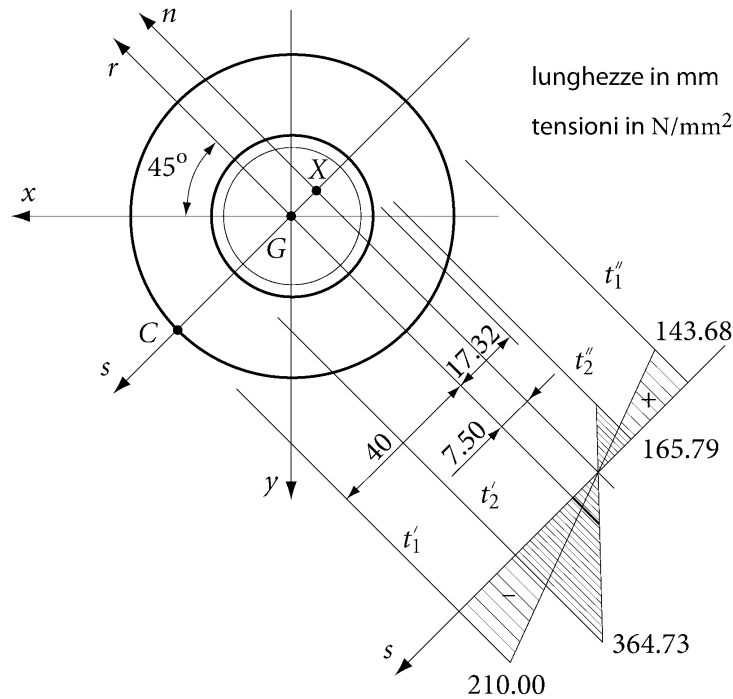
$$\overline{GX} = \frac{\rho^2}{\overline{GC}} = \frac{17.32^2}{40} = 7.50 \text{ mm} ,$$

dove $\overline{GC}$ è la distanza del centro di sollecitazione C dal baricentro G .

4. Per il teorema di Varignon il momento statico si ottiene concentrando la massa totale nel baricentro:

$$S_n = \mathcal{M} s_G = (5.2779 \times 10^8) \times 7.50 = 3.9584 \times 10^9 \text{ N mm} ,$$

dove s_G è la coordinata del baricentro G in direzione s nel sistema Xns , che con le convenzioni di figura è positiva.



Se si procede omogeneizzando, si ottiene il momento statico S_n^o omogeneizzato all'area del materiale 2:

$$S_n^o = A^o s_G = 7539.8 \times 7.50 = 56549 \text{ mm}^3 .$$

5. Si considerino le radenti t'_1 e t''_1 all'area del materiale 1, parallele all'asse neutro, di coordinate rispettivamente:

$$\begin{aligned} s'_1 &= \overline{GX} + R_1 = 7.5 + 40 = 47.5 \text{ mm} , \\ s''_1 &= \overline{GX} - R_1 = 7.5 - 40 = -32.5 \text{ mm} . \end{aligned}$$

e quelle t'_2 e t''_2 radenti all'area del materiale 2, sempre parallele all'asse neutro, di coordinate rispettivamente:

$$\begin{aligned} s'_2 &= \overline{GX} + R_2 = 7.5 + 20 = 27.5 \text{ mm} , \\ s''_2 &= \overline{GX} - R_2 = 7.5 - 20 = -12.5 \text{ mm} , \end{aligned}$$

Tenendo conto che $N = -250 \times 10^3 \text{ N}$, la tensione normale in corrispondenza di tali radenti vale rispettivamente:

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= E_1 \frac{N}{S_n} s'_1 = - (70 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 47.5 \\ &= -210.00 \text{ N/mm}^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma''_1 &= E_1 \frac{N}{S_n} s''_1 = (70 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 32.5 \\ &= 143.68 \text{ N/mm}^2 , \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \sigma'_2 &= E_2 \frac{N}{S_n} s'_2 = - (210 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 27.5 \\ &= -364.73 \text{ N/mm}^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma''_2 &= E_2 \frac{N}{S_n} s''_2 = (210 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 12.5 \\ &= 165.79 \text{ N/mm}^2 , \end{aligned}$$

Se si procede omogeneizzando si ottiene:

$$\sigma'_1 = \frac{N}{S_n^0} s'_1 = -\frac{250 \times 10^3}{56549} \times 47.5 = -210.00 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\sigma''_1 = \frac{N}{S_n^0} s''_1 = \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 32.5 = 143.68 \text{ N/mm}^2 ,$$

e:

$$\sigma'_2 = n \frac{N}{S_n^0} s'_2 = -3 \times \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 27.5 = -364.73 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\sigma''_2 = n \frac{N}{S_n^0} s''_2 = 3 \times \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 12.5 = 165.79 \text{ N/mm}^2 .$$

6.6 Nocciolo centrale di inerzia

Il nocciolo centrale di inerzia rappresenta il luogo dei centri di sollecitazione il cui asse neutro non taglia la figura.

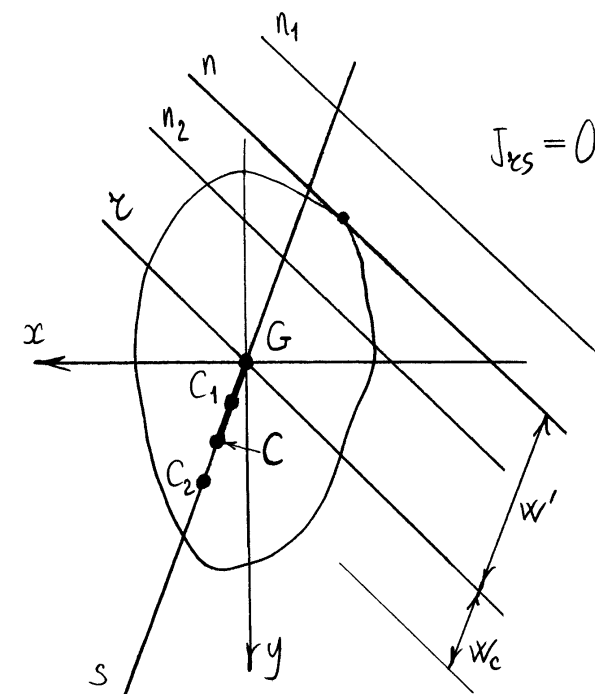
Ne consegue che se la forza normale eccentrica è di compressione ed applicata in un punto del nocciolo centrale di inerzia allora la sezione è tutta compressa (viceversa, se la forza normale è di trazione, allora la sezione è tutta tesa).

La conoscenza del nocciolo centrale di inerzia è importante nel caso di materiali che hanno scarsa resistenza a trazione. Infatti, se il dimensionamento di una struttura è eseguito in modo tale da far cadere il centro di sollecitazione (detto centro di pressione nel caso di strutture compresse) all'interno del nocciolo centrale di inerzia, allora si ha la certezza che non si sviluppano sollecitazioni di trazione.

6.6.1 Contorno del nocciolo quale luogo di punti

Il contorno del nocciolo è costituito dai centri relativi alle rette che toccano la figura senza tagliarla (rette radenti).

Infatti, sia n una retta radente e sia r la parallela a n per il baricentro G . Detta s la retta coniugata



di ε allora il centro relativo C di n si trova su s dalla parte opposta di n rispetto al baricentro. Se la retta n viene allontanata dalla figura il punto C percorre il segmento CG e quindi tale segmento appartiene al nocciolo poichè se n si allontana dalla figura allora non la taglia. Viceversa, se n si muove verso il baricentro, tagliando quindi la figura, C si muove su s allontanandosi dal baricentro generando un tratto di s che non appartiene al nocciolo. Quindi il punto C è sul contorno del nocciolo, come volevasi dimostrare.

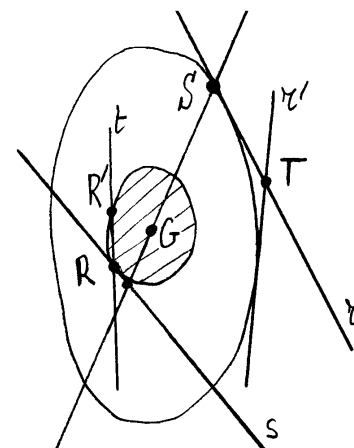
La lunghezza w_c del segmento CG è detta raggio di nocciolo. Se w' è la distanza, nella direzione dell'asse di sollecitazione s , della retta radente n dal baricentro, risulta:

$$w_c = \frac{J_z^2}{w'}$$

6.6.2 Contorno del nocciolo quale inviluppo di rette

Il nocciolo centrale di inerzia rappresenta anche l'involuppo delle antipolari dei punti dell'involuppo delle rette radenti la figura, ovvero se S è un punto dell'involuppo delle rette radenti la figura allora la sua antipolare s è tangente al nocciolo.

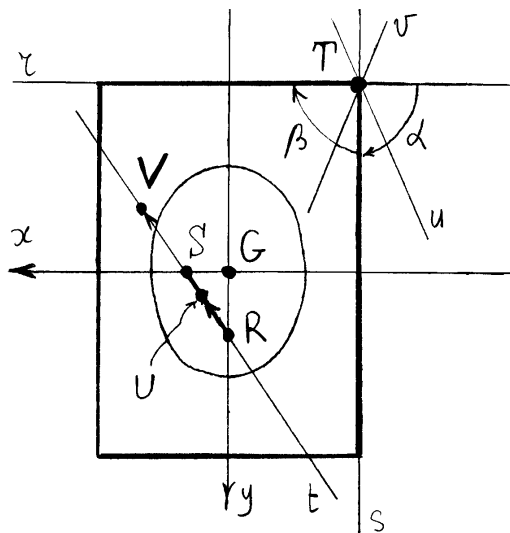
Infatti sia ε una retta per S radente la figura e sia R il suo antipolo. Si prenda una seconda retta radente ε' e siano T la sua intersezione con ε e R' il suo antipolo. Per costruzione, R e R' stanno sul contorno del nocciolo e la loro congiungente t , per



reciprocità, e' l'antipolare del punto T . Si faccia tendere τ' a τ . Allora T tende ad S e quindi la retta t tende all'antipolare s di S . Ma poichè risulta anche che R' tende ad R , la retta t tende alla tangente al nocciolo in R , come volevasi dimostrare.

6.6.3 Corrispondenza tra vertici e segmenti

Si supponga che sul contorno della figura di cui si vuole determinare il nocciolo centrale di inerzia vi sia un vertice T e siano r e s le due tangenti in corrispondenza del vertice. Con riferimento alla figura seguente, che senza perdita



di generalità rappresenta un rettangolo, siano R e S i centri relativi delle rette r e s rispettivamente. Nel caso del rettangolo di figura i due centri relativi precedenti sono posti rispettivamente sugli assi y e x rispettivamente, ma ciò è inessenziale.

I punti R ed S individuano, per reciprocità, la retta t coniugata del vertice T . Sempre per reciprocità, ogni retta contenente il vertice T ha antipolo che giace su t . Muovendo allora con continuità una retta u all'interno dell'angolo α individuato dalle rette per T che non tagliano la figura a partire dalla retta τ , il punto U centro relativo alla retta u si muove, a partire dal punto R , in direzione del punto S . Tale movimento è continuo poichè il baricentro appartiene all'involuppo delle rette secanti e quindi una retta u per T che non taglia la figura non contiene mai il baricentro.

Si tenga conto che l'unica discontinuità si ha quando la retta passa per il baricentro, poiché in tal caso la distanza della retta dal baricentro si annulla e quindi la distanza del suo antipolo dal baricentro diventa infinita.

Una retta v che invece si muove all'interno dell'angolo β contenente il baricentro ha centro relativo v che si muove, a partire da S fino a tendere all'infinito quando la retta tende a divenire baricentrica, poiché in tal caso la distanza di v dal baricentro tende a zero. Superato il baricentro, il punto V compare dall'altra parte della retta t e tende al punto R al tendere di v alla retta τ .

Se ne conclude che il segmento RS appartiene al contorno del nocciolo.

Si è quindi ottenuto il risultato generale che ogni volta che l'involuppo delle rette radenti presenta un vertice, a tale vertice corrisponde un segmento sul nocciolo.

Poiché vale anche il risultato reciproco, e cioè che a un segmento sul contorno della figura corrisponde un vertice sul contorno del nocciolo, come può facilmente verificarsi, ne consegue che ad una figura poligonale corrisponde un nocciolo centrale di inerzia poligonale.

6.6.4 Sezione rettangolare

Si consideri un rettangolo di base b e di altezza h . Poiché risulta:

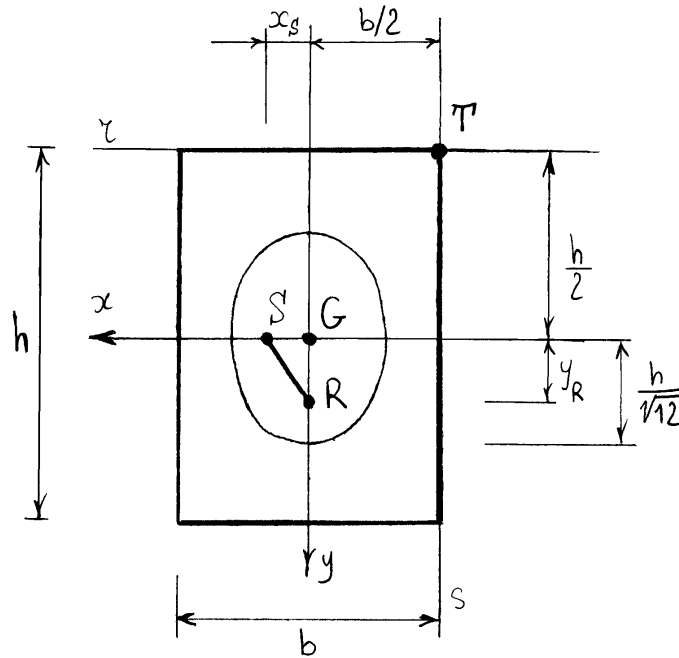
$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{b^3h}{12}, \quad A = bh,$$

i raggi di inerzia principali valgono:

$$l_x = \frac{h}{\sqrt{12}}, \quad l_y = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Alle rette τ ed s che contengono due lati

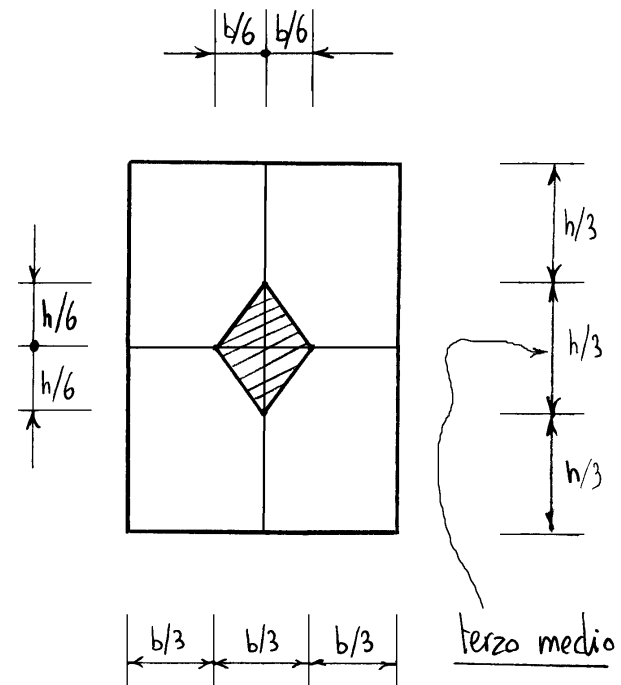
del rettangolo uscenti dal vertice T corrispondano
i centri relativi R , posto sull'asse y ed S , posto



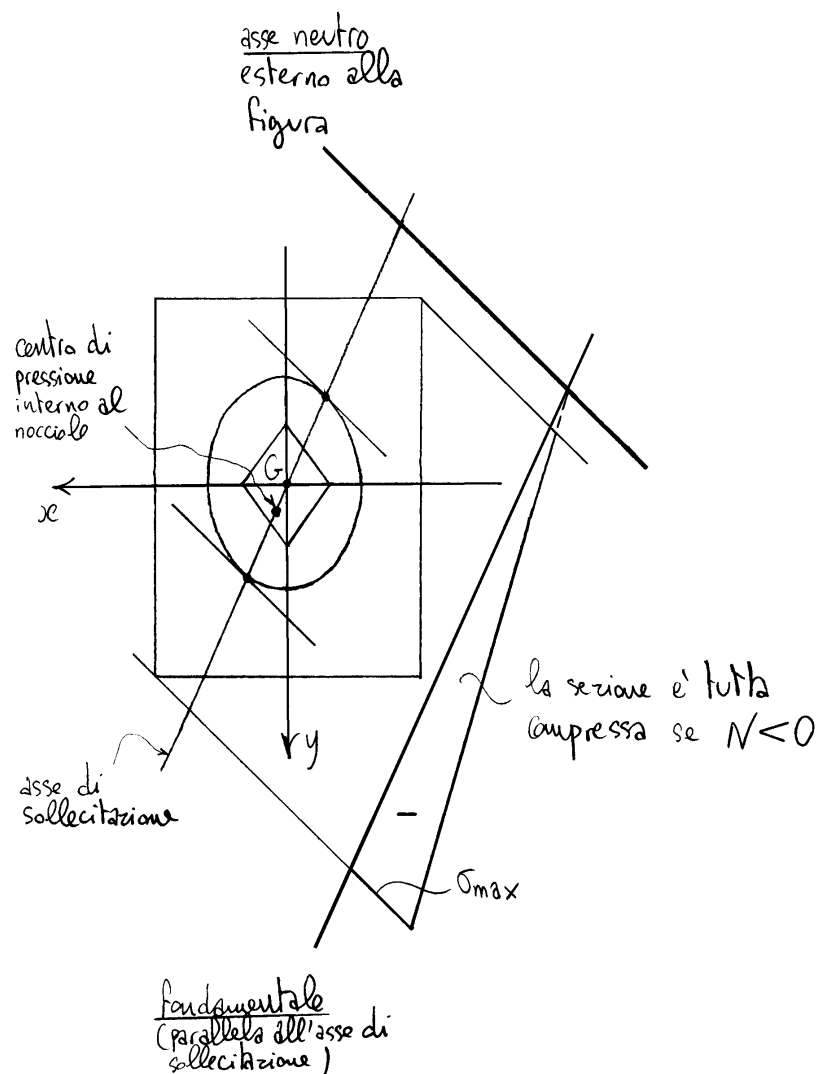
sull'asse x . Risulta:

$$\begin{cases} y_R = -I_x / (-\frac{h}{2}) = \frac{h}{6}, \\ x_s = -I_y / (-\frac{b}{2}) = \frac{b}{6}. \end{cases}$$

Per via della doppia simmetria, il nocciolo
centrale di inerzia del rettangolo è un rombo.



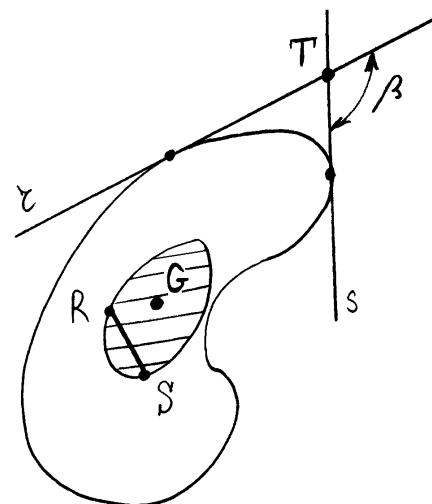
Come detto, se il centro di pressione appartiene al nocciolo
allora tutta la sezione risulta compressa come indicato
nella figura seguente.



6.6.5 Convessità del nocciolo centrale di inerzia

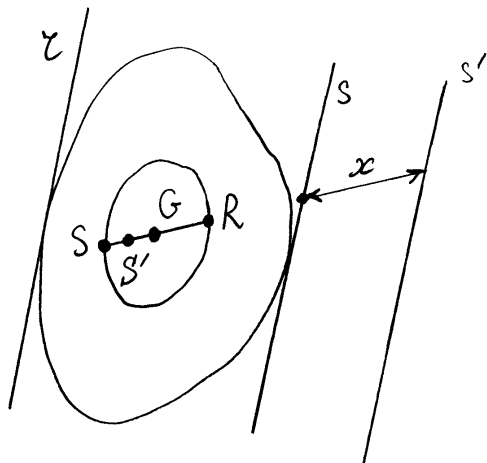
Un'ulteriore proprietà del nocciolo centrale di inerzia è che esso rappresenta una figura convessa. Ricordiamo che una figura è convessa se, dati due punti R ed S sul suo contorno, il segmento RS è tutto interno alla figura.

Siano allora R ed S due punti sul contorno del nocciolo centrale di inerzia e siano r ed s le rispettive antipolari radenti la figura. Sia poi T il punto intersezione di r e s . Le rette per T che non tagliano la figura definiscono l'angolo β che non contiene il



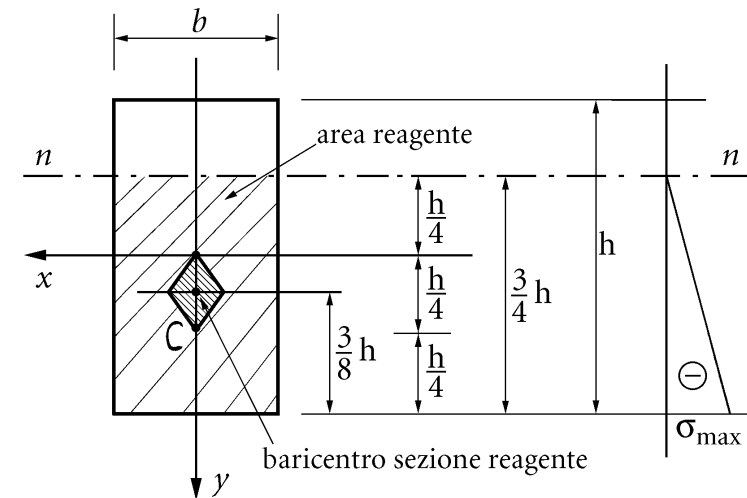
baricentro, essendo questo interno all'involuppo delle rette radenti. Le rette dell'angolo β generano il segmento RS , che quindi è interno al nocciolo, come volevate dimostrare. Nel caso particolare in cui il segmento RS contiene il baricentro, le due rette r e s sono parallele, e tra le rette parallele ad r ed s che non tagliano la figura c'è anche la retta impropria, di centro relativo il baricentro:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} s' \rightarrow \text{retta impropria} \\ s' \rightarrow G \end{cases}$$



6.6.6 Sezione non reagente a trazione

Se la sezione di una trave, di materiale non reagente a trazione, è soggetta ad una forza normale eccentrica di compressione, con centro di pressione non appartenente al nocciolo centrale di inerzia, la sezione si parzializza, dividendosi in una parte che non reagisce ed in una parte solo compressa.



L'asse che separa le due parti deve soddisfare l'equazione $\sigma_z = 0$ e quindi rappresenta l'asse neutro. Tale asse deve dunque essere l'antipolare del punto C, nella corrispondenza individuata dalla sola area reagente. Per tale area, l'asse neutro rappresenta una retta radente e dunque C deve appartenere al contorno del nocciolo centrale di inerzia della sola area reagente.

Per esempio, se, data una sezione rettangolare, il centro di pressione giace sull'asse y alla distanza $h/4$ dal lato più vicino, allora $h/4$ deve uguagliare la terza parte dell'altezza totale della sezione reagente che risulta dunque essere $\frac{3}{4}h$.

Le caratteristiche della sezione reagente sono:

$$\begin{cases} A^* = \frac{3}{4}bh \\ J_x^* = \frac{1}{12}b\left(\frac{3}{4}h\right)^3 = \frac{9}{4 \times 64}bh^3 \end{cases},$$

ed inoltre il momento (rispetto al baricentro della sezione reagente) vale:

$$M_x^* = -\frac{1}{8}Nh,$$

dove N è la forza di compressione ($N > 0$).

La tensione $\sigma_{\max}$ vale dunque:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^*}{J_x^*} y^{*''}.$$

dove:

$$y^{*''} = \frac{3}{8}h,$$

è la distanza del baricentro (della sezione reagente) dal lembo compresso. Risulta quindi:

$$\sigma_{\max} = -\frac{4}{3} \frac{N}{bh} - \frac{4 \times 64}{9 \times 8} \frac{3}{8} \frac{N}{bh} = -\frac{8}{3} \frac{N}{bh},$$

Se la sezione fosse reagente anche a trazione risulterebbe invece:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{bh} - \frac{N \frac{h}{4}}{\frac{1}{12} bh^3} \frac{h}{2} = -\frac{5}{2} \frac{N}{bh}.$$

Si poteva più velocemente valutare la tensione massima facendo riferimento alla formula monovaria:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{S_n^*} s'',$$

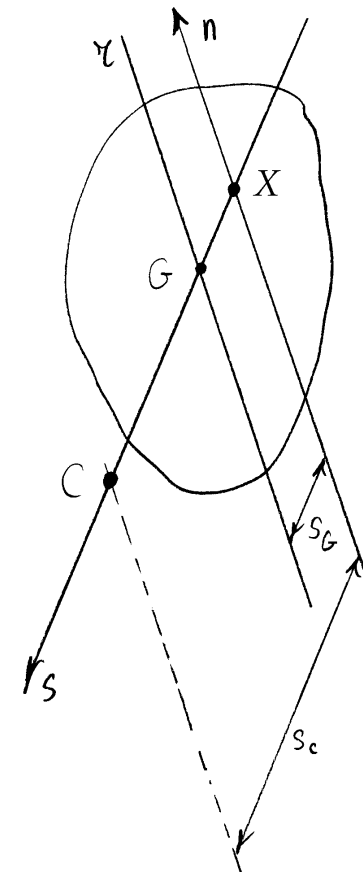
dove:

$$S_n = \left(b \frac{3}{4} h\right) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} h\right) = \frac{9}{32} bh^2,$$

$$s'' = \frac{3}{4} h.$$

6.7 Sistema di masse-momenti statici

Si consideri la sezione retta della trave soggetta a sforzo normale eccentrico e siano n ed s l'asse neutro e l'asse di sollecitazione, rispettivamente.



