

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

Sistemi di travi

Corsi di Laurea in
Ingegneria Civile e Ambientale
Ingegneria Industriale
Ingegneria Navale

 Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Trieste, 28 agosto 2010

Indice

1	Analisi cinematica e statica dei sistemi di travi rigide	1
1.1	Concetti	1
1.1.1	Cinematica	1
1.1.2	Statica	3
1.1.3	Moto rigido infinitesimo	4
1.2	Analisi cinematica dei sistemi rigidi piani	9
1.2.1	Centri assoluti di rotazione	9
1.2.2	Centri relativi di rotazione	11
1.2.3	Allineamento dei centri relativi di tre corpi in moto	14
1.2.4	Vincoli e centri di rotazione	15
1.2.5	Analisi dei casi possibili	16
1.2.6	Esempio 1	17
1.2.7	Esempio 2	19
1.3	Analisi cinematica dei sistemi rigidi spaziali	19
1.3.1	Matrice cinematica	19
1.3.2	Condizione di non labilità di un sistema di travi	22
1.4	Analisi statica dei sistemi rigidi spaziali	23
1.4.1	Matrice statica	23
1.4.2	Condizione di equilibrio di un sistema di travi	25
1.5	Il principio dei lavori virtuali per il corpo rigido libero	25
1.6	Dualità statico cinematica	27
1.7	Il principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi vincolati	29
1.8	Esempio sull'analisi statica e cinematica	32
2	Statica dei sistemi piani isostatici	35
2.1	Curva delle pressioni	35
2.1.1	Tratto di trave non caricato	35
2.1.2	Tratto di trave con carico distribuito costante (per unità di linea ortogonale al carico)	36
2.2	Arco circolare a tre cerniere	38
2.3	Cenno all'equilibrio dei fili	38
2.4	Arco parabolico	40
2.5	Travi Gerber	42
2.6	Sistemi chiusi isostatici	43
2.6.1	Esempio 1	43
2.6.2	Esempio 2	48
2.6.3	Travature reticolari isostatiche	50
2.6.4	Condizioni di isostaticità	51
2.6.5	Esempi di travature reticolari piane	52
2.6.6	Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo dei nodi	52
2.6.7	Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo delle sezioni di Ritter	57
3	Calcolo di spostamenti in sistemi piani isostatici	59
3.1	Deformata della linea d'asse	59
3.1.1	Momento flettente	59
3.1.2	Forza normale	60
3.2	Metodo cinematico (o composizione cinematica degli spostamenti)	61
3.2.1	Sistemi di travi prevalentemente inflesse	62
3.2.2	Mensola soggetta ad un carico ripartito	63
3.2.3	Trave appoggiata soggetta a forza normale	64
3.2.4	Arco circolare soggetto ad un carico ripartito	65
3.2.5	Un esempio di calcolo di spostamenti col metodo cinematico in un sistema spaziale: mensola di sezione a C	66
3.3	Integrazione dell'equazione della linea elastica	68
3.4	Analogia di Mohr	70
3.4.1	Mensola soggetta ad una coppia	71
3.4.2	Trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato	71
3.4.3	Trave IPE270 appoggiata soggetta ad un carico concentrato	72
3.5	Strutture con uguale deformazione	73
3.5.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito	73
3.5.2	Trave appoggiata soggetta a due coppie concentrate simmetriche	74
3.5.3	Trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata	75
3.6	Coefficienti elastici	76
3.6.1	Mensole	76

3.6.2	Travi appoggiate	77	5.5.2	Esempio 2 (trave appoggio-appoggio soggetta ad una variazione termica uniforme)	116
3.7	Esercizio (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito) . . .	78	5.5.3	Esempio 3 (trave appoggiata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)	117
3.8	Calcolo di spostamenti con il principio dei lavori virtuali	82	5.5.4	Esempio 4 (trave doppiamente incastrata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)	118
3.8.1	Mensola soggetta ad una forza di tipo assiale	83	5.6	Distorsioni plastiche	119
3.8.2	Portale zoppo soggetto ad un carico ripartito	84	5.6.1	Distorsione plastica distribuita di tipo assiale	119
3.8.3	Telaio soggetto ad una forza concentrata	85	5.6.2	Distorsione plastica distribuita di tipo flessionale	120
3.8.4	Esercizio 1 (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)	87	5.6.3	Distorsioni plastiche concentrate (cerniere plastiche) . .	122
3.8.5	Esercizio 2 (struttura soggetta ad un carico ripartito) . .	89	5.6.4	Esempio (calcolo a rottura di una trave in acciaio a se- zione rettangolare, incastrata e soggetta ad un carico ripartito)	124
4	Soluzione dei sistemi iperstatici col metodo delle forze	93	6	Strutture simmetriche	125
4.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale	93	6.1	Azioni su strutture simmetriche	125
4.2	Trave appoggiata soggetta a carichi di tipo flessionale	95	6.1.1	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni simmetriche	126
4.3	Travi incastro-appoggio	96	6.1.2	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche .	126
4.3.1	Trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia in corrispondenza dell'appoggio	96	6.1.3	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni generiche	127
4.3.2	Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza concen- trata in mezzzeria	97	6.2	Sistemi assialsimmetrici	127
4.3.3	Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita	97	6.2.1	Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni simmetriche	127
4.4	Travi incastro-incastro	98	6.2.1.1	Cavalletto iperstatico soggetto ad un carico simmetrico	130
4.4.1	Trave incastro-incastro soggetta ad una forza concen- trata in mezzzeria	98	6.2.2	Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni emisimme- triche	132
4.4.2	Trave incastro-incastro soggetta ad una forza distribuita	98	6.2.2.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale emisimmetrico	134
4.5	Travi continue	99	6.2.2.2	Esecizio (Telaio soggetto ad una coppia)	135
4.5.1	Esempio di trave continua	100	6.2.2.3	Diagrammi nel caso emisimmetrico	138
5	Cedimenti vincolari e distorsioni	103	6.2.3	Esecizio (anello con diaframma soggetto ad una distorsione termica)	139
5.1	Cedimenti vincolari elastici	103	6.3	Sistemi polarsimmetrici	142
5.1.1	Esempio 1 (trave appoggiata con un appoggio cedevole)	104	6.3.1	Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polarsimme- triche	142
5.1.2	Esempio 2 (trave incastro-appoggio con incastro cedevole angolarmente)	105	6.3.2	Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polaremisim- metriche	143
5.1.3	Esempio 3 (trave continua con un appoggio cedevole) . .	106			
5.2	Cedimenti vincolari anelastici	108			
5.3	Distorsioni concentrate	110			
5.4	Distorsioni distribuite	113			
5.5	Distorsioni termiche	114			
5.5.1	Esempio 1 (trave appoggio-carrello soggetta ad una variazione termica uniforme)	116			

7 Telai e travature reticolari	145	10 Analisi del metodo degli spostamenti	201
7.1 Telai piani	145	10.1 Struttura delle equazioni risolventi	201
7.2 Esercizio su un telaio a un nodo spostabile	148	10.2 Scrittura delle equazioni di equilibrio	204
7.2.1 Soluzione col metodo delle forze	148	10.3 Esempio di un telaio a un nodo spostabile risolto col metodo degli spostamenti	206
7.2.2 Soluzione col metodo dei telai	152	10.3.1 Costruzione della matrice di rigidezza per assemblaggio delle matrici delle singole travi	209
7.3 Travature reticolari	154	10.3.1.1 Matrice di rigidezza di una trave inflessa con tutti i movimenti di nodo vincolati	209
7.4 Esercizio su una travatura reticolare iperstatica	156	10.3.1.2 Matrice di rigidezza di una trave inflessa nella quale una rotazione di nodo non è vincolata	210
7.4.1 Sovrapposizione degli effetti	157	10.3.2 Matrici di rigidezza delle singole travi e loro assemblaggio	211
7.4.2 Soluzione flessionale	157	10.3.3 Metodo iterativo di Cross	212
7.4.3 Soluzione assiale	158	10.4 Esercizi	215
8 Soluzione dei sistemi iperstatici col metodo degli spostamenti	161	10.4.1 Telaio simmetrico soggetto ad un carico concentrato	215
8.1 Esempi	161	10.4.2 Struttura reticolare iperstatica simmetrica	217
8.1.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale	161		
8.1.2 Sistema di pendoli paralleli	165		
8.1.3 Trave continua	166		
8.1.4 Analisi qualitativa basata sulle rigidezze	168		
8.1.5 Telaio soggetto ad una coppia concentrata	170		
8.2 Schema fondamentale dei telai a nodi fissi	172		
8.3 Schema fondamentale dei telai a nodi spostabili	174		
8.3.1 Rigidezze taglianti	175		
8.3.1.1 Rigidezza tagliente della trave appoggio-doppio pendolo	175		
8.3.1.2 Rigidezza tagliente della trave incastro-doppio pendolo	175		
8.3.2 esempi di telai con traversi rigidi	176		
8.3.2.1 Portale con traverso rigido	176		
8.3.2.2 Telaio con traverso rigido e tre ritti	178		
8.3.2.3 Telaio simmetrico con traverso rigido e tre ritti	181		
8.4 Sistema di pendoli connessi in un nodo	183		
9 Analisi del metodo delle forze	185		
9.1 Struttura delle equazioni di congruenza	185		
9.2 Scrittura delle equazioni di congruenza	187		
9.3 Indeformabilità assiale	189		
9.4 Esempio: telaio a un nodo spostabile	190		
9.5 Esempio: Struttura reticolare	195		

Capitolo 1

Analisi cinematica e statica dei sistemi di travi rigide

Gli spostamenti di una trave deformabile, come già visto, si possono scindere in generale nella somma di spostamenti rigidi e di spostamenti dovuti alla deformazione. Se gli spostamenti dovuti alla deformazione sono piccoli, da una parte gli spostamenti rigidi risolvono il problema della determinazione di una configurazione indeformata del corpo “vicina” a quella finale deformata, mentre dall’altra parte le equazioni di equilibrio possono essere scritte in tale configurazione indeformata.

Se le ipotesi alla base di una teoria del primo ordine sono valide è quindi lecito utilizzare il modello di trave rigida allo scopo di determinare una configurazione approssimante quella finale deformata così come le reazioni dei vincoli e le caratteristiche della sollecitazione.

Da quanto precede segue l’importanza dell’analisi sia cinematica che statica dei sistemi di travi rigide. Gli aspetti principali di tale analisi saranno presentati nel seguito.

1.1 Concetti

1.1.1 Cinematica

Un sistema di travi rigide è detto *labile* se può subire dei moti rigidi infinitesimi.¹ Si noti che se un sistema può subire dei mo-

¹L’attenzione è diretta ai moti rigidi infinitesimi, poiché sono questi che forniscono le direzioni alle quali le reazioni dei vincoli sono ortogonali.

ti rigidi, può subire anche dei moti rigidi infinitesimi, che non sono altro che la linearizzazione dei precedenti. Non è invece vero l’inverso, ovvero esistono sistemi che possono subire dei moti rigidi infinitesimi senza che esistano degli effettivi moti rigidi, come la trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 1. Infatti tale trave non può subire un moto rigido poi-

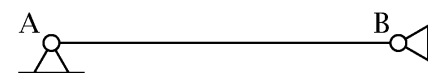


Figura 1: Trave su un appoggio fisso e un carrello

ché il punto fisso A richiederebbe alla trave di ruotare attorno allo stesso punto. Il punto B dovrebbe allora spostarsi su una circonferenza, ma il carrello impone a B di spostarsi sulla retta verticale per lo stesso punto. È invece possibile il moto rigido infinitesimo che si ottiene linearizzando il moto rigido di rotazione attorno al punto A, poiché questi richiede al punto B di spostarsi sulla verticale.

Il numero l dei parametri lagrangiani che definiscono il generico moto rigido infinitesimo è detto *grado di labilità*.² I possibili moti rigidi infinitesimi definiscono lo *stato cinematico* del sistema di travi rigide.

Un vincolo è detto *iperstatico* o *inefficace* se può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema di travi

²Affinché le strutture civili siano funzionali, devono essere fissate al terreno e le sue diverse parti fra di loro. Questo implica che non devono essere possibili moti rigidi, da cui il termine *labilità* per indicare in tale ambito i gradi di libertà, termine che contiene una connotazione negativa. D'altronde la stessa osservazione è valida anche per le costruzioni meccaniche che possono contenere parti in movimento od essere esse stesse in movimento. Infatti, ad esclusione di ciò che si può muovere, alle parti restanti è richiesto di essere fissate fra di loro, alle parti in movimento ed eventualmente al terreno, almeno nel caso in cui non sia previsto il movimento dell'intera struttura.

rigide. Se un vincolo non può invece essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema è detto *vincolo efficace*. È bene dire subito che si presentano sia casi in cui tutti i vincoli semplici, interni ed esterni, del sistema di travi rigide sono iperstatici sia casi in cui tutti i vincoli sono efficaci. Del primo caso ne è un semplice esempio la trave su tre carrelli di fig. 2a, mentre il secondo caso è illustrato dalla trave su un appoggio

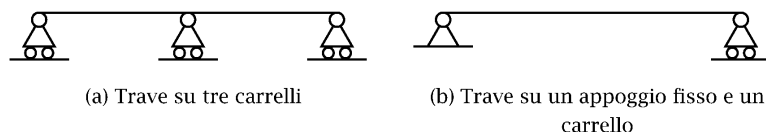


Figura 2: Vincoli efficaci e inefficaci

fisso e un carrello di fig. 2b.

Si considerino ora tutti i possibili gruppi di vincoli semplici iperstatici del sistema che possono essere contemporaneamente rimossi senza modificare lo stato cinematico del sistema e la cui rimozione rende efficaci tutti i restanti vincoli. Per esempio nel caso della trave incastro-appoggio di fig. 3, è facile verifica-

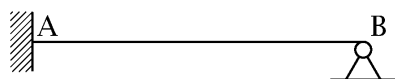


Figura 3: Trave incastro-appoggio

re che si rendono efficaci tutti i vincoli restanti se si rimuove il vincolo doppio in B, ottenendo così una mensola, oppure se si rimuovono il vincolo che in B impedisce lo spostamento orizzontale e in A il vincolo che impedisce la rotazione, ottenendo così la trave su un appoggio e un carrello di fig. 2b.

Sia g il numero dei gradi di libertà del sistema svincolato.

Poiché un corpo rigido ha 6 gradi di libertà nello spazio e 3 gradi di libertà nel piano ne risulta:

$$g = \begin{cases} 6n & \text{nel caso spaziale,} \\ 3n & \text{nel caso piano,} \end{cases} \quad (1)$$

dove n è il numero di parti rigide del sistema connesse tra loro da vincoli interni. Dato che un vincolo semplice toglie, per definizione, un grado di libertà, se tutti i vincoli semplici del sistema sono efficaci il loro numero deve uguagliare la differenza $g - l$. Ne consegue che tutti i gruppi di vincoli che possono essere contemporaneamente rimossi senza modificare lo stato cinematico del sistema e la cui rimozione rende efficaci tutti i restanti vincoli hanno lo stesso numero i di vincoli,³ detto *grado di iperstaticità* del sistema. Si osservi che se i è il grado di iperstaticità del sistema significa che esiste almeno un insieme di i vincoli iperstatici soddisfacente la condizione, non che un qualunque insieme di i vincoli iperstatici soddisfi la condizione stessa, come mostrato ancora dalla trave incastro-appoggio di fig. 3. Infatti è facile verificare che tutti i vincoli di tale sistema sono iperstatici e che il sistema stesso, come già verificato più sopra, è due volte iperstatico. Rimuovendo però il vincolo in B che impedisce lo spostamento verticale e il vincolo in A che impedisce la rotazione della sezione si ottiene il sistema labile di fig. 1. Dalla definizione di grado i di iperstaticità, ne consegue che rimosso un opportuno insieme di i vincoli iperstatici, non è poi più possibile rimuovere ulteriori vincoli senza modificare lo stato cinematico del sistema, dato che i vincoli restanti devono essere divenuti tutti efficaci.

³Attenzione: lo stesso numero di vincoli, non gli stessi vincoli.

Se v è il numero dei vincoli semplici, interni ed esterni, il numero dei vincoli restanti, tutti efficaci, vale $v - i$. Ne risulta allora la relazione:

$$g - l = v - i, \quad (2)$$

che può essere messa nella forma:

$$v - g = i - l. \quad (3)$$

Un sistema di travi è detto *labile* se il suo grado di labilità non è nullo. Analogamente è detto *iperstatico* se non è nullo il suo grado di iperstaticità. Si noti che un sistema può essere contemporaneamente labile e iperstatico, come per esempio il semplice caso della trave su tre carrelli di fig. 2a. Infatti i tre carrelli a piano di scorrimento orizzontale rendono possibile un moto rigido di traslazione orizzontale, e quindi $l = 1$. D'altronde uno qualunque dei tre carrelli può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico della trave rigida e quindi i tre vincoli sono iperstatici e di conseguenza la struttura è iperstatica. Poiché solo un carrello per volta può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema ne risulta $i = 1$. La trave su tre carrelli ha dunque un grado di iperstaticità e un grado di labilità. La trave incastro-appoggio di fig. 3 è invece un esempio di un sistema non labile e due volte iperstatico.

Se il sistema non è né labile e né iperstatico viene detto *isostatico*. La trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 2b è un semplice esempio di sistema isostatico.

Un sistema di travi rigide è dunque isostatico se e solo se:

$$i = 0 \quad \text{e} \quad l = 0. \quad (4)$$

Si osservi che la relazione (3) fornisce la seguente condizione necessaria di isostaticità:

$$v - g = 0. \quad (5)$$

La condizione non è sufficiente poiché è soddisfatta se $i = l$ senza che entrambi siano nulli, come nel caso già visto della trave su tre carrelli di fig. 2a. Se un sistema soddisfa la condizione necessaria di isostaticità (5) senza essere isostatico ne consegue che è contemporaneamente labile e iperstatico con ugual grado di labilità e di iperstaticità. In tal caso si suol dire a volte che i vincoli sono *mal disposti*, naturalmente rispetto alla esigenza di avere un sistema di travi isostatico.

1.1.2 Statica

Un sistema di travi rigide soggetto a generiche forze esterne è detto *equilibrato* se esiste un sistema di reazioni vincolari ammissibile equilibrante le date forze esterne. Si osservi che tale definizione è compatibile con l'esistenza di più sistemi di reazioni vincolari ammissibili equilibranti le date forze esterne.

Un sistema equilibrato è detto *staticamente determinato* se le reazioni vincolari sono univocamente determinate dalle equazioni di equilibrio, in caso contrario il sistema è detto *staticamente indeterminato*.

La labilità di un sistema di travi non dipende dalle forze applicate, ma solo dalla sua geometria. Un sistema labile può essere equilibrato se soggetto a certe forze esterne mentre può essere non equilibrato se soggetto ad altre forze. In quest'ultimo caso si dice che le forze *mettono in gioco la labilità del*

sistema. La trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 4a, caricata da una forza verticale in corrispondenza del carrello, e la trave su tre carrelli di fig. 4b, soggetta ad una forza orizz-

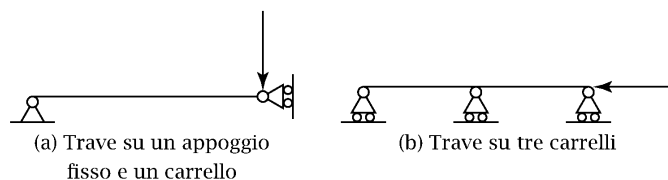


Figura 4: Esempi di travi labili non equilibrate

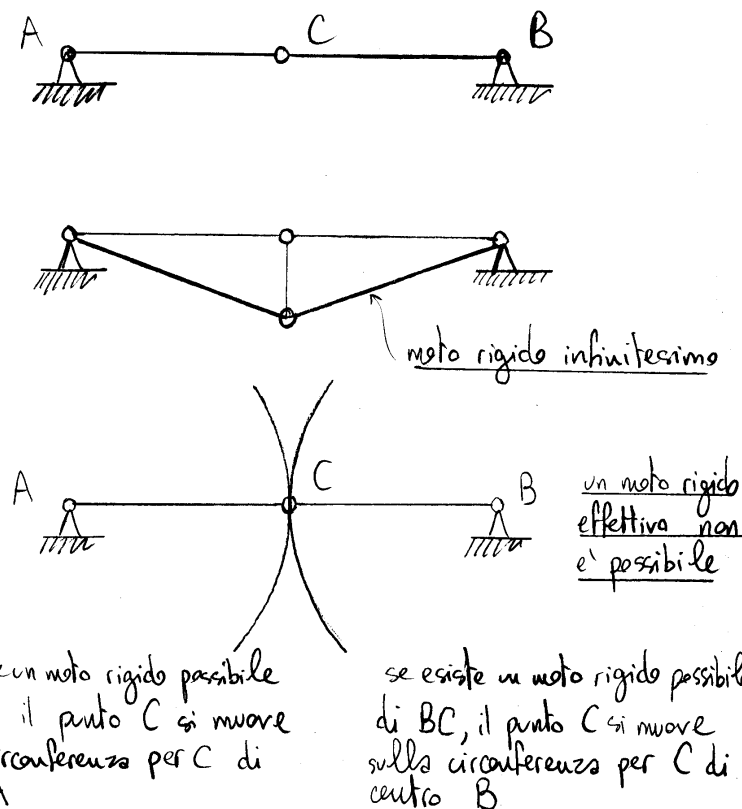
zontale, sono due semplici esempi di sistemi di travi labili non equilibrati.

Si mostrerà più avanti che:

1. un sistema labile può essere equilibrato se soggetto a certe forze esterne mentre può essere non equilibrato se soggetto ad altre forze;
2. i sistemi di travi non labili sono equilibrati per ogni sistema di forze esterne applicate;
3. i sistemi equilibrati non iperstatici, in particolare i sistemi isostatici, sono sempre staticamente determinati, cioè le equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare univocamente tutte le reazioni vincolari;
4. i sistemi equilibrati iperstatici, in particolare i sistemi non labili iperstatici, sono sempre staticamente indeterminati, cioè le equazioni di equilibrio non sono sufficienti a determinare univocamente tutte le reazioni vincolari, un numero delle quali pari al grado i di iperstaticità resta indeterminato.

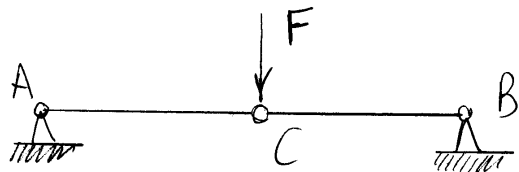
1.1.3 Moto rigido infinitesimo

Come detto, esistono dei sistemi di travi rigide che possono subire un moto rigido infinitesimo, ma non un effettivo moto rigido, come nel caso di fig. 1. Nel seguito studieremo in dettaglio l'esempio riportato nella figura seguente.

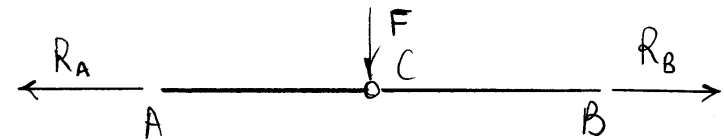


Dal punto di vista dell'analisi condotta sulla base dei moti rigidi infinitesimi, la struttura è labile, ma ciò non toglie che, se le travi sono rigide, un moto rigido non è possibile.

Vediamo allora in qual senso tale struttura è labile. In una struttura propriamente labile, una forza avente la direzione di uno spostamento possibile mette in moto la struttura. Nel caso del nostro esempio, una forza siffatta è rappresentata da una forza verticale applicata in C.



Il fatto che tale forza mette in gioco la labilità infinitesima della struttura si riflette nella circostanza che le reazioni degli appoggi in A e in B non sono in grado di equilibrare la forza F .

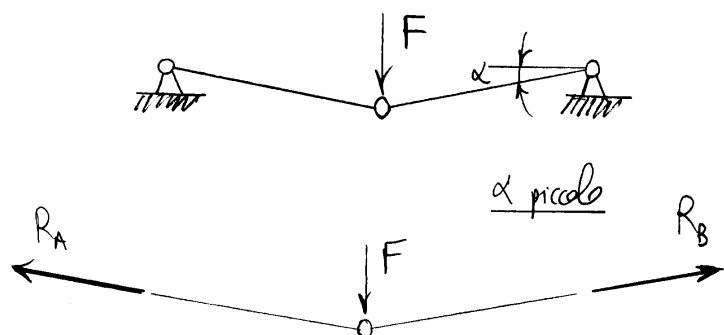


Infatti, per equilibrio alla rotazione del tratto AC intorno al punto C, la reazione R_A deve passare per C, così come la R_B . Le due reazioni devono essere orizzontali e non possono quindi equilibrare la forza F verticale.

Ciononostante, se le aste AC e BC sono rigide e i vincoli perfetti, il sistema non

si mette in moto.

Vediamo di analizzare il sistema come limite di sistemi in cui le aste AC e BC sono inclinate.



Risulta:

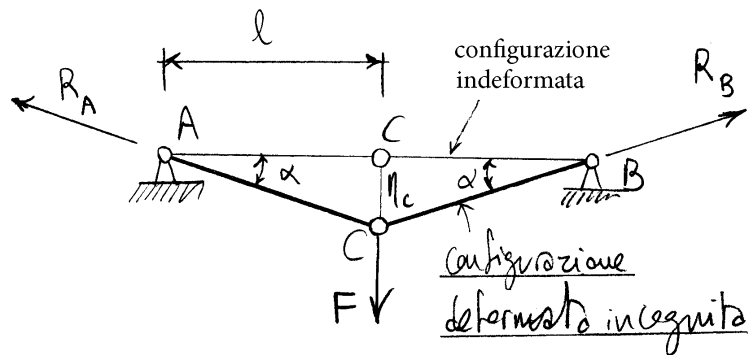
$$R_A = R_B = \frac{F}{2\sin\alpha} \approx \frac{F}{2\alpha}.$$

$$\frac{F}{2\lg\alpha} \approx \frac{F}{2\alpha}$$

Ne consegue:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_A = \infty.$$

Si arriva alla conclusione che per l'inclinazione delle aste tendente a zero le reazioni vincolari tendono all'infinito. Siamo, cioè, nella condizione in cui una cedevolezza assiale delle aste piccola a piacere provoca conseguenze cinematiche non trascurabili, essendo il suo effetto amplificato da una forza normale grande a piacere. Vediamo di analizzare la situazione in cui l'asta è deformabile assialmente. Siamo in un caso in cui l'equilibrio va scritto nella configurazione deformata (nella configurazione indeformata l'equilibrio non sussiste).



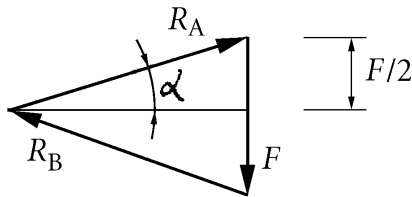
La configurazione deformata è individuata dall'angolo α .