Preso come riferimento il sistema Xns , e dette s_G ed s_c le coordinate del baricentro e del centro di pressione in tale sistema, la relazione tra la posizione della retta n e del suo centro relativo C risulta:

$$s_G (s_c - s_G) = r_\chi^2,$$

dove χ è la retta parallela ad n per G .

Si ottiene:

$$s_G s_c = r_\chi^2 + s_G^2 = J_n^2,$$

avendo tenuto conto delle formule di trasposizione relative ai raggi di inerzia. Moltiplicando per la massa totale della sezione retta (l'area, nel caso omogeneo) si ottiene:

$$M s_G s_c = J_n,$$

da cui:

$$S_n s_c = J_n,$$

dove S_n rappresenta il momento statico rispetto all'asse neutro.

Si consideri ora in luogo del sistema di masse originario, di distribuzione di massa μ ($\mu \equiv E$, dove E è il modulo di Young, nel caso della teoria delle travi), il sistema di masse momenti-statici che si ottiene moltiplicando le masse unitarie μ per le loro distanze s dall'asse neutro. Se si calcolano i momenti statici $S_n^{(n)}$ e $S_s^{(n)}$ di tale sistema di masse rispetto agli assi neutro e di sollecitazione rispettivamente, si ottiene:

$$S_n^{(n)} = \int_A (\mu s) s dA = J_n,$$

$$S_S^{(n)} = \int_A (\mu s) n dA = J_{ns}.$$

Poiché $J_{ns} = 0$, il baricentro $G^{(n)}$ di tale sistema di masse — momenti statici, detto centro relativo della retta n , appartiene all'asse di sollecitazione s . Inoltre, la massa totale $M^{(n)}$ del nuovo sistema di masse risulta:

$$M^{(n)} = \int_A (\mu s) dA = S_n.$$

Quindi, la relazione tra C ed n si scrive:

$$M^{(n)} s_c = S_n^{(n)},$$

e tale relazione mostra che il centro di sollecitazione C coincide con il centro relativo della retta n , cioè con il baricentro del sistema di masse — momenti statici (relativi all'asse neutro).

Le masse — momenti statici sono distribuite sulla figura originaria.

Se la retta n è radente la figura le masse — momenti statici hanno tutte lo stesso segno e ne consegue che il centro relativo C , quale loro baricentro,

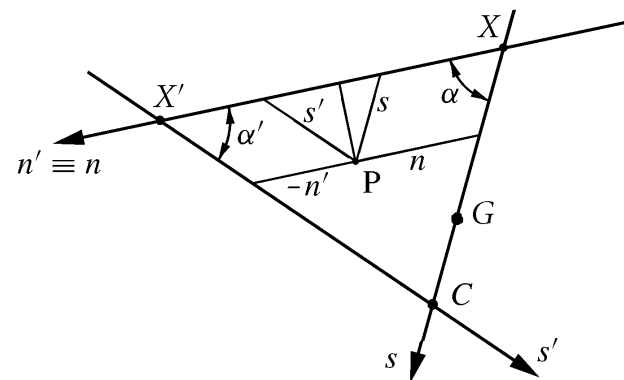
deve essere interno all'involuppo delle rette radenti.

Questo significa che il contorno del nocciolo centrale di inerzia, e quindi tutto il nocciolo, è interno all'involuppo delle rette radenti.

Inoltre, se n è una retta non baricentrica allora le rette coniugate della retta n passano per l'antipolo C di n , e viceversa se una retta s' passa per l'antipolo C di n allora s' è coniugata di n . In altre parole il fascio di rette di sostegno l'antipolo C di n individua tutte e solo le rette coniugate di n .

Infatti sia s' una retta per C . Il generico punto P ha coordinate (n, s) nel sistema Xns e (n', s') nel sistema $X'n's'$ (con $n' \equiv n$), come indicato in figura. Risulta $s' = s \sin \alpha / \sin \alpha'$ e quindi:

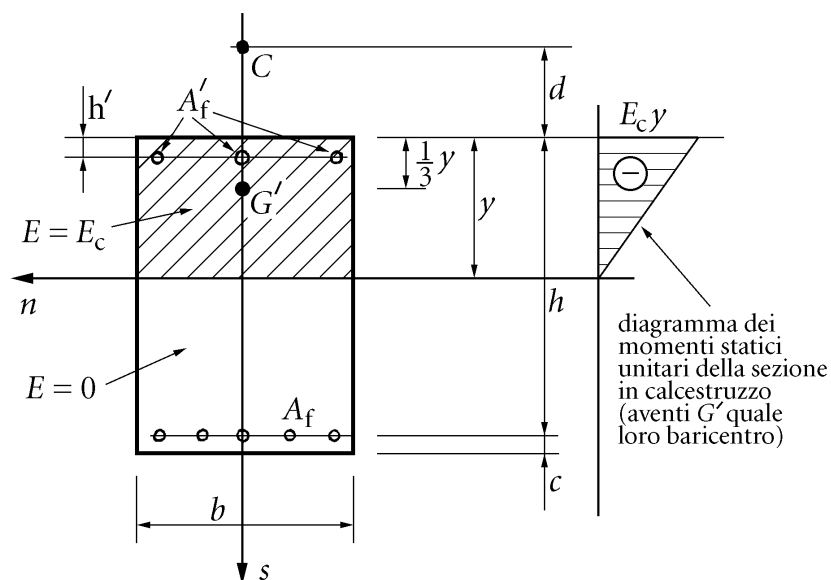
$$J_{n's'} = \int_A E n' s' dA = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \int_A (E s) n' dA = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} S_{s'}^{(n)} = 0,$$



poichè il momento statico $S_{s'}^{(n)}$ rispetto all'asse s' del sistema di masse momenti statici relativi all'asse n è nullo dato che la retta s' è baricentrica di tale sistema di masse.

6.7.1 Sezione rettangolare in cemento armato a doppia armatura

Se il centro di pressione è esterno al nocciolo centrale di inerzia dell'intera sezione omogeneizzata (ottenuta moltiplicando per $n = E_a/E_c$ le aree di acciaio), la sezione di calcestruzzo risulta



parzializzata dall'asse neutro. Sia y la distanza dell'asse neutro dal lembo del calcestruzzo compresso, posto dalla parte del centro di pressione.

Allora risulta che la massa totale dei momenti statici rispetto a n dell'area di calcestruzzo reagente vale:

$$-\frac{1}{2}b(E_c y)y,$$

mentre la distanza del baricentro dalle masse momenti statici dell'area di calcestruzzo reagente dal centro di sollecitazione risulta:

$$\frac{1}{3}y + d.$$

Imponendo la condizione che C sia baricentrico del sistema di masse-momenti statici (relativi all'asse neutro stesso), si ottiene:

$$\left\{ -\frac{1}{2}b(E_c y)y \right\} \left(\frac{1}{3}y + d \right) + E_a A_f (h-y)(h+d) - E_a A_f' (y-h')(h'+d) = 0.$$

Ne risulta la seguente equazione di terzo grado:

$$\frac{b}{6} y^3 + \frac{bd}{2} y^2 + n \{ A_f (h+d) + A_f' (h'+d) \} y + \\ - n \{ A_f h (h+d) + A_f' h' (h'+d) \} = 0.$$

Tale equazione ha una sola variazione di segno e questo implica che ammette una sola radice reale.

Nota y , è nota la sezione reagente e può essere calcolato il momento statico rispetto all'asse neutro dell'area reagente, omogeneizzata all'area di calcestruzzo:

$$S_n = - \frac{by^2}{2} + n A_f (h-y) - n A_f' (y-h'),$$

senz'altro negativo nel caso in esame poiché il baricentro della sezione reagente si deve trovare tra C e n.

La tensione massima nel calcestruzzo compresso risulta:

$$\sigma_c = - \frac{N}{S_n} y,$$

la tensione nell'acciaio teso risulta:

$$\sigma_a = n \frac{N}{S_n} (h-y),$$

ed infine la tensione nell'acciaio compresso risulta:

$$\sigma_a' = -n \frac{N}{S_n} (y-h').$$

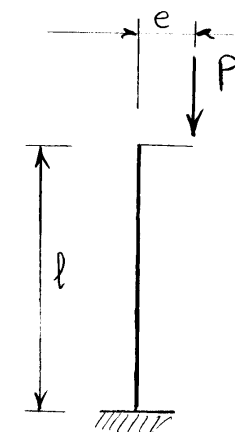
Si noti che non è possibile risolvere il caso della forza normale eccentrica per una sezione in cemento armato sovrapponendo gli effetti di una forza normale centrata con quello di una (o due) flessioni rette, poiché nei diversi casi le sezioni reagenti sono diverse.

6.8 Pressoflessione nelle travi snelle (teoria del secondo ordine)

Se una trave è molto snella, e quindi sensibilmente flessibile, ed è soggetta a pressoflessione, gli spostamenti della linea d'asse non sono trascurabili nella scrittura delle equazioni di equilibrio.

Utilizzando la teoria del secondo ordine, si farà ancora riferimento ad una cinematica linearizzata scrivendo però le condizioni di equilibrio nella configurazione deformata.

6.8.1 Esempio 1



L'equilibrio richiede:

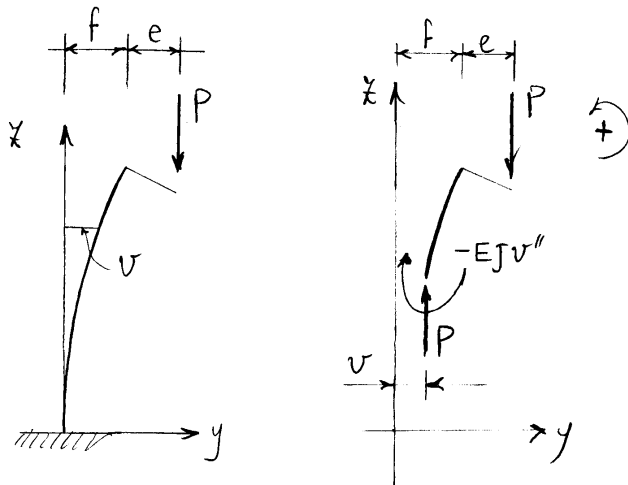
$$EJv'' - P(e + f - v) = 0,$$

cioè:

$$v'' + \alpha^2 v = \alpha^2(e + f),$$

dove, al solito:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$



Integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + e + f.$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -(e+f) \end{cases}.$$

Soluzione:

$$v = (e+f)(1 - \cos \alpha x).$$

Inoltre:

$$v(l) = f \Rightarrow (e+f)(1 - \cos \alpha l) = f,$$

e dunque:

$$e + (e+f)(1 - \cos \alpha l) = e + f,$$

da cui infine:

$$e + f = \frac{e}{\cos \alpha l}.$$

In definitiva:

$$v = \frac{e}{\cos \alpha l} (1 - \cos \alpha x).$$

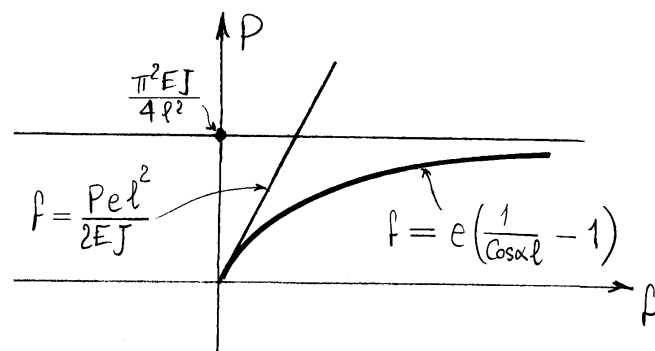
$$\text{Se } P = P_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2} \text{ risulta } \cos \alpha l = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

e ne consegue:

$$\lim_{P \rightarrow P_{cr}} v(z) = \infty, \quad (0 < z \leq l).$$

Inoltre risulta, se $0 \leq P < P_{cr}$:

$$\frac{df}{dP} = e l \frac{d\alpha}{dP} \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} = \frac{e l}{2EJ\alpha} \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} > 0.$$



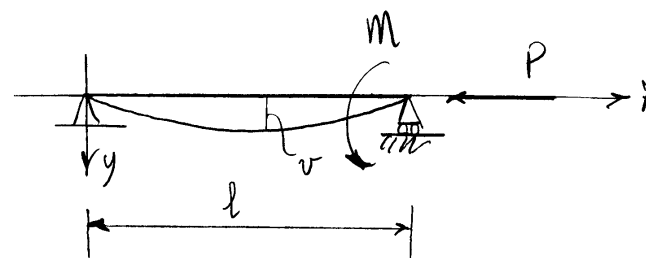
Si noti che per $\alpha \rightarrow 0$ $\frac{df}{dP} \rightarrow \frac{e l^2}{2EJ}$.

Nel caso delle travi inflesse elastiche lineari, la freccia vale:

$$f = \frac{(Pe) l^2}{2EJ} = P \frac{e l^2}{2EJ},$$

avendo tenuto conto che la mensola è sollecitata da una coppia Pe . Quindi, come ci si poteva aspettare, la pendenza iniziale coincide con quella, costante, che si aveva nel caso di travi inflesse elastiche lineari.

6.8.2 Esempio 2

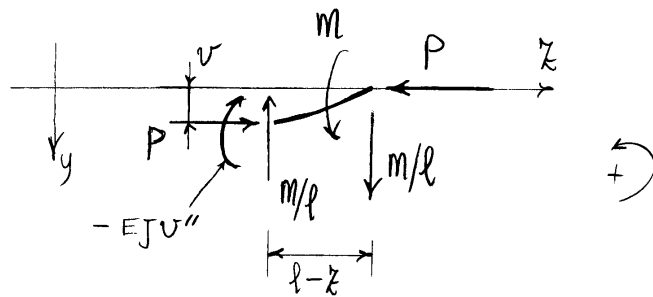


L'equilibrio alla rotazione si scrive:

$$EJ v'' + P v + M - \frac{M}{l} (l - z) = 0,$$

e quindi:

$$v'' + \alpha^2 v = -\frac{M}{EJl} z,$$



Se $P = P_{cr}$ risulta $\sin \alpha l = \sin \pi$

e dunque:

$$\lim_{P \rightarrow P_{cr}} v(z) = \infty. \quad (0 < z < l)$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z - \frac{M}{Pl} z.$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(l) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{M}{P \sin \alpha l} \end{cases}.$$

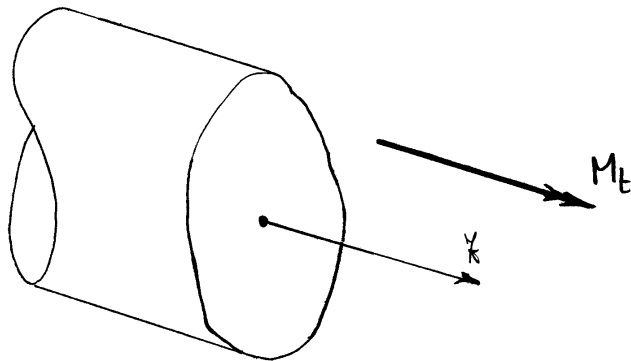
Soluzione:

$$v = \frac{M}{P} \left(\frac{\sin \alpha z}{\sin \alpha l} - \frac{z}{l} \right).$$

Capitolo 7

Torsione

Una sezione retta è soggetta a torsione se l'unica caratteristica della sollecitazione agente è un momento torcente, ovvero una coppia agente nel piano della sezione, con



asse momento ortogonale al piano della sezione. Nell'ambito del problema di Saint Venant si è ottenuta la soluzione generale del problema della torsione. Qui ci limiteremo a discutere la torsione per le sezioni circolari e per le sezioni sottili, aperte e chiuse.

7.1 La sezione circolare

Nel caso della sezione circolare la funzione di ingobbamento è nulla, conformemente a quanto già discusso in passato.

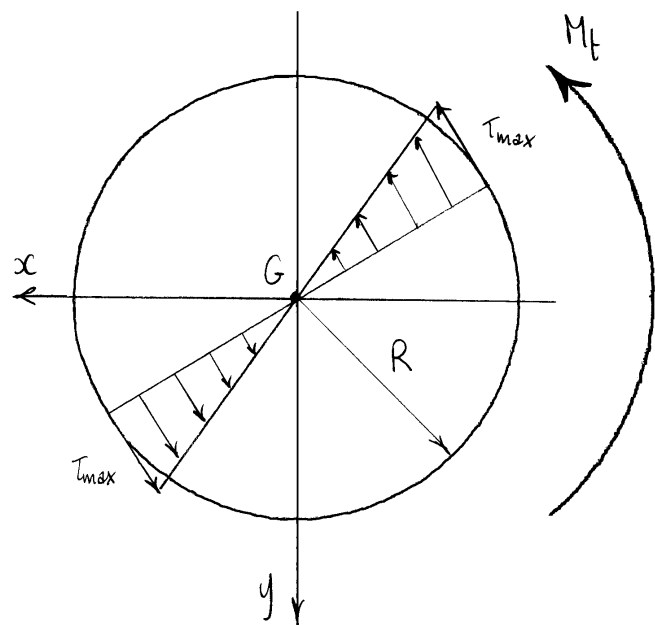
Quindi la tensione tangenziale risulta:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_G} \frac{R}{2} (P-G) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{M_t}{J_G} y \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J_G} x \end{cases},$$

dove il momento di inerzia polare vale:

$$J_G = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Con riferimento ad un diametro della sezione circolare, la tensione tangenziale risulta in ogni punto ortogonale al diametro mentre il suo modulo è proporzionale alla distanza dal baricentro. Il diagramma rappresentativo lungo un diametro è dunque lineare, e risulta lo stesso per ogni diametro.



Indicando ancora con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza dal baricentro, il modulo $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$ della tensione tangenziale totale vale:

$$\tau = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r.$$

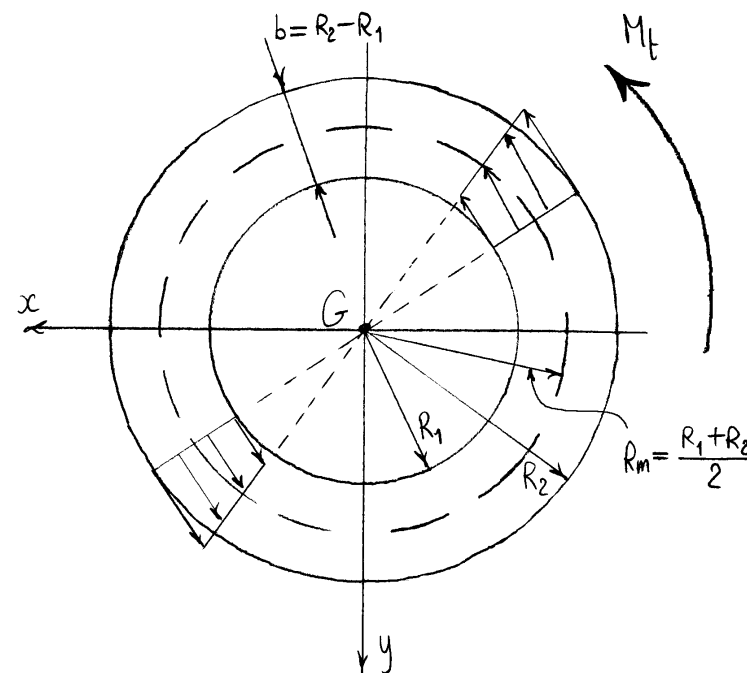
La tensione tangenziale massima è quella lungo il contorno dove $r = R$:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}.$$

7.2 La sezione circolare cava

La soluzione precedente resta valida nel caso di sezione circolare cava, poiché le condizioni al contorno sono soddisfatte anche lungo il contorno interno. In tal caso risulta:

$$J_G = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \pi (R_2^2 + R_1^2) \frac{R_1 + R_2}{2} (R_2 - R_1),$$



$$\tau = \frac{2 M_t}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} r, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t R_2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)}, \quad (r = R_2).$$

Notiamo che inoltre risulta:

$$\frac{\tau(R_2) - \tau(R_1)}{\tau\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)} = \frac{R_2 - R_1}{(R_1 + R_2)/2}.$$

La differenza $b = R_2 - R_1$ rappresenta lo spessore della sezione cava mentre $R_m = (R_1 + R_2)/2$ rappresenta il raggio della linea media della sezione cava.

Dunque, se:

$$\frac{b}{R_m} \ll 1,$$

allora la tensione tangenziale risulta praticamente

costante nello spessore (sezione circolare sottile chiusa).

Sotto la validità di tale condizione risulta:

$$\begin{aligned} R_1^2 + R_2^2 &= \left(R_m - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R_m + \frac{b}{2}\right)^2 = \\ &= 2R_m^2 + \frac{b^2}{2} = 2R_m^2 \left(1 + \frac{b^2}{4R_m^2}\right) \approx 2R_m^2, \end{aligned}$$

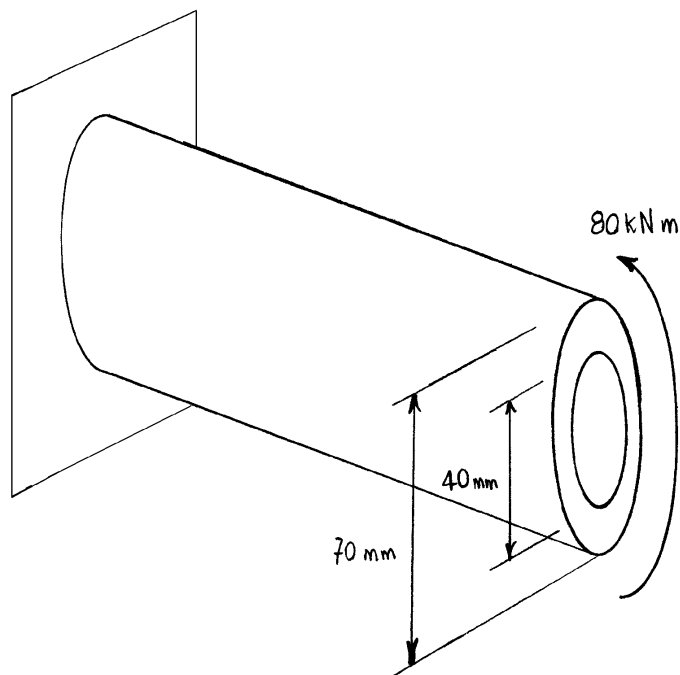
e dunque:

$$J_G \approx 2\pi b R_m^3,$$

che rappresenta il momento polare di una circonferenza di raggio R_m con distribuzione di massa per unità di linea pari allo spessore b .

7.2.1 Esempio (mensola di sezione circolare cava)

Si consideri la mensola in acciaio di sezione circolare cava illustrata in figura e soggetta ad una coppia torcente all'estremità di 80 kNm.



Il momento di inerzia polare vale:

$$J_G = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{70 \text{ mm}}{2} \right)^4 - \left(\frac{40 \text{ mm}}{2} \right)^4 \right\} = 3.369 \times 10^7 \text{ mm}^4,$$

e quindi la tensione tangenziale massima risulta:

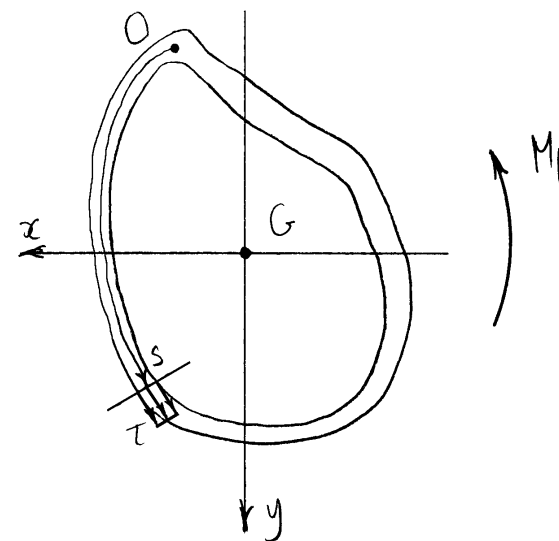
$$\tau_{\max} = \frac{8 \times 10^7 \text{ Nmm}}{3.369 \times 10^7 \text{ mm}^4} \frac{70 \text{ mm}}{2} = 83.10 \text{ N/mm}^2.$$

La tensione ideale massima vale:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_{\max} = 143.94 \text{ N/mm}^2.$$

7.3 La torsione nelle travi di sezione sottile chiusa

Si consideri una sezione sottile chiusa biconvessa.

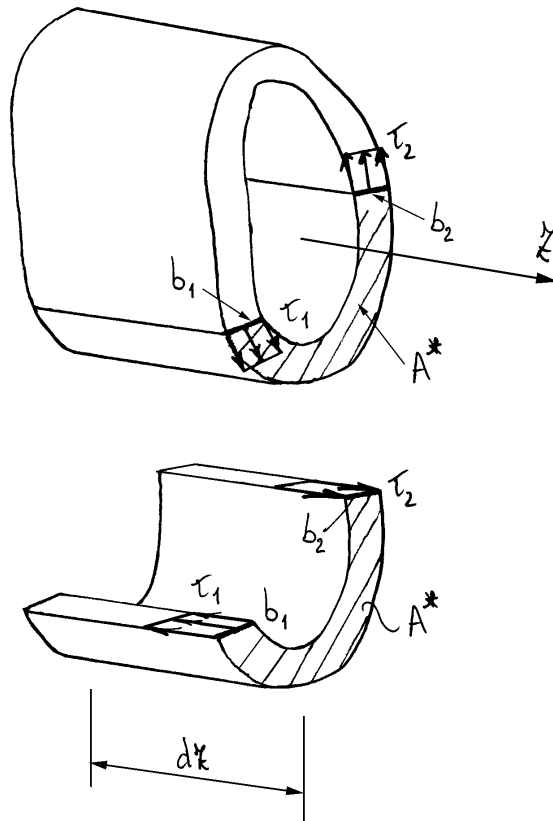


Se lo spessore è costante oppure “moderatamente” variabile si può assumere, senza grande errore, che le tensioni tangenziali lungo una corda siano parallele alla linea media. Infatti in tal caso il “flusso” delle tensioni sul contorno ha, almeno approssimativamente, la direzione del contorno stesso.

Inoltre ci si può aspettare, analogamente alla sezione circolare sottile, che le tensioni tangenziali si man-

tensioni costanti lungo una corda generica.

Si separi ora un pezzo di cilindro di lunghezza $d\mathcal{Z}$ (intorno della generica sezione retta) e si eseguano due ulteriori sezioni con due piani paralleli all'asse $\mathcal{Z}$ (piani longitudinali) e passanti per due corde generiche



di coordinate curvilinee (sulla linea media della sezione sottile chiusa) rispettivamente s_1 e s_2 .

Siano poi τ_1 e τ_2 le tensioni tangenziali agenti lungo le corde di coordinate s_1 e s_2 rispettivamente. Il segmento di trave che così si ottiene è soggetto, sulle due sezioni longitudinali, ad una tensione tangenziale due per il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali vale τ_1 nella sezione corrispondente alla corda s_1 e τ_2 nella sezione corrispondente alla corda s_2 .

L'equilibrio alla traslazione lungo la direzione $\mathcal{Z}$ del segmento di trave richiede allora:

$$\tau_1 b_1 = \tau_2 b_2 ,$$

e cioè :

$$\tau b = \text{cost} ,$$

lungo la linea media.

Questo risultato è in accordo con la formula di Jourawski, poiché se agisce il solo momento torcente allora il taglio è nullo e la tensione tangenziale media lungo le due corde deve essere nulla:

$$\frac{\tau_1 b_1 - \tau_2 b_2}{b_1 + b_2} = 0.$$

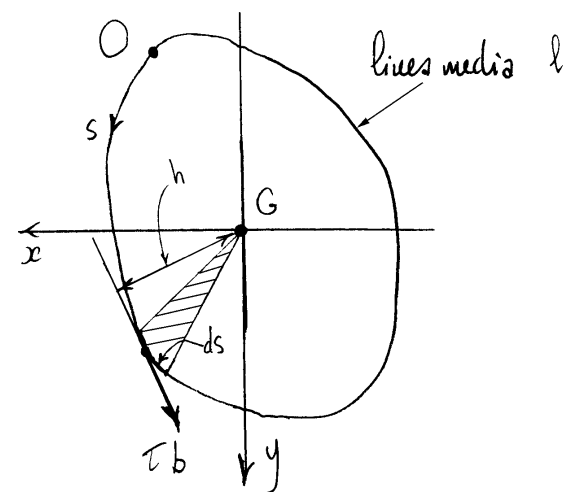
Si noti che la tensione τ_2 è uscente dall'area A^* e questo giustifica il segno negativo utilizzato.

L'equivalenza statica delle tensioni tangenziali con il momento torcente M_t applicato richiede poi:

$$M_t = \oint_l \tau b h ds = \tau b \oint_l h ds,$$

poiché $\tau b = \text{cost}$. Si noti che, detta Ω l'area racchiusa dalla linea media l , risulta:

$$\Omega = \frac{1}{2} \oint_l h ds.$$



Si ottiene così la formula di Bredt:

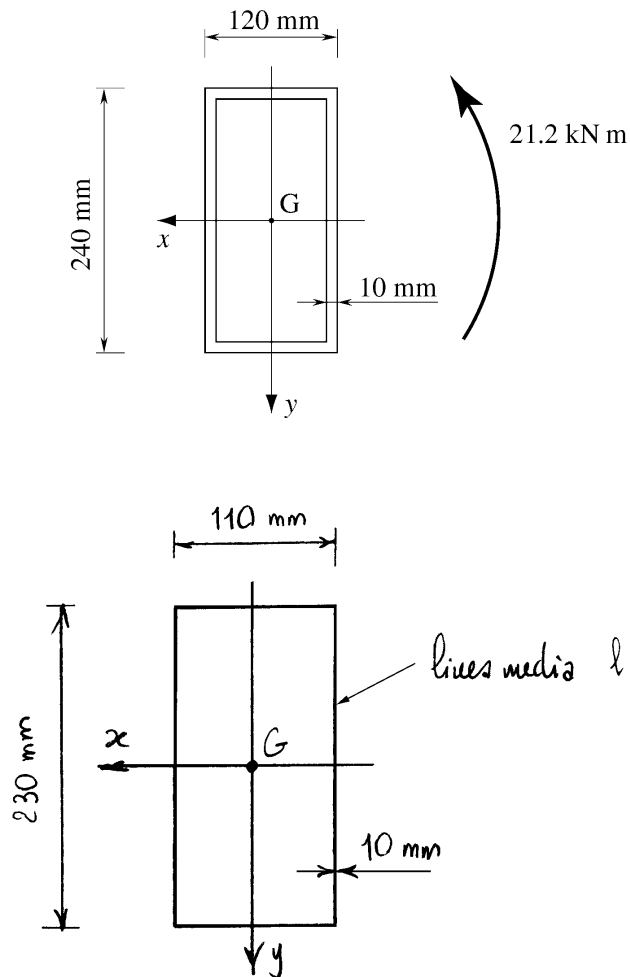
$$\tau = \frac{M_t}{2 \Omega b}.$$

La tensione tangenziale massima si raggiunge dunque quando lo spessore è minimo:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \Omega b_{\min}}.$$

7.3.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare)

Quale esempio si consideri la sezione scatolare di figura, soggetta ad un momento torcente positivo di 21.2 kNm.

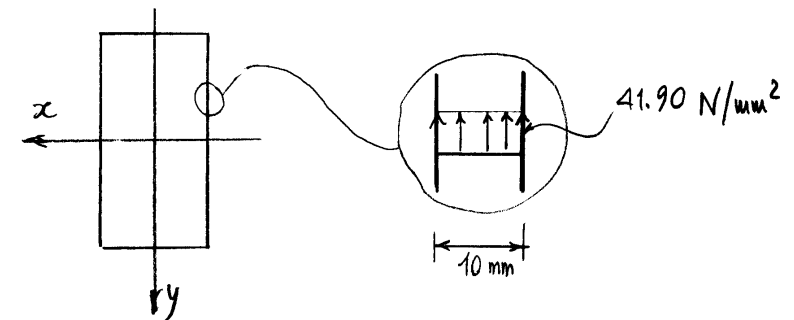


Estraendo la linea media, si ottiene il seguente valore dell'area racchiusa:

$$\Omega = 110 \text{ mm} \times 230 \text{ mm} = 25300 \text{ mm}^2.$$

Poiché lo spessore è costante lungo tutta la linea media, la tensione tangenziale è pure costante e vale:

$$\tau = \frac{21.2 \times 10^6 \text{ N mm}}{2 \times 25300 \text{ mm}^2 \times 10 \text{ mm}} = 41.90 \text{ N/mm}^2.$$



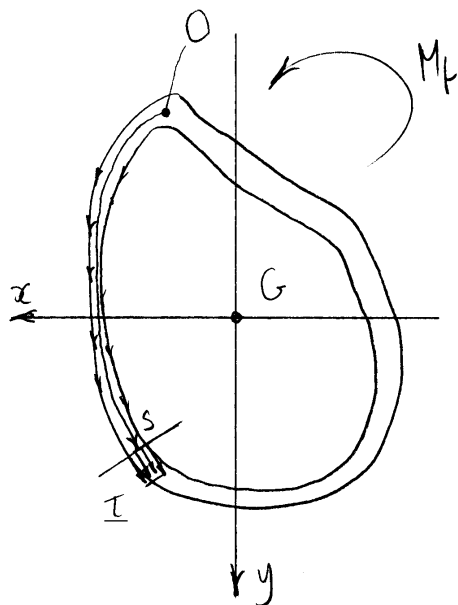
7.3.2 Fattore torsionale di rigidezza

Si consideri una sezione sottile chiusa biconnessa e si ricordi che la tensione lungo una corda di spessore b è costante e vale:

$$\tau_{sz} = \frac{M_t}{2\Omega b} \cdot (\text{formula di Bredt})$$

Si ricordi inoltre la relazione tra tensione tangenziale e funzione di ingobbamento:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad } \omega + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\},$$



dove $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è il tensore rotazione di 90° in senso antiorario.

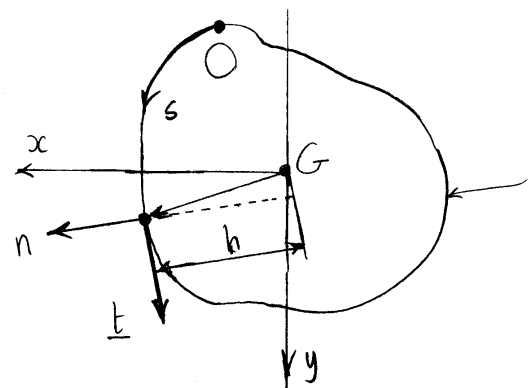
Dalle tensioni tangenziali è possibile quindi risalire al gradiente della funzione di ingobbamento:

$$\text{grad } \omega = \frac{J_t}{M_t} \underline{\tau} - \left\{ \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\}.$$

Per poter integrare tale espressione nella funzione di ingobbamento ω la sua circuitazione lungo la linea media chiusa deve essere nulla:

$$\oint_l \text{grad } \omega \cdot \underline{t} \, ds = 0.$$

Questa espressione rappresenta in definitiva una condizione di congruenza.



Si ottiene:

$$\oint_{\ell} \underline{\tau} \cdot \underline{t} \, ds = \oint_{\ell} \frac{1}{b} \tau_{sx} b \, ds = \tau_{sx} b \oint_{\ell} \frac{ds}{b},$$

$$\oint_{\ell} \left\{ R_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\} \cdot \underline{t} \, ds = \oint_{\ell} (P-G) \cdot \underline{n} \, ds$$

$$= \oint_{\ell} h \, ds = 2\Omega.$$

dove Ω è l'area racchiusa dalla linea media.

Dunque, la condizione:

$$\oint_{\ell} \underline{\tau} \cdot \underline{t} \, ds - \frac{M_t}{J_t} \oint_{\ell} \left\{ R_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\} \cdot \underline{t} \, ds = 0,$$

impone:

$$\tau_{sx} b \oint_{\ell} \frac{ds}{b} - 2 \frac{M_t}{J_t} \Omega = 0,$$

e infine:

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\ell} \frac{ds}{b}}.$$

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere dalla uguaglianza (lavoro di deformazione):

$$\oint_{\ell} \frac{\tau_{sx}^2}{2G} b \, ds = \frac{M_t^2}{2G J_t},$$

tenendo conto che risulta:

$$\oint_{\ell} \frac{\tau_{sx}^2}{2G} b \, ds = \frac{\tau_{sx}^2 b^2}{2G} \oint_{\ell} \frac{ds}{b} = \frac{M_t^2}{2G} \frac{\oint_{\ell} \frac{ds}{b}}{4\Omega^2}.$$

Verifichiamo che la soluzione ottenuta soddisfa la condizione di taglio nullo ($\underline{T} = \underline{0}$). Infatti:

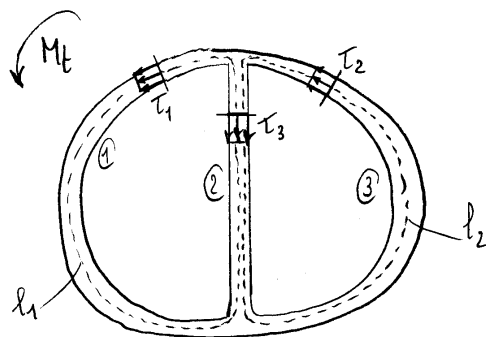
$$\underline{T} = \oint_{\ell} \underline{\tau} b \, ds = \oint_{\ell} \tau_{sx} b \underline{t} \, ds$$

$$= \tau_{sx} b \oint_{\ell} \underline{t} \, ds = \tau_{sx} b R_{\frac{\pi}{2}} \oint_{\ell} \underline{n} \, ds$$

$$= \tau_{sx} b R_{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega} \text{grad } 1 \, d\Omega = \underline{0}.$$

7.3.3 La torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse

Analizziamo nel seguito, quale esempio facilmente generalizzabile, la sezione sottile chiusa triconnessa.



4 incognite : $\tau_1, \tau_2, \tau_3, J_t$,

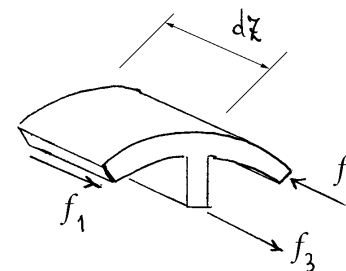
1 equazione di equilibrio di nodo ,

1 equazione di equivalenza statica tra τ e M_t ,

2 equazioni di circuitazione lungo le linee chiuse $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$.

I flussi delle tensioni tangenziali nei vari tratti valgono:

$$f_1 = \tau_1 b_1, \quad f_2 = \tau_2 b_2, \quad f_3 = \tau_3 b_3,$$



L'equazione di equilibrio del nodo alla traslazione nella direzione della linea d'asse richiede:

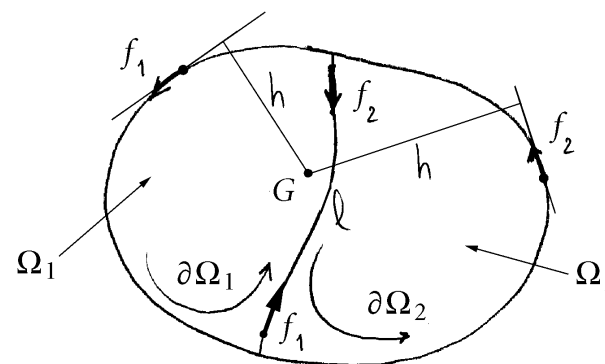
$$f_1 d\xi - f_2 d\xi + f_3 d\xi = 0,$$

e si ottiene:

$$f_3 = f_2 - f_1.$$

L'equivalenza statica richiede:

$$M_t = \oint_{\partial\Omega_1} f_1 h ds_1 + \oint_{\partial\Omega_2} f_2 h ds_2,$$



e si ottiene:

$$M_t = 2\Omega_1 f_1 + 2\Omega_2 f_2 ,$$

dove Ω_1 e Ω_2 sono le aree racchiuse dalle linee medie $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ rispettivamente.

La circuitazione lungo la generica linea $\partial\Omega_i$ si scrive:

$$\oint_{\partial\Omega_i} \text{grad} w \cdot \underline{t} \, ds = 0 ,$$

e quindi:

$$\frac{\bar{J}_t}{M_t} \left\{ \oint_{\partial\Omega_1} \frac{f_1}{b} \, ds - \int_{\ell} \frac{f_2}{b} \, ds \right\} - \oint_{\partial\Omega_1} h \, ds = 0 ,$$

$$\frac{\bar{J}_t}{M_t} \left\{ \oint_{\partial\Omega_2} \frac{f_2}{b} \, ds - \int_{\ell} \frac{f_1}{b} \, ds \right\} - \oint_{\partial\Omega_2} h \, ds = 0 ,$$

e infine:

$$f_1 \oint_{\partial\Omega_1} \frac{ds}{b} - f_2 \int_{\ell} \frac{ds}{b} = \frac{M_t}{\bar{J}_t} \oint_{\partial\Omega_1} h \, ds ,$$

$$-f_1 \int_{\ell} \frac{ds}{b} + f_2 \oint_{\partial\Omega_2} \frac{ds}{b} = \frac{M_t}{\bar{J}_t} \oint_{\partial\Omega_2} h \, ds .$$

Verifichiamo infine che anche nel caso di sezione sottile biconnessa vale la condizione $\underline{T} = \underline{0}$:

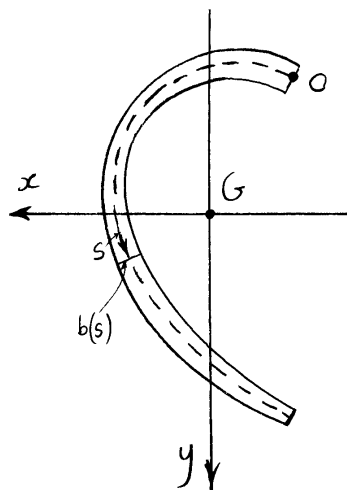
$$\underline{T} = \sum_i \oint_{\partial\Omega_i} f_i \underline{t} \, ds$$

$$= \sum_i f_i \frac{R_{\pi/2}}{2} \oint_{\partial\Omega_i} \underline{n} \, ds$$

$$= \sum_i f_i \frac{R_{\pi/2}}{2} \int_{\Omega_i} \text{grad} 1 \, d\Omega = \underline{0} .$$

7.4 La torsione nelle travi di sezione sottile aperta

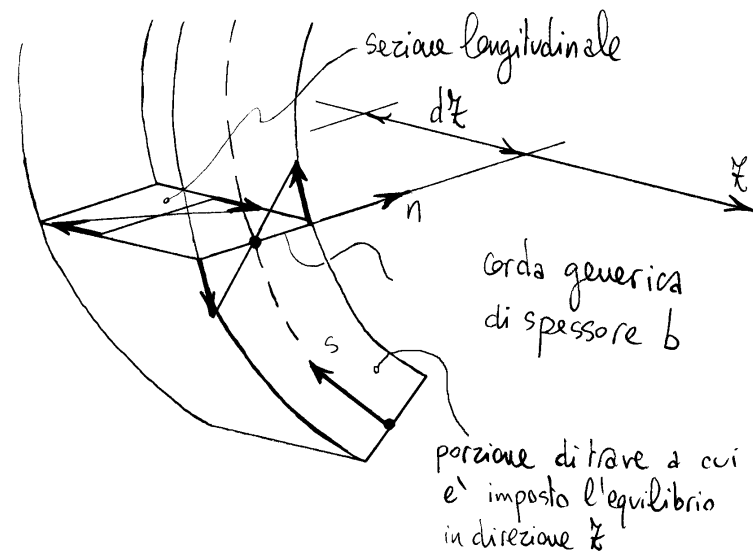
Si consideri una sezione sottile aperta generica. Come già per le sezioni sottili chiuse, le tensioni tangenziali lungo una corda possono assumersi parallele alla linea media per garantire che il “flusso” delle tensioni sul contorno abbia, almeno approssimativamente, la direzione del contorno stesso.



Inoltre, lungo una corda generica la tensione tangenziale media deve essere nulla:

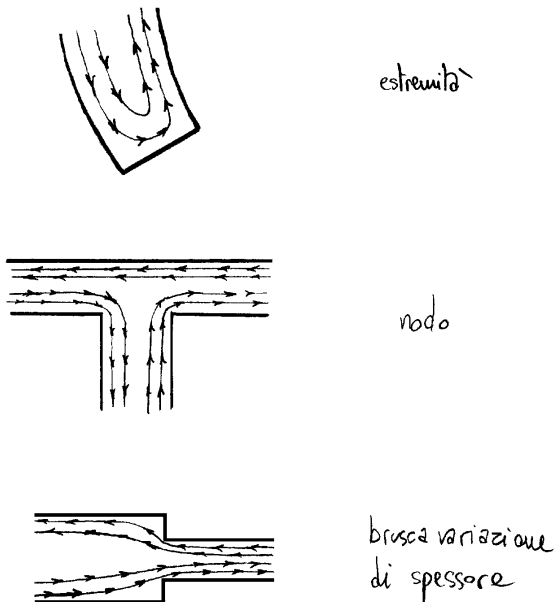
$$\frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau \, dn = 0 ,$$

in conseguenza della formula di Jourawski. Ricordiamo che tale formula è ottenuta facendo l'equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse x di una porzione di trave ottenuta sezionando un cuneo di trave di larghezza dx con una sezione longitudinale passante per la corda considerata. Ne consegue che la tensione tangenziale deve cambiare di segno lungo la corda e, nell'ipotesi di un'andamento lineare, la tensione tangenziale lungo la corda deve essere emisimmetrica



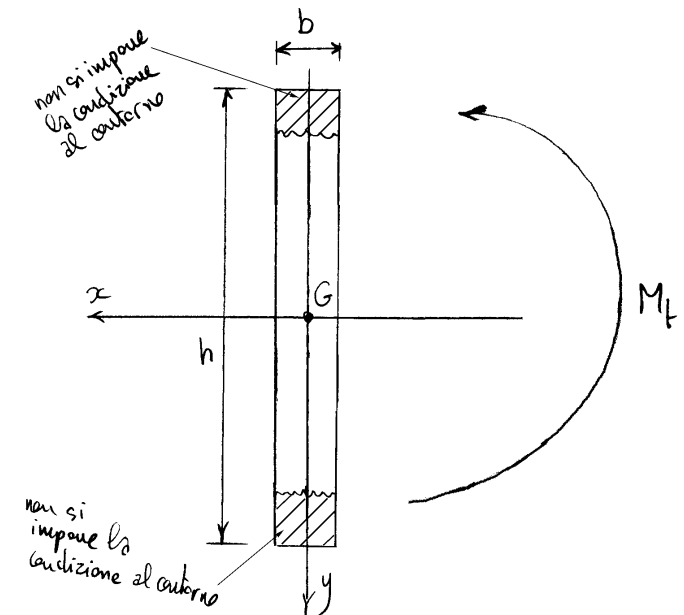
rispetto alla linea media.

Naturalmente, in prossimità dei bordi terminali della sezione oppure in corrispondenza di nodi della sezione o di brusche variazioni di spessore l'andamento delle tensioni tangenziali si discosta anche notevolmente da quello illustrato. Ne consegue che la soluzione approssimata che andiamo ad illustrare ha validità solo ad una certa distanza da tali zone.



7.4.1 La sezione rettangolare sottile

Prescindendo dall'aumento delle tensioni tangenziali nelle due zone di estremità, ci limitiamo a imporre le condizioni al contorno solo per i lati maggiori del rettangolo. Assunto



il riferimento Gxy principale di inerzia, con l'asse y avente la direzione dei lobi maggiori, le equazioni di tali lobi risultano:

$$x - \frac{b}{2} = 0 \quad \text{e} \quad x + \frac{b}{2} = 0,$$

essendo b lo spessore del rettangolo.

Procediamo con la funzione delle tensioni. La condizione al contorno:

$$F = 0,$$

è senz'altro soddisfatta sui lobi maggiori se si pone:

$$\begin{aligned} F &= c \left(x - \frac{b}{2} \right) \left(x + \frac{b}{2} \right) \\ &= c \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right), \end{aligned}$$

dove c è una costante da determinarsi.

L'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t},$$

impone allora la condizione:

$$2c = -2 \frac{M_t}{J_t},$$

condizione che impone il valore della costante c :

$$c = -\frac{M_t}{J_t}.$$

La funzione:

$$F = -\frac{M_t}{J_t} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

soddisfa quindi l'equazione di Poisson per la funzione delle tensioni e, tranne che nelle due estremità, le condizioni al contorno. Resta da soddisfare la condizione:

$$2 \int_A F dA = M_t,$$

condizione che si scrive:

$$-\frac{2M_t}{J_t} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right) h dx = M_t,$$

dove h è l'altezza del rettangolo.