L'allungamento dell'asta AC vale:

$$\Delta l = \frac{l}{\cos \alpha} - l = l \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right),$$

mentre la reazione R_A vale:

$$R_A = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$



Deve allora risultare:

$$\frac{R_A l}{EA} = \Delta l,$$

da cui:

$$(1 - \cos \alpha) \tan \alpha = \frac{F}{2EA}.$$

Se α è piccolo può porsi:

$$\tan \alpha \approx \alpha, \quad 1 - \cos \alpha = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Dunque:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}.$$

Si possono quindi calcolare lo spostamento del punto C e la reazione R_A , che risultano:

$$\eta_C = \alpha l = l \sqrt[3]{\frac{F}{EA}},$$

$$R_A = \frac{F}{2\alpha}.$$

Si supponga che le aste siano costituite da due barre di ferro tondo di diametro $\phi 20 \text{ mm}$ e lunghe 3.50 m . Siano inoltre $F = 5000 \text{ N}$ ed $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Si ottiene:

$$\alpha = 2.42^\circ,$$

$$\eta_c = 14.8 \text{ cm},$$

$$R_A = 59075 \text{ N},$$

$$\underline{\sigma} = \frac{R_A}{A} = \frac{59075}{314.16} = 188 \text{ N/mm}^2.$$

Siamo dunque arrivati alla conclusione che il moto rigido infinitesimo viene effettivamente inasprito da una cedevolezza piccola a piacere.

Dal punto di vista delle strutture deformabili tale moto è quindi un moto deformativo effettivo. Non solo, ma si può anche concludere che forze che mettono in gioco la labilità (infinitesima) del sistema vengono equilibrate, nella configurazione deformata, da reazioni che tendono all'infinito al tendere a zero della cedevolezza, indipendentemente dall'entità delle forze applicate. È evidente che una tale situazione statica è, normalmente, da evitare. La labilità (infinitesima) del sistema fornisce le informazioni necessarie ad evitare tali situazioni statiche precarie, o, comunque, ad affrontarle correttamente.

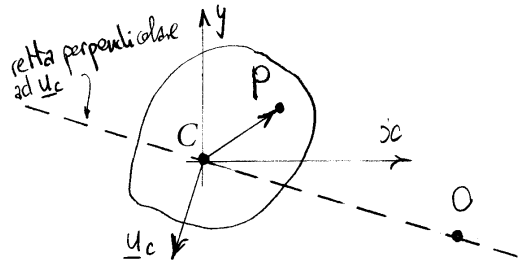
1.2 Analisi cinematica dei sistemi rigidi piani

1.2.1 Centri assoluti di rotazione

Sia dato un corpo rigido vincolato a muoversi parallelamente ad un piano di normale $\underline{e}_z$. Si può scomporre il moto rigido nella somma di una traslazione (parallela al piano) e di una rotazione (attorno ad un asse perpendicolare al piano).

Nel caso di moto rigido infinitesimo, che è quello che interessa nel seguito, il campo degli spostamenti vale:

$$\underline{u} = \underline{u}_C + \varphi \times (\underline{P} - \underline{C}), \quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_z.$$



L'equazione:

$$\underline{u}_C + \varphi \underline{e}_z \times (\underline{O} - \underline{C}) = \underline{0}, \quad (1)$$

sempre risolubile se $\varphi \neq 0$, individua il

centro assoluto di rotazione O , ossia quel punto che resta fisso nel moto rigido.

Tenendo conto del fatto che $\underline{e}_z \times \underline{v}$, con $\underline{v}$ ortogonale a $\underline{e}_z$, rappresenta il vettore $\underline{v}$ ruotato di 90° in senso antiorario nel piano ortogonale a $\underline{e}_z$, si ha:

$$\underline{e}_z \times \{ \underline{e}_z \times (\underline{O} - \underline{C}) \} = -(\underline{O} - \underline{C}).$$

Premoltiplicando vettorialmente la (1) per $\underline{e}_z$ si ottiene allora:

$$\underline{O} - \underline{C} = \frac{1}{\varphi} \underline{e}_z \times \underline{u}_C.$$

In componenti:

$$\underline{O} - \underline{C} = \frac{1}{\varphi} \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{Cx} & u_{Cy} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{u_{Cy}}{\varphi} \\ \frac{u_{Cx}}{\varphi} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

oppure:

$$\begin{cases} x_O = -u_{Cy}/\varphi \\ y_O = u_{Cx}/\varphi \end{cases}.$$

Se il centro assoluto è noto e P è un

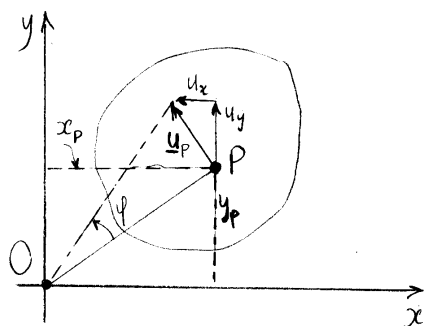
punto qualunque si ha:

$$\underline{u} = \underline{\varphi} \times (\underline{P} - \underline{O}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & \varphi \\ x_P & y_P & 0 \end{vmatrix},$$

e quindi:

$$\begin{cases} u_x = -\varphi y_P \\ u_y = \varphi x_P \end{cases}.$$

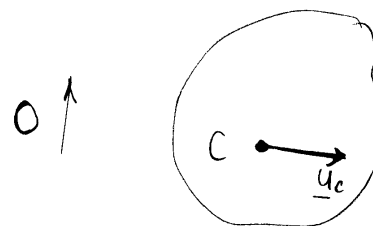
Si noti che lo spostamento di un punto avviene sempre perpendicolarmente alla congiungente del punto con il centro di rotazione.



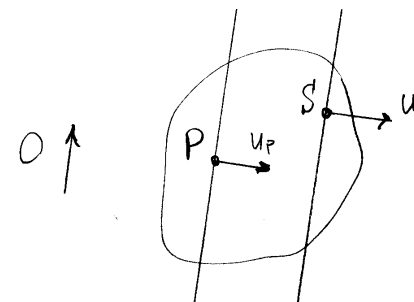
Se $\varphi = 0$, si ha un moto di traslazione:

$$\underline{u} = \underline{u}_C = \text{cost}.$$

In tal caso il moto di un punto avviene sempre perpendicolarmente ad una data direzione del piano, direzione che individua un punto improprio del piano che acquista quindi il ruolo di centro assoluto di rotazione. Tale direzione è individuata dalla direzione ortogonale ad $\underline{u}_C$.

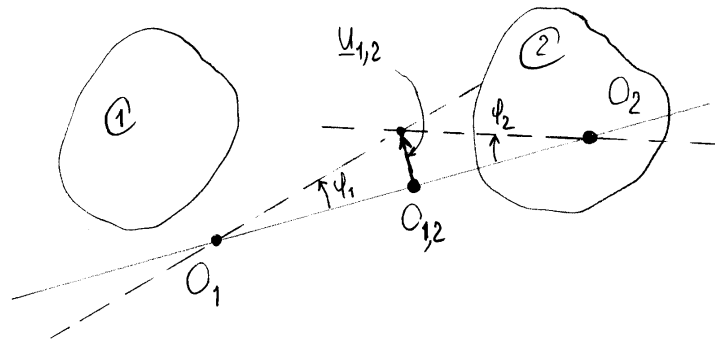


In altri termini, qualunque retta del fascio di rette parallele ortogonali ad $\underline{u}_C$ gode della proprietà di essere ortogonale allo spostamento di uno qualunque dei suoi punti; cioè gode della stessa proprietà di cui gode il fascio di rette proprio di sostegno il centro assoluto O nel caso $\varphi \neq 0$.



1.2.2 Centri relativi di rotazione

Siano ora dati due corpi rigidi vincolati a muoversi parallelamente ad un piano. Siano O_1 il centro assoluto di un moto rigido del primo corpo ed O_2 il centro assoluto di un moto rigido del secondo corpo,



e, per il momento, sia $O_1 \neq O_2$. I campi di spostamento rigido dei due corpi risultano:

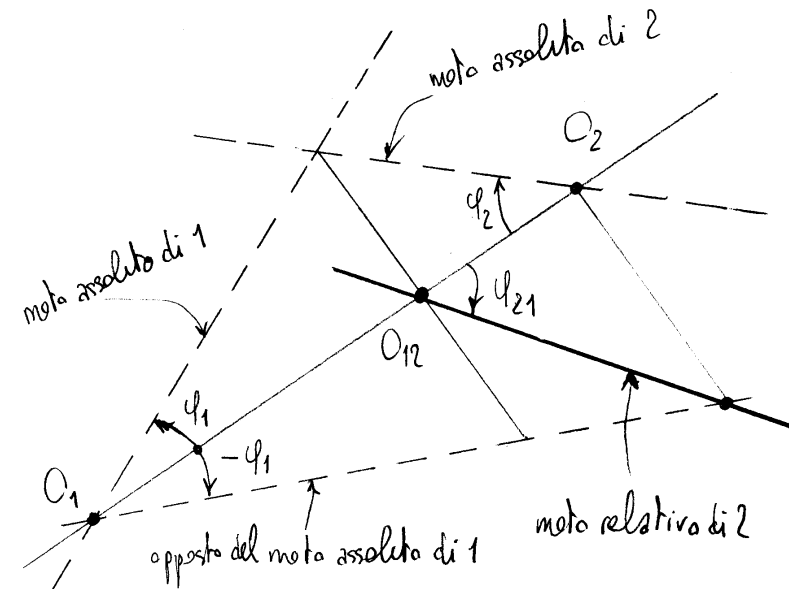
$$\underline{u} = \underline{\varphi}_1 \times (P - O_1), \quad \underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (P - O_2).$$

I punti e solo i punti della congiungente $O_1 O_2$, ritenuti appartenenti allo spazio rigido del primo corpo e poi allo spazio rigido del secondo, subiscono per effetto dei due moti uno spostamento nella stessa direzione e solo uno di tali punti, detto centro relativo (relativo al moto dei due corpi), subisce, per effetto dei due moti, lo stesso spostamento. Se il moto viene descritto da un osservatore connesso ad uno dei due corpi

rigidi, per es. il corpo 1, l'altro corpo rigido, il corpo 2, appare avere il centro relativo O_{12} quale centro assoluto di rotazione.

Tale descrizione può ottenersi sovrapponendo ai due moti rigidi un moto rigido complessivo pari a quello di uno dei due corpi rigidi cambiato di segno:

$$\underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (P - O_2) - \underline{\varphi}_1 \times (P - O_1).$$



Annullando tale espressione si ottiene il centro relativo:

$$\underline{\varphi}_2 \times (\underline{O}_{12} - \underline{O}_2) - \underline{\varphi}_1 \times (\underline{O}_{12} - \underline{O}_1) = \underline{0}.$$

Poiché, come detto, il centro relativo è necessariamente allineato ai centri assoluti, si può porre:

$$\begin{cases} \underline{O}_{12} - \underline{O}_1 = \alpha (\underline{O}_2 - \underline{O}_1) \\ \underline{O}_{12} - \underline{O}_2 = \beta (\underline{O}_2 - \underline{O}_1) \end{cases},$$

$$\underline{O}_2 - \underline{O}_1 = (\alpha - \beta) (\underline{O}_2 - \underline{O}_1) \Rightarrow \alpha - \beta = 1.$$

Risult:

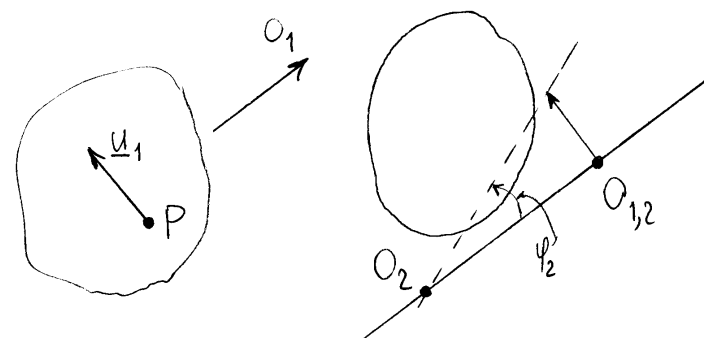
$$\beta \underline{\varphi}_2 \underline{e}_z \times (\underline{O}_2 - \underline{O}_1) - \alpha \underline{\varphi}_1 \underline{e}_z \times (\underline{O}_2 - \underline{O}_1) = \underline{0},$$

$$\alpha \underline{\varphi}_1 \underline{e}_z \times (\underline{O}_2 - \underline{O}_1) = (\alpha - 1) \underline{\varphi}_2 \underline{e}_z \times (\underline{O}_2 - \underline{O}_1),$$

cioè:

$$\alpha \underline{\varphi}_1 = (\alpha - 1) \underline{\varphi}_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\underline{\varphi}_2}{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1}.$$

Se il primo dei due corpi subisce una traslazione, il centro relativo giace sulla perpendicolare allo spostamento del primo dei due corpi tracciata per



il centro assoluto del secondo corpo, cioè giace ancora sulla congiungente i due centri assoluti $\underline{O}_1$ e $\underline{O}_2$ dei quali il primo è improprio.

Moto relativo:

$$\underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (\underline{P} - \underline{O}_2) - \underline{u}_1.$$

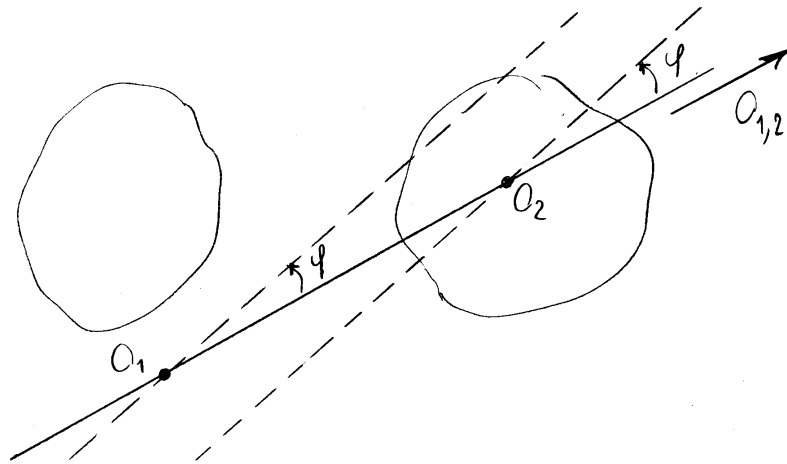
Risult quindi:

$$\underline{\varphi}_2 \times (\underline{O}_{1,2} - \underline{O}_2) = \underline{u}_1, \quad |\underline{O}_{1,2} - \underline{O}_2| = \frac{|\underline{u}_1|}{\underline{\varphi}_2}.$$

Se $\underline{\varphi}_1 = \underline{\varphi}_2 = \underline{\varphi}$, il moto relativo assume l'espressione:

$$\underline{u} = \underline{\varphi} \times (\underline{O}_1 - \underline{O}_2) = \text{cost}.$$

Tale espressione rappresenta una traslazione ortogonale alla congiungente $\underline{O}_1 \underline{O}_2$. Ne risulta quindi un



centro relativo improprio individuata dalla direzione della congiungente $\overline{O_1 O_2}$, ancora allineata con i centri assoluti.

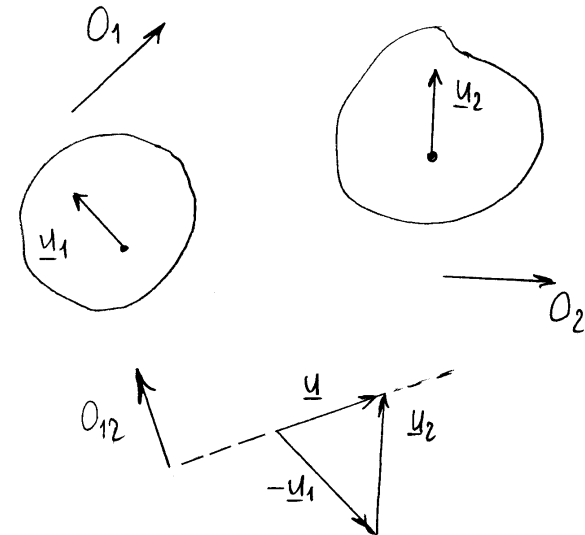
Se tutti e due i corpi subiscono un moto rigido di traslazione, cioè se tutti e due i centri relativi sono impropri, il moto relativo è ancora una traslazione:

$$\underline{u} = \underline{u}_2 - \underline{u}_1.$$

Essendo tutti i centri impropri, il centro relativo è ancora allineato con i centri assoluti (allineamento lungo la retta impropria).

Supponiamo ora che $O_1 = O_2 = O$.

Nel caso di O proprio, se i due corpi subiscono una rotazione



di ampiezza diversa allora anche la rotazione relativa avviene attorno allo stesso centro e risulta $O_{1,2} = O$. In caso contrario non vi è moto relativo e non esiste centro relativo.

Nel caso di O improprio, se i due corpi subiscono una traslazione di ampiezza diversa allora anche la traslazione relativa avviene nella stessa direzione e risulta, come nel caso precedente, $O_{1,2} = O$. In caso contrario non vi è moto relativo e non esiste centro relativo.

Nel seguito si riassumono le condizioni che devono essere soddisfatte sotto l'ipotesi di esistenza del moto rigido infinitesimo di due corpi.

1. Due corpi in moto rigido definiscono due centri assoluti O_1 e O_2 eventualmente coincidenti.
2. Se due corpi subiscono un moto rigido relativo viene definito anche un centro relativo $O_{1,2}$, altrimenti i due corpi

si muovono come un unico corpo e i due centri assoluti coincidono necessariamente:

$$O_1 = O_2.$$

3. Nel caso di moto rigido di entrambi i corpi con moto relativo tra i due corpi, i tre centri, che necessariamente esistono, sono tutti e tre distinti e allineati:

$$O_1 \neq O_2 \neq O_{1,2} \quad \text{e} \quad O_1, O_2, O_{1,2} \text{ allineati}$$

oppure tutti e tre coincidenti:

$$O_1 = O_2 = O_{1,2}.$$

4. Se un primo corpo è fisso e un secondo corpo in moto, il centro assoluto del primo corpo non esiste mentre il centro assoluto del secondo coincide con il centro relativo:

$$O_1 \text{ non esiste} \quad \Rightarrow \quad O_2 = O_{1,2},$$

poiché in tal caso il moto relativo del secondo corpo rispetto al primo deve coincidere con il moto assoluto del secondo corpo.

1.2.3 Allineamento dei centri relativi di tre corpi in moto

Siano dati tre corpi I, II e III in moto relativo tra loro. Questo implica l'esistenza dei tre centri relativi $O_{1,2}$, $O_{1,3}$ e $O_{2,3}$ corrispondenti ai tre moti relativi tra ogni coppia di corpi. Si vuole mostrare nel seguito che i tre centri relativi sono tutti e

tre distinti e allineati:

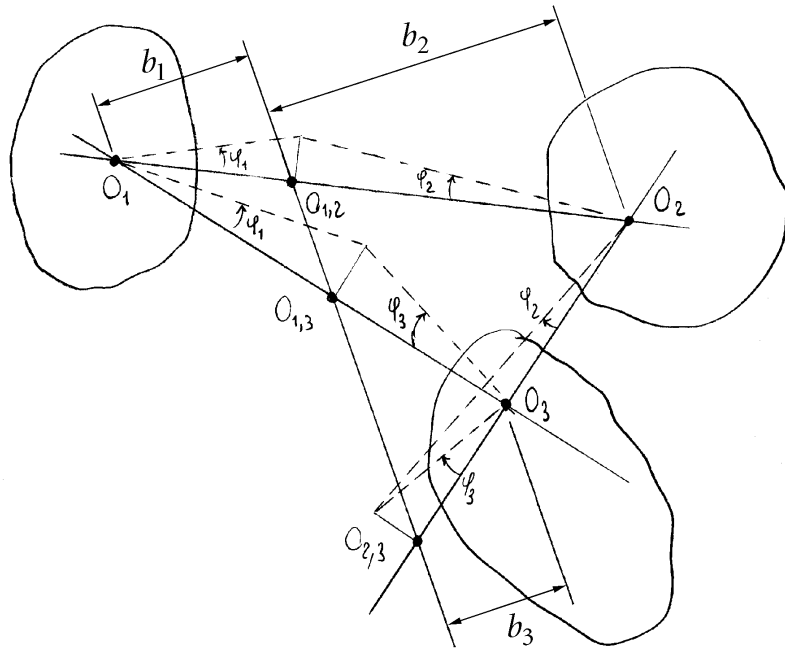
$$O_{1,2} \neq O_{1,3} \neq O_{2,3} \quad \text{e} \quad O_{1,2}, O_{1,3}, O_{2,3} \text{ allineati},$$

oppure tutti e tre coincidenti:

$$O_{1,2} = O_{1,3} = O_{2,3}.$$

Infatti, si sovrapponga ai tre moti un moto rigido complessivo che riporti il primo dei corpi nella configurazione originaria. Il risultato è che il primo corpo resta fisso, i centri assoluti di rotazione dei restanti due corpi risultano essere $O_{1,2}$ ed $O_{1,3}$, mentre il centro relativo del moto risultante di questi due corpi risulta essere $O_{2,3}$. Poiché nel moto di due corpi i centri assoluti e quello relativo devono essere distinti e allineati oppure tutti e tre coincidenti, l'asserto è dimostrato. ■

Si noti che se si fissano a priori tre centri assoluti e tre centri relativi soddisfacenti gli allineamenti tra due centri assoluti qualsiasi e il corrispondente centro relativo e l'allineamento tra i tre centri relativi, allora, fissata a priori la rotazione, per esempio φ_1 , di uno dei tre corpi, sono deducibili in catena le altre

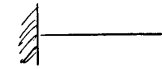


due rotazioni, nell'esempio φ_2 e φ_3 . Precisamente, φ_1 determina φ_2 appoggiandosi sui punti O_1, O_{12} e O_2 mentre φ_2 determina φ_3 appoggiandosi ai punti O_2, O_{23} e O_3 . Le rotazioni φ_1 e φ_3 sono senz'altro in armonia fra loro. Infatti lo spostamento di O_{23} lungo l'allineamento dei centri relativi calcolato tramite φ_2 vale $\varphi_2 b_2$, e tale quantità, per come è stata determinata φ_2 , uguaglia $\varphi_1 b_1$,

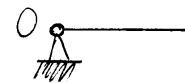
che rappresenta anche lo spostamento di O_{23} lungo l'allineamento dei centri relativi calcolato tramite φ_1 .

1.2.4 Vincoli e centri di rotazione

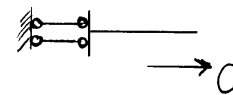
Vincoli esterni e centri assoluti:



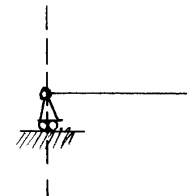
non esiste



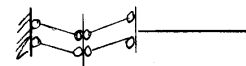
coincide con il punto vincolato



coincide con il punto improprio della direzione dei pendoli

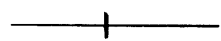


giace sulla retta passante per il punto vincolato e perpendicolare al piano di scorrimento del carrello

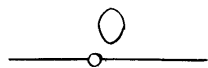


è un punto improprio

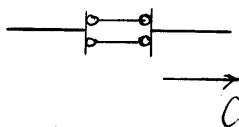
Vincoli interni e centri relativi:



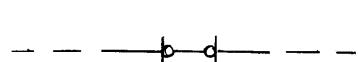
non esiste



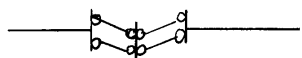
coincide con il punto vincolato



coincide con il punto improprio della direzione dei pendoli



giace sulla retta contenente l'asse del pendolo



è un punto improprio

1.2.5 Analisi dei casi possibili

Se i vincoli impongono che il centro assoluto O_1 di un corpo coincida con due distinti punti del piano allora il corpo non può subire moti rigidi e il centro assoluto non esiste.

Se i vincoli impongono che il centro relativo $O_{1,2}$ tra due corpi coincida con due distinti punti del piano allora i due corpi non possono subire moti rigidi relativi, il centro relativo non

esiste e l'unico moto possibile dei due corpi è un moto rigido complessivo:

$$O_1 = O_2.$$

Se i vincoli impongono la non coincidenza ed escludono l'allineamento dei centri assoluti e del centro relativo corrispondenti agli ipotetici moti di due corpi allora i centri assoluti e quello relativo non esistono o, in altri termini, i due corpi non possono subire moti rigidi e sono quindi fissi rispetto all'osservatore esterno:

$$O_1, O_2 \text{ e } O_{12} \text{ distinti e non allineati}$$

$$\Rightarrow O_1, O_2 \text{ e } O_{12} \text{ non esistono.}$$

Se i vincoli impongono la non coincidenza ed escludono l'allineamento dei centri relativi corrispondenti agli ipotetici moti relativi di tre corpi allora i centri relativi non esistono o, in altri termini, i tre corpi possono al più subire un moto rigido comune e sono quindi fissi tra di loro:

$$O_{1,2}, O_{1,3} \text{ e } O_{2,3} \text{ distinti e non allineati}$$

$$\Rightarrow O_{1,2}, O_{1,3} \text{ e } O_{2,3} \text{ non esistono.}$$

Se i vincoli impongono la coincidenza dei due centri assoluti ma non del centro relativo corrispondenti agli ipotetici moti di due corpi allora il centro relativo non esiste o, in altri termini, il moto relativo non è possibile:

$$O_1 = O_2 \neq O_{1,2} \Rightarrow O_{1,2} \text{ non esiste.}$$

Se i vincoli impongono la coincidenza di un centro assoluto e

del centro relativo ma non dell'altro centro assoluto corrispondenti agli ipotetici moti di due corpi allora il centro assoluto del secondo corpo non esiste o, in altri termini, il moto del secondo corpo non è possibile:

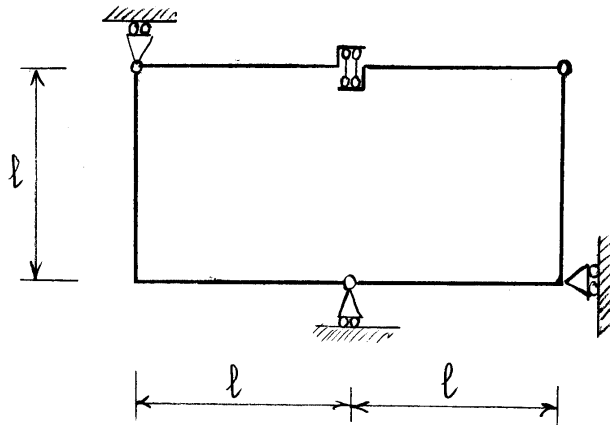
$$O_1 = O_{1,2} \neq O_2 \Rightarrow O_2 \text{ non esiste.}$$

Se i vincoli impongono la coincidenza di due centri relativi ma non del terzo corrispondenti agli ipotetici moti relativi di tre corpi allora il terzo centro relativo non esiste o, in altri termini, il moto relativo corrispondente al terzo centro non è possibile:

$$O_{1,2} = O_{1,3} \neq O_{2,3} \Rightarrow O_{2,3} \text{ non esiste.}$$

1.2.6 Esempio 1

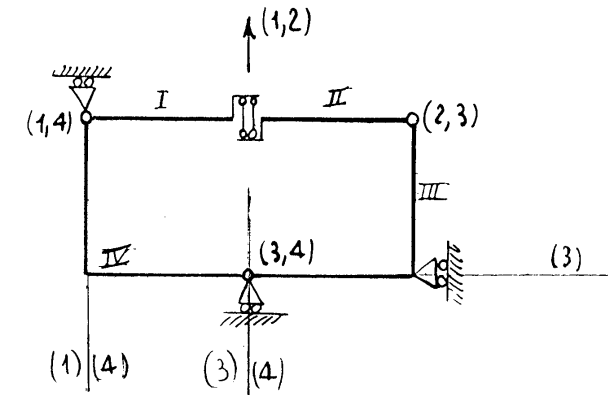
Determinare il grado di labilità del seguente sistema di travi:



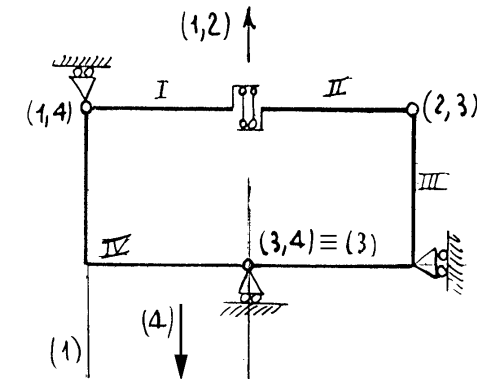
$$g = 4 \times 3 = 12, \quad v = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{carrello}}}{3 \times 1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cerniera}}}{3 \times 2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{doppio pendolo}}}{1 \times 2} = 11$$

Vediamo di calcolare l attraverso la determinazione dei centri assoluti e relativi.