Si è così ottenuta una equazione che permette di determinare il valore del fattore di rigidità torsionale J_t :

$$-\frac{2h}{J_t} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b^2 x}{4} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 1,$$

e quindi:

$$J_t = \frac{1}{3} h b^3.$$

La funzione delle tensioni diventa:

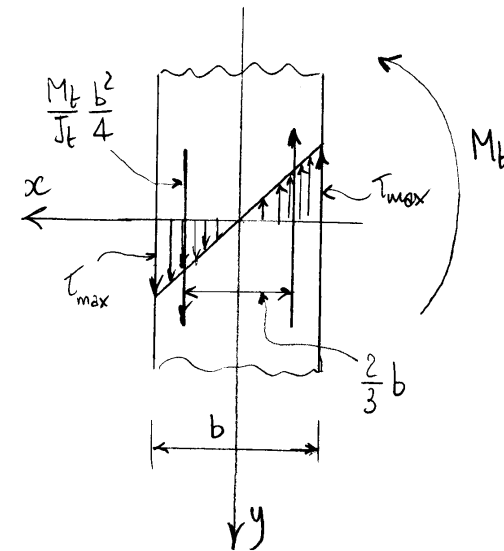
$$F = -\frac{3 M_t}{b^3 h} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

e le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{yz} = \frac{2 M_t}{J_t} x = \frac{6 M_t}{b^3 h} x,$$

$$\tau_{xz} = 0.$$

La tensione tangenziale massima si ha in corrispondenza dei lati maggiori e vale:



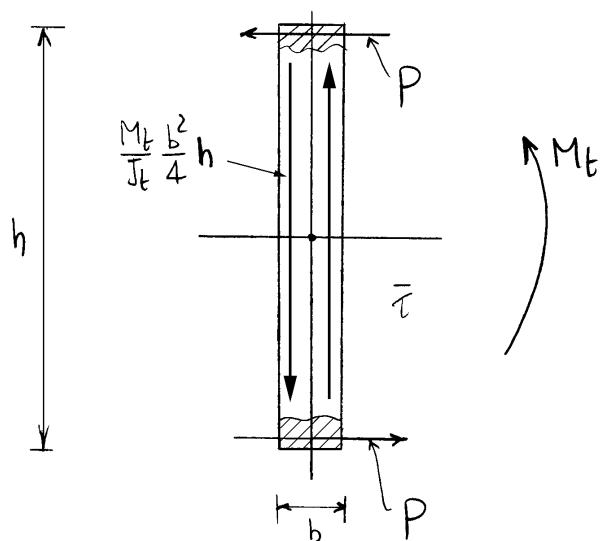
$$\tau_{\max} = \left| \tau_{yz} \left(\pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{M_t}{J_t} b = \frac{3 M_t}{b^2 h}.$$

Il momento torcente totale generato dalle τ_{yz} vale:

$$\frac{M_t}{J_t} \frac{b^2}{4} \frac{2}{3} b h = \frac{3 M_t}{b^3 h} \frac{b^3 h}{6} = \frac{M_t}{2}.$$

Quindi solo metà del momento torcente M_t è generato dalle τ_{yz} .

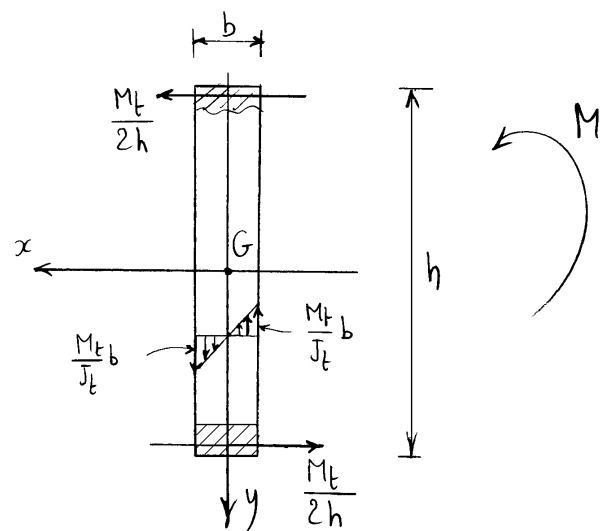
Si consideri ora che sulle due basi del rettangolo sottile le tensioni tangenziali si devono disporre parallelamente alle basi stesse affinché, sul contorno, tali tensioni siano tangenti al contorno stesso. Ne consegue che in prossimità delle due basi vengono generate due forze compressive P parallele alle basi stesse costituenti una coppia di braccio h , cioè pari all'altezza del rettangolo. Queste due forze sono "piccole" ma hanno un braccio "grande", in opposizione alle due forze parallele all'altezza del rettangolo aventi un "grande" mo-



dulo ma un piccolo "braccio". Non deve quindi stupire che la coppia Ph generi approssimativamente un momento uguale a $M_t/2$, cioè uguale al momento generato dalle tensioni tangenziali parallele all'altezza del rettangolo.

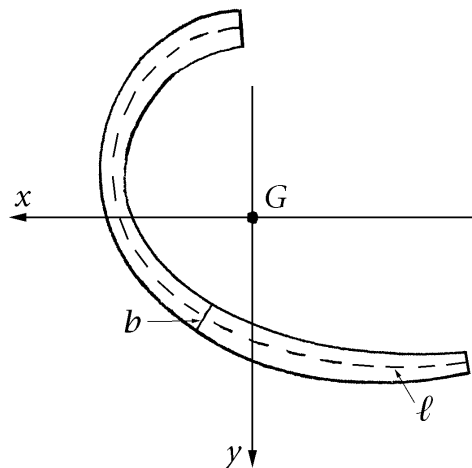
Tenendo conto di quanto detto deve dunque risultare:

$$P = \frac{M_t}{2h}.$$



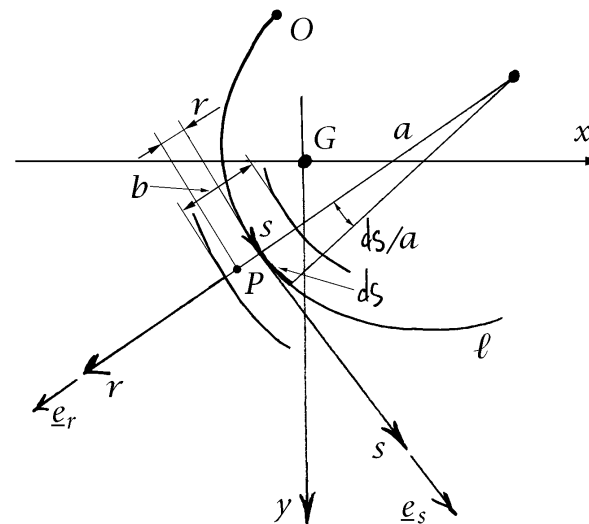
7.4.2 La sezione sottile generica

Si consideri una trave di sezione sottile aperta di linea media ℓ in generale curva e di spessore b in generale variabile. Si



assuma poi un'ascissa curvilinea s sulla linea media ℓ , espressa dalla distanza misurata sulla linea media da un punto preso come origine. È allora possibile individuare il punto generico P della sezione sottile per il tramite dell'ascissa s e della distanza r del punto dalla linea media, misurata nella direzione ortogonale alla linea media stessa. La funzione $P(r, s)$ rappresenta un sistema di coordinate generali. Le linee coordinate r di equazione $s = \text{cost}$ sono le rette ortogonali alla linea media, mentre quelle s di equazione $r = \text{cost}$ sono le linee parallele alla linea media.

Si supponga poi che il raggio di curvatura a della linea



media della sezione sia grande rispetto allo spessore b :

$$\frac{b}{a} \ll 1.$$

Sotto tale ipotesi il laplaciano che compare nell'equazione di Poisson che regge il problema della funzione delle tensioni F si scrive in modo approssimato:

$$\nabla^2 F \approx \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}.$$

L'equazione di Poisson diventa allora:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -2 \frac{M_t}{J_t}. \quad (1)$$

Si trascuri, come per la sezione rettangolare sottile, il soddi-

sfacimento delle condizioni al contorno nelle estremità della sezione e in più negli eventuali nodi e si supponga che lo spessore b vari lentamente lungo la linea media della sezione. In tali ipotesi la funzione:

$$F = -\frac{M_t}{J_t} \left(r^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

soddisfa, in modo approssimato, sia l'equazione di Poisson (1) che le condizioni al contorno $F(b/2) = 0$ e $F(-b/2) = 0$ e rappresenta dunque la soluzione, approssimata, del problema della torsione per le travi di sezione sottile aperta, naturalmente sotto le ipotesi dette.

Dato che localmente il sistema generale di coordinate origina approssimativamente una base di vettori ortonormali le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{sz} = -\frac{\partial F}{\partial r} = 2\frac{M_t}{J_t}r,$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial F}{\partial s} \approx 0,$$

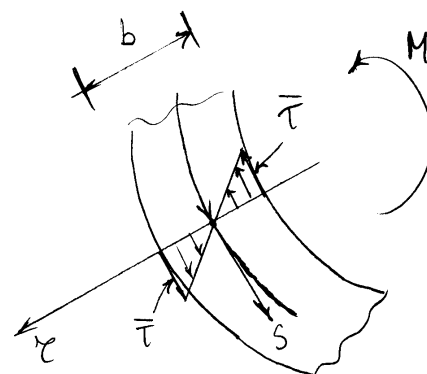
dove nella τ_{rz} si sono trascurati i contributi della derivata dello spessore b per l'ipotesi di lenta variazione di questo lungo la linea media. Lungo una corda la tensione tangenziale assume il valore massimo in modulo sul contorno. Detto $\bar{\tau}$ tale valore, risulta:

$$\bar{\tau} = \left| \tau_{sz}(\pm \frac{b}{2}) \right| = \frac{M_t}{J_t} b.$$

Dato che M_t e J_t non dipendono da s , la tensione tangenziale massima $\bar{\tau}$ si ha in corrispondenza dello spessore

massimo:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} b_{\max}.$$



Di nuovo, J_t si ottiene imponendo:

$$2 \int_A F dA = M_t,$$

cioè:

$$-2 \frac{M_t}{J_t} \int_{\mathcal{L}} ds \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(r^2 - \frac{b^2}{4} \right) dr = M_t,$$

e quindi:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_{\ell} b^3 ds.$$

Se $b = \text{cost}$, questa diventa (come nel caso della sezione rettangolare sottile):

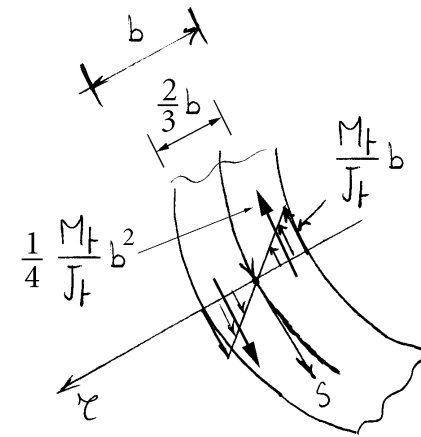
$$J_t = \frac{1}{3} b^3 \ell$$

dove ℓ è la lunghezza complessiva della linea media.

Da ultimo, occorre notare che di nuovo le τ_{sx} riproducono solo la metà del momento torcente, se si trascura, nello spirito delle sezioni sottili, l'effetto curvatura:

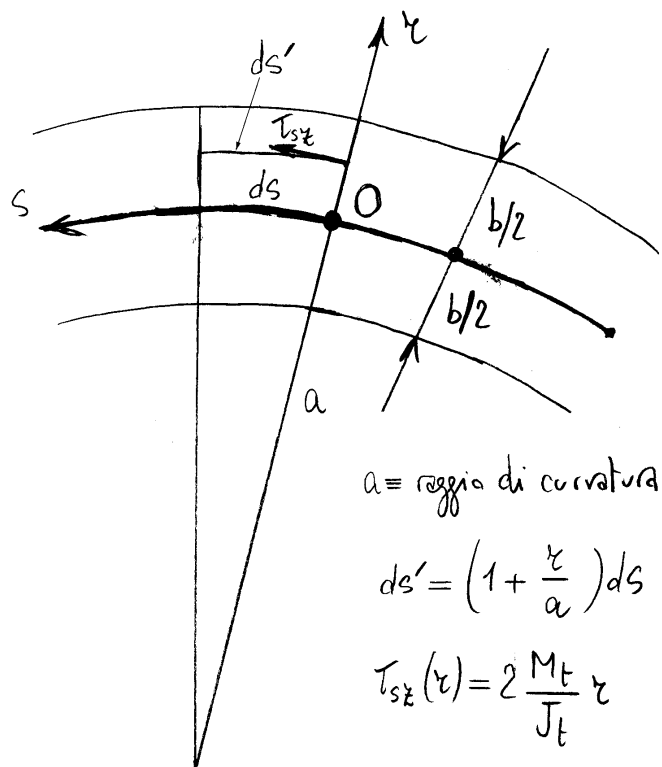
$$\int_{\ell} \frac{1}{6} \frac{M_t}{J_t} b^3 ds = \frac{1}{2} \frac{M_t}{J_t} \frac{1}{3} \int_{\ell} b^3 ds = \frac{M_t}{2}.$$

Tuttavia, tenendo conto dell'effetto curvatura, le tensioni tangenziali ridotte alla linea media



generano non solo delle coppie distribuite lungo la linea media, ma anche delle forze aventi la direzione della linea media. Questo perché le tensioni tangenziali della parte del centro di curvatura agiscono su aree più piccole rispetto a quelle agenti dalla parte opposta. Queste forze risultanti, anche se piccole, non sono trascurabili agli effetti del calcolo del momento torcente, per l'effetto amplificante della loro distanza dal polo di riduzione del momento torcente.

La risultante, per unità di linea media, delle tensioni agenti lungo una corda vale:



$$f = \frac{1}{ds} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{sx} ds' dr = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2 \frac{M_t}{J_t} r \left(1 + \frac{r}{a}\right) dr,$$

e infine:

$$f = \frac{M_t b^3}{6 J_t a}.$$

In modo analogo si ottiene il momento torcente risultante, per unità di linea, rispetto al polo O intersezione della corda con la linea media:

$$m_t = \frac{1}{ds} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{sx} r ds' dr$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2 \frac{M_t}{J_t} r^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right) dr,$$

e infine:

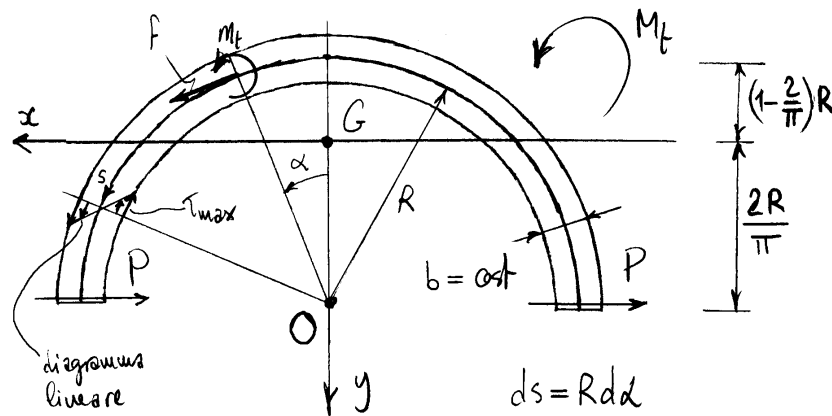
$$m_t = \frac{M_t b^3}{6 J_t}.$$

Ne risulta che m_t non risente dell'effetto curvatura.

7.4.3 Semicirconferenza sottile

Sia data una semicirconferenza sottile di raggio R e di spessore b costante. Il fattore torsionale di rigidezza e la tensione tangenziale sul contorno valgono:

$$J_t = \frac{1}{3} \pi R b^3, \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{\pi R b^2}.$$



Il raggio di curvatura è costante e vale R .
Le tensioni ridotte alla linea media danno origine alle forze e momenti seguenti:

$$f = \frac{M_t b^3}{6 J_t R}, \quad m_t = \frac{M_t b^3}{6 J_t}.$$

Il momento torcente dovuto alle tensioni tangenziali τ_{xz} , calcolato con polo di riduzione il centro O

della semicirconferenza, vale, tenendo conto della emisimmetria del problema:

$$\begin{aligned} M_t' &= 2 \int_0^{\pi/2} f R (R d\alpha) + 2 \int_0^{\pi/2} m_t (R d\alpha) \\ &= 2 f R^2 \frac{\pi}{2} + 2 m_t R \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{M_t b^3 R \pi}{6 J_t} + \frac{M_t b^3 R \pi}{6 J_t} = M_t. \end{aligned}$$

La tensione tangenziale τ_{xz} genera quindi tutto il momento torcente (metà attraverso f e metà attraverso m_t). L'equilibrio alla traslazione orizzontale determina poi le forze P orizzontali generate dalle tensioni tangenziali τ_{xz} nelle due zone di estremità:

$$\int_0^{\pi/2} f G \alpha R d\alpha = P.$$

Si ottiene:

$$P = f R = \frac{M_t b^3}{6 J_t} = \frac{M_t}{2 \pi R}.$$

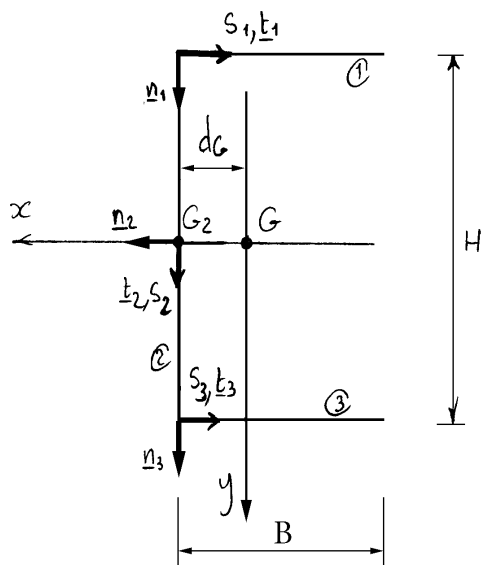
7.4.4 La sezione a C

7.4.4.1 Funzione di ingobbamento

sulla linea media dove $\underline{\tau} = 0$:

$$\text{grad } \omega = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T(P-G),$$

dove $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \equiv$ Rotazione di 90° in senso antiorario ($\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$).



1) tratto ①:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} &= \text{grad } \omega \cdot \underline{t}_1 = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \cdot \underline{t}_1 \\ &= -(P-G) \cdot (\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{t}_1) = -(P-G) \cdot \underline{n}_1 = \frac{H}{2}. \end{aligned}$$

2) tratto ②:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial s_2} = -(P-G) \cdot \underline{n}_2 = -d_G$$

3) tratto ③:

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial s_3} = -(P-G) \cdot \underline{n}_3 = -\frac{H}{2}$$

Integrando, si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{H}{2}s_1 + c_1 = \frac{H}{2}(s_1 + d_G) \\ \omega_2 = -d_G s_2 + c_2 \\ \omega_3 = -\frac{H}{2}s_3 + c_3 = -\frac{H}{2}(s_3 + d_G) \end{cases}$$

Poiché la sezione è simmetrica, la funzione di ingobbamento ω è emisimmetrica a meno di un moto rigido globale di traslazione nella direzione dell'asse della trave. Imponendo l'emisimmetria, deve risultare:

$$\begin{aligned} \omega_2(0) &= 0 & \Rightarrow & c_2 = 0, \\ \omega_3(s) &= -\omega_1(s) & \Rightarrow & c_3 = -c_1. \end{aligned}$$

Imponendo infine la condizione di continuità in uno dei due spigoli della sezione si ottiene poi:

$$\omega_1(0) = \omega_2\left(-\frac{H}{2}\right) \Rightarrow c_1 = \frac{H}{2}d_G.$$

7.4.4.2 Centro di taglio

Si ricordi che risulta:

$$x_c = - \frac{1}{J_x} \int_A \omega y \, dA$$

Trascurando la variabilità di ω nello spessore e tenendo conto che:

$$y = \begin{cases} -\frac{H}{2} & \text{tratto ①} \\ s_2 & \text{tratto ②} \\ \frac{H}{2} & \text{tratto ③} \end{cases}$$

risulta:

$$x_c = - \frac{1}{J_x} \left\{ - \int_0^B \frac{H}{2} (s_1 + d_G) \frac{H}{2} \delta_1 \, ds_1 \right. \\ \left. - \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} d_G s_2^2 \delta_2 \, ds_2 - \int_0^B \frac{H}{2} (s_3 + d_G) \frac{H}{2} \delta_1 \, ds_3 \right\}$$

$$= \frac{1}{J_x} \left\{ \left(\frac{\delta_1 B^2 H^2}{8} + \frac{d_G \delta_1 B H^2}{4} \right) \right. \\ \left. + \frac{d_G \delta_2 H^3}{12} + \left(\frac{\delta_1 B^2 H^2}{8} + \frac{d_G \delta_1 B H^2}{4} \right) \right\} \\ = \frac{1}{J_x} \left\{ \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4} + d_G \left(\frac{\delta_2 H^3}{12} + \frac{\delta_1 B H^2}{2} \right) \right\}.$$

Ricordando che:

$$J_x = \frac{\delta_2 H^3}{12} + \frac{\delta_1 B H^2}{2},$$

si ottiene infine:

$$x_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4} + d_G.$$

La distanza d_c del centro di taglio dalla linea media dell'anima vale quindi:

$$d_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4}.$$

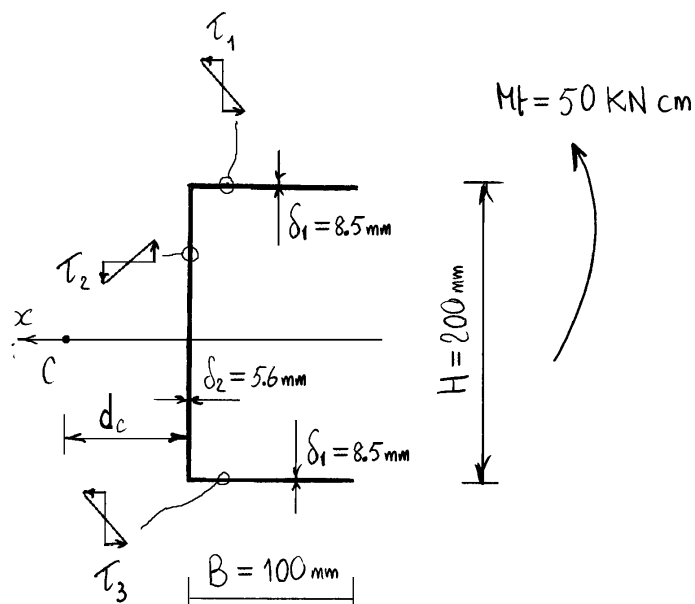
7.4.4.3 Esempio numerico

Si consideri la sezione a C di figura, soggetta ad un momento torcente antiorario di 50 kN cm. Il fattore torsionale di rigidezza vale:

$$J_t = \frac{2}{3} \delta_1^3 B + \frac{1}{3} \delta_2^3 H = 5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4.$$

Il momento di inerzia rispetto all'asse x vale:

$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$



Lungo le ali la tensione tangenziale vale:

$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_3 &= \frac{M_t}{J_t} \delta_1 = \\ &= \frac{5 \times 10^5 \text{ N mm}}{5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4} \times 8.5 \text{ mm} = 80.72 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

mentre lungo l'anima risulta:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{M_t}{J_t} \delta_2 = \\ &= \frac{5 \times 10^5 \text{ N mm}}{5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4} \times 5.6 \text{ mm} = 53.18 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

La posizione del centro di taglio risulta infine:

$$d_C = 41.00 \text{ mm}.$$

Capitolo 8

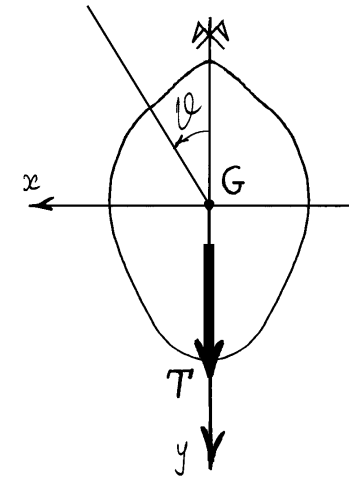
Taglio

8.1 Centro di taglio

Si ricordi che il centro di taglio della sezione è un punto che disaccoppia l'effetto del taglio e del momento torcente. In altre parole, se un taglio passa per il centro di taglio l'angolo unitario di torsione è nullo (similmente al fatto che se lo sforzo normale è centrato sul baricentro la curvatura flessionale è nulla). Dunque, il centro naturale per descrivere le sollecitazioni dovute a taglio e momento torcente è il centro di taglio.

La rotazione torsionale dovuta ad un momento torcente deve inoltre avvenire intorno al centro di taglio per far sì che sia nullo lo scorrimento tra la linea dei centri di taglio e la sezione retta.

Se si considera un taglio passante per il centro di taglio, ne consegue che un momento torcente applicato non compie lavoro poiché la rotazione torsionale relativa



è nulla. Viceversa, la rotazione torsionale relativa avviene attorno al centro di taglio affinché un taglio passante per il centro di taglio non compia lavoro per effetto della rotazione torsionale.

Se la sezione ha un asse di simmetria, tale asse contiene il centro di taglio. Infatti, un taglio agente secondo l'asse di simmetria è simmetrico mentre una rotazione torsionale è emisimmetrica per cui un taglio agente secondo l'asse di simmetria non può provocare una rotazione torsionale.

8.2 Formula di Jourawski

8.2.1 Formula di Jourawski binomia

Derivando la formula trinomia della forza normale eccentrica sotto le ipotesi del cilindro di Saint-Venant, cioè di una trave ad asse rettilineo a sezione costante e caricata solo alle estremità, si ottiene:

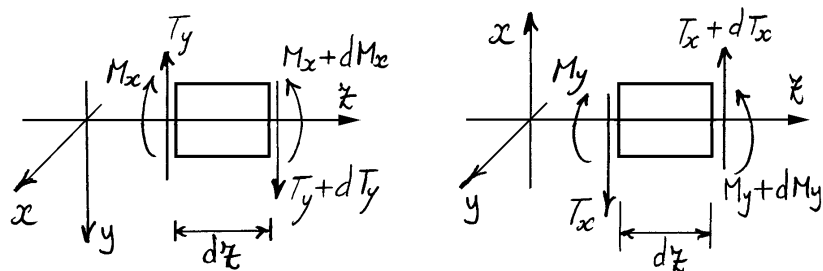
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \frac{dM_x}{dz} \frac{y}{J_x} - E \frac{dM_y}{dz} \frac{x}{J_y} . \quad (1)$$

poichè la forza normale, nel caso di trave caricata solo alle estremità, è costante.