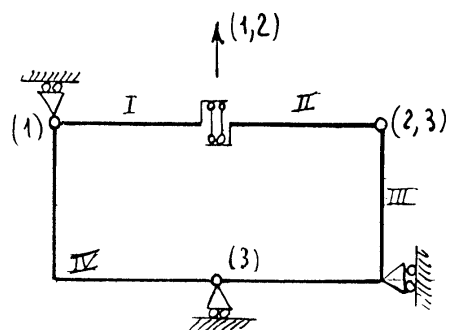
Condizioni dovute ai vincoli:



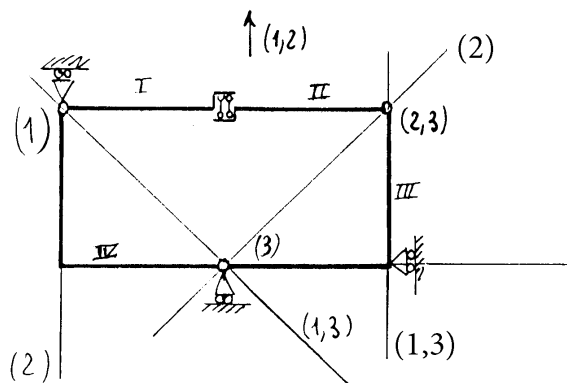
Due condizioni su (4) e su (3):



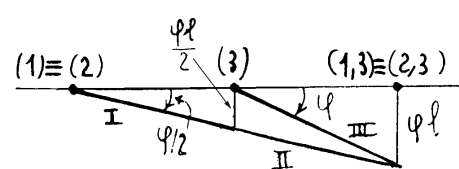
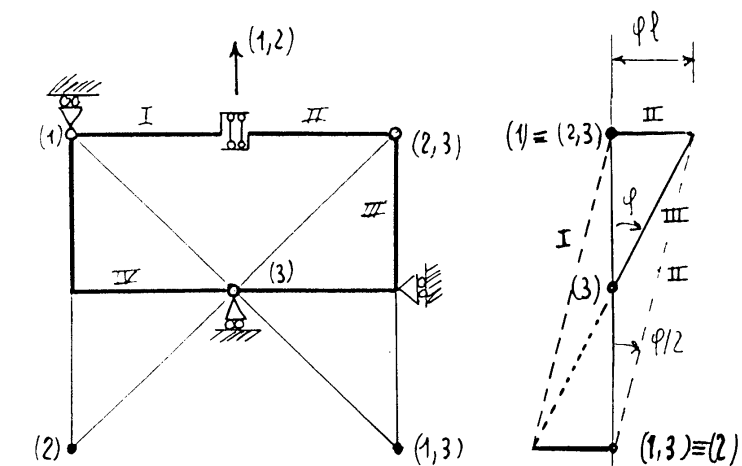
$(3) = (3,4) \neq (4) \Rightarrow (4)$ non esiste :



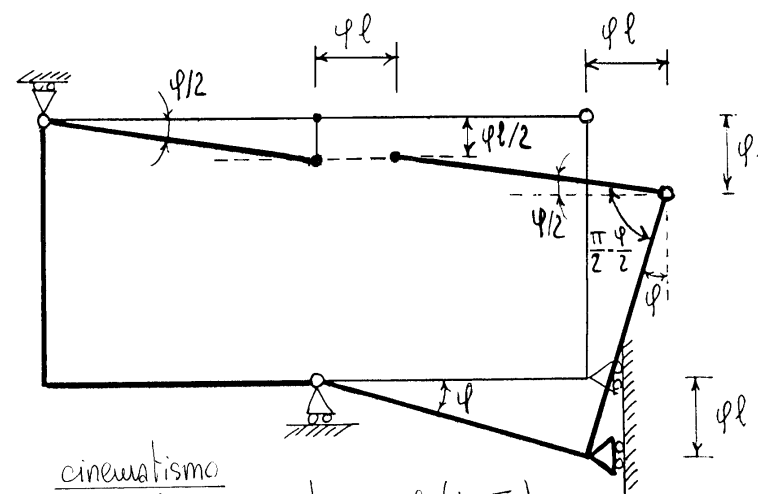
Allineamenti tra $(1), (1,2), (2)$, tra $(1), (1,3), (3)$, tra $(2), (2,3), (3)$ e tra $(1,2), (2,3), (1,3)$:



Due condizioni su (2) e $(1,3)$:



Diagrammi spostamenti orizzontali e verticali



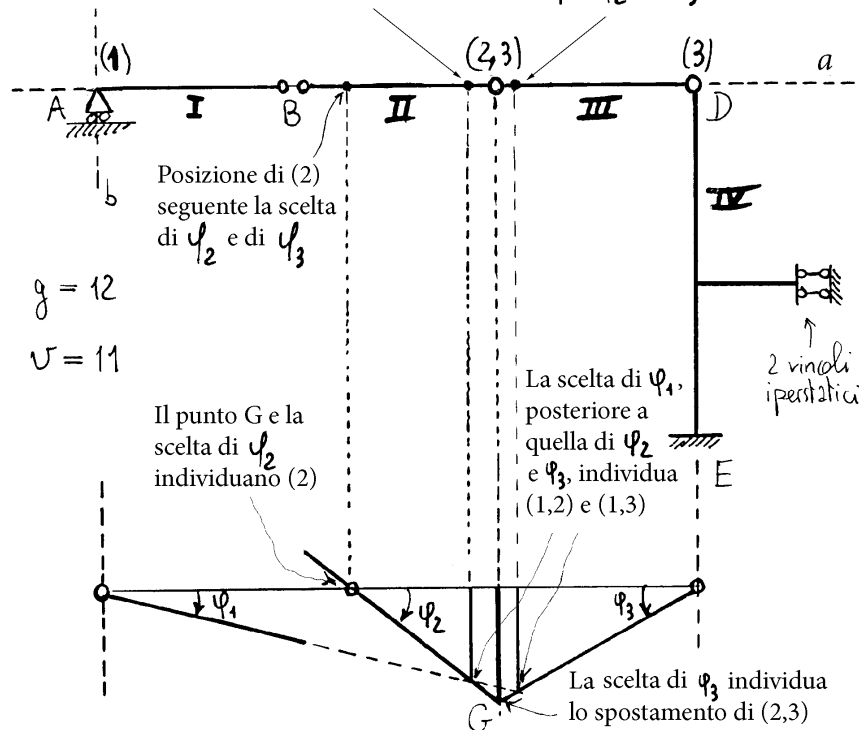
cinematismo
(parametro lagrangiano: rotazione φ di III)

I centri assoluti e relativi sono univocamente determinati. La struttura è una volta labile ($l = 1$) e una volta iperstatica ($i = 1$).

1.2.7 Esempio 2

(2), (1,2) e (1,3) posizionati sulla retta a

(1,2) e (1,3) posizionati dalla scelta di φ_1 , φ_2 e φ_3



I parametri lagrangiani φ_1 , φ_2 , φ_3 individuano univocamente la configurazione e il sistema risulta quindi 3 volte labile e quindi 2 volte iperstatico.

1.3 Analisi cinematica dei sistemi rigidi spaziali

Scopo del presente paragrafo è di determinare in generale i gradi di labilità e di iperstaticità di un sistema di travi rigide vincolate tra loro e con l'esterno.

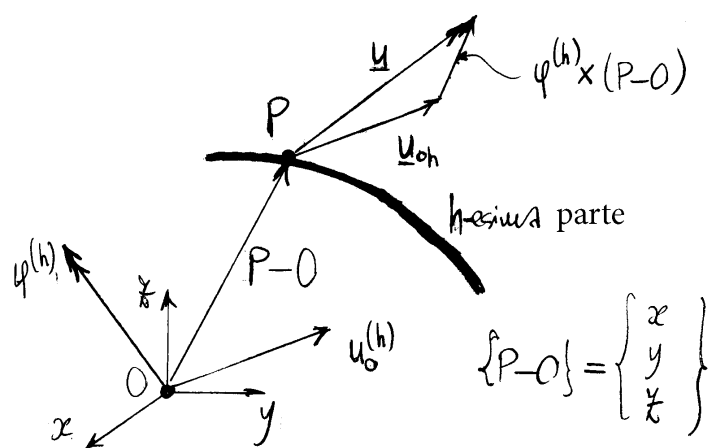
1.3.1 Matrice cinematica

Siano n il numero di parti rigide del sistema connesse tra loro da vincoli interni, v il numero di vincoli semplici interni ed esterni e g il numero dei gradi di libertà del sistema svincolato. Si ricordi che un corpo rigido ha 6 gradi di libertà nello spazio e 3 gradi di libertà nel piano e ne risulta, come già visto:

$$g = \begin{cases} 6n & \text{nel caso spaziale,} \\ 3n & \text{nel caso piano.} \end{cases}$$

Si utilizzerà inoltre un sistema esterno di coordinate $Oxyz$ cartesiane ortogonali per valutare le coordinate dei punti del sistema di travi e le componenti dei vettori spostamento e rotazione.

La h -esima parte possiede, come corpo rigido, 6 gradi di libertà. Si pensi il punto O rigidamente connesso alla h -esima parte. Lo spostamento di un punto P connesso rigidamente alla h -esima parte.



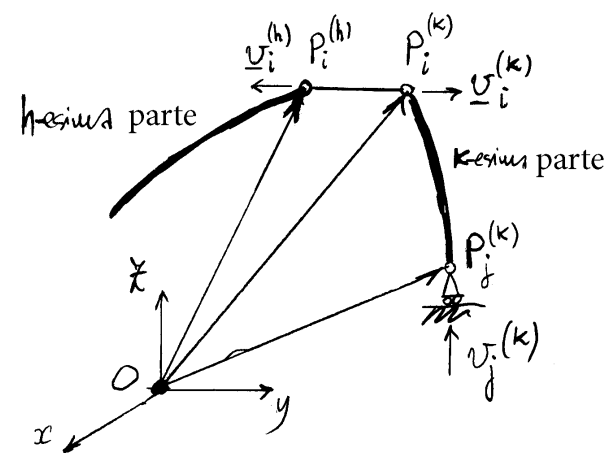
si può allora esprimere nella forma :

$$\underline{u} = \underline{u}_o^{(h)} + \underline{\varphi}^{(h)} \times (\underline{P}-\underline{O}),$$

dove $\underline{u}_o^{(h)}$ è lo spostamento del punto O pensato connesso rigidamente alla parte h-esima e $\underline{\varphi}^{(h)}$ è il vettore rotazione della parte h-esima, indipendente da O.

Si consideri il generico vincolo (rigido) semplice i-esimo esterno od interno, agente sulla parte h nel punto $P_i^{(h)}$.

Sia $\underline{v}_i^{(h)}$ un versore della direzione dello spostamento generalizzato



(spostamento o rotazione) impedito dal vincolo.

Se il vincolo i-esimo è interno, agente sulle parti h-esima e k-esima in corrispondenza dei punti $P_i^{(h)}$ e $P_i^{(k)}$, il verso dei versori $\underline{v}_i^{(h)}$ e $\underline{v}_i^{(k)}$ verrà scelto in modo tale che risulti :

$$\underline{v}_i^{(k)} = -\underline{v}_i^{(h)}.$$

Si svincolino ora le diverse parti componenti il sistema. Se con $\underline{r}_i^{(h)}$ si indica la componente dello spostamento generalizzato del punto $P_i^{(h)}$ nella direzione e nel verso di $\underline{v}_i^{(h)}$, risulta :

$$\underline{r}_i^{(h)} = \left\{ \underline{u}_o^{(h)} + \underline{\varphi}^{(h)} \times (\underline{P}_i^{(h)} - \underline{O}) \right\} \cdot \underline{v}_i^{(h)}, \quad (1a)$$

se $\underline{v}_i^{(h)}$ rappresenta uno spostamento, oppure:

$$\underline{r}_i^{(h)} = \underline{\varphi}^{(h)} \cdot \underline{v}_i^{(h)}, \quad (1b)$$

se $\underline{v}_i^{(h)}$ rappresenta una rotazione.

Detto $\underline{r}$ il vettore degli spostamenti (generalizzati) impediti dai vincoli, di dimensione pari al numero ν dei vincoli, risulta:

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i^{(h)}, \quad (2a)$$

se il vincolo i -esimo è esterno (applicato alla parte h -esima), oppure:

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i^{(h)} + \underline{r}_i^{(k)}, \quad (2b)$$

se il vincolo i -esimo è interno (applicato alle parti h -esima e k -esima).

Nota che se il vincolo i -esimo è interno, $\underline{r}_i \underline{v}_i^{(h)}$ rappresenta lo spostamento relativo di h rispetto a k e

viceversa per $\underline{r}_i \underline{v}_i^{(k)}$.

Sia poi $\underline{s}$ il vettore degli spostamenti indipendenti (Lagrange) del sistema svincolato, di dimensione $g = 6n$:

$$\underline{s} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{s}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(h)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(n)} \end{array} \right\},$$

dove il generico vettore $\underline{s}^{(h)}$, di dimensione 6, contiene le 3 componenti dello spostamento $\underline{u}_o^{(h)}$ e le tre componenti della rotazione $\underline{\varphi}^{(h)}$:

$$\underline{s}^{(h)} = \left\{ \begin{array}{c} u_{o1}^{(h)} \\ u_{o2}^{(h)} \\ u_{o3}^{(h)} \\ \varphi_1^{(h)} \\ \varphi_2^{(h)} \\ \varphi_3^{(h)} \end{array} \right\}.$$

Poiché le equazioni (2) sono lineari, possono allora essere scritte in forma algebrica nella forma seguente:

$$\underline{r} = \underline{A} \underline{s}, \quad (3)$$

dove la matrice $\underline{A}$, di dimensione $v \times g$, è detta matrice cinematica.

1.3.2 Condizione di non labilità di un sistema di travi

Nel sistema vincolato $\underline{r} = \underline{0}$. La (3) rappresenta allora un sistema omogeneo di v equazioni nelle g incognite $\underline{s}$.

Si può allora affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni

$$\underline{A} \underline{s} = \underline{0},$$

abbia $\underline{s} = \underline{0}$ quale unica soluzione, ovvero affinché il sistema di travi non sia labile, è che la caratteristica c_A della matrice $\underline{A}$ sia uguale a g :

$$c_A = g.$$

Poiché $v \geq c_A$ è evidente che deve necessariamente essere $v \geq g$ affinché il sistema di travi non sia labile.

Le righe di $\underline{A}$ rappresentano i vincoli. Se una riga di $\underline{A}$ è ottenuta per combinazione lineare delle altre righe, il corrispondente vincolo è inessenziale (cioè è un vincolo iperstatico). Il numero

$$\begin{matrix} v \\ \boxed{\underline{A}} \\ g \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \underline{s} \right\} \\ g \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \underline{0} \right\} \\ g \end{matrix}$$

di righe di $\underline{A}$ linearmente dipendenti coincide quindi con il grado di iperstaticità i del sistema. La caratteristica della matrice $\underline{A}$ rappresenta il numero di righe linearmente indipendenti:

$$c_A = v - i.$$

Ne risulta che il grado di iperstaticità i vale:

$$i = v - c_A,$$

e che il sistema di travi non è labile se e solo se:

$$g = v - i.$$

Se $g > v - i = c_A$ il numero $g - c_A$ rappresenta il numero di soluzioni $s \neq 0$ linearmente indipendenti del sistema omogeneo $A s = 0$, cioè rappresenta i gradi di labilità del sistema:

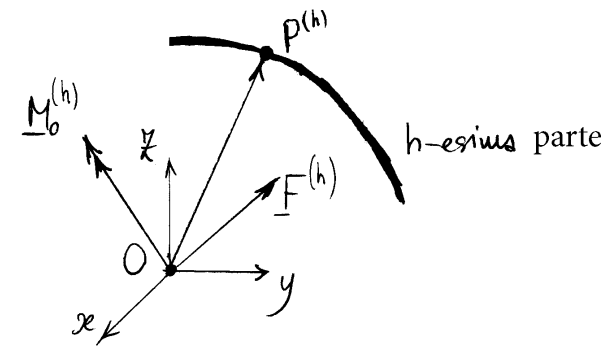
$$l = g - c_A = g - (v - i).$$

1.4 Analisi statica dei sistemi rigidi spaziali

Scopo del presente paragrafo è di fornire in generale le condizioni affinché un sistema di travi rigide soggetto a determinate forze esterne sia equilibrato.

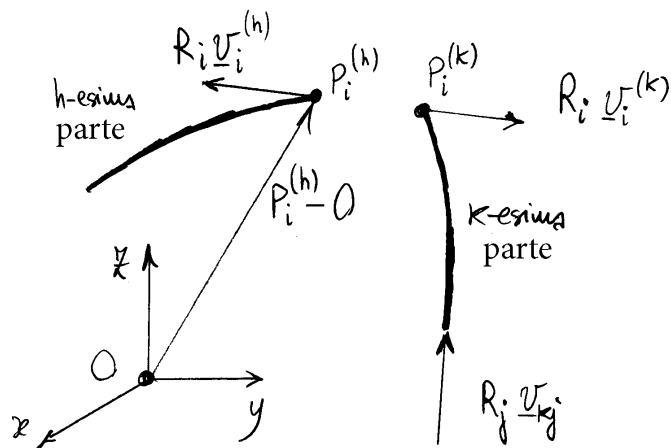
1.4.1 Matrice statica

Sia allora dato un sistema di n parti rigide e un sistema di coordinate $Oxyz$.



Siano $\underline{F}^{(h)}$ e $\underline{M}_o^{(h)}$ rispettivamente risultante e momento risultante rispetto al polo O delle forze esterne applicate alla h -esima trave. Detta poi R_i la componente della i -esima reazione, in direzione e verso di $\underline{v}_i^{(h)}$, le equazioni vettoriali di equilibrio della parte h -esima si scrivono:

$$\begin{cases} \underline{F}^{(h)} + \sum_{R_i \text{ forza}} R_i \underline{v}_i^{(h)} = \underline{0} \\ \underline{M}_o^{(h)} + \sum_{R_i \text{ coppia}} R_i \underline{v}_i^{(h)} + \sum_{R_i \text{ forza}} (\underline{P}_i^{(h)} - \underline{O}) \times R_i \underline{v}_i^{(h)} = \underline{0} \end{cases} \quad (6)$$



dove le sommatorie sono limitate ai vincoli che agiscono sulla h-esima parte.

Si introducano il vettore delle reazioni vincolari (generalizzate):

$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_r \end{Bmatrix},$$

di dimensione r , pari al numero di vincoli semplici esterni ed interni, e il vettore delle forze applicate (generalizzate), di dimensione $g = 6n$, pari ai gradi di libertà del sistema svincolato:

$$\underline{S} = \begin{Bmatrix} \underline{S}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{S}^{(h)} \\ \vdots \\ \underline{S}^{(n)} \end{Bmatrix},$$

dove il vettore $\underline{S}^{(h)}$, di dimensione 6, contiene le componenti della risultante e del momento risultante relativi alla trave h-esima:

$$\underline{S}^{(h)} = \begin{Bmatrix} F_x^{(h)} \\ F_y^{(h)} \\ F_z^{(h)} \\ M_{ox}^{(h)} \\ M_{oy}^{(h)} \\ M_{oz}^{(h)} \end{Bmatrix}.$$

Dalla (6) si ottiene allora:

$$\underline{B} \underline{R} + \underline{S} = \underline{0}, \quad (7)$$

dove la matrice $\underline{B}$, di dimensione $g \times v$, è detta matrice statica.

1.4.2 Condizione di equilibrio di un sistema di travi

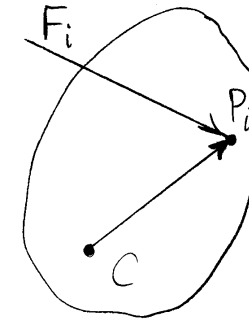
La (7) rappresenta un sistema di g equazioni nelle v incognite $\underline{R}$ e di termine noto il vettore $-\underline{S}$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni (7) nelle incognite $\underline{R}$ ammetta soluzione, ovvero affinché il sistema di travi sia equilibrato sotto l'azione delle forze $\underline{S}$, è che la caratteristica $\underline{C}_B$ di $\underline{B}$ coincida con la caratteristica $\underline{C}_0$ della matrice $\underline{B}_0$, di dimensione $g \times (v+1)$, che si ottiene dalla $\underline{B}$ aggiungendola con il vettore $\underline{S}$:

$$\underline{C}_B = \underline{C}_0.$$

$$\underline{B}_0 \equiv \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} v \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} + \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \underline{B} & \underline{S} & g \end{array}$$

1.5 Il principio dei lavori virtuali per il corpo rigido libero



Spostamento virtuale

$$\underline{u} = \underline{u}_c + \underline{\varphi} \times (\underline{P} - \underline{C})$$

Uno spostamento virtuale rigido rappresenta la parte lineare di uno spostamento in accordo con i vincoli interni di rigidità (spostamenti cinematicamente ammissibili).

Lavoro virtuale esterno

$$L_e = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u}$$

$$= \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u}_c + \sum_i \underline{F}_i \cdot \{ \underline{\varphi} \times (\underline{P}_i - \underline{C}) \}$$

$$= (\sum_i \underline{F}_i) \cdot \underline{u}_c + \{ \sum_i (\underline{P}_i - \underline{C}) \times \underline{F}_i \} \cdot \underline{\varphi}.$$

Si ottiene l'espressione:

$$L_e = \underline{R} \cdot \underline{u}_c + \underline{M} \cdot \underline{\varphi}.$$

dove $\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i$ e $\underline{M} = \sum_i (\underline{P}_i - C) \times \underline{F}_i$

sono risultante e momento risultante del dato sistema di forze.

Quindi, se $\underline{u}$ è uno spostamento virtuale rigido e $\underline{F}_i$ un sistema di forze equilibrato, il lavoro esterno è nullo:

$$\underline{R} = \underline{0} \text{ e } \underline{M} = \underline{0} \implies L_e = 0.$$

Inversamente:

$$\left. \begin{array}{l} L_e = 0 \\ \text{per ogni spostamento} \\ \text{virtuale rigido} \end{array} \right\} \implies \underline{R} = \underline{0} \text{ e } \underline{M} = \underline{0},$$

cioè se, dato un sistema $\underline{F}_i$ di forze applicate, il lavoro virtuale esterno è nullo per ogni spostamento virtuale rigido allora il sistema di forze è in equilibrio.

Infatti, se $L_e = 0$ per ogni spostamento virtuale, risulta:

$$\underline{R} \cdot \underline{u}_c + \underline{M} \cdot \underline{\varphi} = 0$$

per ogni $\underline{u}_c$ e $\underline{\varphi}$, e, poiché $\underline{u}_c$ e $\underline{\varphi}$ sono indipendenti fra loro, ne consegue immediatamente l'asserto.

1.6 Dualità statico cinematica

Vogliamo ora mostrare che :

$$\underline{B} = \underline{A}^T.$$

Infatti siano $\underline{R}$ e $\underline{s}$ due vettori qualunque e si consideri il sistema di travi svincolate. Se si pone:

$$(6) \quad \begin{aligned} \underline{S} &= -\underline{B} \underline{R}, \\ \underline{r} &= \underline{A} \underline{s}, \end{aligned}$$

il sistema di forze $\underline{R}$, $\underline{S}$ è equilibrato e il sistema di spostamenti $\underline{r}$, $\underline{s}$ è congruente per il sistema svincolato. Quindi, per il principio dei lavori virtuali applicato alle singole travi svincolate, deve essere:

$$L_e + L_R = 0,$$

dove L_e rappresenta il lavoro di tutte le forze

esterne applicate :

$$L_e = \underline{S}^T \underline{s},$$

mentre L_R rappresenta il lavoro delle reazioni vincolari:

$$L_R = \underline{R}^T \underline{r}.$$

Tenere presente che se $\underline{r} \neq 0$ le reazioni vincolari lavorano e che il sistema $\underline{s}$, $\underline{r}$ è congruente per il sistema libero, ma non lo è, in generale, per quello vincolato.

Risulta, utilizzando le (6) :

$$\begin{aligned} L_e + L_R &= \underline{S}^T \underline{s} + \underline{R}^T \underline{r} \\ &= -\underline{R}^T \underline{B}^T \underline{s} + \underline{R}^T \underline{A} \underline{s} \\ &= \underline{R}^T (\underline{A} - \underline{B}^T) \underline{s} = \underline{0}, \end{aligned}$$

per ogni vettore $\underline{R}$ e $\underline{s}$ e quindi $\underline{A} - \underline{B}^T = \underline{0}$,

come volevasi dimostrare.

Una conseguenza di tale proprietà è che

$$C_B = C_A = V - i.$$

Nel caso di struttura labile, cioè se:

$$g > V - i = C_B,$$

l'equilibrio dipende dalle forze $\underline{S}$ (si ha equilibrio se $\underline{S}$ è linearmente dipendente dai $V-i$ vincoli efficaci).

Se invece il sistema di travi non è labile l'equilibrio è sempre possibile poiché in tal caso

$$g = C_A = V - i \leq V,$$

e la caratteristica della matrice ordinata $\underline{B}_0$ risulta

$$\begin{array}{c} g \\ \boxed{\underline{B}} \\ V \end{array} \begin{Bmatrix} \underline{R} \\ \int V \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{S} \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ g \end{Bmatrix}$$

necessariamente pari a g , indipendentemente da $\underline{S}$.

Se $i = 0$ e $g = V$ il sistema di travi è isostatico e il sistema di equazioni (5) ammette una e una sola soluzione. Se invece $i = 0$ e $g > V$ il sistema di travi è labile e la (5) ammette una e una sola soluzione nel caso $C_0 = C_B$, mentre non ammette soluzioni se $C_0 = C_B + 1$.

Se $i \neq 0$ e $g = V - i$, il sistema di travi è iperstatico e il sistema di equazioni (5) ammette ∞^i soluzioni, cioè il numero di soluzioni linearmente indipendenti (grado di indeterminazione statica) è pari al grado di iperstaticità i .

Se $i \neq 0$ e $g > V - i$ la struttura è labile e il sistema di equazioni (5) ammette ∞^i soluzioni se $C_0 = C_B$ mentre non ammette soluzioni se $C_0 = C_B + 1$.

1.7 Il principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi vincolati

Dato un sistema di travi rigide vincolato con vincoli (interni ed esterni) rigidi, bilaterali e privi di attrito, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un sistema di reazioni vincolari in equilibrio con un dato sistema di forze esterne applicate è che risulti:

$$L_e = 0,$$

per ogni spostamento virtuale del sistema (compatibile con i vincoli di rigidità e con i vincoli interni ed esterni) dove con L_e si intende il lavoro delle sole forze esterne applicate (in tal caso le reazioni vincolari non svolgono lavoro).

1) Necessità: Per ipotesi $r = A s = 0$ e,

dunque, il lavoro L_R delle reazioni vincolari, che vale $R^T r$, è nullo. Quindi $L_e = 0$.

2) Sufficienza

Sia quindi $L_e = 0$ per ogni sistema di spostamenti congruente con i vincoli di rigidità e i vincoli interni ed esterni, quindi tale che $r = 0$, cioè:

$$(7) \quad A s = 0.$$

Vogliamo mostrare allora che il sistema di forze è equilibrato, cioè che in corrispondenza del sistema di forze esterne S è possibile determinare un sistema di reazioni R tale che:

$$B R + S = 0.$$

Per un noto teorema di algebra ciò è senz'altro possibile se la matrice B e la

matrice $\underline{B}_0$ che si ottiene da $\underline{B}$ orlandata con i termini noti $\underline{S}$ hanno la stessa caratteristica.

$$\underline{B}_0 \equiv \left[\begin{array}{c|c} \underline{B} = \underline{A}^T & \underline{S} \end{array} \right]_g$$

$v + 1$

Risulta:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ v \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \underline{S}^T & \\ \hline & \underline{A} \end{array} \right]_{g \times (v+1)} \begin{Bmatrix} \underline{s} \end{Bmatrix}_g = \begin{Bmatrix} \underline{S}^T \underline{s} \\ \underline{A} \underline{s} \end{Bmatrix}_{(v+1)}$$

$\underline{B}_0^T$

Poiché $\underline{S}^T \underline{s} = L_e = 0$ per ipotesi, e $\underline{A} \underline{s} = \underline{0}$ per congruenza si ha in definitiva:

$$(8) \quad \underline{B}_0^T \underline{s} = \underline{0}.$$

Se le (7) e (8) sono intesi come due sistemi di equazioni omogenei nelle incognite $\underline{s}$, questi due sistemi hanno le stesse soluzioni (che sono gli spostamenti $\underline{s}$ congruenti) e quindi $\underline{B}^T$ e $\underline{B}_0^T$ hanno la stessa caratteristica.

Questo per un altro teorema di algebra che dice:

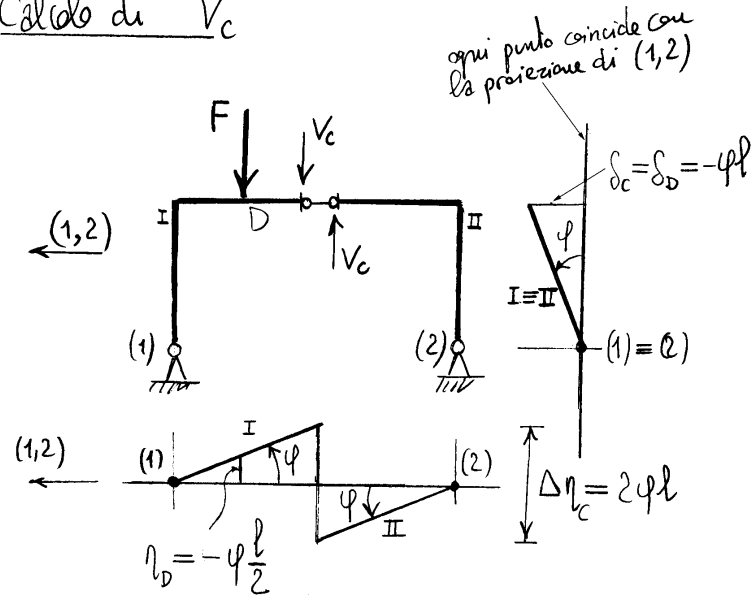
“Una matrice $\underline{M}$ e la sua orlata $\underline{M}_0$ che si ottiene aggiungendo un vettore riga alle righe di $\underline{M}$, hanno la stessa caratteristica se e solo se i due sistemi di equazioni omogenei associati:

$$\underline{M} \underline{x} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{M}_0 \underline{x} = \underline{0},$$

nelle incognite $\underline{x}$ hanno le stesse soluzioni.”

Diagram of a frame structure ABCD. The structure is a rectangle with height l and total width l . The left support is a pin support at A, and the right support is a roller support at B. A vertical downward force F is applied at the midpoint D of the top horizontal member. The horizontal member is divided into two equal segments of length $l/2$ by point D. Point C is located on the top horizontal member to the right of D. The internal forces at point C are shown as a clockwise moment φ , a horizontal force δ, H acting to the right, and a vertical force ζ, V acting downwards.

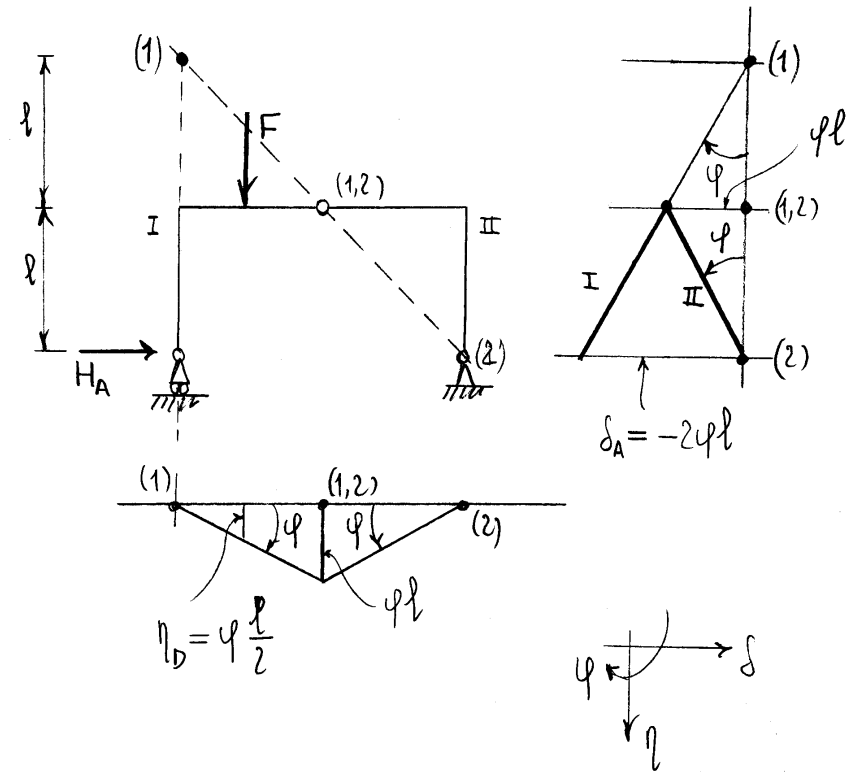
Calcolo di V_c



$$L_e = F \eta_D - V_c \Delta \eta_c = -F \gamma \frac{l}{2} - V_c 2 \gamma l$$

$$L_e = 0 \Rightarrow V_c = -\frac{F}{4}$$

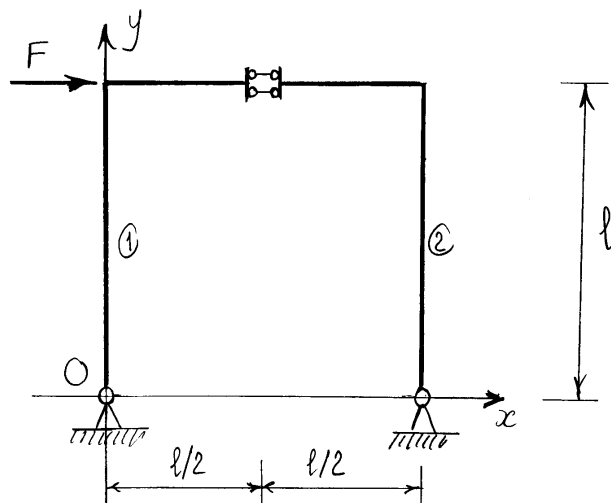
Calcolo di H_A



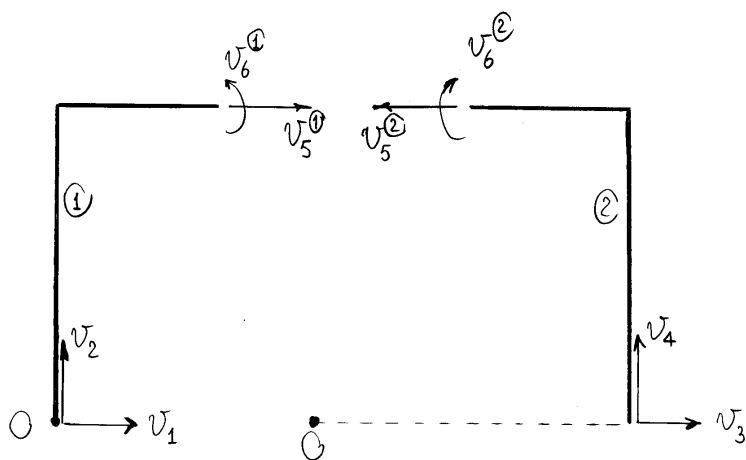
$$L_e = F r_D + H_A S_A = F \varphi \frac{l}{2} - H_A 2 \varphi l$$

$$L_e = 0 \Rightarrow H_A = \frac{F}{4}$$

1.8 Esempio sull'analisi statica e cinematica



Analisi cinematica



$$\begin{cases} \gamma_1 = u_x^{\textcircled{1}} \\ \gamma_2 = u_y^{\textcircled{1}} \\ \gamma_3 = u_x^{\textcircled{2}} \\ \gamma_4 = u_y^{\textcircled{2}} + \varphi^{\textcircled{2}} l \\ \gamma_5 = u_x^{\textcircled{1}} - \varphi^{\textcircled{1}} l - u_x^{\textcircled{2}} + \varphi^{\textcircled{2}} l \\ \gamma_6 = \varphi^{\textcircled{1}} - \varphi^{\textcircled{2}} \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 1 & 0 & -l & -1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^{\textcircled{1}} \\ u_y^{\textcircled{1}} \\ \varphi^{\textcircled{1}} \\ u_x^{\textcircled{2}} \\ u_y^{\textcircled{2}} \\ \varphi^{\textcircled{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

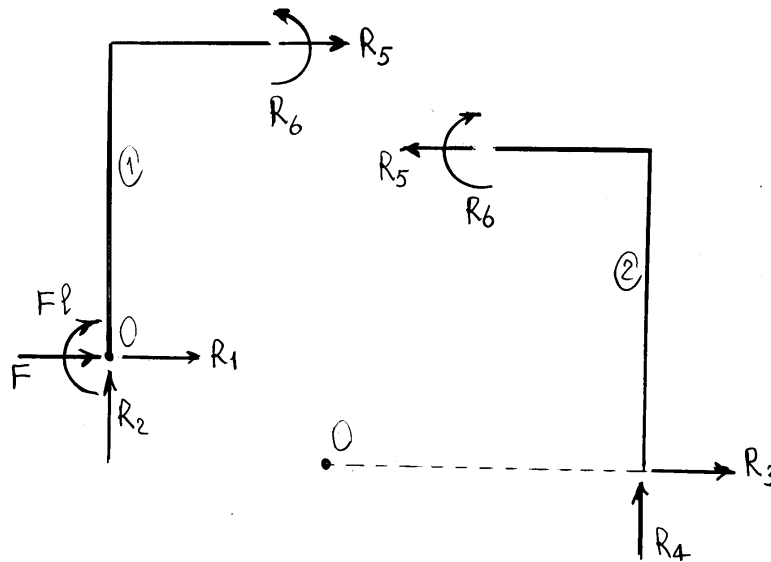
Quale centro di riduzione è stato utilizzato il punto O, sia per il corpo rigido ① che per quello ②. Si noti che la matrice cinematica ha determinate nulle e che quindi il sistema di equazioni ammette soluzioni non nulle.

Inoltre :

$$1^{\text{a}} \text{ riga} - 3^{\text{a}} \text{ riga} - 5^{\text{a}} \text{ riga} = (6^{\text{a}} \text{ riga}) \ell$$

e dunque le righe della matrice cinematica non sono linearmente indipendenti.

Analisi statica



Scrivendo le equazioni di equilibrio con riduzione il punto O per entrambi i corpi rigidi si ottiene:

$$\begin{cases} R_1 + R_5 + F = 0 \\ R_2 = 0 \\ -R_5 \ell + R_6 - F \ell = 0 \\ R_3 - R_5 = 0 \\ R_4 = 0 \\ R_4 \ell + R_5 \ell - R_6 = 0 \end{cases}$$

In notazioni matriciali :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\ell & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & \ell & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ -F\ell \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Resta dunque confermato che le matrici cinematica e statica sono l'una la trasposta dell'altra.

Inoltre:

$$(5^{\text{a}} \text{ riga}) \ell - 3^{\text{a}} \text{ riga} = 6^{\text{a}} \text{ riga}$$

$$0 \times \ell - (-F\ell) \neq 0 \Rightarrow \text{ sistema non equilibrato}$$

Capitolo 2

Statica dei sistemi piani isostatici

2.1 Curva delle pressioni

Le sollecitazioni che si trasmettono attraverso una qualunque sezione retta di una trave piana equivalgono alla loro risultante agente lungo una ben determinata retta d'azione (*asse centrale* del sistema di forze) oppure, se tale risultante è nulla, equivalgono ad una coppia. Escluso quest'ultimo caso, ad ogni sezione retta di una trave piana corrisponde la retta d'azione della risultante delle forze agenti nella stessa sezione. D'altronde una coppia $\mathcal{M}$ rappresenta il caso limite di una forza F avente braccio b rispetto ad un punto P del piano quando la forza tende a zero e il braccio tende all'infinito mantenendo costantemente uguale a $\mathcal{M}$ il prodotto Fb . Ne consegue una “forza nulla” che agisce secondo la *retta all'infinito* o *retta impropria* e quindi ad ogni sezione retta di una trave piana corrisponde la retta d'azione, propria o impropria, della risultante delle tensioni agenti nella stessa sezione.

La *curva delle pressioni* rappresenta l'involuppo delle rette d'azione delle risultanti relative a tutte le sezioni rette di un sistema di travi. Tale strumento grafico sintetizza, in modo qualitativo, le sollecitazioni cui una trave è sottoposta.

2.1.1 Tratto di trave non caricato

In un tratto di trave non caricato direttamente la curva delle pressioni è rappresentata da una linea retta, poiché in tal caso l'equilibrio richiede che la retta d'azione della risultante non vari al variare della sezione retta considerata. Infatti, due sezioni generiche di tale tratto individuano una parte di tale tratto caricata solo in corrispondenza delle sezioni stesse e

quindi le due forze che si trasmettono in tali sezioni devono essere uguali ed opposte.

Se la trave è caricata solo da forze concentrate la curva delle pressioni risulta, per quanto detto, poligonale. I lati del “poligono” delle pressioni corrispondono ai tratti di trave tra un carico concentrato e l'altro (fig. 2.1a). Con riferimento all'esempio di fig. 2.1a, l'intersezione tra la traccia di una

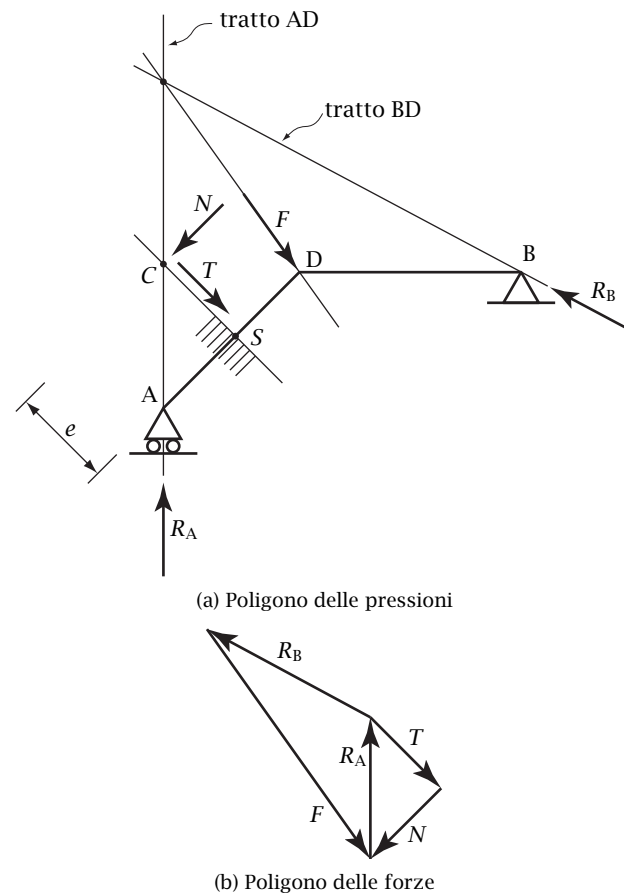


Figura 2.1: Esempio di un sistema di travi soggetto ad un carico concentrato

generica sezione S e la retta d'azione della risultante delle forze agenti nel-

la stessa sezione (retta d'azione che rappresenta un lato del poligono delle pressioni) individua il *centro di sollecitazione* C .¹ Il valore della risultante può essere dedotto dal *poligono delle forze* (fig. 2.1b), che rappresenta l'equilibrio in forma vettoriale. La componente in direzione normale alla sezione individua la forza normale, quella in direzione della traccia della sezione la forza di taglio mentre il momento flettente dipende dalla eccentricità della risultante rispetto al punto S della linea d'asse, oppure dalla eccentricità della sola forza normale (indicata con e in fig. 2.1a). Il momento flettente si annulla dove i lati del poligono delle pressioni intersecano la linea d'asse del sistema di travi nel tratto di propria competenza. Nel caso della fig. 2.1a, tale situazione si verifica solo in corrispondenza delle sezioni vincolate A e B.

2.1.2 Tratto di trave con carico distribuito costante (per unità di linea ortogonale al carico)

Si vuole ora mostrare che *in un tratto di trave soggetto ad un carico distribuito q costante per unità di linea ortogonale al carico, la curva delle pressioni è una parabola il cui asse ha la direzione del carico*.

Dimostrazione. Facendo infatti riferimento allo schema di fig. 2.2a, dove la direzione del carico distribuito è verticale e il carico è ritenuto costante per unità di linea orizzontale (o per unità di proiezione orizzontale), si consideri la generica sezione S . La quota di carico distribuito che compete al tratto AS vale qa , dove a è la distanza in orizzontale di A da S . È quindi possibile determinare, tramite il poligono delle forze (fig. 2.2b), la risultante che compete alla sezione S . L'inclinazione di tale risultante fornisce, per definizione di involuppo, la tangente r alla curva delle pressioni nel punto individuato dalla intersezione della curva con la retta d'azione s della quota di carico ripartito agente in S . Si assumano allora due assi ortogonali di riferimento, un asse orizzontale x generico ed un asse verticale y tale che divida il carico ripartito in due quote, individuate nel poligono delle forze dalla orizzontale per il punto di incontro delle reazioni R_A ed R_B . Detta $f(x)$ l'equazione della curva delle pressioni, deve quindi risultare:

$$\frac{df}{dx} = \tan \alpha = \frac{-qx}{H}, \quad (2.1)$$

¹A volte detto *centro di pressione*.

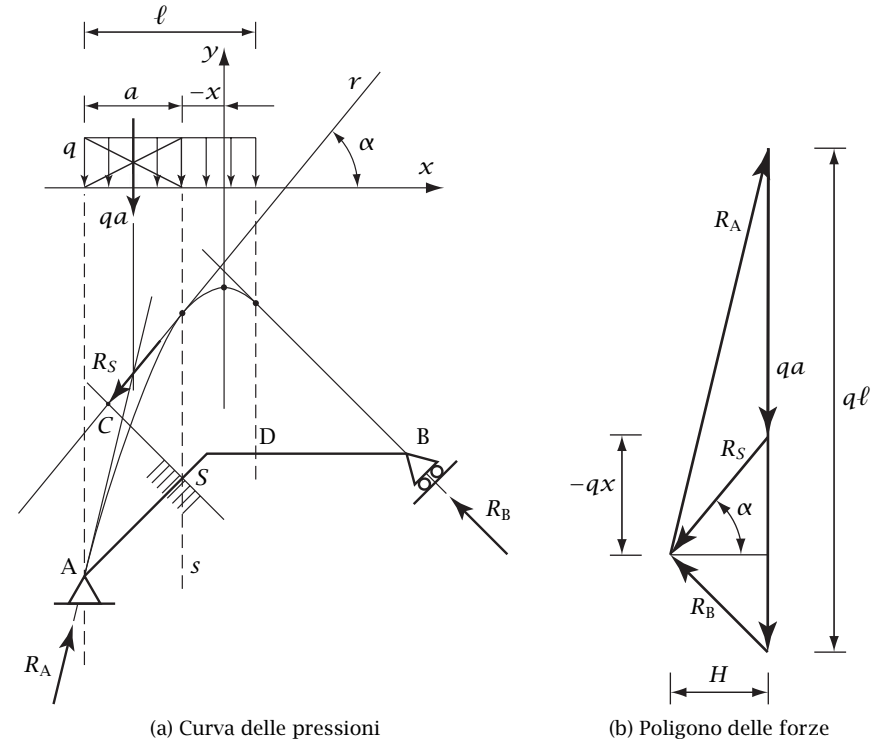


Figura 2.2: Esempio di un sistema di travi soggetto ad un carico ripartito

dove α è l'inclinazione della tangente rispetto all'asse x e H è la distanza, misurata nel poligono delle forze, della risultante del carico distribuito dal punto di incontro delle reazioni R_A ed R_B . Dato che la distanza H non dipende da x , integrando si ottiene:

$$f(x) = -\frac{qx^2}{2H} + c, \quad (2.2)$$

equazione che rappresenta una parabola di asse y , come volevasi dimostrare. ■

Nella dimostrazione precedente si è ipotizzato che *il punto di tangenza della risultante r in S si trovi sulla retta s* .

Dimostrazione. Per mostrare che così è si consideri la fig. 2.3, dove sono sta-

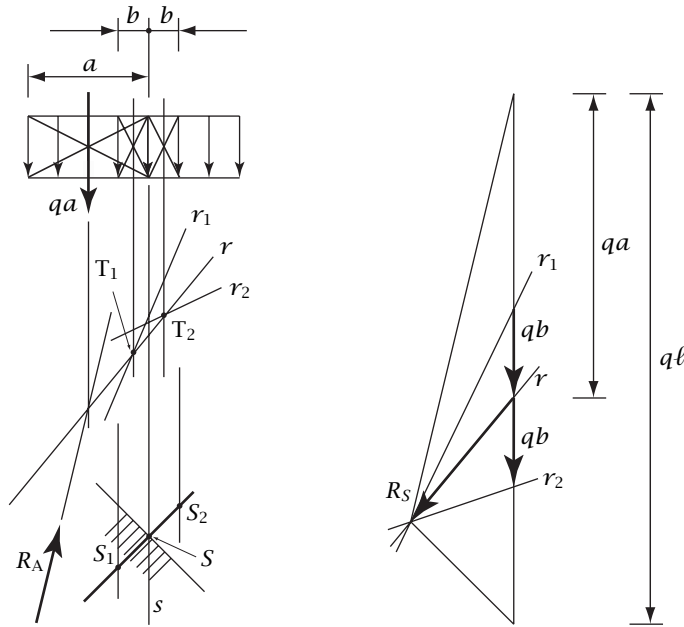


Figura 2.3: Tangenti alla curva delle pressioni nell'intorno di un punto

te tracciate le rette d'azione r_1 e r_2 delle risultanti relative rispettivamente alle due sezioni S_1 e S_2 che distano b da S in direzione orizzontale e che sono poste rispettivamente a sinistra e a destra di S . Le risultanti dei due carichi qb intercettano su r i punti T_1 e T_2 da cui passano le rette d'azione r_1 e r_2 . È evidente dalla costruzione che il punto di tangenza di r deve essere interno all'intervallo T_1T_2 . Essendo la distanza b arbitraria il punto di tangenza deve quindi stare sulla retta s . ■

Con riferimento alla fig. 2.4, si affronta ora il problema della costruzione dell'arco di parabola che rappresenta la curva delle pressioni tramite l'individuazione di tre dei suoi punti e delle corrispondenti tangenti, come già fatto per il tracciamento del diagramma parabolico del momento flettente. A tale proposito si ricordi che nel dato esempio la direzione del carico coincide con la direzione verticale. Si consideri allora innanzitutto che i due

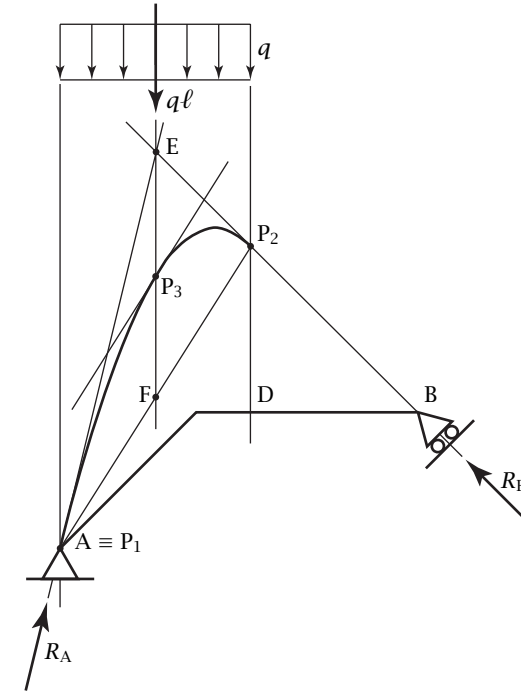


Figura 2.4: Costruzione della curva delle pressioni parabolica

punti di estremità P_1 e P_2 della curva delle pressioni coincidono con le intersezioni tra le verticali per le sezioni A e D di estremità del carico distribuito e le rette d'azione delle risultanti in A e in D rispettivamente. Si noti che nell'esempio di fig. 2.4 il primo dei due punti, P_1 , coincide con il punto A. Le rette d'azione relative ai due punti di estremità rappresentano anche le due tangenti di estremità della curva delle pressioni mentre il vertice E delle tangenti si trova sulla retta d'azione della risultante del carico distribuito. Per completare la costruzione a questo punto basta unire i due punti di estremità P_1 e P_2 della curva delle pressioni, individuando così l'intersezione F con la retta d'azione della risultante del carico distribuito. Dividendo a metà il segmento EF si individua il terzo punto P_3 della parabola, mentre la tangente si ottiene mandando per P_3 la parallela alla congiungente P_1P_2 .

2.2 Arco circolare a tre cerniere

Si consideri l'equilibrio di un arco di circonferenza AB di centro O, di semiapertura β generica, soggetto ad un carico distribuito q radiale (per unità di linea d'asse) e a due forze in A e in B tangenti alla linea d'asse (fig. 2.5a).