Le equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione attorno agli assi x e y si scrivono:

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y , \quad \frac{dM_y}{dz} = -T_x . \quad (2)$$

Si noti che anche T_x e T_y sono costanti e che quindi è costante



anche il taglio complessivo T di cui T_x e T_y sono componenti.

La (1), con le (2), diviene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \frac{T_y}{J_x} y + E \frac{T_x}{J_y} x . \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (7) del Capitolo 1, a pagina 4, si ottiene infine la formula di Jourawski binomia:

$$\tau_{xz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} + \frac{T_x S_y^*}{b J_y} , \quad (4)$$

dove:

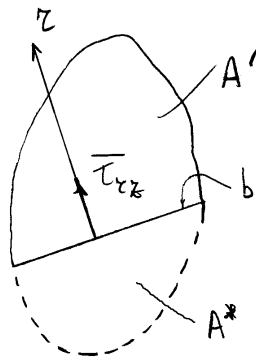
$$S_x^* = \int_{A^*} E y dA , \quad S_y^* = \int_{A^*} E x dA , \quad (5)$$

rappresentano i momenti statici rispetto agli assi x e y rispettivamente della porzione A^* della sezione retta. Si noti che gli assi x e y sono baricentrici per l'intera sezione retta ma non, in generale, per una sua porzione.

Si noti anche che se τ_{xz} è positiva vuol dire che

il suo verso è concorde con z , cioè vuol dire che $\overline{T_{rz}}$ è entrante nella porzione A^* della sezione retta.

Se invece della porzione A^* della sezione retta si fosse scelta la porzione complementare A'



si sarebbe pervenuti alla stessa formula, sotto la condizione di orientare z questa volta verso l'interno di A' , e tenendo conto che ora i momenti statici da considerare sono quelli della porzione A' :

$$S'_x = \int_{A'} E y dA, \quad S'_y = \int_{A'} E x dA.$$

Tenendo conto che:

$$S'_x + S_x^* = \int_A y dA = 0,$$

$$S'_y + S_y^* = \int_A x dA = 0,$$

si ottiene:

$$\begin{cases} S'_x = -S_x^* \\ S'_y = -S_y^* \end{cases}.$$

Se ne deduce che utilizzando la porzione A^* , oppure la sua complementare A' , il risultato, a meno del segno, non cambia. Il cambiamento del segno è giustificato dal fatto che se $\overline{T_{rz}}$ è entrante in A^* allora è positiva se z è entrante in A^* (come succede se si sceglie la porzione A^* dell'area) mentre è negativa se z è uscente da A^* (come succede se si sceglie la porzione A' complementare di A^*).

La formula di Jourawski non fornisce la

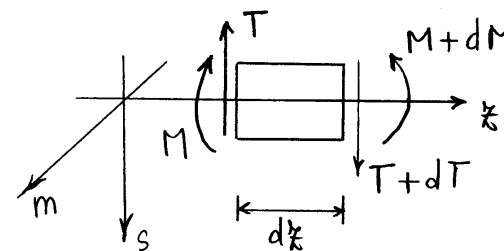
distribuzione puntuale delle tensioni tangenziali lungo la corda. Comunque, in tutti quei casi in cui si può ritenere che tale distribuzione sulla corda sia simmetrica e lo spessore della corda sia piccolo rispetto alle altre dimensioni della sezione, appare lecito confondere il valore puntuale della τ_{rz} con quello medio $\bar{\tau}_{rz}$.

Inoltre, nel caso di travi snelle, le tensioni dovute al taglio sono più piccole di quelle dovute al momento flettente e pertanto la loro conoscenza puntuale non è sempre indispensabile da un punto di vista tecnico.

8.2.2 Formula di Jourawski monomia

Le ipotesi sono ancora quelle di trave ad asse rettilineo, e a sezione costante, caricata solo alle due estremità.

Si consideri allora la trave soggetta al taglio T costante. Si consideri poi l'asse s parallelo al taglio e passante per il baricentro. Nel piano sz , per equilibrio, deve agire un momento



flettente M , di cui s rappresenta l'asse di sollecitazione, tale che:

$$\frac{dM}{dz} = T. \quad (6)$$

L'asse n coniugato di s rappresenta l'asse neutro della flessione associata al taglio T , flessione dovuta al momento flettente M che agisce nel piano sz . Questa è l'unica caratteristica della sollecitazione che varia con z e fornisce quindi tutta la variazione della σ_z con z . Poiché la tensione normale dovuta al momento flettente M vale:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n} s, \quad (7)$$

si ottiene infine:

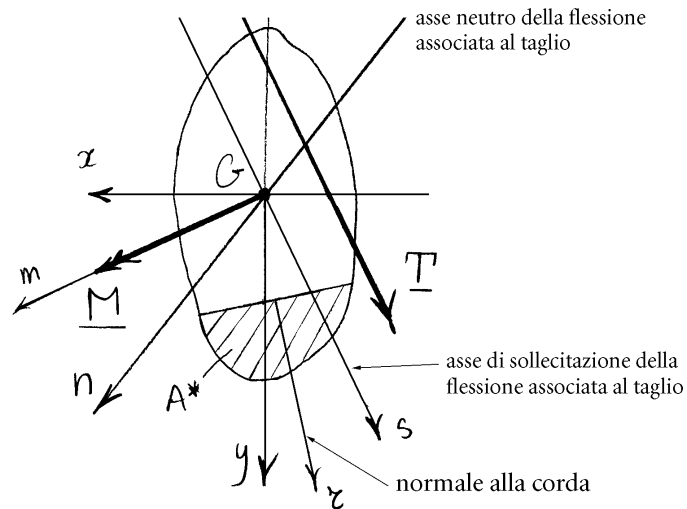
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \frac{dM}{dz} \frac{s}{J_n} = E \frac{T}{J_n} s. \quad (8)$$

Inserendo la (8) nella formula (7) del capitolo 1, a pagina 4, si ottiene infine la formula di Jourawski monomia:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{TS_n^*}{bJ_n}, \quad (9)$$

dove:

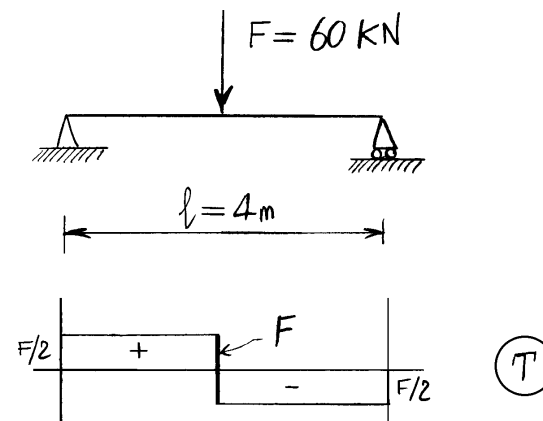
$$S_n^* = \int_{A^*} E s dA, \quad (10)$$



è il momento statico, della parte A^* dell'area individuata dalla corda, rispetto all'asse neutro n della flessione associata al taglio, valutato con distanze in direzione dell'asse di sollecitazione s .

8.2.3 Esercizio: sezione a doppio T

Si consideri una trave IPE270 appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico di 60 kN in mezz'aria.



Nella prima metà della trave il taglio è positivo e vale:

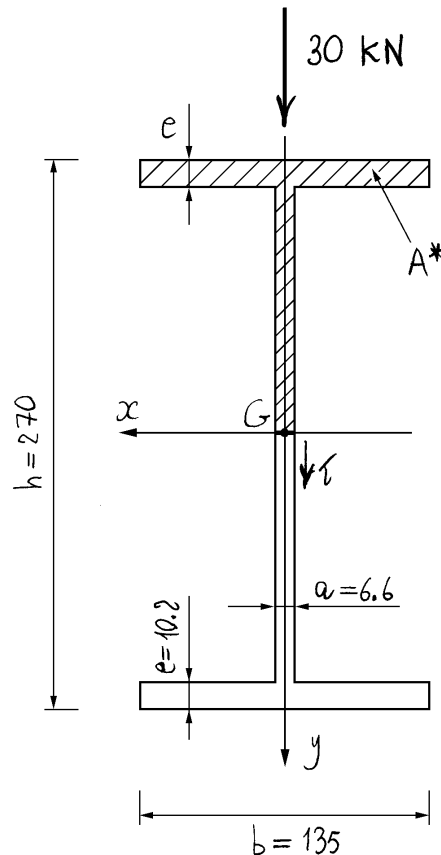
$$T = 30\text{ kN}.$$

Si vuole calcolare la tensione tangenziale media lungo la corda baricentrica. Il taglio T agisce secondo l'asse y , che quindi coincide con l'asse di sollecitazione. L'asse neutro coincide con l'asse x e occorre quindi

valutare il momento statico di mezza sezione rispetto a tale asse:

$$S_x^* = - \left\{ b e \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) + a \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \right\}$$

$$= - \left\{ 13.5 \times 1.02 \times 12.99 + 0.66 \times \frac{(12.99)^2}{2} \right\} = -235 \text{ cm}^3.$$



IPE 270

$$J_x = 5790 \text{ cm}^4$$

nella figura le misure
sono in mm

La tensione tangenziale media lungo la corda baricentrica vale quindi:

$$\tau = \frac{\frac{F}{2} S_x^*}{a J_x} =$$

$$= - \frac{3 \times 10^4 \text{ N} \times 235 \times 10^3 \text{ mm}^3}{6.6 \text{ mm} \times 5.790 \times 10^7 \text{ mm}^4} = -18.45 \text{ N/mm}^2$$

Il segno negativo significa che la tensione tangenziale è uscente dall'area A^* prescelta.

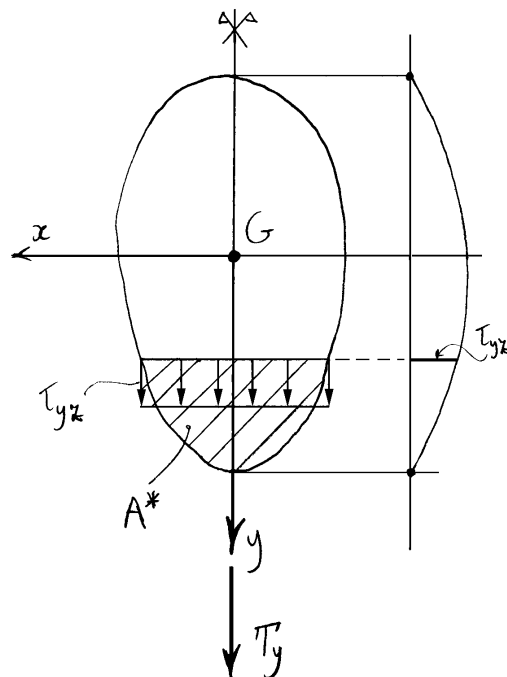
Poiché la sezione è simmetrica rispetto all'asse y la tensione tangenziale può ritenersi costante lungo la corda e la tensione tangenziale media rappresenta dunque la tensione puntuale.

In corrispondenza della corda baricentrica la tensione normale è nulla. Lungo tale corda si ottiene quindi la seguente tensione ideale:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau = 31.96 \text{ N/mm}^2.$$

8.3 Il taglio nelle travi di sezione compatta simmetrica

Si consideri una sezione compatta, simmetrica rispetto all'asse y e soggetta ad un taglio T_y avente y quale retta d'azione (dunque passante per il centro di taglio). Per la simmetria del problema, la distribuzione delle tensioni tangenziali τ_{yz} , sulla generica corda ortogonale all'



l'asse y di simmetria, deve essere simmetrica. Utilizzando la formula di Jourawski e confondendo il valore puntuale con quello medio si ottiene:

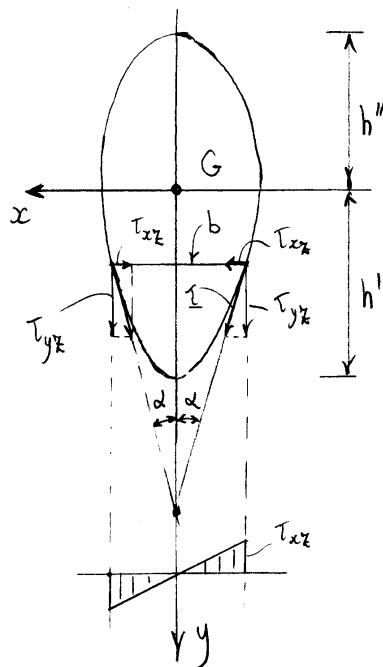
$$\tau_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} ,$$

dove al solito S_x^* rappresenta il momento statico di una delle due aree in cui la sezione viene divisa dalla corda.

Si consideri ora che in generale la componente τ_{yz} non è tangente al contorno. E' dunque necessaria una componente τ_{xz} che renda la tensione tangenziale totale tangente al contorno.

Se α è l'inclinazione della tangente al contorno rispetto all'asse y , deve risultare:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha & x = -\frac{b}{2} \\ \tau_{xz} = -\tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha & x = +\frac{b}{2} \end{cases} .$$



Ipotizzando una variazione lineare di τ_{xz} lungo la corda deve risultare:

$$\tau_{xz} = c x \quad .$$

Poiché :

$$\tau_{xz}\left(-\frac{b}{2}\right) = -c \frac{b}{2} = \tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha ,$$

si ha infine :

$$\tau_{xz} = -\frac{2x}{b} \tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha .$$

Energia complementare per unità di linea:

$$\psi = \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} = \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA .$$

Ne consegue:

$$\begin{aligned} \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} &= \int_A \frac{\tau_{yz}^2}{2G} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA \\ &= \int_A \frac{T_y^2 S_x^{*2}}{2G b^2 J_x^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA \\ &= \frac{T_y^2}{2GA} \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA . \end{aligned}$$

Il fattore di taglio relativo all'asse y di simmetria vale quindi:

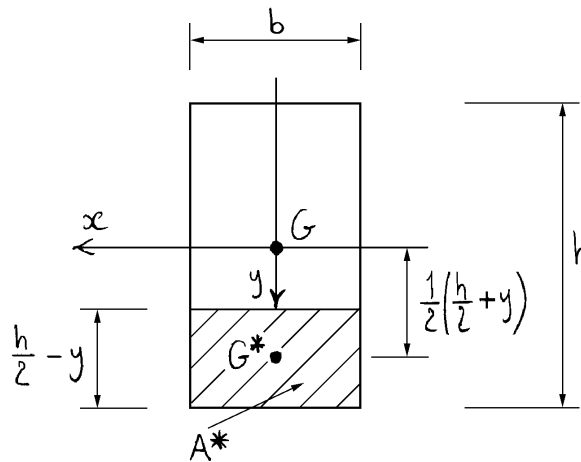
$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA = \\ &= \frac{A}{J_x^2} \int_{-h''}^{h'} \frac{S_x^{*2}}{b^2} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{J_x^2} \int_{-h}^{h'} \frac{S_x^{*2}}{b} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha\right) dy.$$

8.3.1 Sezione rettangolare

Nel caso della sezione rettangolare il momento statico dell'area A^* individuata dalla corda di coordinata y vale:

$$S_x^* = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$



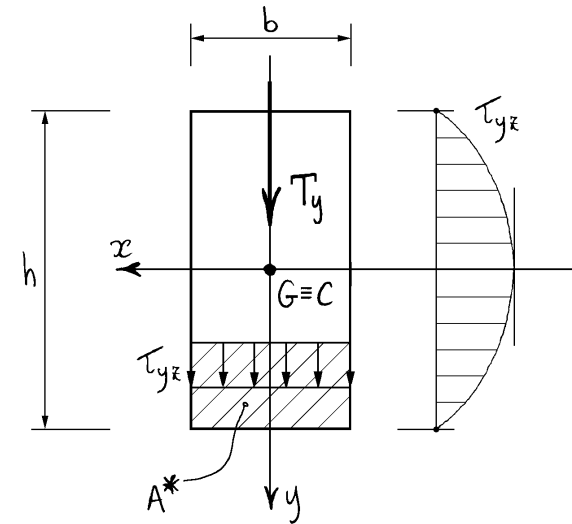
Poichè:

$$J_x = \frac{bh^3}{12},$$

ne risulta infine:

$$\tau_{zy} = \frac{6T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Se si riportano i valori della τ_{yz} a partire da una retta parallela alla retta y nella direzione ortogonale a y si ottiene quindi un diagramma parabolico il cui asse coincide con l'asse x .



Si noti che la τ_{yz} è tangente al contorno e come tale soddisfa le condizioni al contorno. La componente τ_{xz} è dunque, in via approssimata, nulla ovunque.

La componente τ_{yz} rappresenta quindi tutta la tensione tangenziale. La massima tensione tangenziale la si ha pertanto in corrispondenza della corda baricentrica dove $y=0$:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}.$$

Per quel che riguarda i fattori di taglio:

$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{I_x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{S_x^{*2}}{b} dy = (12)^2 \frac{1}{b^2 h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \\ &= \frac{36}{h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4 \right) dy \\ &= \frac{36}{h^5} \left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ &= 36 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80} \right) = \frac{36}{240} (15 - 10 + 3). \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\chi_y = \frac{6}{5}.$$

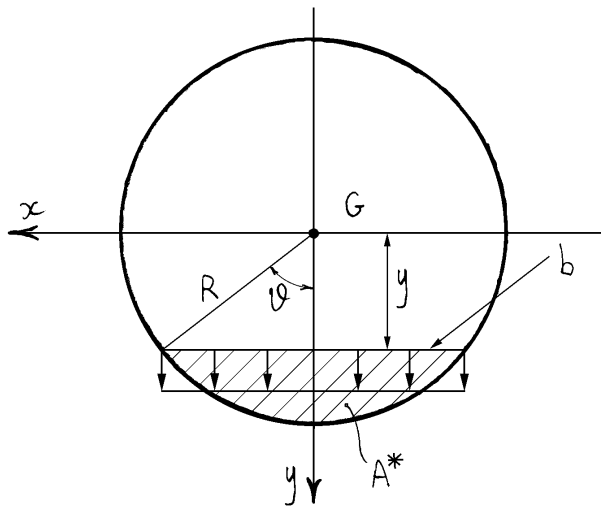
Procedendo allo stesso modo si ricaverebbe anche $\chi_x = \frac{6}{5}$, però occorre tenere presente che la soluzione trovata per χ_y è sufficientemente buona se $b < h$, e quindi

se $\chi_y = \frac{6}{5}$ è una soluzione sufficientemente buona, allora $\chi_x = \frac{6}{5}$ non è sufficientemente buona.

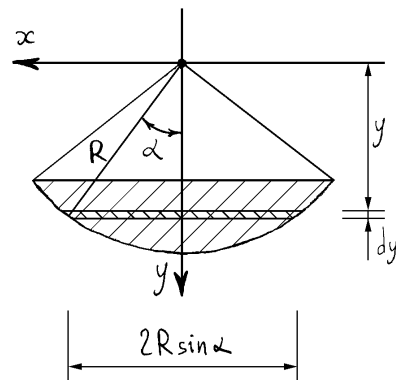
8.3.2 Sezione circolare

Si consideri ora una sezione circolare di raggio R . La corda generica è individuata dalla coordinata y . Detto ϑ l'angolo tra l'asse y e il raggio congiungente una delle due estremità della corda risulta:

$$y = R \cos \vartheta.$$



Per valutare il momento statico relativo all'asse x dell'area A^* individuata dalla corda, si consideri l'elemento d'area generico individuato dall'angolo α , di lunghezza



$2R \sin \alpha$ e di altezza dy . Poiché:

$$y = R \cos \alpha,$$

risulta:

$$dy = -R \sin \alpha d\alpha.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} S_x^* &= \int_{\vartheta}^0 (2R \sin \alpha dy) y = - \int_{\vartheta}^0 2R^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= 2R^3 \int_0^{\vartheta} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta. \quad (1) \end{aligned}$$

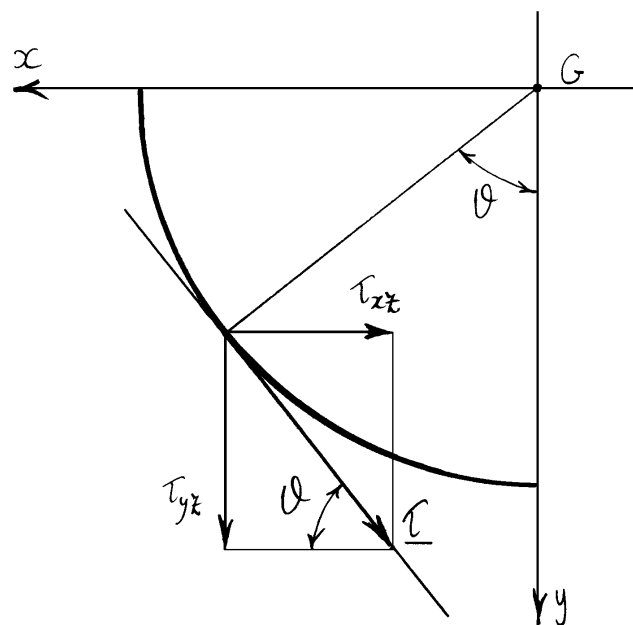
Tenuto conto che:

$$J_x = \frac{\pi}{4} R^4, \quad b = 2R \sin \vartheta,$$

si ha infine:

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin^2 \vartheta.$$

Si consideri ora che in generale la componente T_{yz} non è tangente al contorno. È dunque necessaria una componente τ_{xz} che renda la tensione tangenziale totale tangente al contorno.



Risulta quindi:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{\tau_{yz}}{\tan \vartheta} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ |\tau| = \frac{|\tau_{yz}|}{\sin \vartheta} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta, \end{cases} \quad (2)$$

all'estremità della corda di coordinata $x = R \sin \vartheta$.

Nell'altra estremità τ_{xz} ha lo stesso modulo e segno opposto. Avendo ipotizzato una variazione lineare di τ_{xz} lungo la corda si ha:

$$\tau_{xz} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^3} x \cos \vartheta.$$

Il valore massimo in modulo della tensione tangenziale lungo la corda lo si ha alle due estremità.

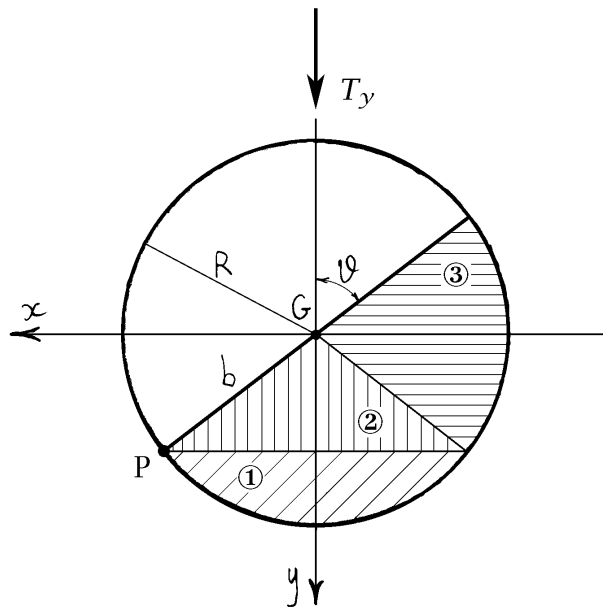
La tensione tangenziale massima sulla sezione la si ha dunque nei punti intersezione del contorno con l'asse x , individuati dall'angolo $\vartheta = \pi/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2}.$$

Si vuole ora verificare la formula (2) che fornisce il modulo $|\tau|$ della tensione tangenziale totale nel punto P del contorno individuato dall'angolo ϑ . A tal fine si consideri quale corda il diametro per P, ortogonale a τ . Per valutare τ è dunque sufficiente calcolare il momento statico dell'area A^* individuata da tale diametro. Tale area può essere divisa nelle tre parti indicate in figura. Della prima parte il momento statico è già stato calcolato ed è fornito dalla (1):

$$S_x^{1*} = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta.$$

La seconda parte è un triangolo isoscele con vertice nel baricentro, di base $2R \sin \vartheta$ e di altezza $R \cos \vartheta$ per cui risulta, applicando il teorema di Varignon:



$$S_x^{2*} = \left\{ \frac{1}{2} (2R \sin \vartheta) (R \cos \vartheta) \right\} \left\{ \frac{2}{3} R \cos \vartheta \right\} =$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta.$$

Infine il contributo della terza parte è nullo, essendo tale parte simmetrica rispetto all'asse x . Si ha quindi:

$$S_x^* = S_x^{1*} + S_x^{2*} = \frac{2}{3} R^3 \sin \vartheta,$$

e ne risulta infine, per la formula di Jourawski:

$$|\tau| = \frac{T_y S_x^*}{(2R) J_x} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta,$$

in accordo con la (2).