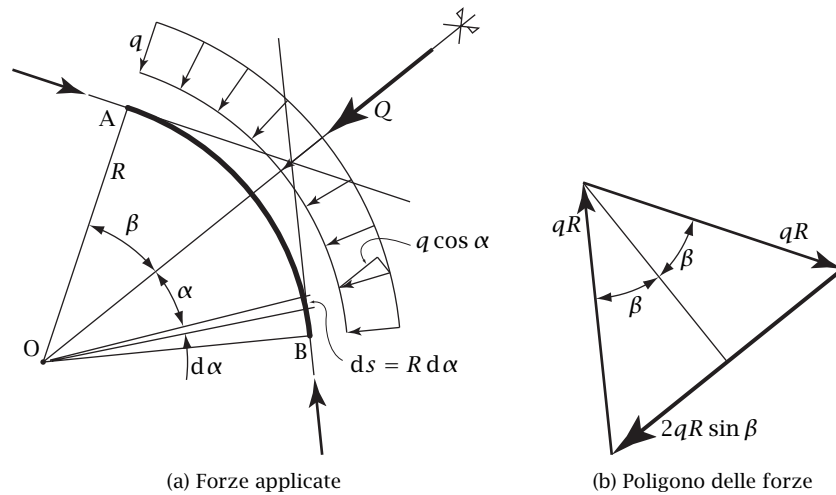


Figura 2.5: Equilibrio di un arco circolare soggetto ad un carico radiale

Il carico radiale è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ e quindi tale bisettrice coincide con la retta d'azione della risultante del carico. Sempre per simmetria, le due tangenti in A e in B si incontrano sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ rendendo così possibile l'equilibrio (dato che condizione necessaria per l'equilibrio di tre forze è che si incontrino in un punto).

Poiché la risultante del carico radiale ha retta d'azione l'asse di simmetria, è sufficiente integrare la componente del carico in tale direzione. La simmetria permette inoltre di integrare solo su metà arco. Con le convenzioni di fig. 2.5a si ottiene così:

$$Q = 2 \int_0^\beta q \cos \alpha R d\alpha = 2qR \sin \beta. \quad (2.3)$$

Come può poi dedursi dal poligono delle forze (fig. 2.5b), gli sforzi alle due

estremità A e B dell'arco valgono qR . Si noti che tale risultato è indipendente dalla semiapertura β dell'arco.

Si consideri ora l'arco circolare a tre cerniere di fig. 2.6, soggetto ad un

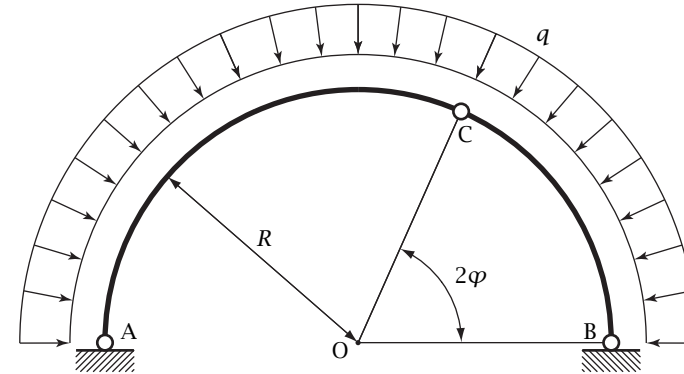


Figura 2.6: Arco circolare a tre cerniere soggetto ad un carico ripartito radiale

carico distribuito radiale costante (ancora per unità di linea d'asse).

Si sconnetta in corrispondenza delle tre cerniere (interna ed esterne). Per la soluzione precedente, è possibile equilibrare i due archi con delle forze tangenti alla linea d'asse, di modulo qR indipendente dalla semiapertura degli archi, come indicato in fig. 2.7. Le due forze in corrispondenza della cerniera interna sono quindi uguali ed opposte come imposto dal vincolo. Essendo soddisfatto l'equilibrio e tutte le condizioni imposte dai vincoli, lo schema di fig. 2.7 fornisce la soluzione dell'arco circolare a tre cerniere soggetto a carico radiale.

Si noti che l'arco è soggetto alla sola forza normale e che quindi la curva delle pressioni coincide con la linea d'asse dell'arco.

2.3 Cenno all'equilibrio dei fili

Come già visto nel caso dell'arco parabolico, la curva delle pressioni non dipende dalle linee d'asse del sistema di travi ma solo dalle forze applicate (forze attive e reazioni dei vincoli), almeno finché la forma della struttura non influenza le forze applicate. Si consideri allora un *filo inestendibile*, ovvero un filo che conserva la sua lunghezza. Essendo indefinitamente flessibile, il filo può essere internamente soggetto solo a forze normali

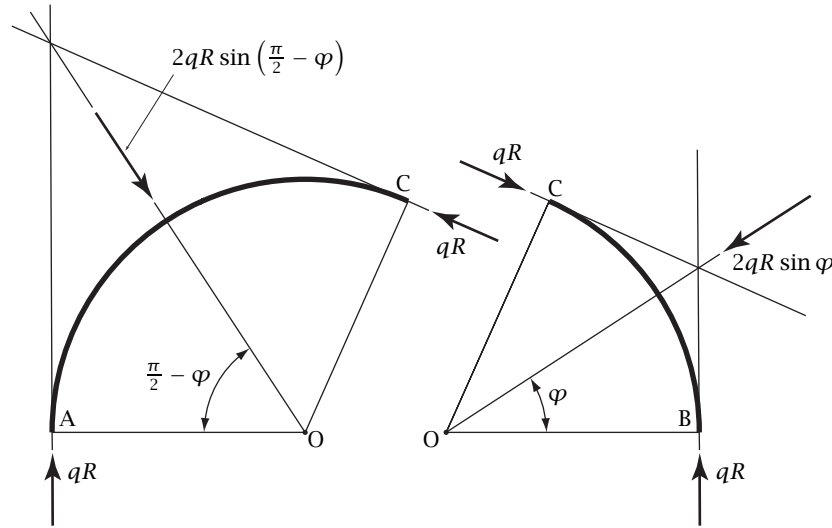


Figura 2.7: Reazioni interne ed esterne

di trazione, dirette quindi secondo la tangente alla linea che rappresenta la configurazione equilibrata sotto le date forze.² Ne consegue che se si atteggia un filo inestensibile secondo la curva delle pressioni determinata da dati carichi (e reazioni vincolari) si ottiene una configurazione equilibrata del filo soggetto a quei dati carichi, almeno nel caso in cui le forze normali sono di trazione.

Quale primo esempio si consideri il poligono delle pressioni di fig. 2.1a a pagina 35. Tenuto conto che nel caso considerato lo sforzo normale è di compressione, è sufficiente modificare il verso della forza F esterna applicata per ottenere la configurazione di un filo inestensibile in equilibrio sotto le date forze (fig. 2.8a). Analogamente si consideri la curva delle pressioni dell'arco semicircolare di fig. 2.6 nella pagina precedente, che ricordiamo essere coincidente con la linea d'asse semicircolare. Tenendo ancora conto che nel caso trattato la forza normale è di compressione, se ne deriva che la configurazione del filo inestensibile di fig. 2.8b è equilibrata sotto il carico distribuito radiale.

²Si noti che non avendo il filo una forma propria, non ha senso scrivere l'equilibrio in una configurazione indeformata vicina a quella deformata.

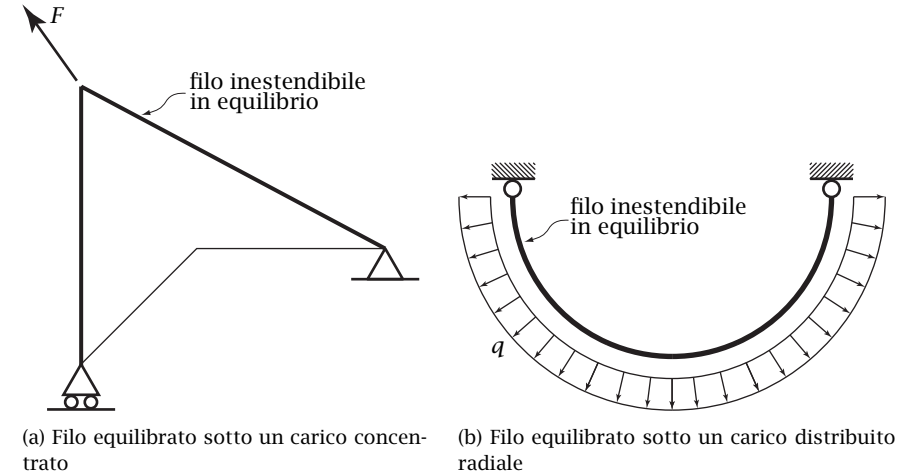
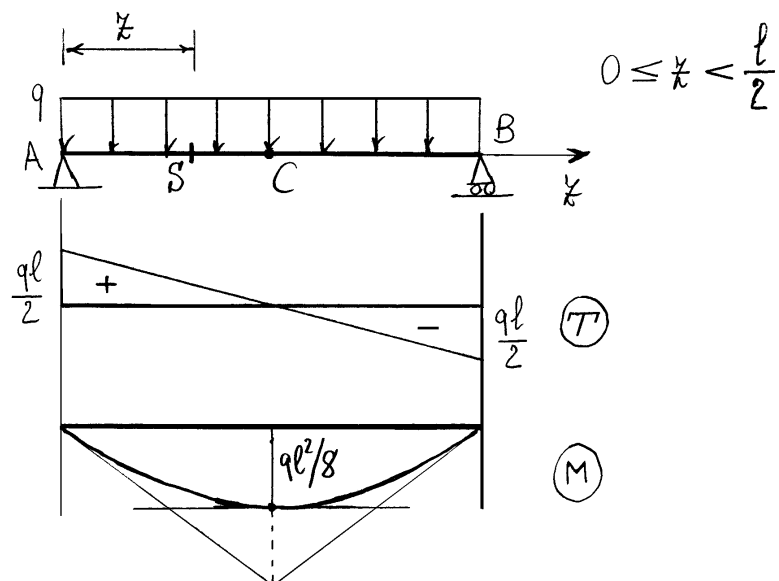


Figura 2.8: Fili inestensibili in equilibrio

Si conclude osservando che negli equilibri precedenti non è stato messo in conto il peso proprio del filo. Si consideri allora un filo omogeneo pesante. In tale caso il peso proprio rappresenta un carico distribuito costante per unità di linea. Se il filo è molto teso tra due punti posti su una linea orizzontale, la sua configurazione equilibrata è vicina a quella rettilinea passante per i due punti. In tal caso il peso proprio del filo si può allora approssimativamente considerare quale carico distribuito costante per proiezione orizzontale. Ne consegue che il filo si atteggia, approssimativamente, secondo una curva parabolica passante per i due punti dati. L'equazione della parabola è fornita dalla (2.2) a pagina 36, dove H rappresenta la forza normale a cui il filo è soggetto.

2.4 Arco parabolico

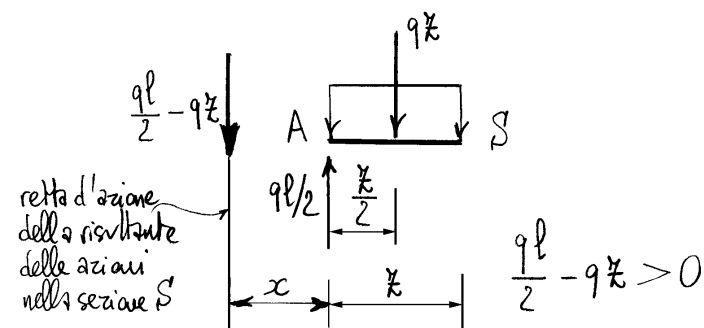
Si consideri una trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito e si calcoli la posizione della risultante relativa alla generica sezione S' posta nella metà di sinistra della trave.



Detta x la distanza dall'appoggio di sinistra A risulta:

$$\left(\frac{ql}{2} - qx\right)x - (qx)\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{x^2}{l - 2x}.$$

La retta d'azione della risultante in A è la retta verticale per A. Facendo variare S da A a C (sezione sulla

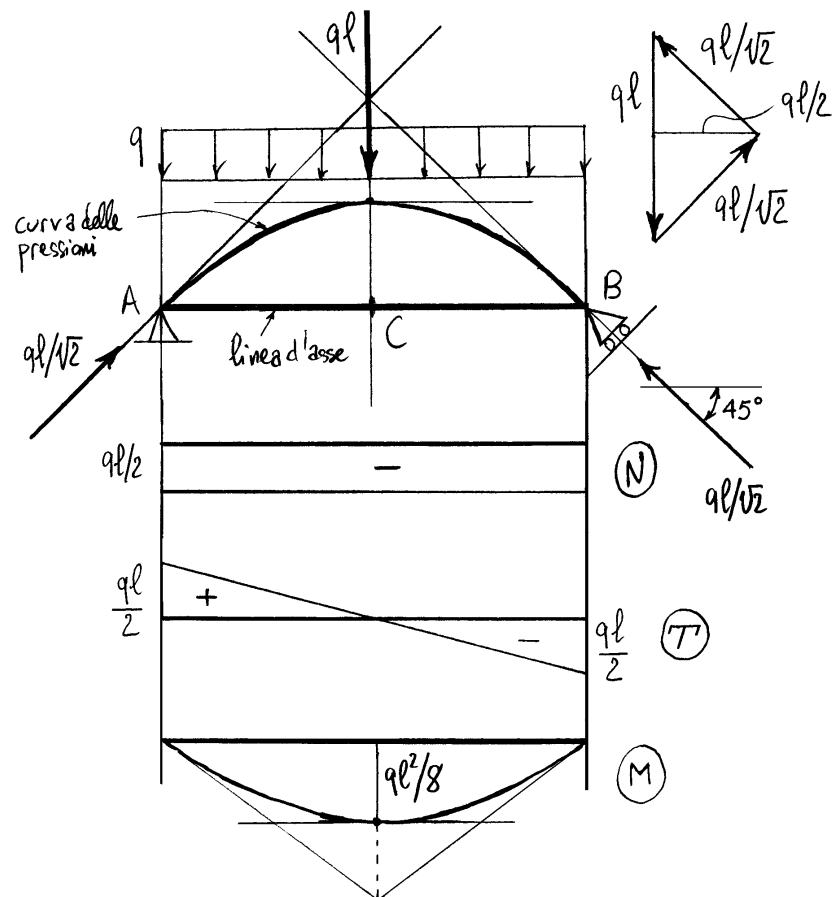


mezzaria della trave) x varia da 0 a $l/2$ e x varia da 0 a $+\infty$. Le rette d'azione delle risultanti relative alle sezioni della metà sinistra AC della trave individuano quindi le rette verticali poste a sinistra dell'appoggio A. Analogamente, alle sezioni della metà destra CB della trave corrispondono le rette verticali poste a destra dell'appoggio B. Inoltre, alla sezione C corrisponde la retta impropria, in accordo col fatto che la risultante in C è nulla. Poiché tutte le rette d'azione sono verticali, non esiste nessun inviluppo e quindi in tal caso non esiste la curva delle pressioni.

Per generare una curva delle pressioni nella trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito costante occorre

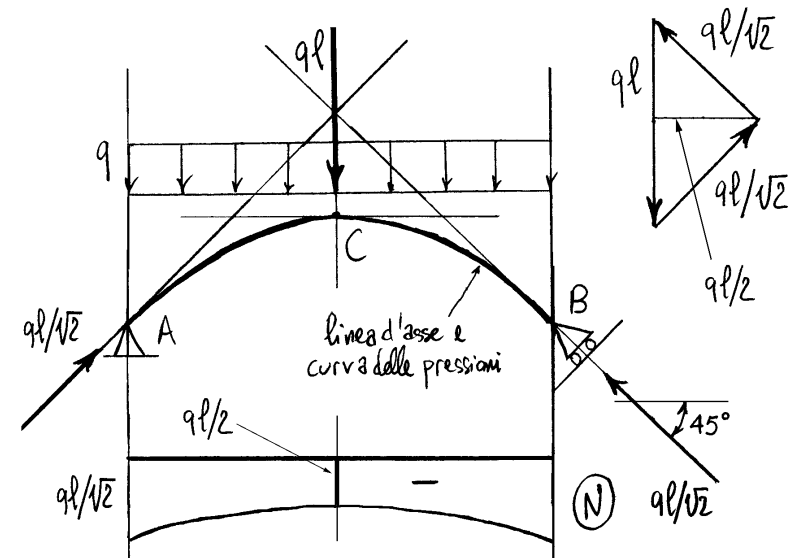
una reazione orizzontale che permetta di inclinare le rette d'azione delle risultanti. Si inclini, a tale scopo, il carrello in B, ottenendo una curva delle pressioni parabolica.

I diagrammi del taglio e del momento flettente restano invariati, ma viene ad aggiungersi la forza normale che nel caso



precedente era nulla.

Si sostituisca ora la trave ad asse rettilineo con un arco parabolico di linea d'asse coincidente con la curva delle pressioni precedente, lasciando invariati i vincoli in A e in B. Si ottiene così una struttura in grado di assorbire il carico ripartito generando esclusivamente una forza normale.

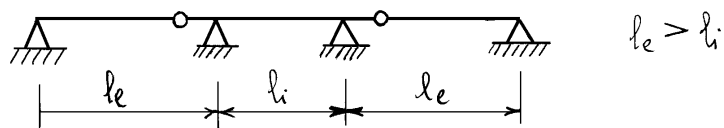
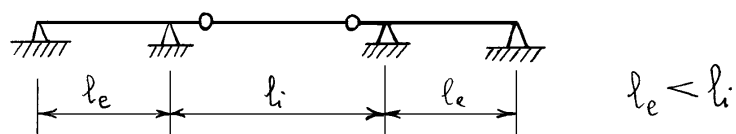


Cio' è particolarmente vantaggioso se il materiale di cui è composto l'arco non è resistente a trazione, poiché il carico in tal modo può essere assorbito generando solo sforzi di compressione.

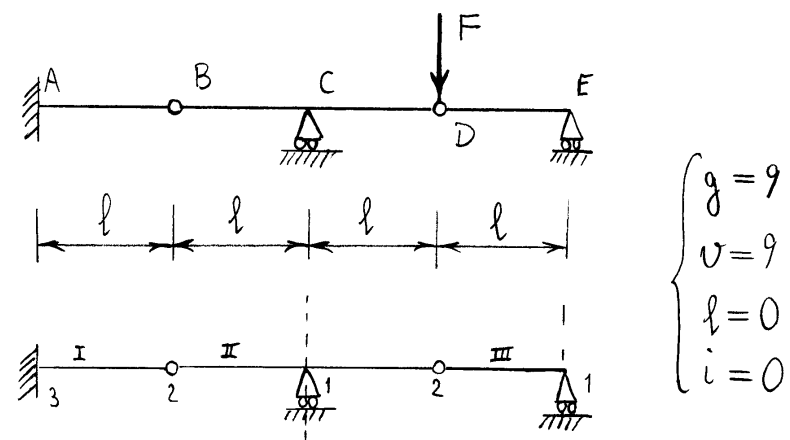
2.5 Travi Gerber

La trave Gerber è una trave su più di due appoggi resa isostatica mediante un numero sufficiente di snincolamenti interni. Si tratta, dunque, di un sistema di travi, collegate tra loro da vincoli interni (tipicamente cerniere).

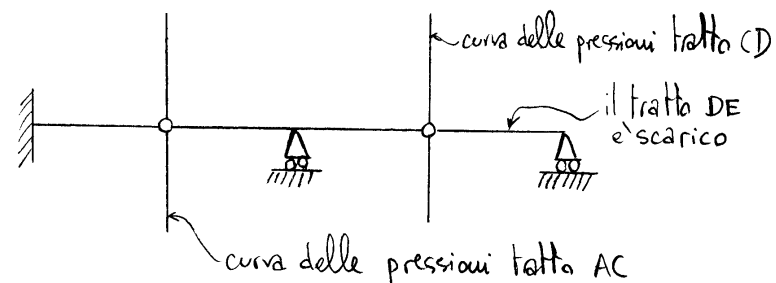
Casi più frequenti di travi Gerber su quattro appoggi:

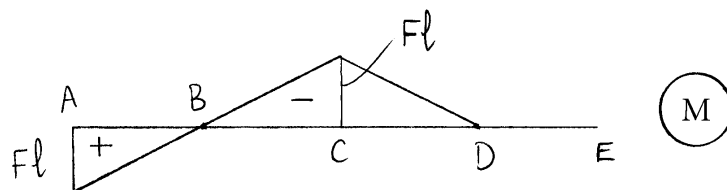
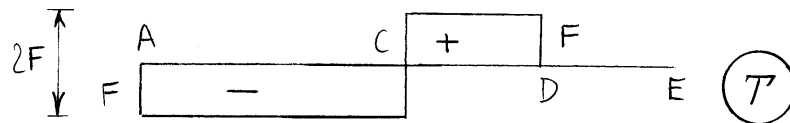
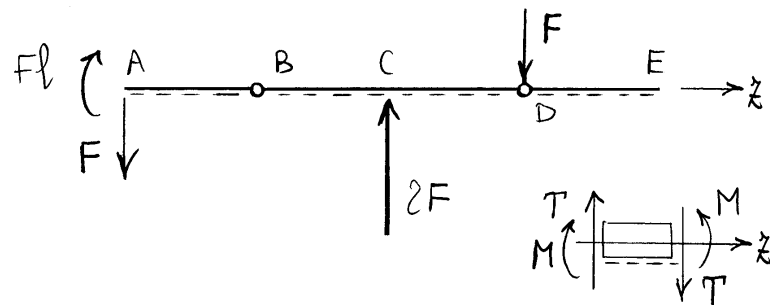
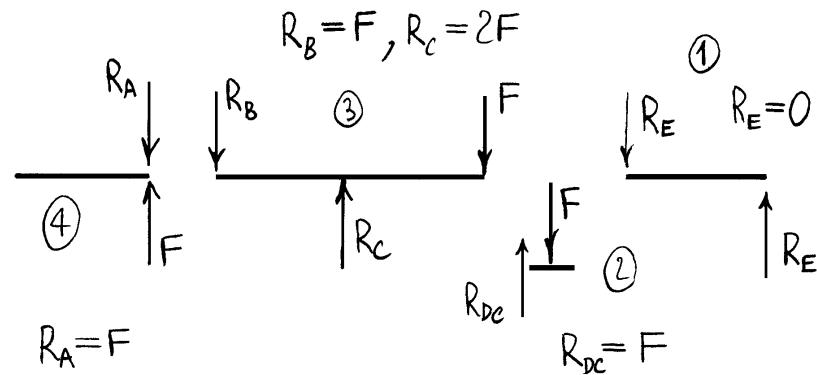


Esercizio



Il tratto AB è fisso. Il tratto BD è vincolato a ruotare attorno a B, ma in tal caso il punto C deve spostarsi verticalmente, il che è impedito dall'appoggio e quindi anche il tratto BD è fisso, così come DE che a questo punto risulta una trave su due appoggi. Ne risulta che il sistema è isostatico.

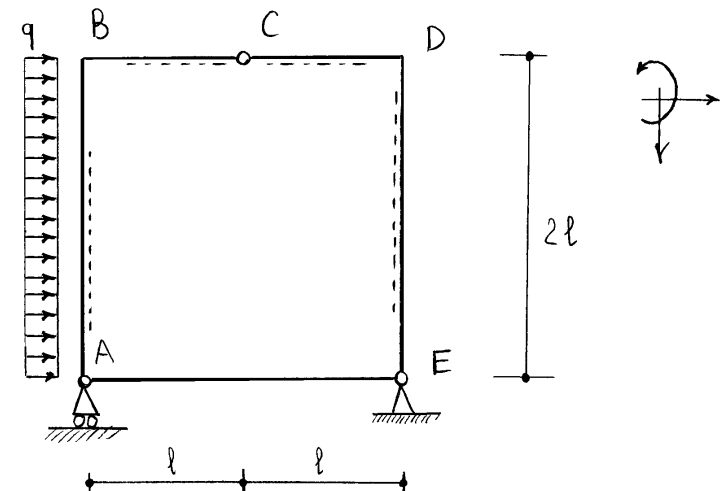




2.6 Sistemi chiusi isostatici

2.6.1 Esempio 1

Si consideri il sistema chiuso di figura soggetto ad un carico ripartito uniformemente sul montante AB. Un sistema chiuso biconnesso ha tre gradi di iperstaticità poiché rimuovendo la continuità in corrispondenza di una generica sezione, cioè rimuovendo tre vincoli semplici, non si modifica la situazione cinematica del sistema, considerato rigido.



Nel caso in esame, nel tratto chiuso sono presenti tre connessioni semplici mentre esternamente sono presenti tre vin-

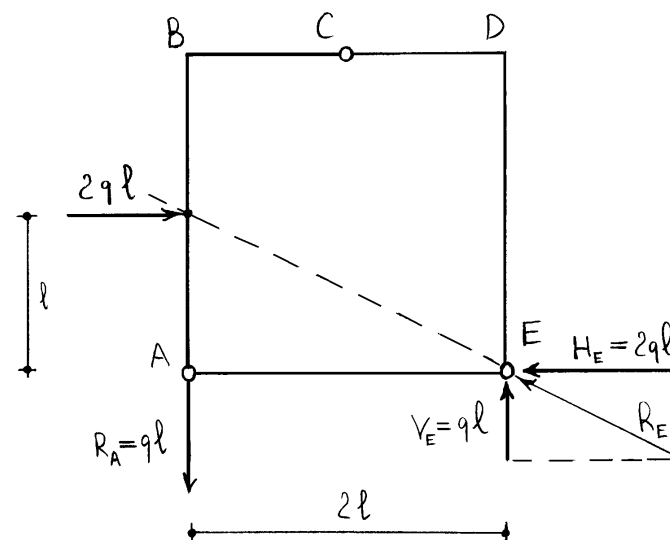
colli semplici. La condizione necessaria di isostaticità è dunque soddisfatta. Alternativamente, i tre tratti AE, ABC e CDE posseggono 9 gradi di libertà nel piano, sono vincolati tra loro da 3 vincoli doppi (le cerniere in A, E e C) e sono vincolate esternamente da un vincolo doppio (l'appoggio in E) e da un vincolo semplice (il carrello in A):

$$g = 3 \times 3 = 9, \quad v = 2 \times 4 + 1 = 9 \Rightarrow g - v = 0.$$

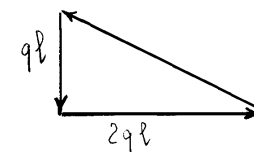
Inoltre, nell'ipotesi di labilità della struttura, il tratto AE deve ruotare attorno al punto E, ma in tal caso il punto A deve spostarsi verticalmente, il che è impedito dal carrello. Quindi il punto A è fisso. Il punto C, pensato appartenente al tratto ABC, deve quindi spostarsi in direzione ortogonale alla congiungente AC così come, pensato appartenente al tratto CDE, deve spostarsi in direzione ortogonale alla congiungente EC. Quindi anche C è fisso e la struttura non è labile. Ne consegue che la struttura è isostatica.

Dato che la struttura è esternamente isostatica (è isostatica e i vincoli semplici esterni sono tre) l'equilibrio globale individua le reazioni dei vincoli esterni.

soluzione esterna



poligono delle forze



Equilibrio

1) Orizzontale:

$$2ql - H_E = 0$$

2) Verticale:

$$R_A - V_E = 0$$

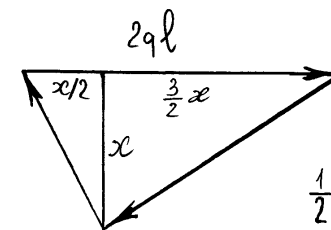
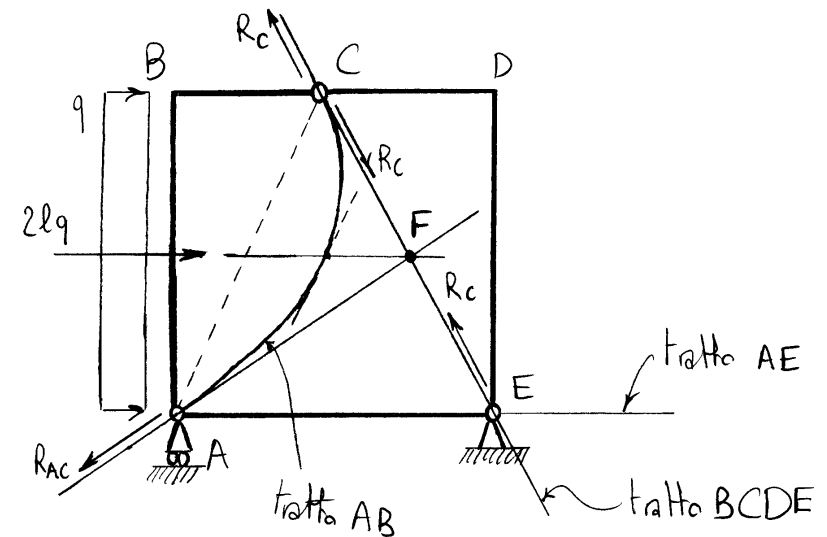
3) Rotazione di polo E:

$$R_A \cdot 2l - 2ql \cdot l = 0$$

Soluzione vettoriale interna e curva delle pressioni

Per risolvere internamente la struttura si consideri l'equilibrio del tratto CDE. Essendo tale tratto soggetto alle due sole forze trasmesse in C ed in E, con rette d'azione rispettivamente per C e per E, ne risulta che le due forze devono essere uguali ed opposte. La loro retta d'azione coincide quindi con la congiungente CE, e tale congiungente rappresenta la curva delle pressioni nel tratto BCDE, tratto privo di forze esterne applicate.

Si consideri poi l'equilibrio del tratto ABC. La risultante del carico distribuito e la forza trasmessa in C si incontrano in un punto F per il quale deve passare, per equilibrio, anche la terza forza agente in A e con retta d'azione per A. Tale forza ha quindi la congiungente AF quale retta d'azione. La curva delle pressioni del tratto AB è una parabola ad asse orizzontale, passante per i punti A e C dove le tangenti sono le rette AF e CF rispettivamente. Dimezzando il segmento

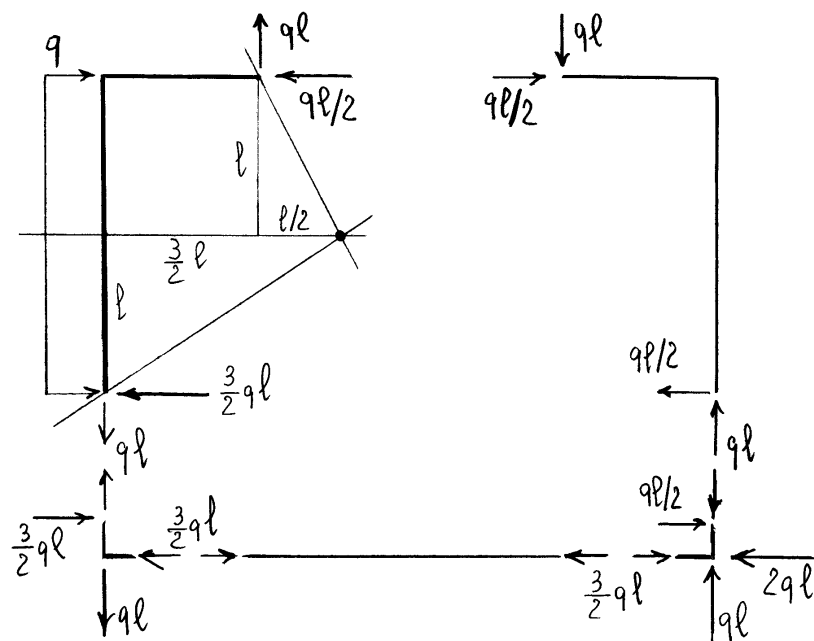


equilibrio del tratto ABC

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x = 2ql \Rightarrow x = ql$$

orizzontale da F (vertice delle tangenti) alla congiungente AC si ottiene il terzo punto della parabola di tangente parallela ad AC.

Infine il tratto AE non è soggetto a forze esterne e la curva delle pressioni coincide con l'asse dell'atave.



Soluzione analitica interna

Parte 1

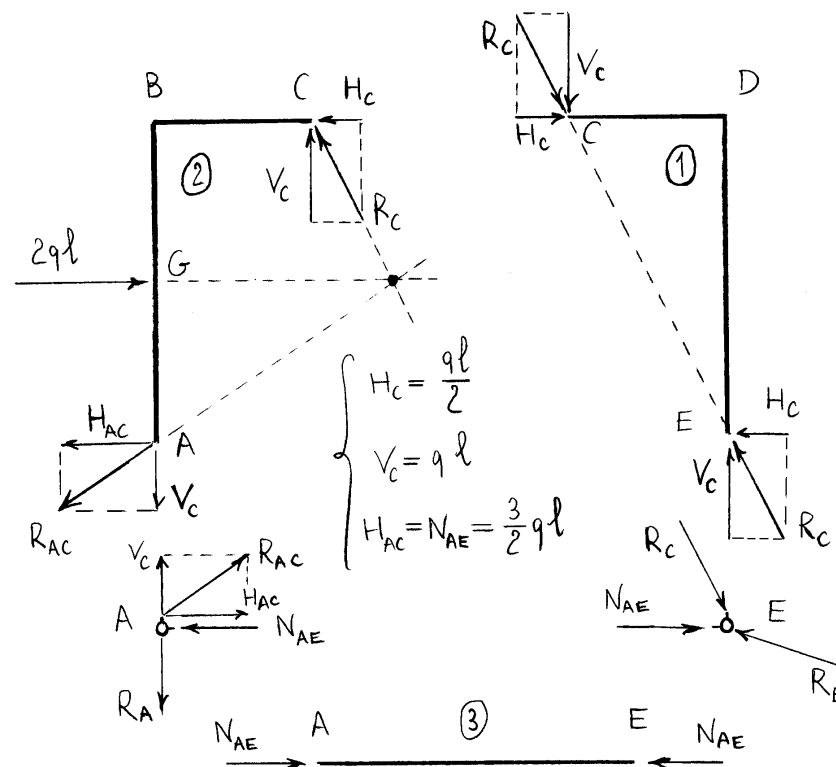
Equilibrio alla rotazione attorno al punto C:

$$V_c l - H_c 2l = 0 \Rightarrow V_c = 2H_c$$

Parte 2

Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$2q\ell - H_c - H_{AC} = 0 \Rightarrow H_{AC} = 2q\ell - H_c$$



Equilibrio alla rotazione attorno al punto A:

$$H_c 2l + V_c l - 2q\ell l = 0$$

$$2H_c l + 2H_c l - 2q\ell^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} H_c &= \frac{1}{2}q\ell \\ H_{AC} &= \frac{3}{2}q\ell \end{aligned}$$

Nodo A

Traslazione orizzontale:

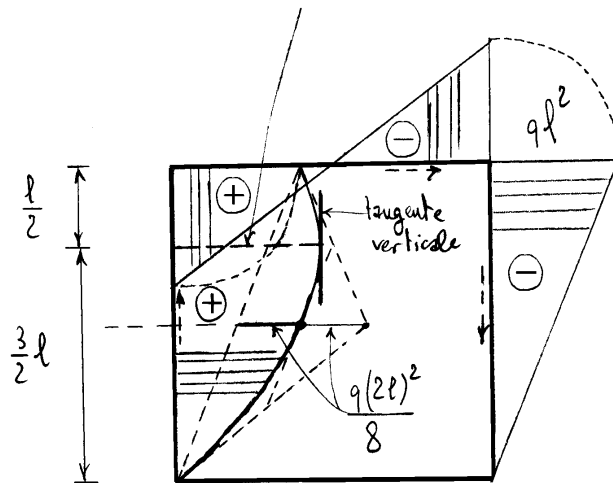
$$H_{AC} - N_{AE} = 0 \Rightarrow N_{AE} = H_{AC}$$

Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

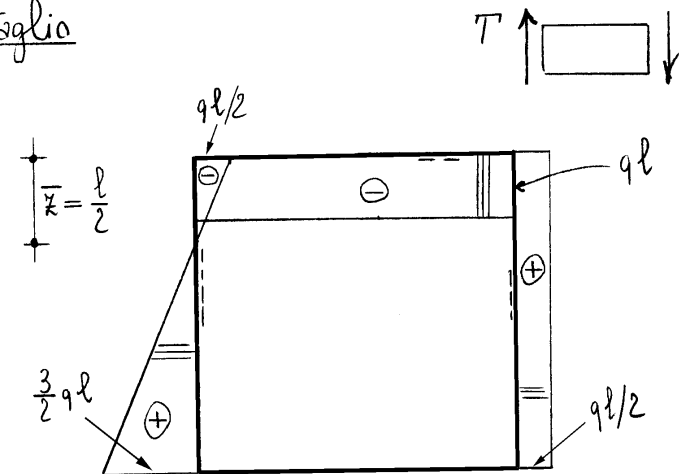
Momento flettente



$$M_{\max} = H_{Ac} \frac{3}{2} l - q \left(\frac{3}{2} l \right) \left(\frac{3}{4} l \right) = \frac{9}{8} q l^2$$

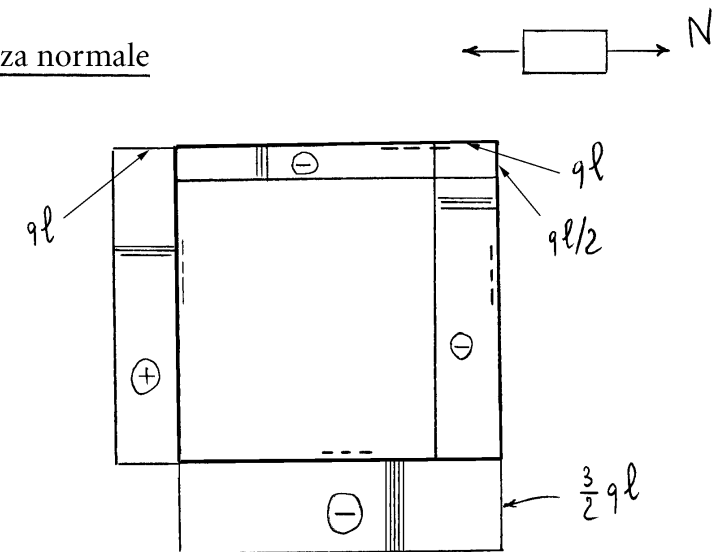


Ttaglio



$$\frac{\bar{x}}{q l / 2} = \frac{2 l - \bar{x}}{\frac{3}{2} q l} \rightarrow 3 \bar{x} = 2 l - \bar{x}$$

Forza normale



2.6.2 Esempio 2

Si consideri ora il sistema chiuso di fig. 2.9, soggetto ad una coppia

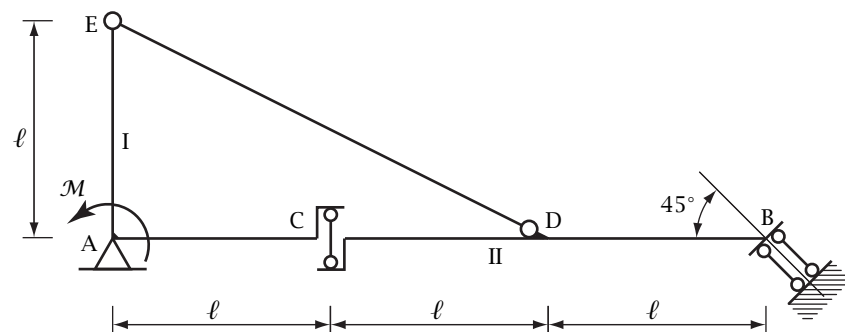


Figura 2.9: Sistema di travi chiuso soggetto ad una coppia

antioraria applicata nel nodo rigido A.

Isostaticità Il sistema di travi di fig. 2.9, contenente una parte chiusa, può essere considerato composto delle due parti rigide I e II connesse dal pendolo ED e dal pendolino interno in C. Essendo esternamente vincolata dall'appoggio in A e dal doppio pendolo in B, il numero globale dei vincoli semplici è quindi 6, pari al numero dei gradi di libertà delle due parti svincolate. Il sistema soddisfa allora la condizione necessaria di isostaticità.

Se la parte II subisse un moto rigido, causa il doppio pendolo questi sarebbe di traslazione. Supponiamo una traslazione che abbassa e sposta verso sinistra della stessa quantità, diciamo a , tutti i suoi punti, compresi quindi i punti C e D. Se il punto C si abbassa, per la continuità dello spostamento verticale imposto dal pendolo la parte I deve ruotare in senso orario attorno al punto fisso A. Il punto E si sposta allora verso destra di a . Eseguendo tale traslazione al pendolo ED il punto D si sposta verso destra di a . Si imponga ora una rotazione oraria di tale pendolo attorno alla cerniera in E in modo tale da rispettare la continuità dello spostamento verticale in D, e quindi tale da abbassare il punto D di a . Poiché il braccio verticale è la metà di quello orizzontale, ne risulta uno spostamento orizzontale pari a $a/2$ verso sinistra e quindi uno spostamento complessivo di D verso destra di $a/2$, in contrasto con la traslazione di a verso sinistra dovuto alla traslazione della

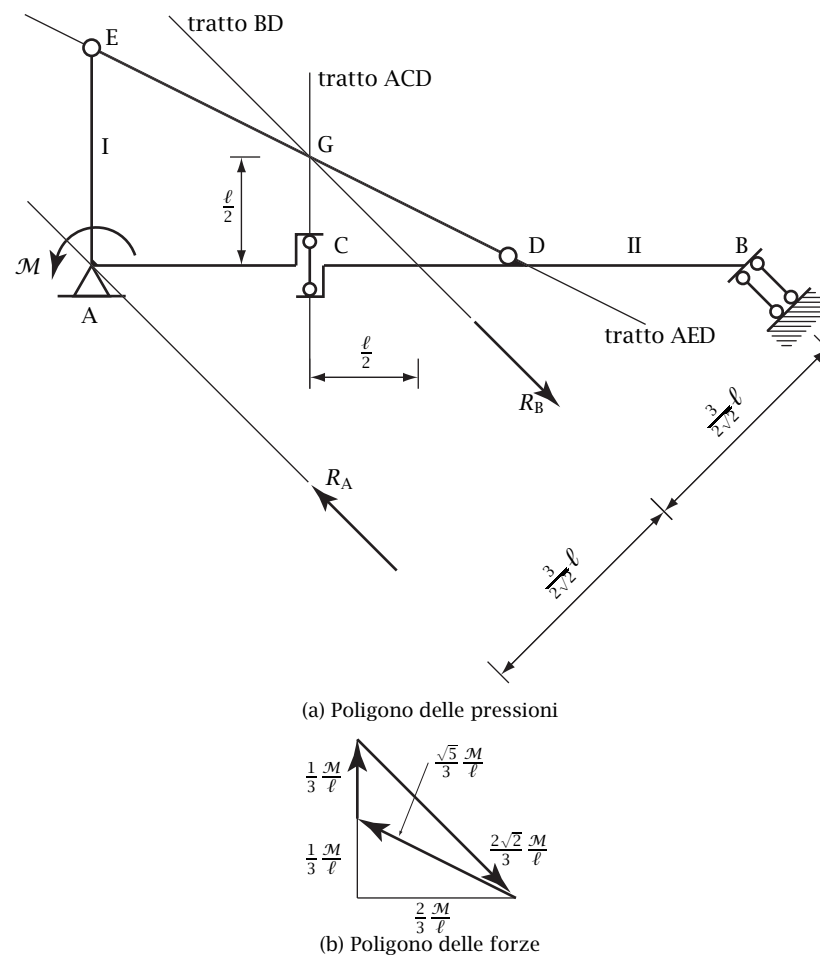


Figura 2.10: Poligoni delle pressioni e delle forze

parte II. La contraddizione dimostra che il sistema di travi non può subire moti rigidi e che quindi non è labile e di conseguenza è isostatico.

Reazioni interne ed esterne Per determinare le reazioni interne ed esterne, si consideri l'equilibrio della parte II. Le reazioni in corrispondenza delle sconnessioni in C, D e B hanno quali rette d'azione, rispettivamente, la verticale per C, la retta per E e D, e una retta parallela agli assi dei pendoli del doppio pendolo in B. Con riferimento allo schema di fig. 2.10a, le prime due si incontrano nel punto G da dove deve passare anche la retta d'azione della reazione del doppio pendolo. Resta così completamente determinato il poligono delle pressioni del sistema di travi.

Ciò stabilito, si consideri ora l'equilibrio globale. Dovendo equilibrare la coppia antioraria $\mathcal{M}$, le reazioni dell'appoggio in A e del doppio pendolo in B devono costituire una coppia oraria, di forze parallele agli assi dei pendoli del doppio pendolo e di braccio $\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell$. Risulta quindi:

$$R_A = R_B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mathcal{M}}{\ell}. \quad (2.4)$$

Il poligono delle forze riportato in fig. 2.10b determina le reazioni del pendolo in C e del pendolo ED, completando così il calcolo delle reazioni interne

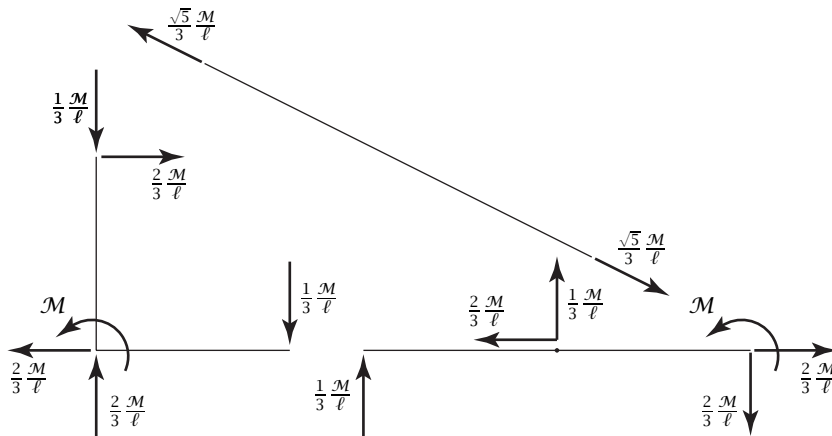


Figura 2.11: Reazioni interne ed esterne

ed esterne. Tale soluzione è riportata nello schema di fig. 2.11, dove risulta anche semplice la verifica dell'equilibrio.³

In fig. 2.12 è poi riportato il diagramma del momento flettente. Sempre

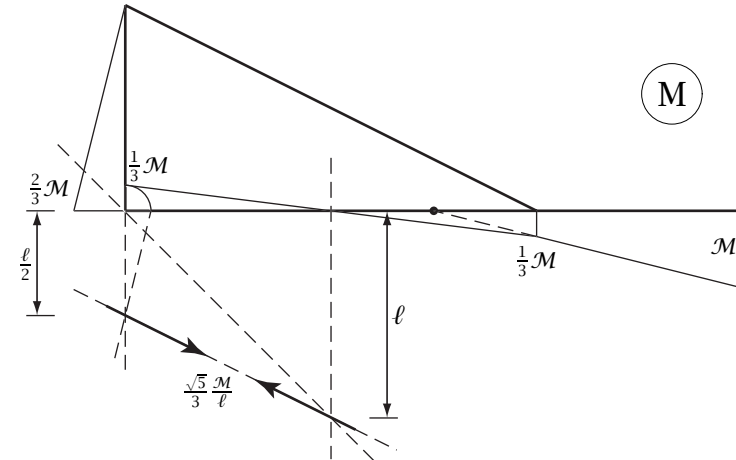


Figura 2.12: Diagramma del momento flettente

nella fig. 2.12 sono anche mostrate a sinistra la risultante della reazione del pendolo ED e della coppia applicata in A, e a destra la risultante della reazione del pendolo in C e della reazione in A, risultanti che devono essere uguali ed opposte. Mandando dall'intersezione della retta d'azione di tali risultanti con il prolungamento del tratto EA una retta parallela al diagramma del momento nel tratto EA, si ottiene in A il valore che il momento flettente ha immediatamente a destra di A nel tratto AC.

Nelle fig. 2.13a e 2.13b sono infine riportati i diagrammi della forza normale e del taglio rispettivamente.

³È sempre consigliabile di riportare la soluzione, comunque ottenuta, in uno schema riassuntivo del tipo di quello di fig. 2.11, che tra l'altro permette un semplice controllo dell'equilibrio e quindi della validità della stessa soluzione.

2.6.3 Travature reticolari isostatiche

Si consideri un sistema composto di travi ad asse rettilineo incernierate nei nodi. Se il sistema non è labile internamente, viene detto travatura reticolare.

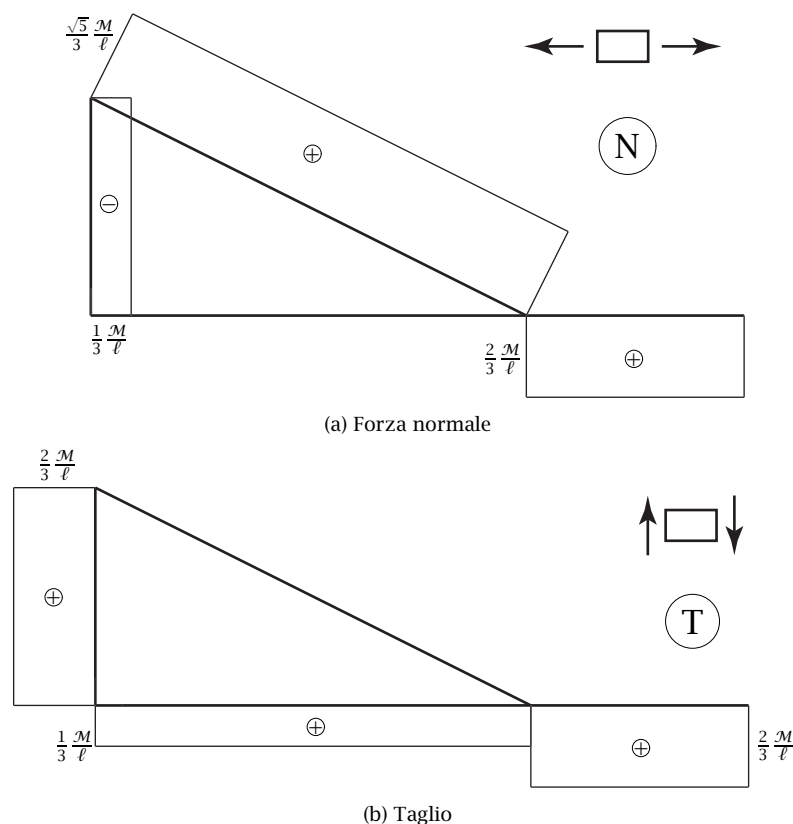
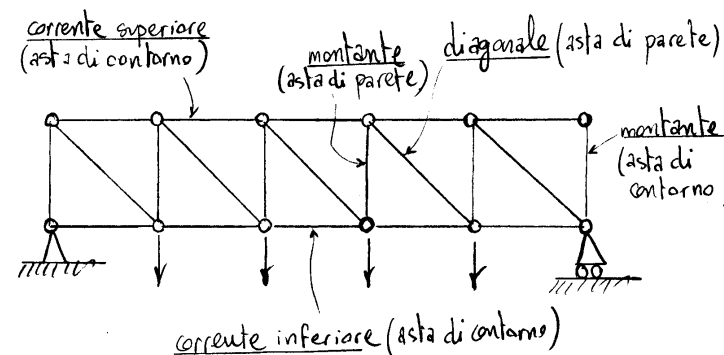


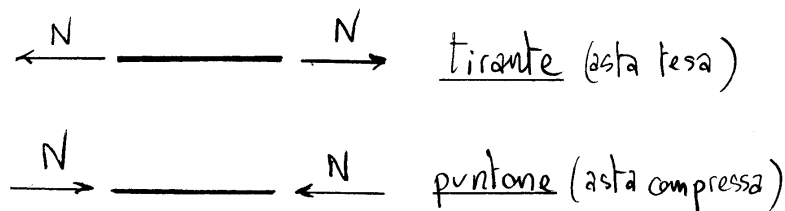
Figura 2.13: Diagrammi della forza normale e del taglio



Le travi che compongono le travature reticolari sono tradizionalmente denominate aste.

Se una travatura reticolare è caricata solo nei nodi, è soggetta internamente alla sola forza normale.

Le aste di una travatura reticolare, soggetta a date forze, sono distinte in tiranti e puntone a seconda che siano rispettivamente tese oppure compresse.



2.6.4 Condizioni di isostaticità

Si consideri una travatura reticolare piana con nodi cerniera. Ogni singolo nodo se considerato libero nel piano possiede due gradi di libertà per cui l'insieme dei nodi della travatura, considerati liberi, possiede $2n$ gradi di libertà, se n è il numero dei nodi. Ogni asta, considerata rigida, introduce un grado di vincolo per cui i gradi di libertà dei nodi vincolati dalle aste risultano almeno $2n - a$, se a è il numero delle aste. Condizione necessaria affinché la travatura reticolare sia internamente isostatica è dunque:

$$2n - a = 3,$$

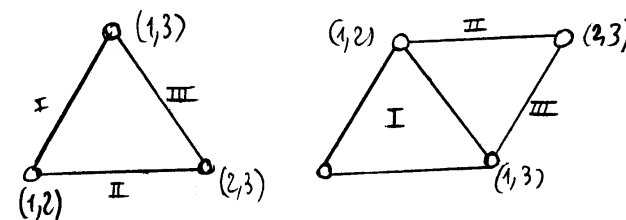
poiché 3 devono essere i suoi gradi di libertà nel piano.

Se la travatura reticolare è di tipo triangolato, cioè se è possibile generarla a partire da un triangolo per successiva aggiunta di due aste ed un nodo costituendo un ulteriore triangolo, essa è senz'altro

isostatica internamente.

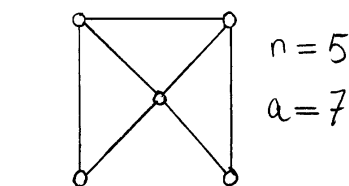
Infatti sia dato un sistema di tre aste costituenti un triangolo e incerniate alle estremità.

Con riferimento alla figura, le aste II e III, per poter subire un moto relativo rispetto all'asta I, devono ruotare at-



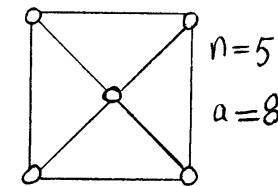
torno ai punti (1,2) e (1,3) rispettivamente. Ma in tal caso il punto (2,3) subirebbe un diverso spostamento nei due moti rigidi relativi che pertanto non sono ammissibili. Se si aggiungono due aste generando un ulteriore triangolo, si può ripetere il ragionamento considerando i moti rigidi delle due aste aggiunte rispetto al triangolo di partenza, e così via.