Fattore di taglio:

$$\chi_y = \frac{\pi R^2}{\frac{\pi^2 R^8}{16}} \int_0^\pi \frac{\frac{4}{9} R^6 \sin^6 \vartheta}{2 R \sin \vartheta} \left(1 + \frac{1}{3 \tan^2 \vartheta} \right) R \sin \vartheta d\vartheta$$

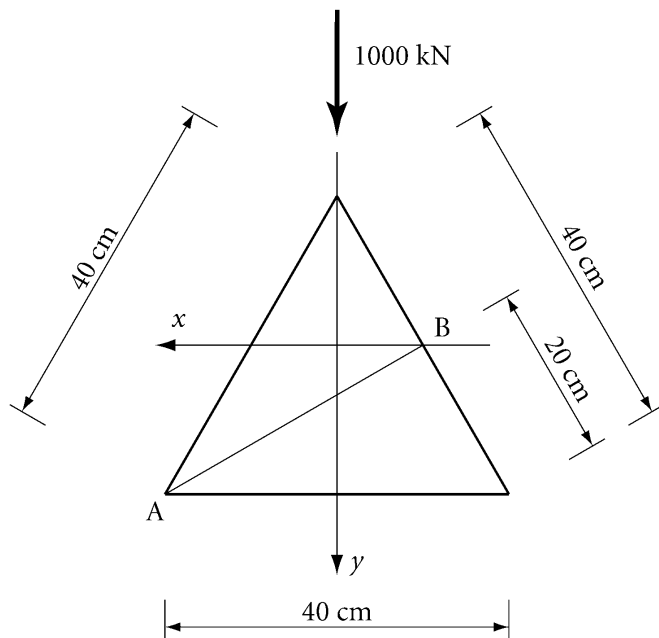
$$= \frac{16}{\pi R^6} \frac{2 R^6}{9} \int_0^\pi \sin^6 \vartheta \left(1 + \frac{1}{3 \tan^2 \vartheta} \right) d\vartheta$$

Si ottiene:

$$\chi_y = \frac{32}{27} \quad .$$

8.3.3 Esercizio: sezione triangolare equilatera

Data la sezione triangolare equilatera di figura soggetta ad



un taglio agente lungo una mediana:

1. disegnare gli assi di sollecitazione e neutro della flessione associata al taglio;
2. calcolare la tensione tangenziale nel punto B;
3. calcolare la tensione tangenziale media relativa alla corda AB;
4. dire di quale angolo, in gradi sessagesimali, è inclinata rispetto all'asse x la direzione della componente della ten-

sione tangenziale della quale è richiesta la media nel punto precedente.

Nel seguito si indicheranno con B e H rispettivamente base e altezza del triangolo equilatero:

$$B = 40 \text{ cm}, \quad H = B \cos 30^\circ = 34.64 \text{ cm},$$

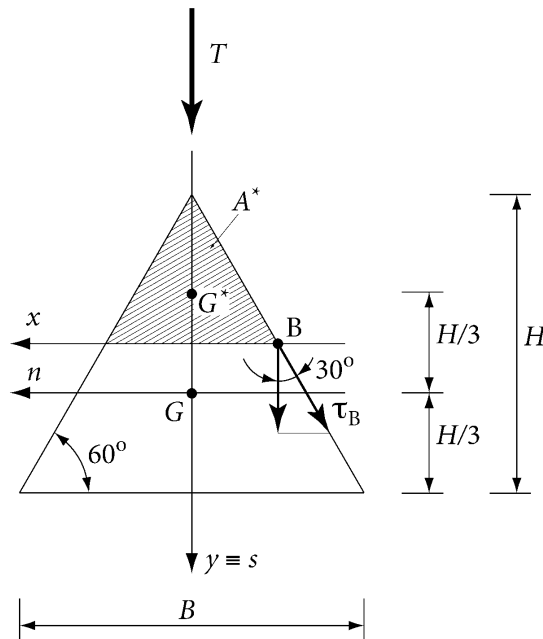
e con T il taglio che, con l'orientazione dell'asse y indicata in figura, risulta positivo:

$$T = 1000 \text{ kN}.$$

1. Le mediane del triangolo equilatero sono assi di simmetria retta. Quindi il baricentro G e il centro di taglio C coincidono entrambi con la loro intersezione. Inoltre, esistendo tre assi principali sia di inerzia che di taglio allora tutti gli assi sono sia principali di inerzia che principali di taglio. Essendo baricentrico, l'asse y , retta d'azione del taglio, coincide con l'asse di sollecitazione s della flessione associata al taglio, mentre l'asse neutro n è baricentrico e ortogonale all'asse di sollecitazione.

2. Essendo il taglio T simmetrico rispetto all'asse y ed essendo l'asse x ortogonale a y , lungo la corda individuata da x la componente della tensione tangenziale ortogonale alla corda stessa viene approssimata dalla sua media. Nel punto B, posto sul contorno, la tensione tangenziale τ_B deve essere tangente al contorno stesso e deve quindi valere, ricordando la formula di Jourawski:

$$\tau_B = \frac{\bar{\tau}_{yz}}{\cos 30^\circ} = \frac{TS_n^*}{\frac{B}{2}J_n \cos 30^\circ},$$



e tenendo conto che la lunghezza della corda vale $\frac{B}{2}$. Avendo prescelto l'area superiore tra le due individuate dalla corda allo scopo di semplificare i calcoli, come indicato in figura, il suo momento statico è negativo e vale:

$$S_n^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} \frac{H}{2} \right) \left(\frac{H}{3} \right) = -\frac{BH^2}{24} = -2000.00 \text{ cm}^3.$$

Il momento di inerzia J_n del triangolo equilatero rispetto all'asse neutro si può invece calcolare come il doppio del contributo di uno dei due triangoli rettangoli in cui la sezione è divisa dall'asse y :

$$J_n = 2 \left(\frac{\frac{B}{2} H^3}{36} \right) = \frac{BH^3}{36} = 46188.0 \text{ cm}^4.$$

Si ha quindi:

$$\tau_B = -\frac{(1000 \times 10^3) \times (2000.00 \times 10^3)}{200 \times (46188.0 \times 10^4) \cos 30^\circ} = -25.00 \text{ N/mm}^2.$$

Il segno negativo della tensione tangenziale è coerente con il fatto che la tensione stessa non può che essere uscente dall'area prescelta.

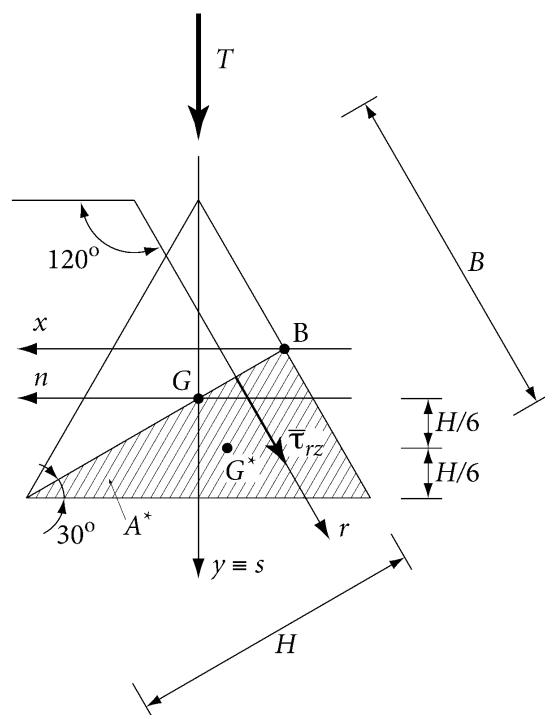
3. La corda AB non è ortogonale all'asse y di simmetria e la sua lunghezza è più grande di quella della corda individuata dall'asse x . Ne consegue che la media della componente della tensione tangenziale ortogonale alla corda AB fornisce un valore che potrebbe anche essere inaccettabile quale valore puntuale della componente stessa. Ciò non toglie che la formula di Jourawski è comunque in grado di fornire il valore medio $\bar{\tau}_{rz}$ della componente della tensione tangenziale nella direzione r ortogonale alla corda:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{TS_n^*}{HJ_n},$$

essendo H la lunghezza della corda AB e S_n^* il momento statico di una delle due aree individuate dalla corda stessa. Poiché per semplificare i calcoli si è prescelta l'area inferiore, come indicato in figura, il momento statico è positivo e vale:

$$S_n^* = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} H \right) \left(\frac{H}{6} \right) = \frac{BH^2}{24} = 2000.00 \text{ cm}^3,$$

e in modulo uguaglia quello valutato in precedenza e relativo alla corda individuata dall'asse x . Poiché $\frac{B}{2} \cos 30^\circ = \frac{H}{2}$ ne consegue che $\bar{\tau}_{rz}$ è esattamente la metà della tensione τ_B valutata



4. La direzione della componente della tensione tangenziale della quale è richiesta la media nel punto precedente, relativa alla corda AB, è quella ortogonale alla corda AB stessa. Con le convenzioni di figura l'angolo di cui è inclinata rispetto all'asse x tale direzione vale 120° .

in precedenza:

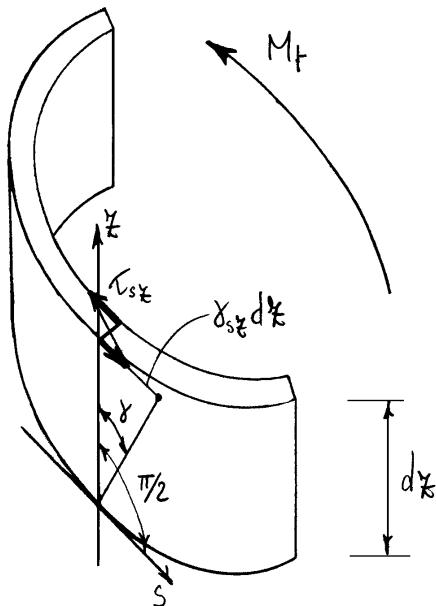
$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{(1000 \times 10^3) \times (2000.00 \times 10^3)}{346.4 \times (46188.0 \times 10^4)} = 12.50 \text{ N/mm}^2.$$

Il segno positivo della tensione tangenziale è coerente con il fatto che la tensione stessa non può che essere entrante nell'area prescelta. Si noti che la direzione ortogonale alla corda AB è quella della tensione tangenziale totale in B, per cui se si utilizzasse il valor medio lungo tale corda quale valore puntuale si otterrebbe un valore di τ_B pari a 12.50 N/mm^2 , in netto contrasto con il valore di 25.00 N/mm^2 ottenuto in precedenza.

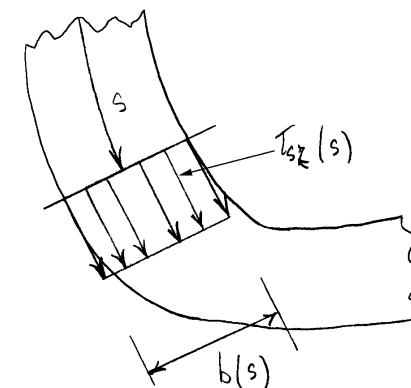
8.4 Il taglio nelle travi di sezione sottile aperta

Si faccia riferimento ad uno sforzo di taglio con retta d'azione passante per il centro di taglio C .

Si tenga conto che lo scorrimento associato alla tensione tangenziale τ_{sz} dovuta ad un momento torcente vale $\chi_{sz} = \tau_{sz} / G$. I punti di una corda, relativamente ad una sezione vicina, subiscono gli spostamenti $\chi_{sz} dz$, che, come le tensioni tangenziali, variano linearmente lungo la corda e sono



emisimmetrici rispetto alla linea media. Ne risulta che il lavoro mutuo delle tensioni tangenziali dovute al taglio T per gli scorrimenti χ_{sz} dovuti ad un momento torcente è nullo se le tensioni tangenziali dovute a T sono simmetriche lungo la corda. Inoltre, data la "piccolezza" dello spessore risulta accettabile supporre che la tensione tangenziale sia costante lungo la corda e quindi coincidente con il valore medio che può essere dedotto dalla formula di Jourawski, binomia:



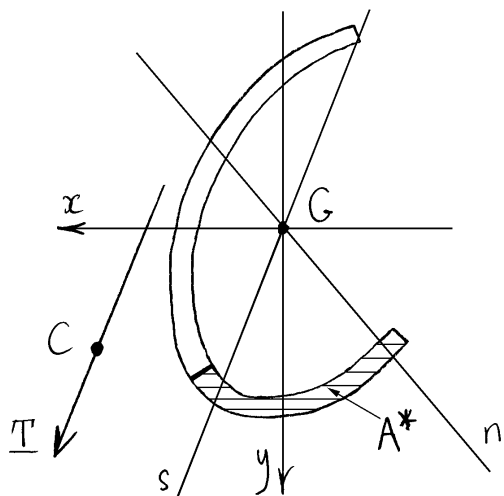
$$\tau_{sz} = \frac{\tau_y S_x^*}{b J_x} + \frac{\tau_x S_y^*}{b J_y} ,$$

oppure monomia:

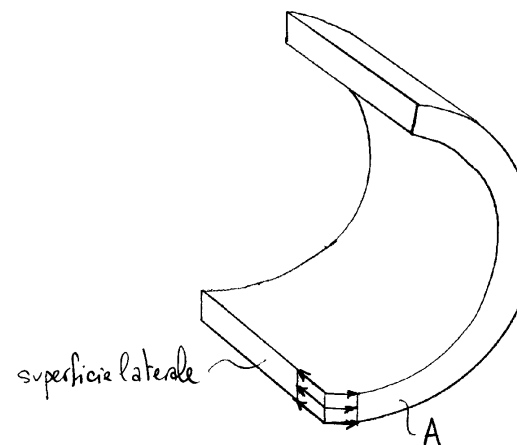
$$\tau_{sz} = \frac{\tau S_n^*}{b J_n} ,$$

dove al solito n è l'asse neutro della flessione associata al taglio $\underline{T}$.

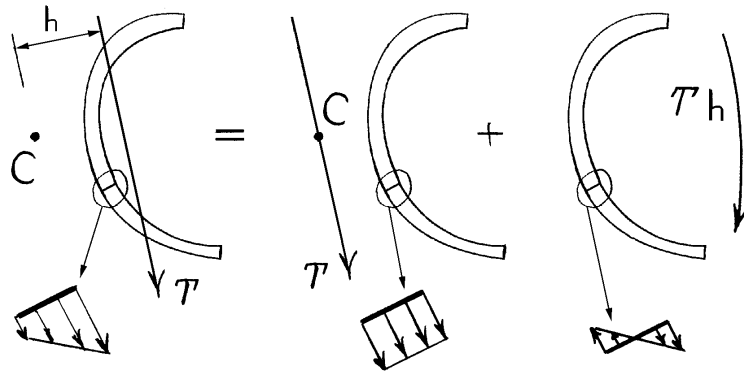
In una estremità libera la tensione tangenziale è nulla poiché l'area A^* o è nulla oppure coincide con tutta la sezione e quindi il momento statico S_n^* è nullo. Ciò è in accordo con il teorema di reciprocità delle ten-



sioni tangenziali. Infatti se le tensioni tangenziali non fossero nulle in una estremità libera allora per reciprocità dovrebbe essere presente una tensione tangenziale anche sulla superficie laterale della trave, come indicato in figura.



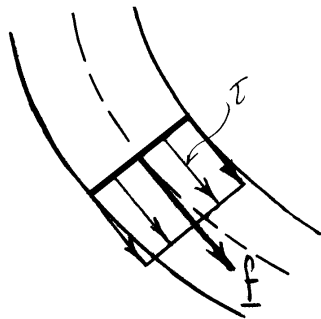
Si ribadisce che la tensione tangenziale può ritenersi costante, e quindi deducibile dalla formula di Jourawski se e solo se il taglio passa per il centro di taglio. In caso contrario la soluzione la si può ottenere per sovrapposizione delle soluzioni del taglio passante per il centro di taglio e del momento torcente rispetto al centro di taglio.



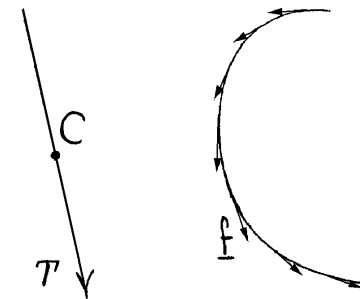
Se il taglio passa per il centro di taglio, la risultante $\underline{f}$ delle tensioni tangenziali agenti lungo una corda ha retta d'azione sulla linea media e vale:

$$\underline{f} = \frac{T S_n^*}{J_n}.$$

Le forze per unità di linea $\underline{f}$ sono note, via formula di Jourawski, indipendentemente dalla conoscenza della po-

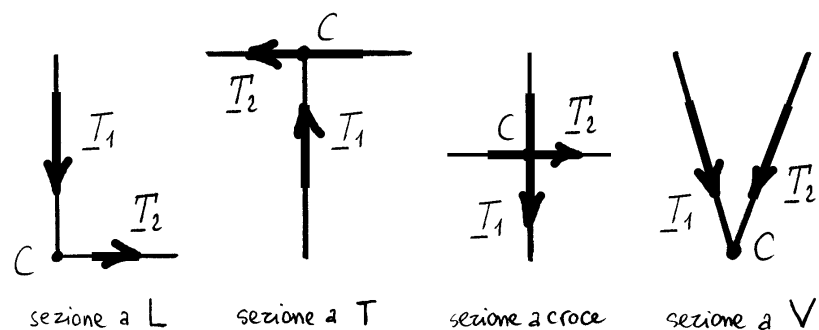


sizione del centro di taglio. Si consideri che la retta d'azione della risultante del sistema di forze $\underline{f}$ passa per il centro di taglio. Ne consegue che determinare tale retta d'azione equivale a determinare una retta che contiene il centro di taglio. Per determinare il centro di taglio è allora sufficiente determinare le rette d'azione delle risultanti di due distribuzioni di forze $\underline{f}$ corrispondenti a due tagli comunque inclinati tra loro.



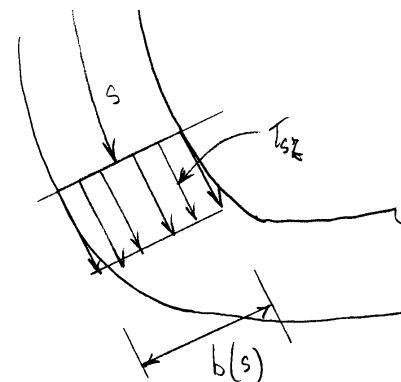
In un eventuale tratto rettilineo, la distribuzione di forze $\underline{f}$ che gli compete ha risultante avente quale retta d'azione la linea media del tratto.

Ne consegue che se una sezione sottile è composta di due tratti rettilinei, il centro di taglio coincide con l'intersezione



lungo la corda e vale, come detto:

$$\tau_{sx} = \frac{\tau_x S_y^*}{b J_y} + \frac{\tau_y S_x^*}{b J_x}.$$



delle linee medie dei due tratti. In fatti, qualunque sia il taglio passante per il centro di taglio, le due risultanti $\underline{T}_1$ e $\underline{T}_2$ corrispondenti ai due tratti, che hanno, come detto, rette d'azione coincidenti con le linee medie dei due tratti, si combinano in un'unica forza con retta d'azione passante per l'intersezione delle due rette d'azione.

Energia di deformazione per unità di linea in forma complementare:

8.4.1 Fattori di taglio

Si faccia riferimento ad uno sforzo di taglio con retta d'azione passante per il centro di taglio.

La tensione tangenziale τ_{sx} è approssimativamente costante

$$\psi = \frac{1}{2G} \int_A \tau_{sx}^2 dA =$$

$$= \frac{1}{2G} \int_l \tau_{sx}^2 b ds = \frac{1}{2G} \int_l \left(\frac{\tau_y S_x^*}{b J_x} + \frac{\tau_x S_y^*}{b J_y} \right)^2 b ds$$

$$= \frac{1}{2GA} \left\{ \left(\frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{b} ds \right) T_y^2 + \left(\frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds \right) T_x^2 + 2 \left(\frac{A}{J_x J_y} \int_l \frac{S_x^* S_y^*}{b} ds \right) T_x T_y \right\}.$$

Fattori di taglio:

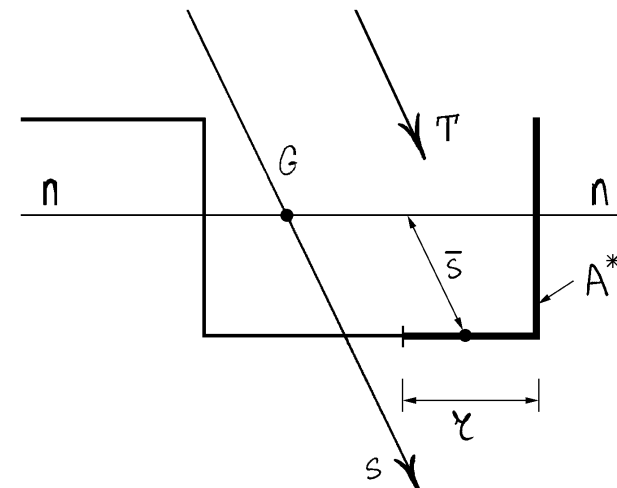
$$\begin{cases} \chi_y = \frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{b} ds, \\ \chi_x = \frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds, \\ \chi_{xy} = \frac{A}{J_x J_y} \int_l \frac{S_x^* S_y^*}{b} ds. \end{cases}$$

8.4.2 Andamento qualitativo del diagramma delle tensioni tangenziali su tratti rettilinei a spessore costante

Si riportino i valori delle tensioni tangenziali perpendicolarmente alla linea media prendendo come riferimento la linea media stessa. Si viene così a disegnare una curva di cui si vuole determinare l'andamento nel caso in cui

la sezione sottile è composta di tratti rettilinei a spessore costante. Su tali tratti la variazione della tensione tangenziale, al variare della corda, dipende solo dalla variazione del momento statico S_n^* dell'area A^* individuata dalla stessa corda.

Si consideri innanzitutto il caso in cui il tratto rettilineo è parallelo all'asse neutro della flessione associata al taglio, asse neutro rispetto al quale vengono valutati i momenti statici. Si assuma la distanza x da una delle due estremità del tratto rettilineo per individuare la generica corda del tratto. L'area A^* individuata dalla corda

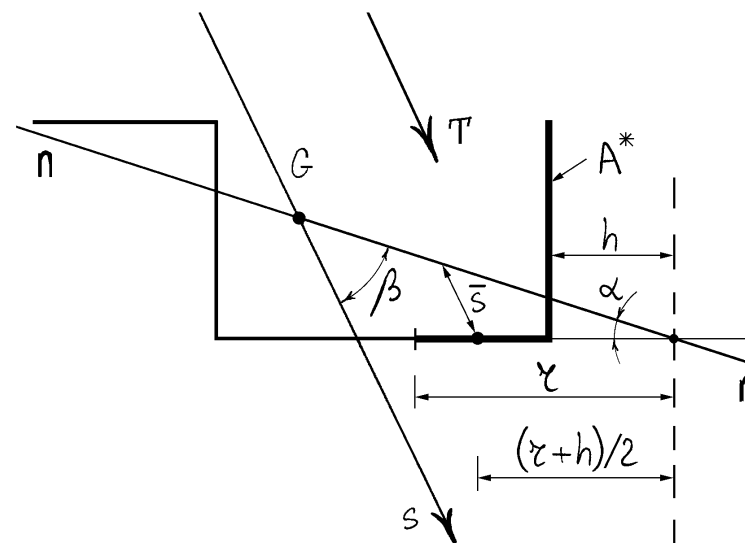


puo' scomporsi in due quote, $A(r)$ e $\bar{A}$, la prima delle quali, $A(r)$, coincide con la parte lunga r del tratto rettilineo in questione mentre la seconda, $\bar{A}$, rappresenta la quota residua di A^* . Il momento statico dell'area A^* rispetto all'asse neutro vale dunque:

$$S_n^*(r) = b r \bar{s} + \bar{S}_n,$$

dove b è lo spessore del tratto, $\bar{s}$ è la distanza del baricentro dell'area $A(r)$ dall'asse neutro e $\bar{S}_n$ è il momento statico dell'area $\bar{A}$. Poiché la distanza $\bar{s}$ è indipendente da r , tale equazione risulta essere lineare in r e ne risulta che il diagramma delle tensioni tangenziali lungo un tratto rettilineo a spessore costante è lineare.

Si consideri ora un tratto rettilineo non parallelo all'asse neutro della flessione associata al taglio. In tal caso, per individuare la generica corda del tratto, si assuma la distanza r di questa dall'intersezione della linea me-



dia del tratto con l'asse neutro. Detta h la distanza di tale intersezione dalla prima estremità del tratto, si ottiene:

$$S_n(r) = b(r-h)\bar{s} + \bar{S}_n,$$

avendo ancora scomposto l'area A^* nelle due quote $A(r)$ e $\bar{A}$ e dove $\bar{s}$ è la distanza del baricentro dell'area $A(r)$ dall'asse neutro.