Se si genera un triangolo aggiungendo una sola asta la struttura diventa una volta iperstatica internamente.



isostatica internamente

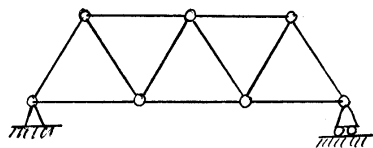
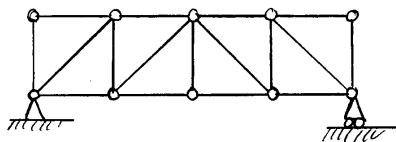
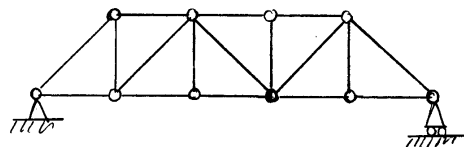
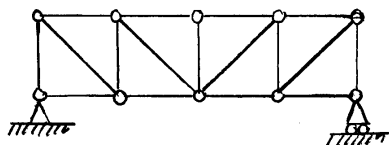
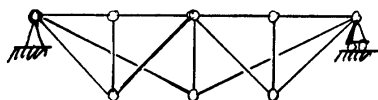
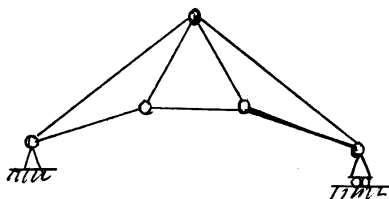
$$2n - a = 3$$



una volta iperstatica internamente

$$2n - a = 2$$

2.6.5 Esempi di travature reticolari piane

Travatura NevilleTravatura HoweTravatura PrattTravatura MohnieTravatura FinkCapriata semplice

2.6.6 Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo dei nodi

Si scrivono due equazioni di equilibrio alla traslazione per ogni nodo. Si hanno così a disposizione $2n$ equazioni. Le incognite sono le 3 reazioni dei vincoli esterni e gli a sforzi normali nelle aste. Se la struttura è isostatica risulta $2n = a + 3$, cioè il numero delle equazioni uguale al numero delle incognite. Non solo, se la struttura è isostatica, cioè se le aste sono anche ben disposte, allora la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è senz'altro invertibile e il sistema risolvibile in modo unico. È anche possibile

procedere predeterminando le reazioni dei vincoli esterni tramite le equazioni di equilibrio globale procedendo poi via equilibrio dei nodi. In tal caso tre delle $2n$ equazioni diventano identicamente soddisfatte e permettono un controllo dei risultati.

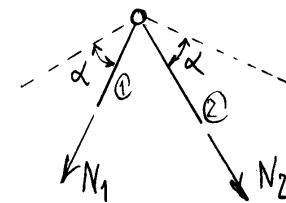
Se in un nodo convergono solo due aste di cui siano incogniti gli sforzi normali, le due equazioni di equilibrio permettono di determinare tali sforzi indipendentemente dalle altre equazioni di equilibrio. Se, una volta predeterminate le reazioni dei vincoli esterni, risulta possibile risolvere la travatura reticolare partendo da un nodo in cui convergono solo due aste e procedendo poi via equilibrio di nodi in cui convergono solo due aste con sforzi incogniti, si dice

che la travatura è a nodi canonici. In tal caso è possibile risolvere graficamente ogni singolo nodo tracciando un poligono delle forze.

Casi particolari

Se in un nodo non soggetto a carichi esterni (nodo scarico) convergono solo due aste, lo sforzo normale nelle due aste è nullo (aste scariche):

Infatti:



Oppure:

L'equilibrio sotto due forze sussiste se e solo se le due forze hanno stessa retta d'azione, modulo uguale e verso opposto

Equilibrio alla traslazione del nodo nella direzione ortogonale all'asta ②:

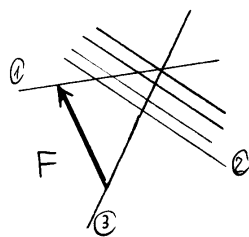
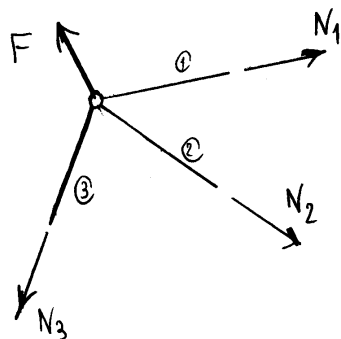
$$N_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

Equilibrio alla traslazione del nodo nella direzione ortogonale all'asta ①:

$$N_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

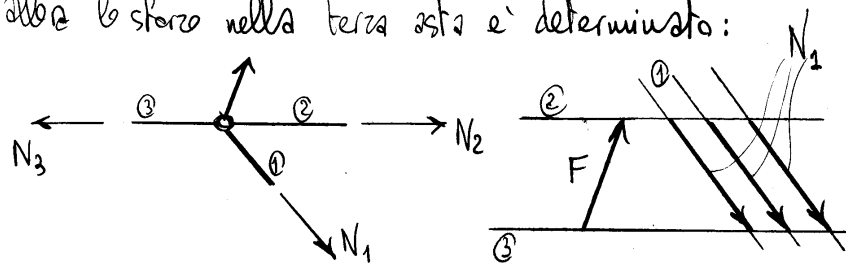
Se in un nodo convergono tre aste resta una indeterminazione:

minuzione:

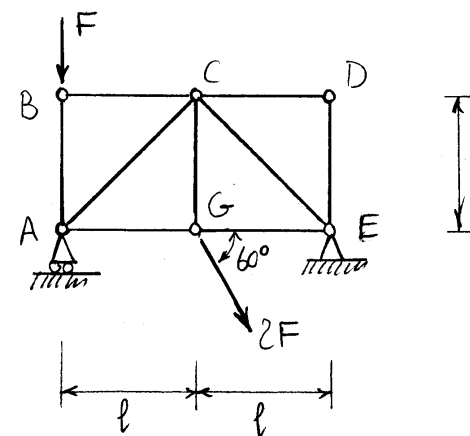


tracciata due parallele alle aste dalle due estremità della forza F e' possibile tracciare infinite parallele alla terza asta in modo che l'equilibrio di nodo sia soddisfatto

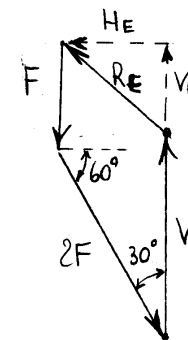
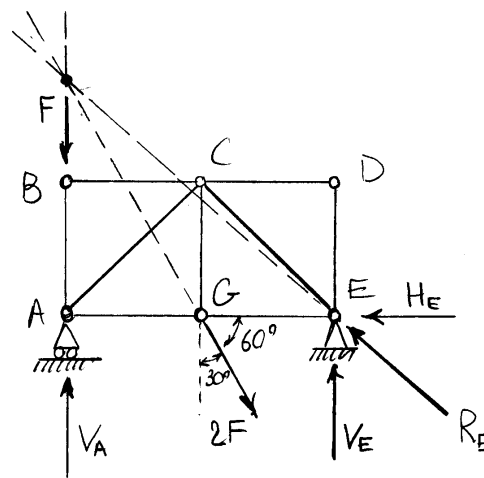
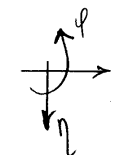
Se due di tre aste convergenti in un nodo sono allineate allora lo sforzo nella terza asta e' determinato:



Esempio



$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2 \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$



Equilibrio globale (3 incognite):

$$-H_E + 2F \sin 30^\circ = 0 \quad (\text{traslazione orizzontale})$$

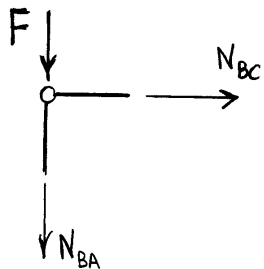
$$V_E 2l - 2F G \sin 30^\circ l = 0 \quad (\text{rotazione attorno ad A})$$

$$\begin{cases} H_E = F \\ V_E = \frac{\sqrt{3}}{2} F \end{cases} \Rightarrow R_E = \frac{\sqrt{7}}{2} F$$

$$-V_A + 2F \cos 30^\circ + F - V_E = 0 \quad (\text{traslazione verticale})$$

$$V_A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F$$

Equilibrio nodo B (due incognite):

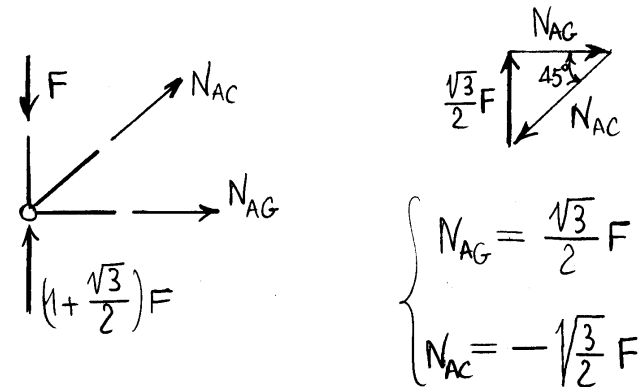


$$\begin{cases} N_{Bc} = 0 \\ N_{BA} = -F \end{cases}$$

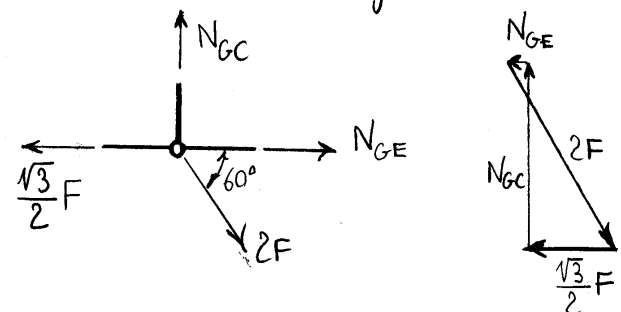
Equilibrio nodo D (due incognite):

$$\begin{cases} N_{Dc} = 0 \\ N_{DE} = 0 \end{cases} \quad (\text{Nodo scario})$$

Equilibrio nodo A (due incognite):

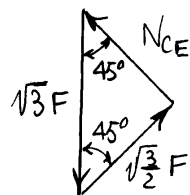
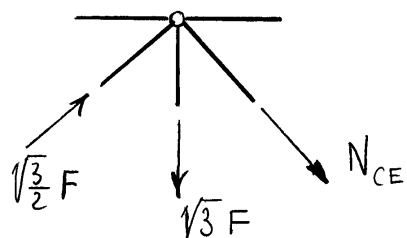


Equilibrio nodo G (due incognite):



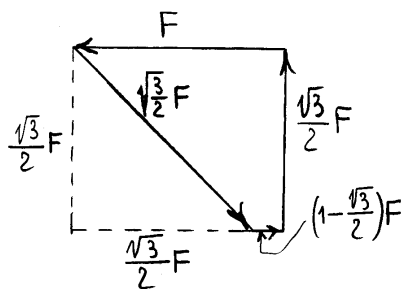
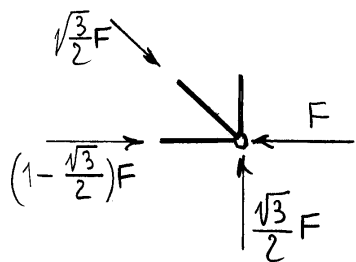
$$\begin{cases} N_{GE} = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F \\ N_{GC} = \sqrt{3} F \end{cases}$$

Equilibrio nodo C (una sola incognita)



$$N_{CE} = -\sqrt{\frac{3}{2}} F$$

Equilibrio nodo E (nessuna incognita)

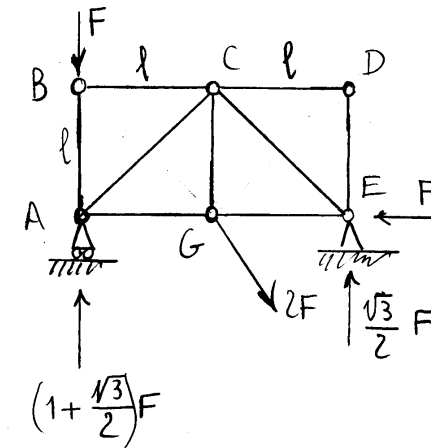


Aste		Tipo	Sforzo normale
Corrente inferiore	AG	tirante	$\frac{\sqrt{3}}{2} F$
	GE	puntone	$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F$
Corrente superiore	BC	scarica	0
	CD	scarica	0
Montanti	AB	puntone	F
	GC	tirante	$\sqrt{3} F$
	ED	scarica	0
Diagonali	AC	puntone	$\sqrt{\frac{3}{2}} F$
	EC	puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2} F$

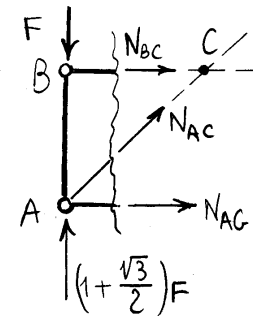
2.6.7 Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo delle sezioni di Ritter

È un metodo che, se applicabile, permette di determinare lo sforzo normale in un'asta se sono note le reazioni dei vincoli esterni. Per fare ciò basta, se possibile, dividere in due parti la travatura reticolare sezionando tre aste, tra le quali quella di cui si vuole determinare lo sforzo normale. Le due restanti aste o si incontrano in un punto, e quindi è possibile determinare lo sforzo normale richiesto scrivendo l'equilibrio alla rotazione rispetto a tale punto di una delle due parti della travatura reticolare, oppure sono parallele ed è quindi possibile scrivere l'equilibrio alla traslazione nella direzione perpendicolare all'asse delle due aste.

Esempio



Determiniamo, via metodo delle sezioni, lo sforzo normale N_{AG} nell'asta AG:

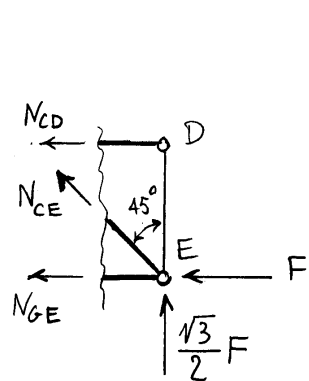


Equilibrio alla rotazione attorno al punto C:

$$N_{AG} l - \frac{\sqrt{3}}{2} F l = 0$$

$$N_{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

Determiniamo ora, sempre via metodo delle sezioni,
lo sforzo normale N_{CE} nell'asta CE:



$\uparrow +$

Equilibrio alla
trazione verticale:

$$N_{CE} \cos 45^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0$$

$$N_{CE} = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

Capitolo 3

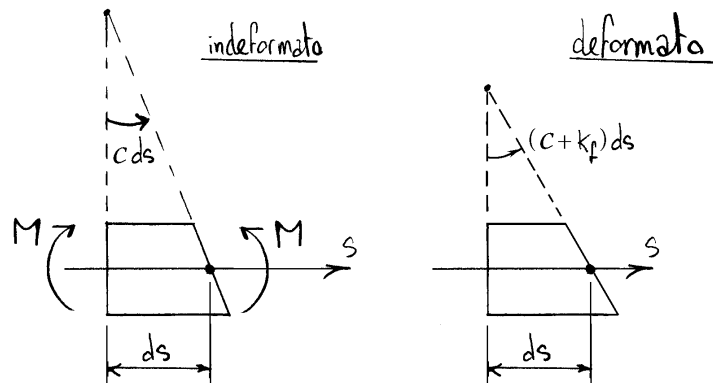
Calcolo di spostamenti in sistemi piani isostatici

3.1 Deformata della linea d'asse

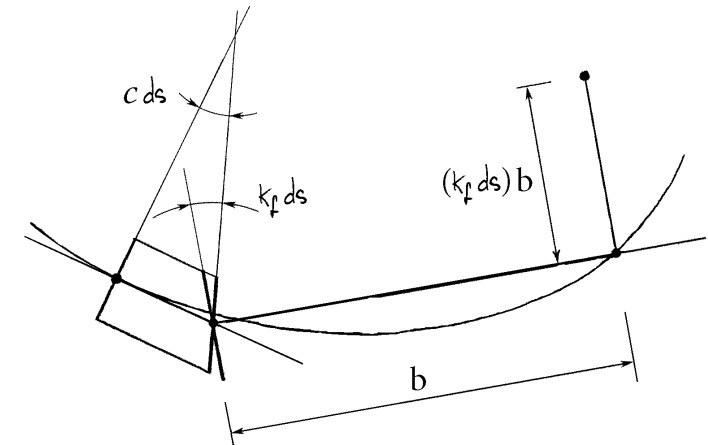
3.1.1 Momento flettente

Se una sezione è soggetta ad un momento flettente M si ha una rotazione relativa per unità di linea $k_f = M/EJ$ attorno all'asse neutro (baricentrico).

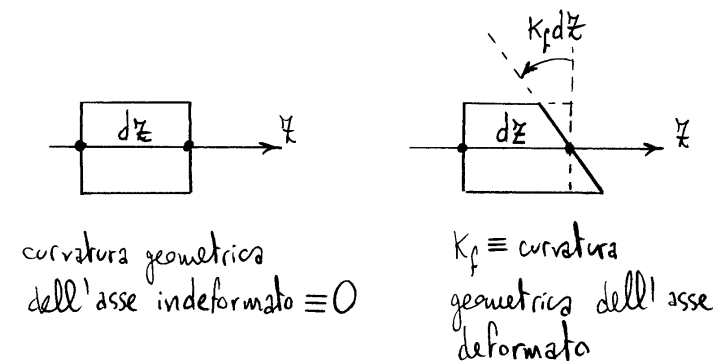
Se la curvatura geometrica della linea d'asse indeformata vale c , la curvatura geometrica della linea d'asse deformata vale $c + k_f$. La dilatazione della linea d'asse è invece nulla.



l'elemento di trave è intorno.

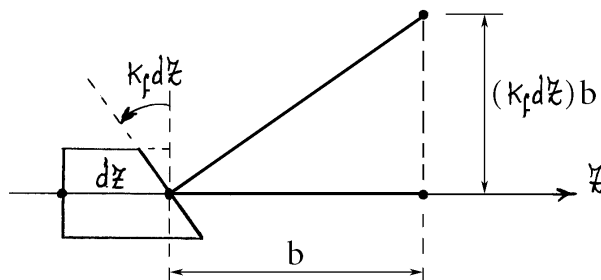


Nel caso di linea d'asse indeformata rettilinea la curvatura geometrica iniziale è nulla.



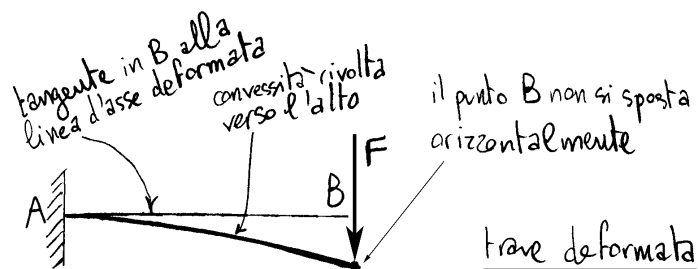
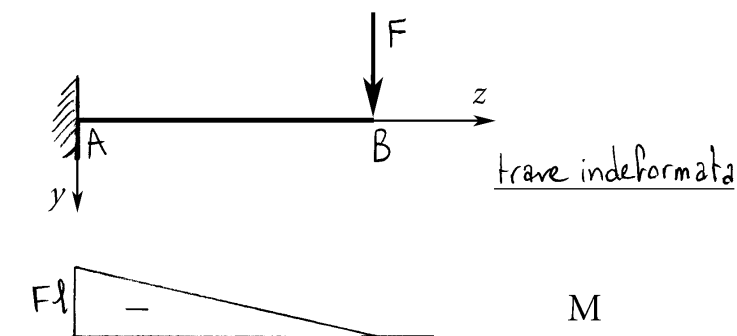
Inoltre, in tal caso, lo spostamento di un punto qualunque dell'asse dovuto alla deformazione di un qualunque elemento di trave avviene in direzione perpendico-

Si noti anche che se la linea d'asse iniziale è rettilinea, la linea d'asse deformata ha la convessità dalla parte delle



fibre che si allungano, cioè dalla parte delle fibre tese. Poichè è prassi disegnare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese allora la convessità è dalla parte in cui è tracciato il momento.

Si consideri quale esempio una mensola soggetta ad una forza concentrata all'estremità.



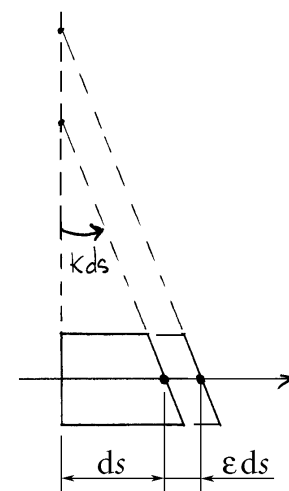
3.1.2 Forza normale

Se una sezione è soggetta ad una forza normale N , nell'elemento di trave si ha una traslazione relativa per unità di linea $\epsilon = N/EA$ nella direzione della tangente alla linea d'asse. La curvatura flessionale è invece nulla.

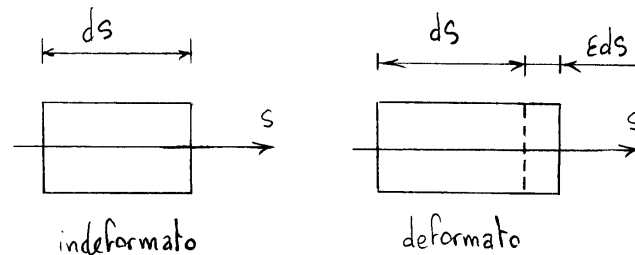
Se la curvatura geometrica iniziale vale k tale è anche la curvatura finale:

$$\frac{k ds}{(1 + \epsilon) ds} = \frac{k}{(1 + \epsilon)} \approx k(1 - \epsilon) \approx k,$$

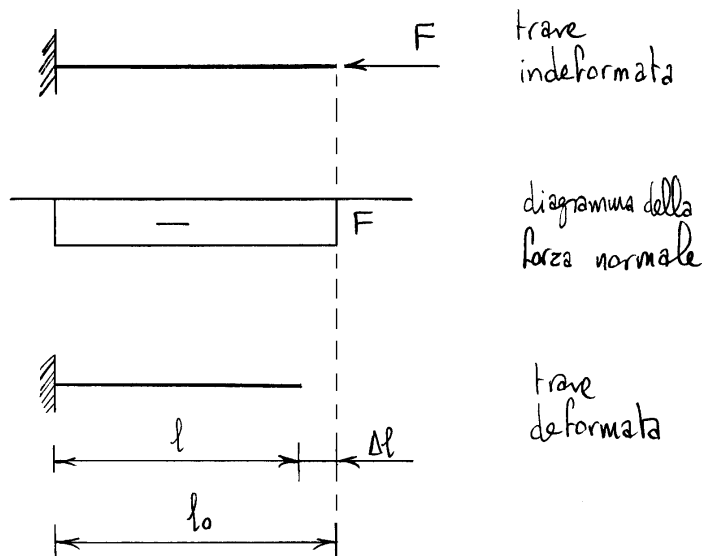
per l'ipotesi di piccoli spostamenti.



Se la linea d'asse indeformata è rettilinea, tale resta anche dopo la deformazione.



Si consideri quale esempio una mensola soggetta ad una forza concentrata all'estremità.

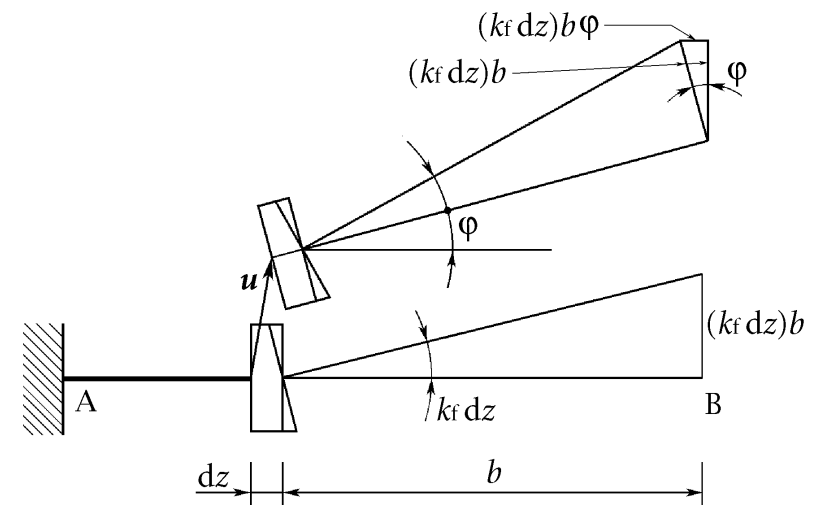


3.2 Metodo cinematico (o composizione cinematica degli spostamenti)

Si deforma un elemento di trave per volta, si calcola il suo effetto sullo spostamento che si vuole calcolare e si sommano i contributi di tutti gli elementi, cioè si integra sulla linea d'asse.

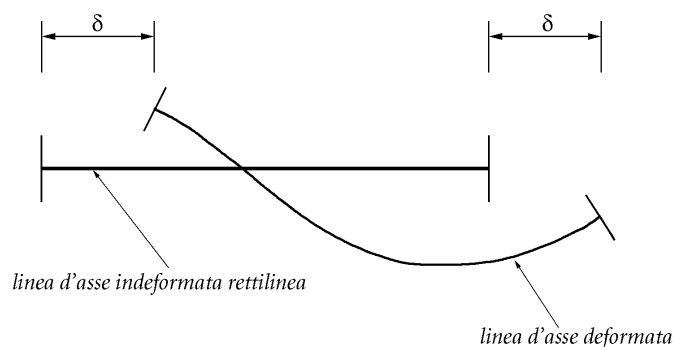
In generale, occorrerebbe sommare anche il contributo dovuto ai moti rigidi che ricompongono la continuità della deformata, ma tali contributi sono di un ordine superiore al primo negli spostamenti e vengono trascurati. In altre parole, per l'ipotesi di piccoli spostamenti il contributo di un elemento è indipendente dal fatto che gli altri elementi siano già deformati oppure no.

Per es., si verifichi tale fatto nel calcolo dello spostamento dell'estremità B della mensola AB di figura, supponendo che la mensola sia soggetta a solo momento flettente.



Si deformi la mensola partendo dall'incastro A e muovendosi verso l'estremità B. Per effetto della deformazione del tratto che precede un elemento generico, questi si trova traslato e ruotato e la sua deformazione viene ad agire in tale nuova configurazione. Nella figura sono riportati i contributi allo spostamento del punto B che si hanno deformando l'elemento sia nella configurazione deformata che in quella indeformata. Si può quindi facilmente verificare che i contributi allo spostamento del punto B nei due casi differiscono di termini di ordine superiore al primo negli spostamenti.