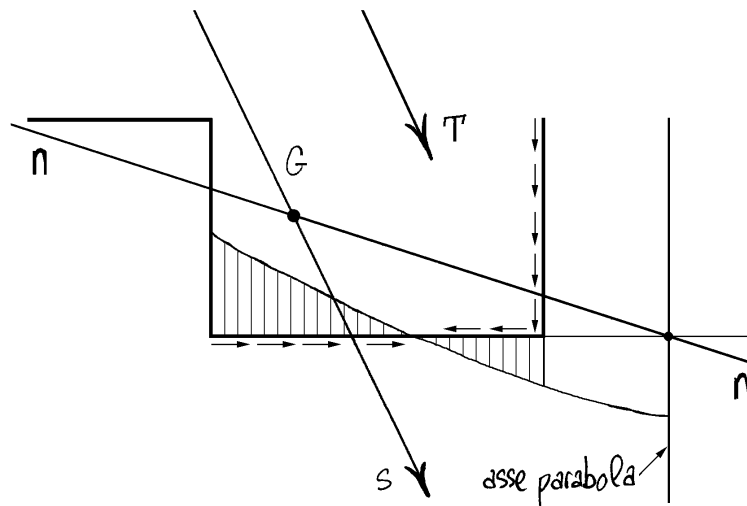
Se α è l'angolo tra la linea media del tratto e l'asse neutro e β è l'angolo tra asse neutro e asse di sollecitazione, risulta:

$$\bar{s} \sin \beta = \frac{z+h}{2} \sin \alpha \Rightarrow \bar{s} = \frac{z+h}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Si ha quindi infine:

$$S_n(z) = \frac{b}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (z^2 - h^2) + \bar{S}_n.$$

Tale equazione è quadratica in z e quindi il diagramma delle tensioni normali è parabolico. Mancando nell'equazione della parabola il termine lineare in z , ne risulta che l'asse della parabola passa per il punto $z=0$, ovvero sia per l'intersezione della linea media del tratto con l'asse neutro. In corrispondenza di tale punto, se appartiene al tratto, si ha

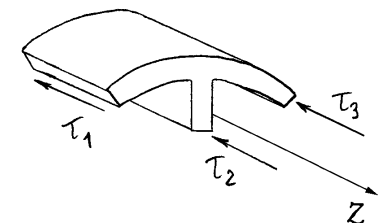
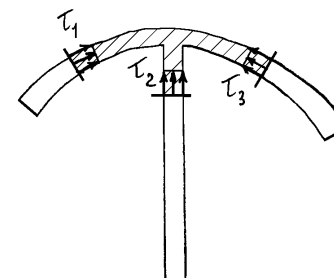


dunque un massimo relativo per la tensione tangenziale. Questo è in accordo col fatto che, attraversato tale punto, le aree successive hanno distanza dall'asse neutro di segno opposto e quindi il momento statico, in modulo, inizia a diminuire.

8.4.3 Equilibrio in un nodo triplo

Si consideri l'equilibrio alla Jouravski di un nodo in cui convergono tre tratti (nodo triplo). Seguendo le convenzioni illustrate in figura e tenendo conto che al limite l'area tende a zero e che quindi la presenza di eventuali tensioni normali non influenza l'equilibrio del nodo si ottiene:

$$-\tau_1 b_1 dz - \tau_2 b_2 dz - \tau_3 b_3 dz = 0,$$



e quindi:

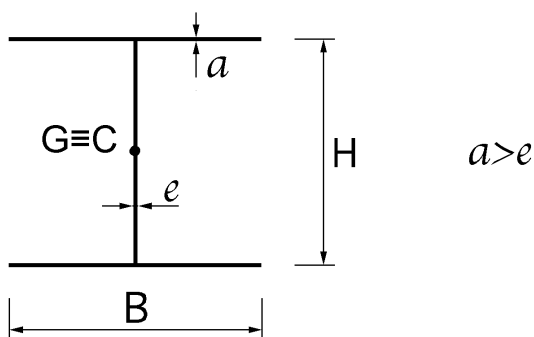
$$\tau_1 b_1 + \tau_2 b_2 + \tau_3 b_3 = 0.$$

Ci si riferisce alla risultante T_b lungo una corda generica chiamandola "flusso" delle tensioni tangenziali attraverso la corda. Ne risulta che il flusso globale in ingresso in un nodo triplo è nullo.

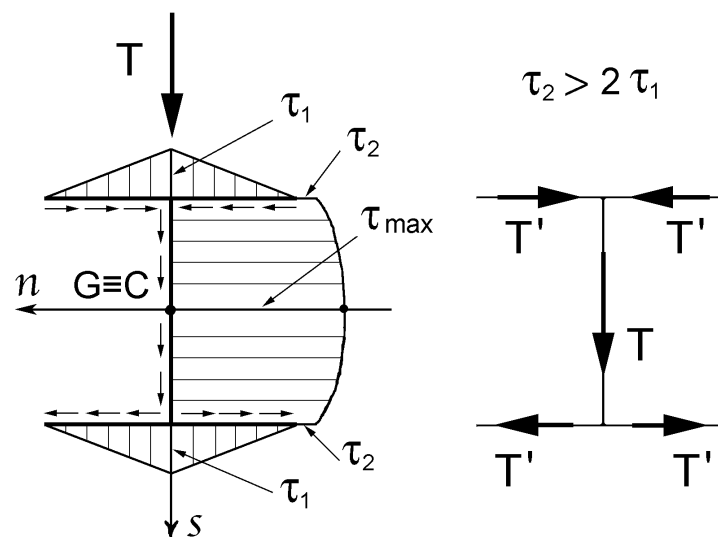
Naturalmente quanto detto per un nodo triplo vale per un qualunque altro nodo.

8.4.4 La sezione a doppio T

La sezione presenta due assi di simmetria e quindi il centro di taglio coincide con il baricentro. Nel caso il



taglio abbia quale retta d'azione la linea media dell'anima, tale linea media rappresenta l'asse di sollecitazione s mentre l'asse neutro n gli è ortogonale. Il taglio è simmetrico rispetto all'asse di sollecitazione ed emisimmetrico rispetto all'asse neutro. Il diagramma delle tensioni tangenziali è lineare lungo le ali e parabolico lungo l'anima con asse della parabola in corrispondenza del baricentro. Le tensioni tangenziali lungo l'anima devono avere come risultante il taglio applicato. Quindi il verso delle tensioni tangenziali lungo l'anima deve essere concorde al verso



del taglio. Tenendo conto che il flusso globale nei due nodi tripli deve essere nullo e che l'asse di sollecitazione è di simmetria si deduce automaticamente il verso delle tensioni tangenziali lungo le ali. Se τ_1 e τ_2 sono i moduli delle tensioni tangenziali, in vicinanza dei nodi tripli, rispettivamente nelle ali e nell'anima, l'equazione di flusso, con i versi di figura, richiede:

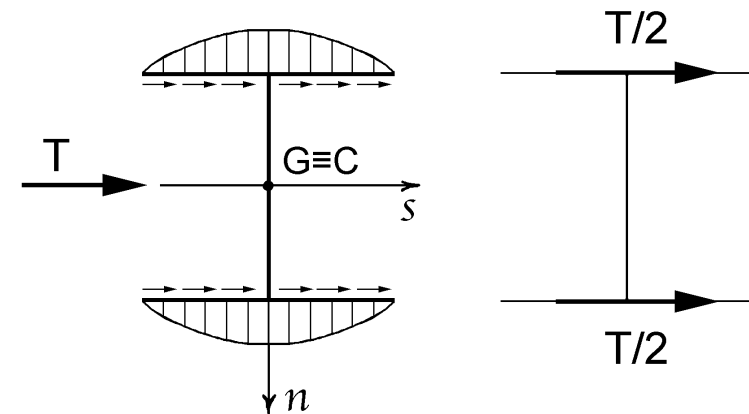
$$\tau_1 e + \tau_1 e - \tau_2 a = 0 \Rightarrow \tau_2 = 2 \frac{e}{a} \tau_1,$$

dove e ed a sono gli spessori delle ali e dell'anima rispettivamente. Se $e > a$, che è lo standard delle sezioni a doppio T, allora $\tau_2 > 2 \tau_1$.

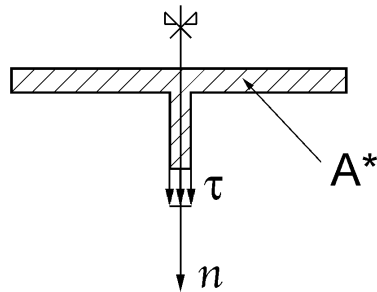
La massima tensione tangenziale $\tau_{\max}$ la si ha in corrispondenza dell'intersezione tra asse neutro e linea media dell'anima, dove la parabola presenta il suo massimo.

In figura è anche riportato il quadro delle risultanti delle tensioni tangenziali nei vari tratti, avendo indicato con T' il modulo della risultante su mezza ala, che per simmetria ed enusimmetria è uguale per tutte e quattro le mezze ali.

Nel caso il taglio abbia invece quale retta d'azione la retta baricentrica parallela alle ali allora l'asse neutro coincide con la linea media dell'anima. Ancora, il taglio



è simmetrico rispetto all'asse di sollecitazione ed enusimmetrico rispetto all'asse neutro. Il diagramma delle tensioni è lineare lungo l'anima e parabolico sulle ali. In particolare, il diagramma lungo l'anima è nullo. Infatti l'asse neutro è asse di simmetria per qualunque area A^* individuata da una corda lungo l'anima e quindi il momento statico S_n^* è nullo. Alternativamente, le eventuali tensioni tangenziali lungo una corda dell'anima sono simmetriche rispetto all'asse neutro. Essendo tale asse di enusimmetria



tria, tali tensioni tangenziali devono essere nulle.

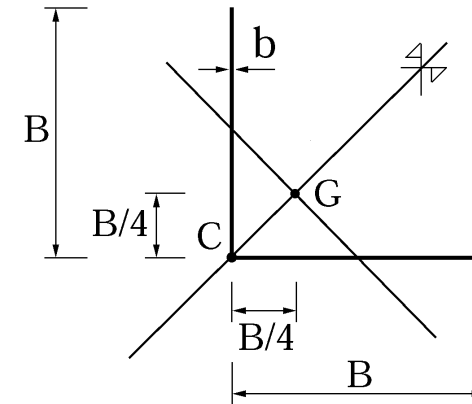
Gli assi delle due parabole coincidono entrambi con l'asse neutro. Il flusso lungo le ali, a differenza del caso precedente, ha sempre lo stesso verso, poiché il flusso lungo l'anima è nullo. Tale verso deve essere in accordo con il verso della forza di taglio.

8.4.5 La sezione a L a lati uguali

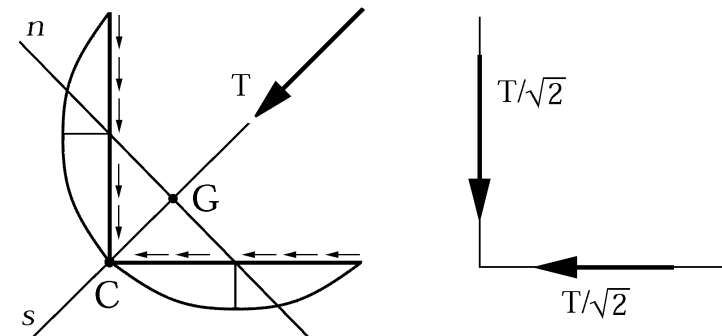
La sezione presenta un'asse di simmetria, inclinato di 45° rispetto ai lati, che contiene baricentro e centro di taglio.

Come già visto, il centro di taglio è situato alla intersezione dei lati. Il baricentro è invece posizionato alla intersezione tra l'asse di simmetria e l'allineamento dei baricentri dei due lati, e si trova quindi alla distanza $B/4$ dai lati, se B è la loro lunghezza.

Si consideri innanzitutto il caso di un taglio avente quale

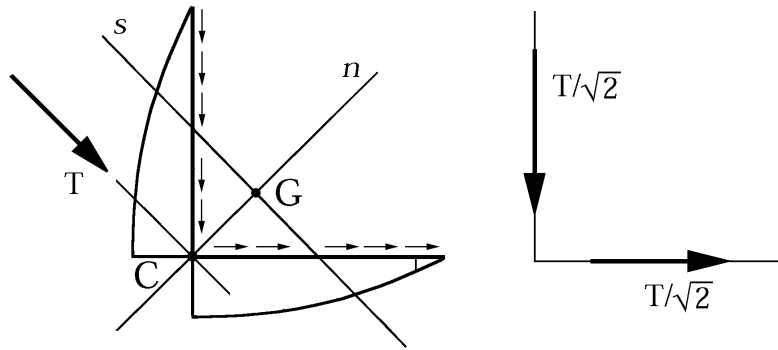


retta d'azione l'asse di simmetria, che risulta di simmetria anche per il taglio applicato. L'asse neutro è la retta che passa per i baricentri dei due lati. Poiché i lati sono inclinati rispetto all'asse neutro, i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono parabolici, con assi delle parabole in corrispondenza dei baricentri dei due lati.

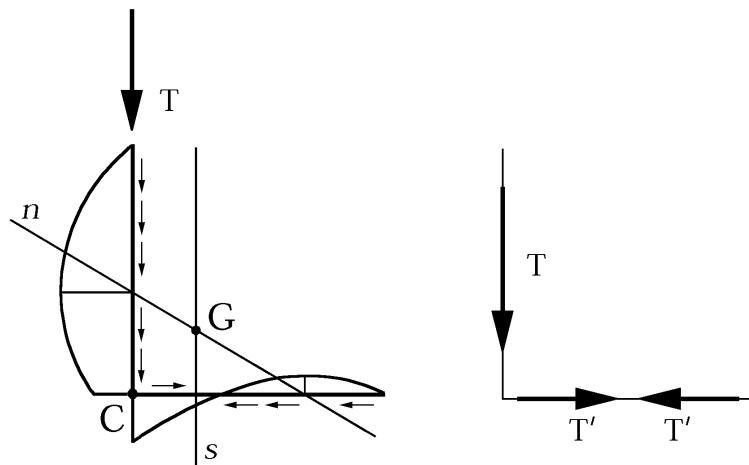


Si consideri poi il caso di un taglio avente quale retta d'azione la retta per il centro di taglio perpendicolare all'asse

di simmetria. L'asse neutro coincide con l'asse di simmetria, i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono ancora parabolici e gli assi delle parabole sono in corrispondenza del centro di taglio (dove i lati intersecano l'asse neutro).



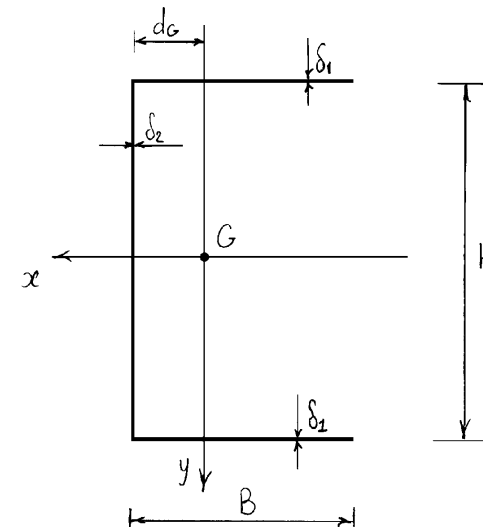
Si consideri infine il caso di un taglio avente quale retta d'azione la retta verticale per il centro di taglio. L'asse di sol-

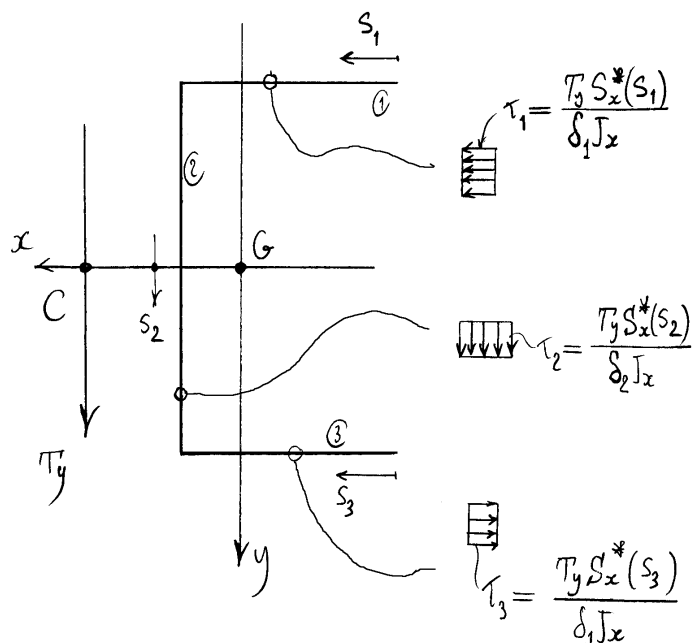


lecitazione è la retta verticale per G e l'asse neutro è il coniugato di questo. Poichè l'asse verticale non è principale di inerzia il suo coniugato è inclinato rispetto alla verticale. Ne consegue che i due lati della sezione a L sono inclinati rispetto all'asse neutro e che quindi i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono parabolici, con gli assi delle parabole posti in corrispondenza delle intersezioni con l'asse neutro. Dovendo essere nulla la risultante orizzontale delle tensioni tangenziali, l'intersezione dell'asse neutro con il lato orizzontale della sezione deve essere situata necessariamente nella metà destra del lato.

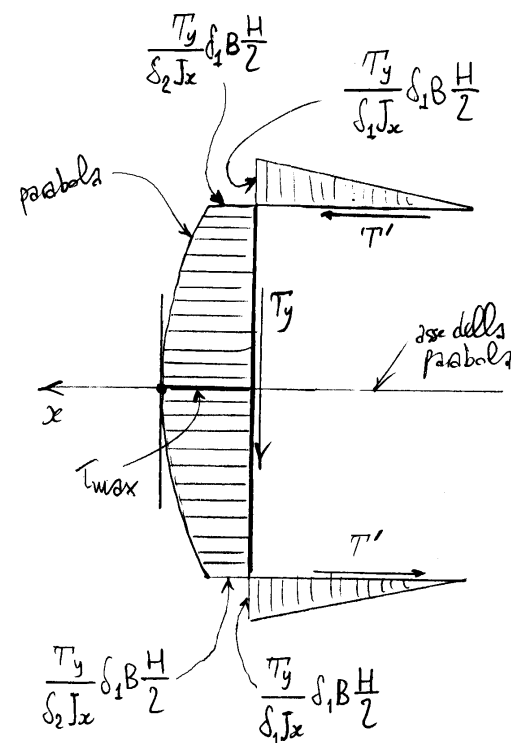
8.4.6 La sezione a C

Si consideri la sezione a C di figura, di cui abbiamo già calcolato le caratteristiche inerziali.



8.4.6.1 Taglio T_y passante per il centro di taglio

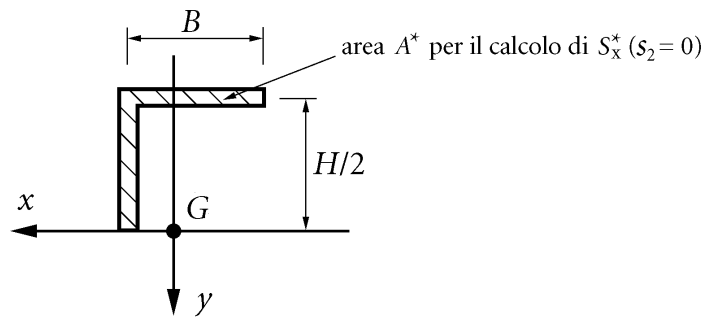
$$\begin{cases} S_x^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \frac{H}{2} \\ S_x^*(s_2) = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) - s_2 \right] \\ \quad = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - s_2^2 \right) \\ S_x^*(s_3) = \delta_1 s_3 \frac{H}{2} \end{cases},$$



Si calcoli ora la tensione tangenziale massima, agente in corrispondenza della corda posta sull'asse x. Si ottiene:

$$\tau_{\max} = \tau_2(0) = -\frac{T_y}{\delta_2 J_x} \left(\frac{\delta_1 B H}{2} + \frac{\delta_2 H^2}{8} \right),$$

dove il segno negativo significa che il verso di τ è uscente dall'area A^* che si è considerata nel calcolo di $S_x^*(s_2)$.



In modulo:

$$\tau_{\max} = \frac{T_y}{2\delta_2 J_x} \left(\delta_1 B H + \frac{\delta_1 H^2}{4} \right).$$

Verifichiamo che l'integrale delle τ_{xy} (agenti nell'anima del profilato) fornisce il taglio T_y applicato

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} s_2 ds_2 &= - \frac{T_y}{\delta_2 J_x} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_x^*(s_2) \delta_2 ds_2 \\ &= \frac{T_y}{J_x} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left\{ \delta_1 B \frac{H}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - s_2^2 \right) \right\} ds_2 \\ &= \frac{T_y}{J_x} \left\{ \delta_1 B \frac{H^2}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^3}{4} - \frac{H^3}{12} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{T_y}{J_x} \underbrace{\left\{ \delta_1 B \frac{H^2}{2} + \delta_2 \frac{H^3}{12} \right\}}_{J_x} = T_y.$$

Per quel che riguarda i segni, si è tenuto conto che nell'anima $\tau_{xy} = -\tau_2$. Infatti τ_2 è positivo se diretto verso l'alto (se entrante nella sezione) mentre τ_{xy} è positivo se diretto verso il basso, data che questa è l'orientazione di y .

Fattore di taglio

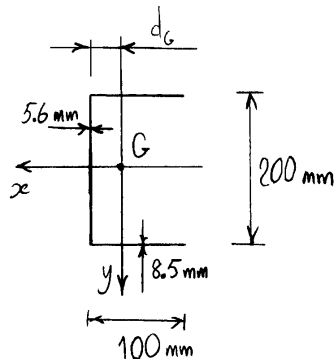
$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{\delta_1} ds = \\ &= \frac{A}{J_x^2} \left\{ 2 \int_0^B \frac{\delta_1 H^2}{4} \xi^2 d\xi + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{\delta_2} \left[\delta_1 B \frac{H}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - \xi^2 \right) \right]^2 d\xi \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{\delta_1 B^3 H^2}{6} + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{\delta_1^2 B^2 H^2}{4 \delta_2} + \frac{\delta_1 B H^3}{8} - \frac{\delta_1 B H \xi^2}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\delta_2 H^4}{4 \times 16} - \frac{\delta_2 H^2 \xi^2}{8} + \frac{\delta_2 \xi^4}{4} \right] d\xi \right\} = \\
&= \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{\delta_1 B^3 H^2}{6} + \frac{\delta_1^2 B^2 H^3}{4 \delta_2} + \frac{\delta_1 B H^4}{8} - \frac{\delta_1 B H^4}{24} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta_2 H^5}{4 \times 16} - \frac{\delta_2 H^5}{6 \times 16} + \frac{\delta_2 H^5}{20 \times 16} \right\},
\end{aligned}$$

e infine:

$$\chi_y = \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{1}{6} \delta_1 B^3 H^2 + \frac{1}{4 \delta_2} \delta_1^2 B^2 H^3 + \frac{1}{12} \delta_1 B H^4 + \frac{1}{120} \delta_2 H^5 \right\}.$$

Si consideri ora l'esempio numerico sotto riportato, di cui si sono già calcolate le quantità inerziali.



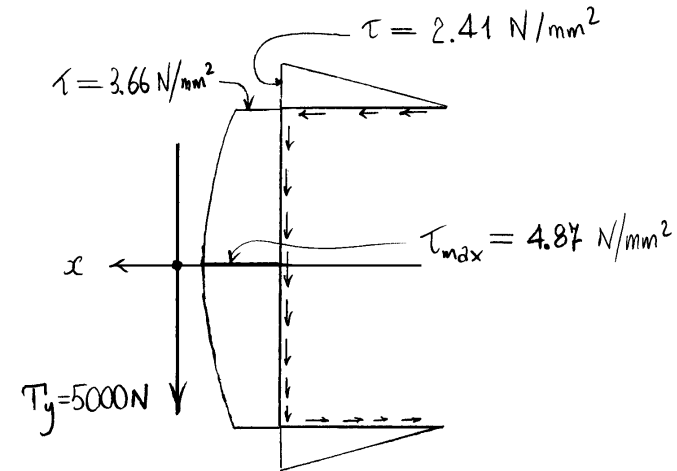
$$A = 2820 \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

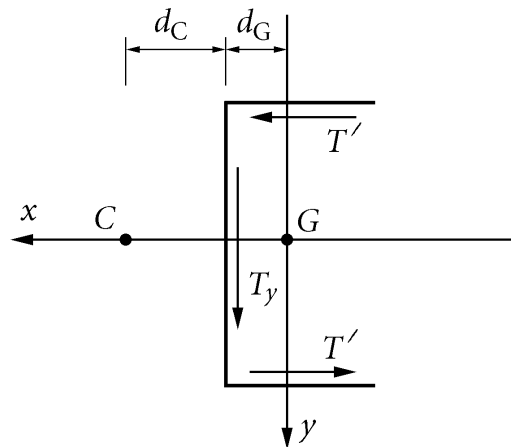
I valori più significativi delle tensioni tangenziali, dovute ad un taglio $T_y = 5000 \text{ N}$, sono riportati nella figura seguente.



8.4.6.2 Centro di taglio

Si individua ora il centro di taglio C attraverso la risultante delle tensioni tangenziali dovute al taglio T_y passante per tale centro. Poichè la forza risultante è verticale i contributi delle due ali sono uguali ed opposti ed equivalgono ad una coppia. La risultante nell'anima deve valere T_y . Tale sistema di forze è equivalente ad un'unica forza T_y passante per il centro di taglio C , per cui deve risultare:

$$T_y d_c = T' H,$$



e quindi:

$$d_c = \frac{T'}{T_y} H.$$

La forza T' agente nelle ali vale:

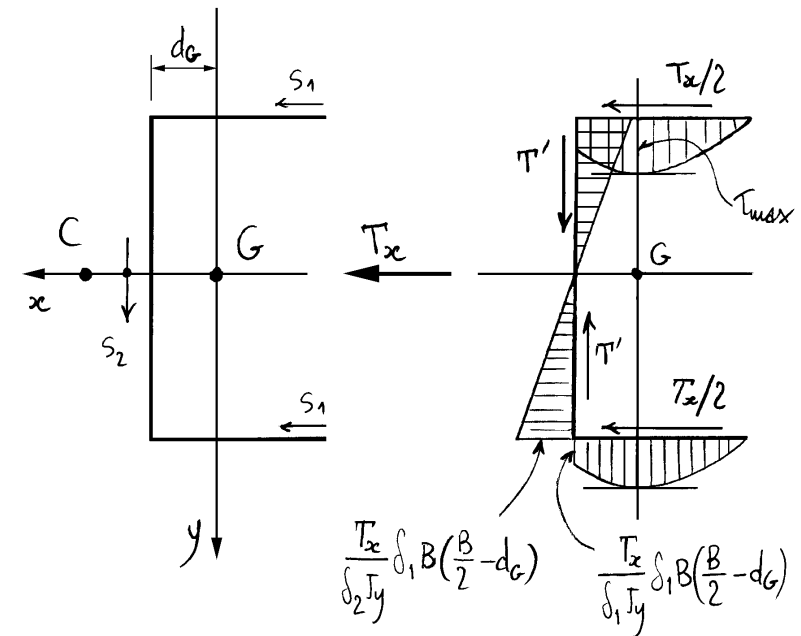
$$T' = \frac{T_y}{\delta_1 J_x} \frac{\delta_1 B H}{2} \delta_1 \frac{B}{2} = \frac{T_y}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H}{4},$$

e si ottiene definitivamente:

$$d_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4},$$

conformemente a quanto già ottenuto utilizzando la funzione di ingobbamento.

8.4.6.3 Taglio T_x passante per il centro di taglio



$$s_y^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \left(B - d_G - \frac{s_1}{2} \right),$$

$$s_y^*(s_2) = \delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) d_G - \delta_1 B \left(\frac{B}{2} - d_G \right).$$

Per $s_1 = B - d_G$:

$$\tau_{max} = \frac{T_x}{\delta_1 J_y} \frac{(B - d_G)^2}{2} = \frac{T_x}{J_y} \frac{(B - d_G)^2}{2}.$$

Fattore di taglio secondo x

$$\begin{aligned}\chi_x &= \frac{A}{J_y^2} \int \frac{S_y^2}{b} ds = \\ &= \frac{A}{J_y^2} \left\{ 2 \int_0^B \delta_1 s_1^2 \left(B - d_G - \frac{s_1}{2} \right)^2 ds_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{\delta_2} \left[\delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) d_G - \delta_1 B \left(\frac{B}{2} - d_G \right) \right]^2 ds_2 \right\}.\end{aligned}$$

Nel caso numerico citato si ottiene:

$$\chi_y = 2.906.$$

Fattore di taglio misto

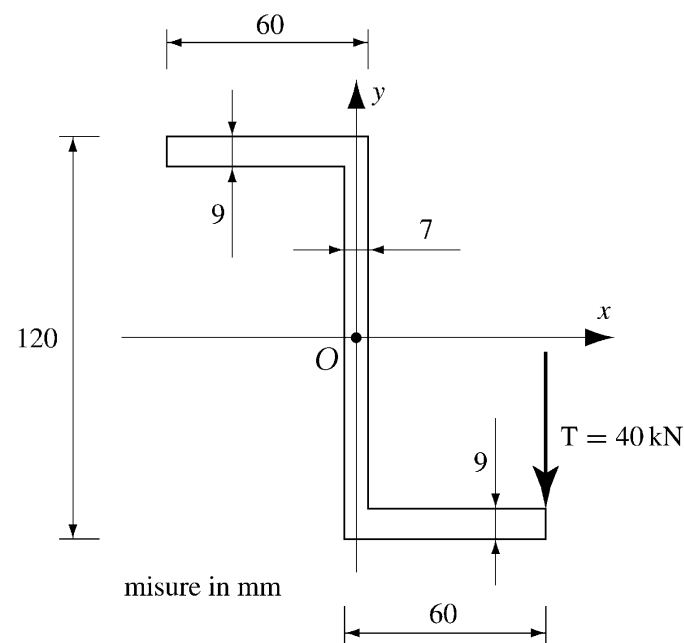
Poiché x è asse di simmetria il fattore di taglio misto si annulla:

$$\chi_{xy} = 0.$$

In altre parole, x e y sono assi principali di taglio.

8.4.7 Sezione a Z

Si consideri la sezione a Z sotto riportata soggetta ad un taglio verticale $T = 40$ kN.

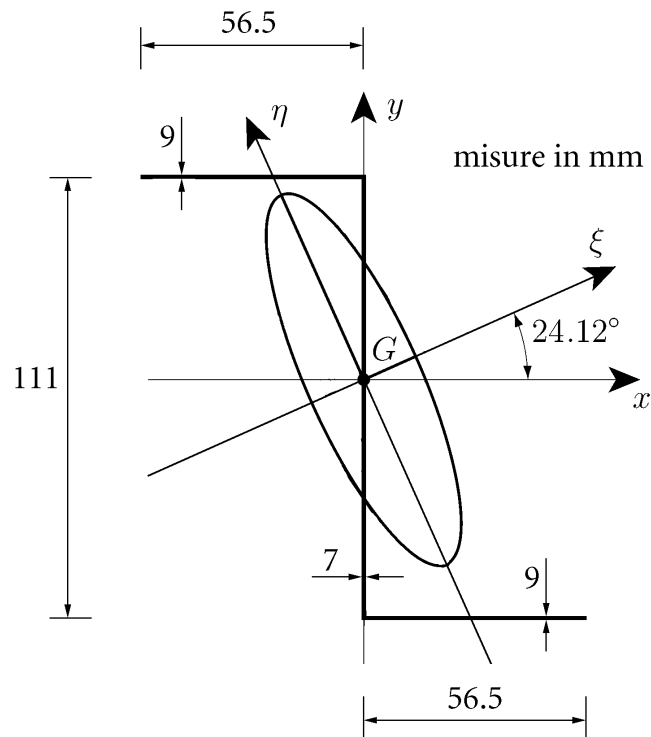


Di tale sezione sono già state calcolate le quantità inerziali:

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases},$$

$$\alpha_\xi = 24.12^\circ.$$

Come già detto, la sezione presenta una simmetria polare, cioè è invariante per rotazioni di 180° attorno al punto O, punto che deve quindi coincidere con il baricentro. In tale

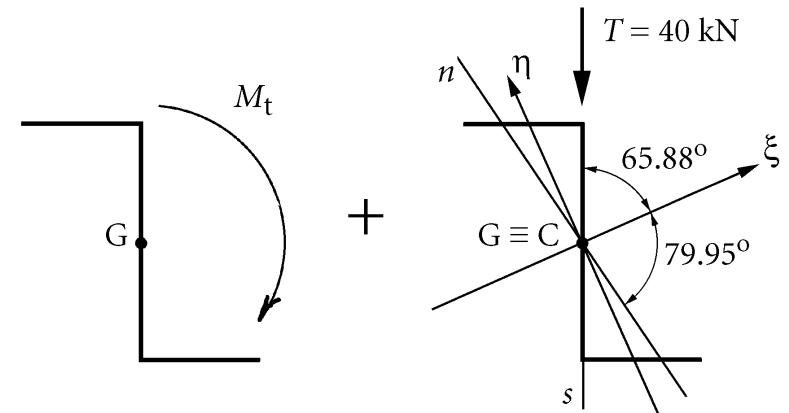


rotazione un taglio qualunque passante per O cambia di segno (cioè presenta una emisimmetria polare). Ne consegue che un tale taglio non può provocare una rotazione di tipo torsionale della sezione, essendo tale rotazione invariante e quindi simmetrica. Il polo O deve quindi coincidere con il centro di taglio C .

Il problema può quindi essere risolto sovrapponendo un problema di torsione con uno di taglio passante per il centro di taglio.

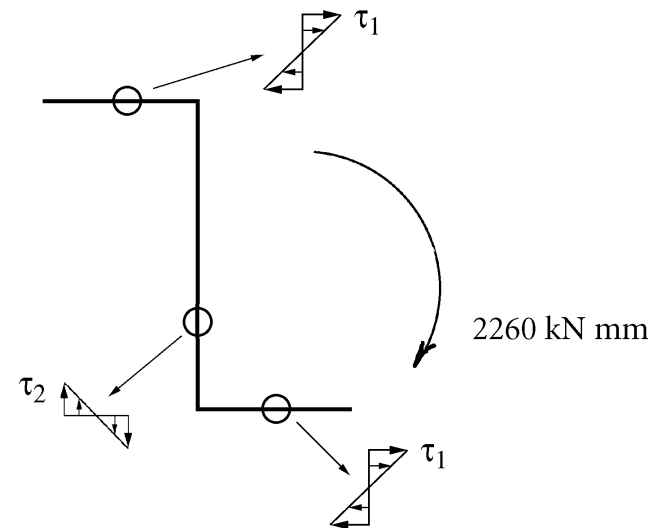
Il momento torcente M_t è orario e di modulo:

$$M_t = 40 \text{ kN} \times 56.5 \text{ mm} = 2260 \text{ kN mm},$$



mentre il fattore torsionale di rigidezza vale:

$$J_t = \frac{1}{3} [2 \times 56.5 \text{ mm} \times (9 \text{ mm})^3 + 111 \text{ mm} \times (7 \text{ mm})^3] = 40150 \text{ mm}^4.$$



Le tensioni tangenziali valgono quindi:

$$\tau_1 = \frac{2.26 \times 10^6 \text{ N mm}}{40150 \text{ mm}^4} \cdot 9 \text{ mm} = 506.60 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{2.26 \times 10^6 \text{ N mm}}{40150 \text{ mm}^4} \cdot 7 \text{ mm} = 394.02 \text{ N/mm}^2.$$

La forza di taglio può essere scomposta nelle due direzioni principali di inerzia:

$$T_\xi = -T \sin \alpha_\xi = -0.409 T = -16.36 \text{ kN},$$

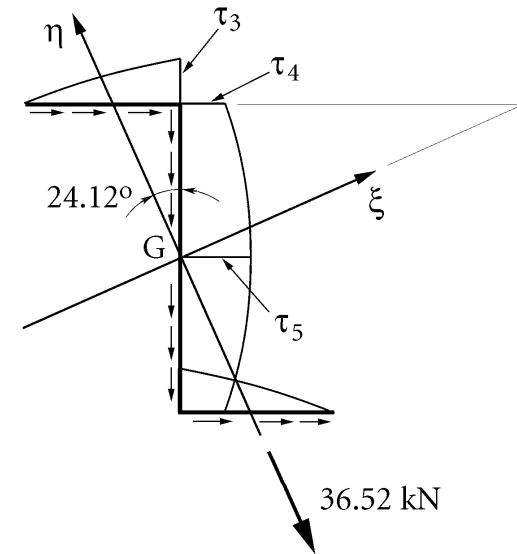
$$T_\eta = -T \cos \alpha_\xi = -0.913 T = -36.52 \text{ kN}.$$

Si procede calcolando i soli moduli delle tensioni tangenziali. Nel caso della componente T_η si ottiene:

$$\begin{aligned} S_3^* &= S_4^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \\ &\times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{2} \cos 24.12^\circ + \frac{56.5 \text{ mm}}{2} \times \sin 24.12^\circ \right\} = \\ &= 31628 \text{ mm}^3, \end{aligned}$$

$$\tau_3 = \frac{36520 \text{ N} \times 31628 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 27.63 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_4 = \frac{36520 \text{ N} \times 31628 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 35.52 \text{ N/mm}^2,$$

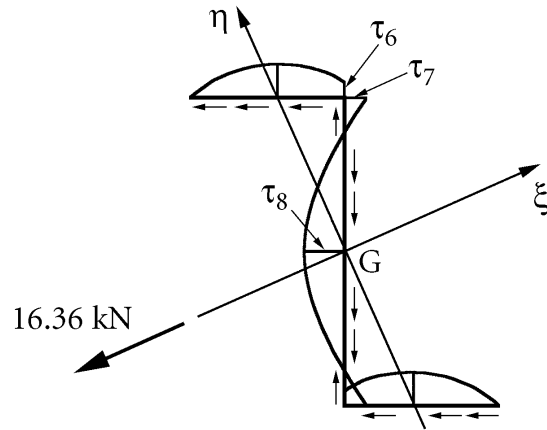


$$\begin{aligned} S_5^* &= S_3^* + 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \left[\frac{111 \text{ mm}}{4} \times \cos 24.12^\circ \right] = \\ &= 41468 \text{ mm}^3, \end{aligned}$$

$$\tau_5 = \frac{36520 \text{ N} \times 41468 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 46.57 \text{ N/mm}^2.$$

Per quel che riguarda la componente T_ξ si ottiene invece:

$$\begin{aligned} S_6^* &= S_7^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \\ &\times \left\{ \frac{56.5 \text{ mm}}{2} \times \cos 24.12^\circ - \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \sin 24.12^\circ \right\} = \\ &= 1581 \text{ mm}^3, \end{aligned}$$



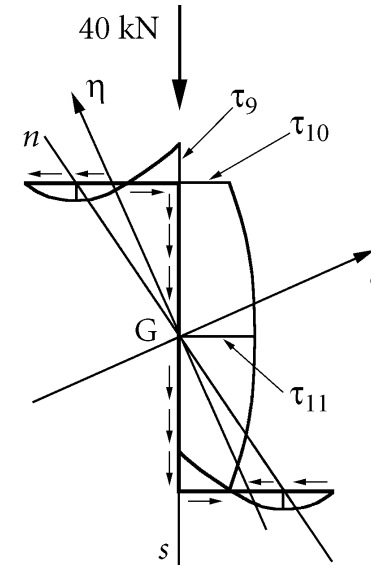
$$\tau_6 = \frac{16360 \text{ N} \times 1578 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 7.79 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_7 = \frac{16360 \text{ N} \times 1578 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 10.02 \text{ N/mm}^2,$$

$$S_8^* = 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \left[\frac{111 \text{ mm}}{4} \times \sin 24.12^\circ \right] - S_6^* = 2824 \text{ mm}^3,$$

$$\tau_8 = \frac{16360 \text{ N} \times 2827 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 17.90 \text{ N/mm}^2.$$

Considerando invece la forza di taglio complessiva, l'asse di sollecitazione s della flessione associata al taglio coincide con l'asse



y verticale. Risulta quindi:

$$\hat{\xi}s = 90^\circ - \alpha_\xi = 65.88^\circ.$$

Utilizzando la formula di coniugio, si ottiene allora l'inclinazione dell'asse neutro n :

$$\hat{\xi}n = \tan^{-1} \left\{ - \frac{464.419 \text{ cm}^4}{36.838 \text{ cm}^4 \times \tan 65.88^\circ} \right\} = -79.95^\circ.$$

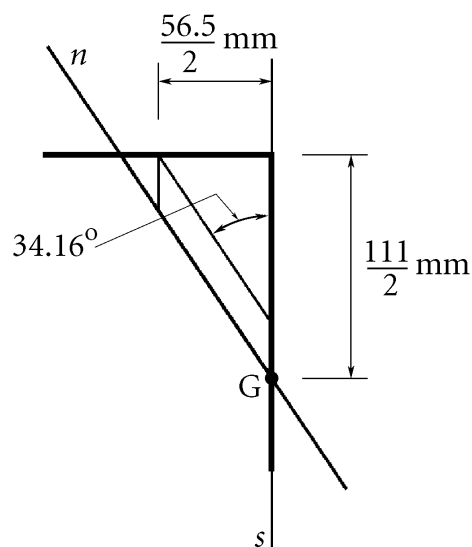
Tenendo conto che $\hat{n}s = 180^\circ - (65.88^\circ + 79.95^\circ) = 34.16^\circ$, il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro risulta:

$$J_n = \frac{464.419 \text{ cm}^4 \times \cos^2(-79.95^\circ) + 36.838 \text{ cm}^4 \times \sin^2(-79.95^\circ)}{\sin^2 34.16^\circ} = 158.094 \text{ cm}^4.$$

I momenti statici valgono:

$$S_9^* = S_{10}^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{2} - \frac{56.5 \text{ mm}}{2 \times \tan 34.16^\circ} \right\} = 7055 \text{ mm}^3,$$

$$S_{11}^* = S_9^* + \left\{ 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \right\} \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{4} \right\} = 17836 \text{ mm}^3.$$



Si ottengono così le seguenti tensioni tangenziali:

$$\tau_9 = \frac{40000 \text{ N} \times 7055 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 19.83 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{10} = \frac{40000 \text{ N} \times 7055 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 25.50 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{11} = \frac{40000 \text{ N} \times 17836 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 64.47 \text{ N/mm}^2.$$

Si noti che, come deve essere, risulta:

$$\tau_9 = \tau_3 - \tau_6 = (27.63 - 7.79) \text{ N/mm}^2 = 19.83 \text{ N/mm}^2,$$

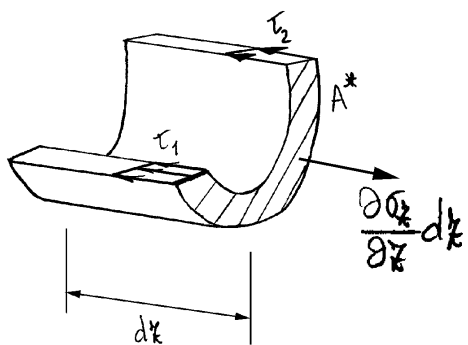
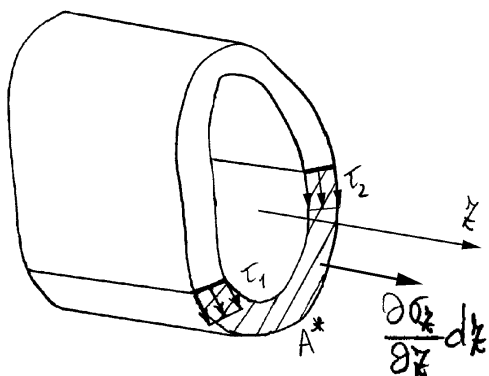
$$\tau_{10} = \tau_4 - \tau_7 = (35.52 - 10.02) \text{ N/mm}^2 = 25.50 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{11} = \tau_5 + \tau_8 = (46.57 + 17.90) \text{ N/mm}^2 = 64.47 \text{ N/mm}^2.$$

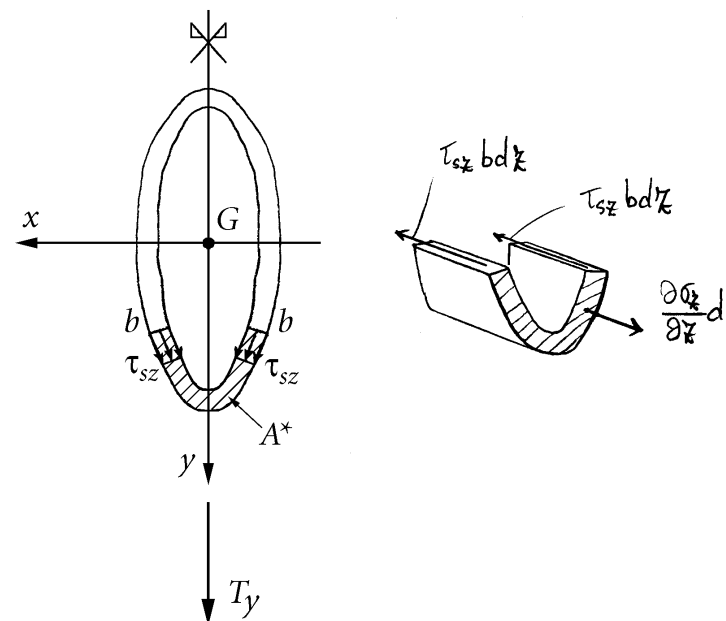
ATTENZIONE! Si tenga conto che i risultati numerici precedenti sono stati ottenuti operando in doppia precisione, con la successiva approssimazione a due cifre decimali. Questo rende apparentemente inconsistente la prima delle relazioni precedenti.

8.5 Il taglio nelle travi di sezione sottile chiusa simmetrica

Se la sezione sottile chiusa è biconnessa, occorrono due sezioni longitudinali in corrispondenza di due corde per isolare l'elemento di trave su cui imporre l'equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse della trave. Questo significa che si ha a disposizione una sola equazione per le due incognite che rappresentano le tensioni tangenziali in corrispondenza delle due corde.



Se la sezione presenta un asse di simmetria e il taglio è simmetrico è possibile scegliere due corde in posizione simmetrica, nelle quali agisce di conseguenza una tensione tangenziale simmetrica.



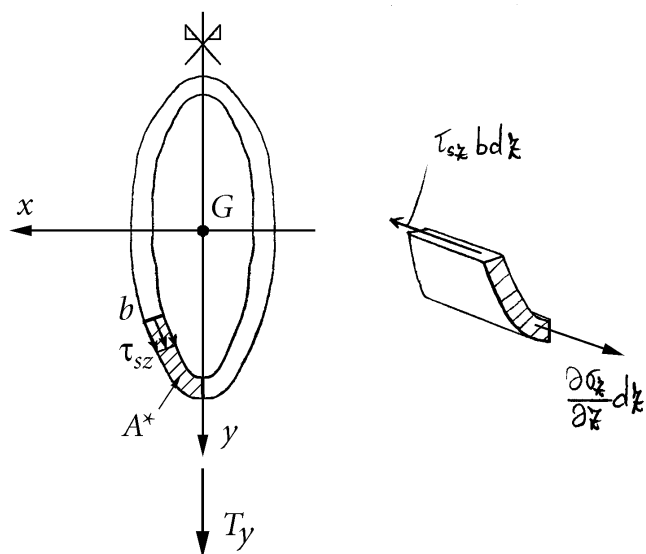
In tal modo le due incognite si riducono ad una sola e risulta:

$$2 \tau_{sz} b dz = \int_{A^*} \frac{\partial \phi_z}{\partial z} dz dA \Rightarrow \tau_{sz} = \frac{T_y S_x^*}{2 b J_x}$$

dove S_x^* è il momento statico di una delle due parti in cui la sezione è divisa dalle due corde in posizione simmetrica.

Alternativamente, occorre considerare che in una corda posta sull'asse di simmetria la tensione tangenziale è emisimmetrica e quindi nulla. Ne consegue che una delle due corde può essere scelta sull'asse di simmetria, dove la tensione tangenziale è nulla e quindi nota, e ancora le due incognite si riducono ad una sola:

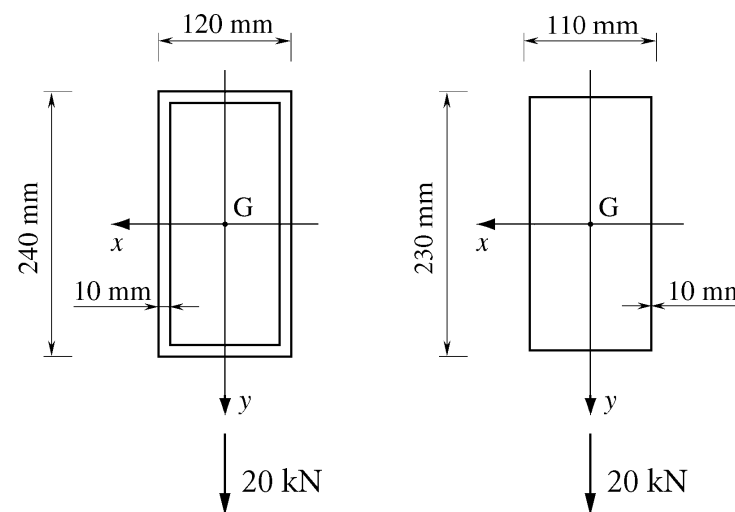
$$\tau_{sz} b d\zeta = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} d\zeta dA \Rightarrow \tau_{sz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x}$$



Si osservi che in tal caso il momento statico S_x^* vale la metà di quello del caso precedente, in accordo col fatto che ora l'incognita compare solo una volta mentre nel caso precedente compariva due volte.

8.5.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare)

Quale esempio si consideri la sezione scatolare sottile di figura, già utilizzata in un esempio sul problema della torsione, soggetta ad una forza di taglio verticale di 20 kN.



Si utilizza la formula:

$$\tau_{sz} = \frac{T S_x^*}{2 b J_x},$$

relativa alla scelta di due corde in posizione simmetrica.

Risulta:

$$\begin{aligned} J_x &= 2 \times \left\{ \frac{10 \text{ mm}}{12} (230 \text{ mm})^3 + \right. \\ &\quad \left. + (10 \text{ mm} \times 110 \text{ mm}) \left[\frac{230 \text{ mm}}{2} \right]^2 \right\} = \\ &= 4.93733 \times 10^7 \text{ mm}^4, \end{aligned}$$

$$S_{x1}^* = (10 \text{ mm} \times 110 \text{ mm}) \frac{230 \text{ mm}}{2} = 126500 \text{ mm}^3,$$

$$S_{x2}^* = S_{x1}^* + 2 \times (10 \text{ mm} \times \frac{230 \text{ mm}}{2}) \times \frac{230 \text{ mm}}{4} = 258750 \text{ mm}^3,$$

$$\tau_1 = \frac{20000 \text{ N} \times 126500 \text{ mm}^3}{2 \times 10 \text{ mm} \times (4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 2.56 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{20000 \text{ N} \times 258750 \text{ mm}^3}{2 \times 10 \text{ mm} \times (4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 5.24 \text{ N/mm}^2.$$