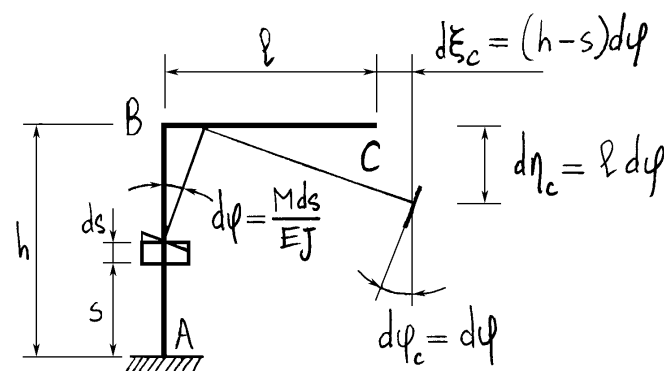
Si noti infine che se la trave è ad asse rettilineo e soggetta a solo momento flettente allora lo spostamento relativo tra due punti della linea d'asse avviene in direzione ortogonale alla linea d'asse. Infatti gli spostamenti dovuti alla deformazione degli elementi della trave avvengono perpendicolarmente alla linea d'asse mentre un moto rigido infinitesimo di tutta la trave provoca uno spostamento nella direzione della linea d'asse uguale per tutti i punti della trave. In nessun caso è quindi possibile generare uno spostamento relativo nella direzione della linea d'asse.



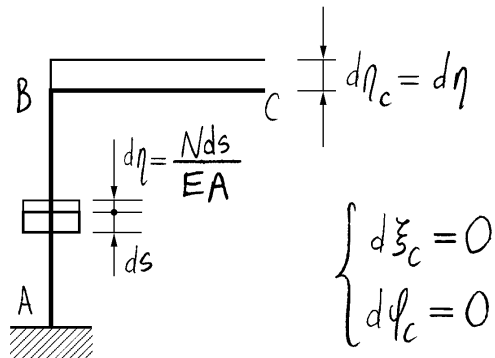
È chiaro che questa proprietà non vale per le travi ad asse curvo così come per le travi ad asse rettilineo soggette anche a forza normale.

3.2.1 Sistemi di travi prevalentemente inflesse

Se la curva delle pressioni si discosta "sufficientemente" (rispetto al problema in esame) dall'asse geometrico delle travi del sistema e se le travi sono "snelle", è possibile trascurare il contributo della forza normale al fine del calcolo di spostamenti e rotazioni. Infatti, il contributo ad uno spostamento dovuto alla deformazione di un elemento di trave



associata al momento flettente dipende dalla distanza dell'elemento dalla sezione di cui si sta valutando lo spostamento. Tale effetto amplificante è invece assente nel caso della deformazione associata alla forza normale.



Inoltre, il contributo della deformazione associata alla forza normale non dà alcun contributo alla rotazione di una sezione retta.

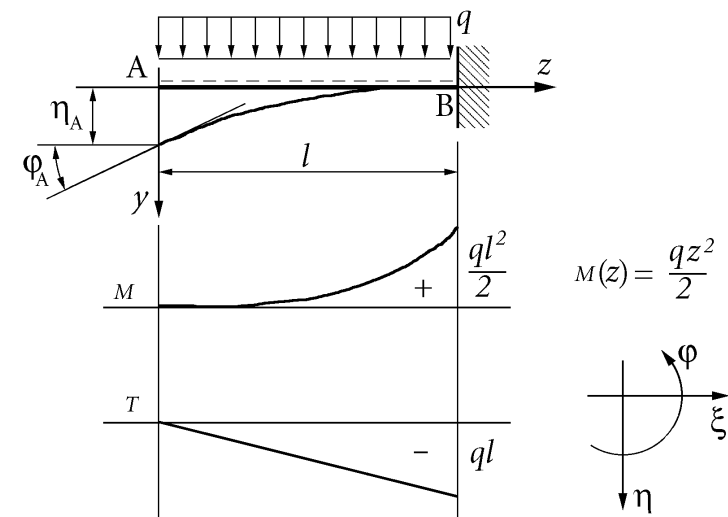
I sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente inflesse sono detti "telai" (telai piani

nel caso di travi piane). Per semplicità, nel seguito useremo tale denominazione quale sinonimo di sistema di travi prevalentemente inflesse.

I sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente soggetti a sforzo normale, quindi tali che la curva delle pressioni coincida o sia prossima alla linea d'asse del sistema, vengono invece detti *travature reticolari*.

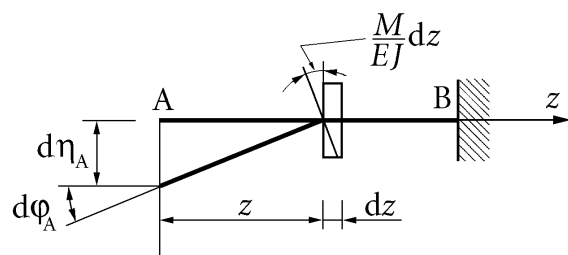
3.2.2 Mensola soggetta ad un carico ripartito

Le convenzioni di segno sugli spostamenti e sul momento flettente sono indicate in figura. Si noti che il segno del



momento, indicato dal tratteggio nella parte superiore (il momento positivo tende le fibre superiori), è stato sganciato dall'orientazione dell'asse z .

Per calcolare gli spostamenti relativi dell'estremità A rispetto alla estremità B occorre sommare (cioè integrare) i contributi di tutti gli elementi che compongono la trave, contributi valutati tenendo fissa l'estremità B. Tenendo conto che l'estremità B è incastrata, gli spostamenti relativi tra A e B forniscono direttamente gli spostamenti dell'estremità libera A.



Per quel che riguarda la rotazione globale φ_A dell'estremità A si ottiene:

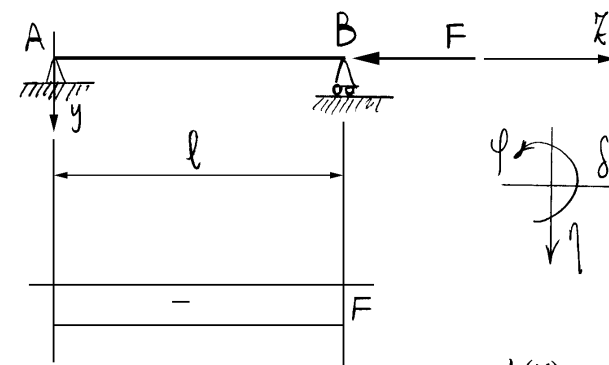
$$d\varphi_A = \frac{M}{EJ} dz \Rightarrow \varphi_A = \int_0^l \frac{qz^2}{2} \frac{dz}{EJ} = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Per lo spostamento verticale η_A dell'estremità A si ha invece:

$$d\eta_A = \left(\frac{M}{EJ} dz\right) z \Rightarrow \eta_A = \int_0^l \frac{qz^3}{2} \frac{dz}{EJ} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

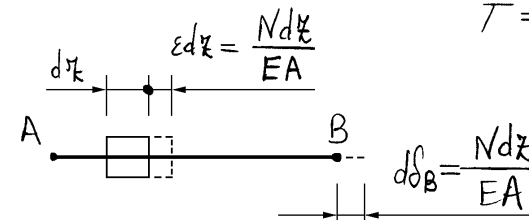
Si ricordi infine che, essendo la trave ad asse rettilineo, lo spostamento orizzontale ξ_A di A è nullo.

3.2.3 Trave appoggiata soggetta a forza normale



$$N(z) = -F$$

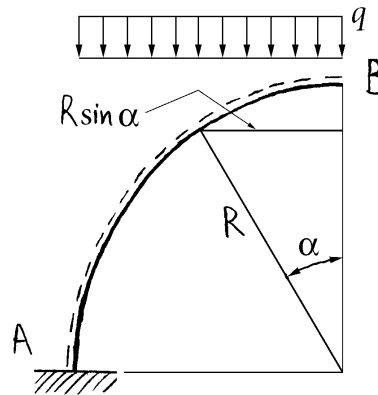
$$T = M = 0$$



$$\delta_B - \delta_A = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = - \int_0^l \frac{F dz}{EA}$$

$$\delta_A = 0 \Rightarrow \delta_B = - \frac{Fl}{EA}$$

3.2.4 Arco circolare soggetto ad un carico ripartito



$$\begin{cases} \xi_A = 0 \\ \eta_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\varphi_B = \frac{MR}{EJ} d\alpha \\ d\eta_B = \frac{MR^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha \\ d\xi_B = \frac{MR^2}{EJ} (1 - \cos \alpha) d\alpha \end{cases}$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \varphi_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{2EJ} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8} \frac{qR^3}{EJ},$$

Caratteristiche della sollecitazione:

$$M(\alpha) = \frac{qR^2}{2} \sin^2 \alpha,$$

$$N(\alpha) = -qR \sin^2 \alpha,$$

$$T(\alpha) = qR \sin \alpha \cos \alpha.$$

poiché:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Per quel che riguarda lo spostamento verticale di B si ottiene:

$$\eta_B = \eta_A + \varphi_A R + \int_0^{\pi/2} \frac{MR^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha,$$

$$\eta_A = 0, \varphi_A = 0 \Rightarrow \eta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{qR^4}{3EJ},$$

Con riferimento allo schema di figura si ottiene:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_0^{\pi/2} \frac{MR}{EJ} d\alpha,$$

poiché:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha d\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) d\alpha = \\ &= \left[-\cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Infine, lo spostamento orizzontale di B risulta:

$$\xi_B = \xi_A + \varphi_A R + \int_0^{\pi/2} \frac{MR^2}{EJ} (1 - \cos \alpha) d\alpha,$$

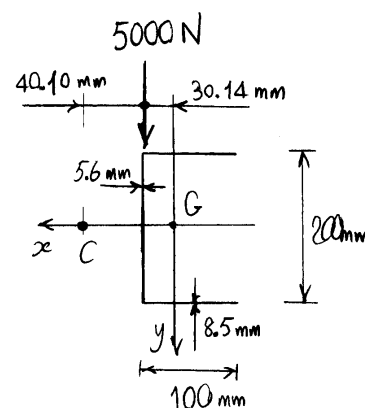
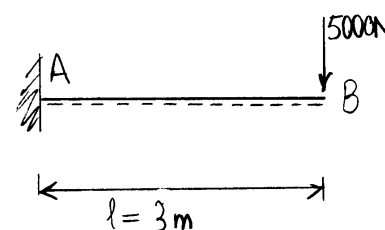
$$\xi_A = 0, \varphi_A = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_B &= \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \frac{qR^4}{EJ}, \end{aligned}$$

poiché:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha &= \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.2.5 Un esempio di calcolo di spostamenti col metodo cinematico in un sistema spaziale: mensola di sezione a C



$$A = 2820. \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

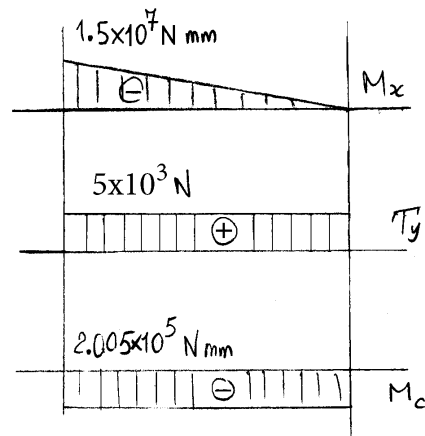
$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_t = 5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$d_c = 41.00 \text{ mm}$$

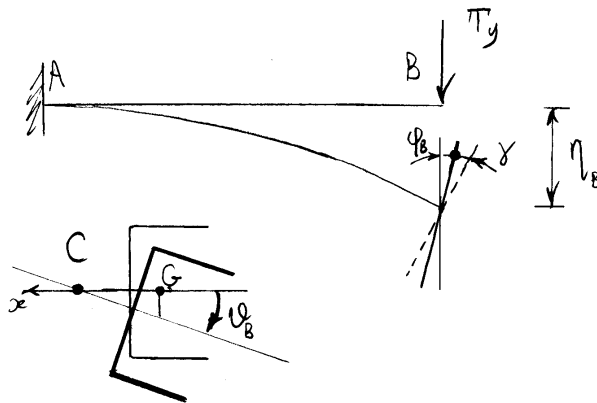
$$\chi_y = 2.906$$



$$M_c = -T_y d_c = -2.050 \times 10^5 \text{ N mm}$$

$$M_x^o = -T_y l = 1.5 \times 10^7 \text{ N mm}$$

Spostamenti dell'estremità libera:



$$d\varphi_B = \frac{M_x}{EJ_x} dz = -\frac{T_y(l-z)}{EJ_x} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_B = -\frac{T_y l^2}{2EJ_x}.$$

$$d\vartheta_B = \frac{M_c}{GJ_t} dz = -\frac{T_y d_c}{GJ_t}$$

$$\Rightarrow \vartheta_B = \frac{M_c l}{GJ_t} = -\frac{T_y d_c l}{GJ_t}$$

$$d\eta_B = -\frac{M_x}{EJ_x}(l-z)dz + \chi_y \frac{T_y}{GA} dz - \frac{M_c}{GJ_t}(d_c + d_G)dz$$

$$\Rightarrow \eta_B = \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \chi_y \frac{T_y l}{GA} - \frac{M_c(d_c + d_G)l}{GJ_t}$$

$$= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \gamma l - \vartheta(d_c + d_G).$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\varphi_B = \frac{-T_y l^2}{2EJ_x} = -5.426 \times 10^{-3} \text{ rad} = -0.31^\circ$$

$$\gamma = \chi_y \frac{T_y}{GA} = 6.443 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0.0037^\circ$$

$$\vartheta_B = \frac{M_c l}{GJ_t} = -0.146 \text{ rad} = -8.37^\circ$$

$$\begin{aligned} \eta_B &= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \gamma l - \vartheta_B(d_c + d_g) \\ &= 10.85 + 0.19 + 10.39 = 21.43 \text{ mm} \end{aligned}$$

3.3 Integrazione dell'equazione della linea elastica

Data una trave inflessa, omogenea nella sezione retta e ad asse rettilineo è possibile determinare il campo v degli spostamenti dei punti della linea d'asse integrando l'equazione costitutiva:

$$M = EJ\varphi', \quad (1)$$

dove al solito M è il momento flettente, E è il modulo di Young e J è il momento di inerzia.

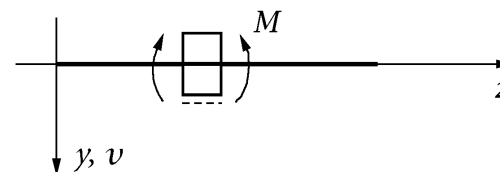
Si ricordi che il campo φ delle rotazioni delle sezioni rette dipende dal campo degli spostamenti v tramite il vincolo interno di trave inflessa:

$$\varphi = -v',$$

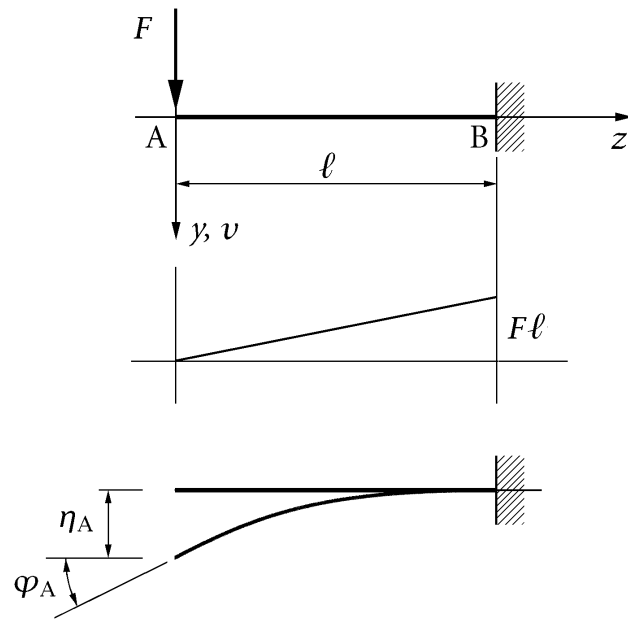
per cui l'equazione (1) diventa:

$$v'' = -\frac{M}{EJ},$$

detta *equazione della linea elastica*. Tale equazione va associata alle opportune condizioni cinematiche dovute ai vincoli.



Quale esempio si consideri la mensola inflessa di figura, a sezione costante e soggetta ad un carico concentrato nell'e-



stremità libera. Alla sezione incastrata è impedito sia lo spostamento che la rotazione e quindi le condizioni cinematiche al contorno si scrivono:

$$v(\ell) = 0, \quad \varphi(\ell) = -v'(\ell) = 0.$$

Poiché il momento flettente vale $M = -Fz$, integrando l'equazione della linea elastica si ottiene:

$$v' = \frac{Fz^2}{2EJ} + c_1,$$

$$v = \frac{Fz^3}{6EJ} + c_1z + c_2.$$

Le costanti di integrazione c_1 e c_2 si ottengono imponendo le condizioni al contorno:

$$v(\ell) = 0 \Rightarrow \frac{F\ell^3}{6EJ} + c_1\ell + c_2 = 0,$$

$$v'(\ell) = 0 \Rightarrow \frac{F\ell^2}{2EJ} + c_1 = 0,$$

da cui:

$$c_1 = -\frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad c_2 = \frac{F\ell^3}{3EJ}.$$

Si ottengono quindi i seguenti campi di spostamento:

$$v = \frac{F}{6EJ} (z^3 - 3\ell^2z + 2\ell^3),$$

$$\varphi = \frac{F}{2EJ} (\ell^2 - z^2).$$

In particolare, la rotazione φ_A e lo spostamento verticale η_A dell'estremità libera della mensola valgono:

$$\varphi_A = \varphi(0) = \frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad \eta_A = v(0) = \frac{F\ell^3}{3EJ}.$$

3.4 Analogia di Mohr

Si è visto che il problema cinematico, nel caso di travi ad asse rettilineo, è retto dalle due seguenti equazioni differenziali:

$$v'' = -\frac{M}{EJ},$$

$$v' = -\varphi.$$

L'analogia di Mohr riguarda l'osservazione che la struttura di queste equazioni è analoga a quelle che reggono il problema statico di una trave ad asse rettilineo. Infatti si considerino le due equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione e alla traslazione ortogonale alla linea d'asse:

$$M^{*'} = T^*,$$

$$T^{*'} = -q^*,$$

dove l'asterisco in apice alle variabili serve a ricordare che queste riguardano il problema statico. Si derivi la prima di queste equazioni e si utilizzi la seconda per eliminare T^{*} . All'equazione che così si ottiene si associ la prima delle precedenti ottenendo due equazioni analoghe a quelle del problema cinematico:

$$M^{*''} = -q^*,$$

$$M^{*'} = -(-T^*).$$

In tale analogia allo spostamento v ortogonale alla linea d'asse corrisponde il momento flettente M^* , al rapporto M/EJ corrisponde il carico ripartito q^* ortogonale alla linea d'asse

e alla rotazione φ corrisponde il taglio T^* cambiato di segno:

$$v \Leftrightarrow M^*,$$

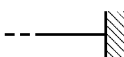
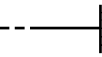
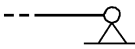
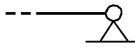
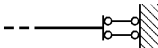
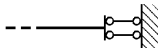
$$\frac{M}{EJ} \Leftrightarrow q^*,$$

$$\varphi \Leftrightarrow -T^*.$$

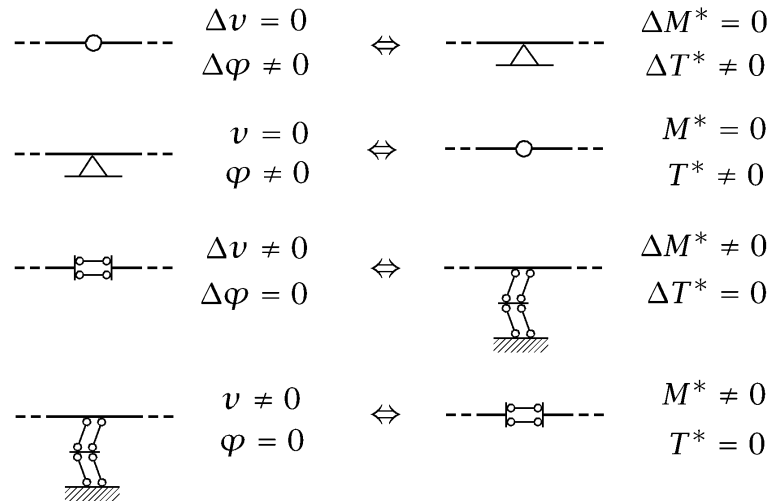
Risolvere un problema cinematico equivale quindi a risolvere un opportuno problema statico, con il vantaggio di potere utilizzare automaticamente tutte le tecniche sviluppate per risolvere i problemi statici.

Naturalmente, per passare dal problema cinematico al problema statico le condizioni al contorno cinematiche devono essere trasformate in condizioni al contorno sulle forze. Ai vincoli del problema cinematico vengono a corrispondere in tal modo opportuni vincoli del problema statico associato, come riportato nelle due tabelle seguenti, una per i vincoli di estremità ed una per quelli intermedi.

Vincoli di estremità:

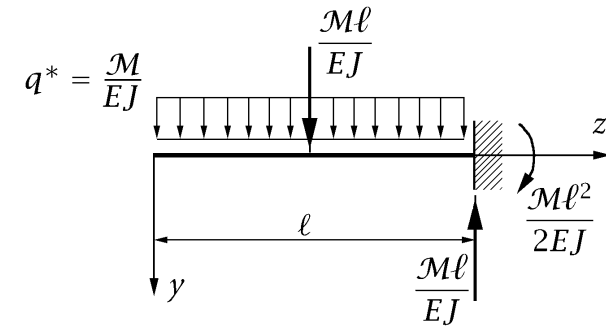
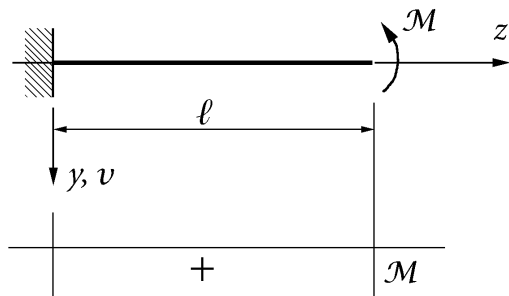
	$v \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* \neq 0$
	$v = 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* = 0$
	$v = 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* \neq 0$
	$v \neq 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* = 0$

Vincoli intermedi:



3.4.1 Mensola soggetta ad una coppia

Come primo esempio, si consideri una mensola soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ nell'estremità libera, della quale si vogliono valutare lo spostamento e la rotazione dell'estremità libera. Nell'analogia di Mohr alla mensola del problema cinematico corrisponde una mensola nel problema statico, con estremità



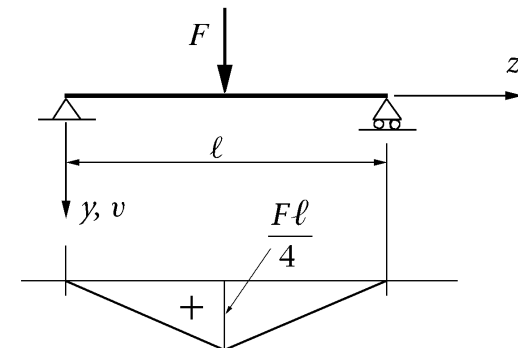
libera e incastro invertiti. Il momento del problema cinematico è costante ed uguale alla coppia applicata, e quindi il carico ripartito del problema statico vale $q^* = \mathcal{M}/EJ$. Risulta quindi:

$$v(\ell) = M^*(\ell) = -\frac{\mathcal{M}\ell^2}{2EJ},$$

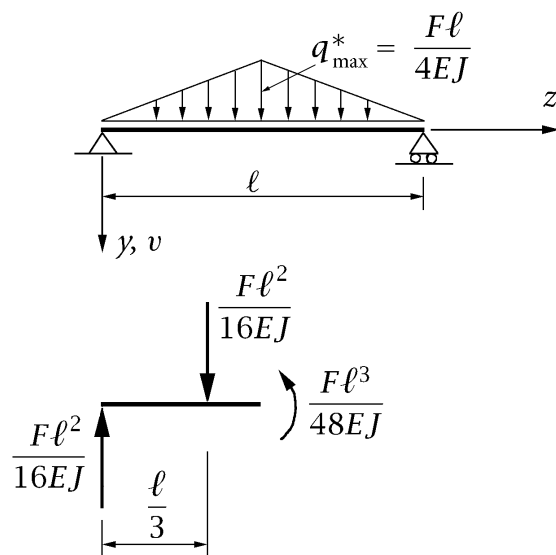
$$\varphi(\ell) = -T^*(\ell) = \frac{\mathcal{M}\ell}{EJ}.$$

3.4.2 Trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato

Come secondo esempio si consideri invece una trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzzeria F , della quale si vogliono valutare la freccia in mezzzeria e le rotazioni



delle sezioni sugli appoggi. Nell'analogia di Mohr alla trave appoggiata del problema cinematico corrisponde un'analogia trave appoggiata nel problema statico. Il momento flettente del problema cinematico è lineare e ne risulta un carico ripartito triangolare simmetrico per il problema statico associato.



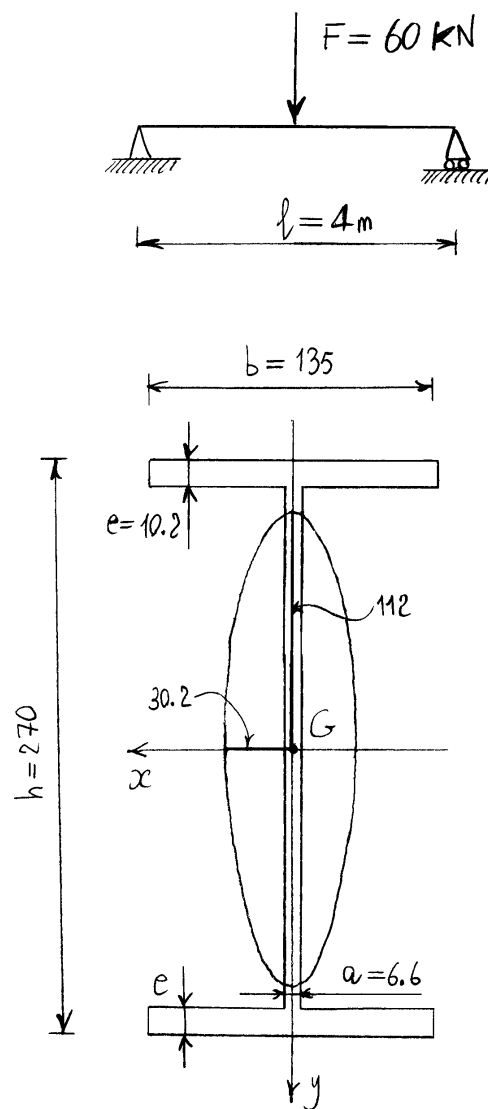
Ne consegue:

$$\varphi(0) = -T^*(0) = -\frac{F\ell^2}{16EJ},$$

$$\varphi(\ell) = -T^*(\ell) = \frac{F\ell^2}{16EJ},$$

$$v(\ell/2) = M^*(\ell/2) = \left(\frac{F\ell^2}{16EJ}\right) \frac{\ell}{3} = \frac{F\ell^3}{48EJ}.$$

3.4.3 Trave IPE270 appoggiata soggetta ad un carico concentrato



$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$J_x = 5790 \text{ cm}^4$$

nella figura le misure
sono in mm

Freccia in mezzera della trave

$$f = \nu\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{48EJ} =$$

$$= \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})^3}{48 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 6.58 \text{ mm}$$

$$\frac{f}{l} = \frac{6.58 \text{ mm}}{4 \times 10^3 \text{ mm}} = 0.001645 < 0.002 = \frac{1}{500}$$

Rotazione delle sezioni sugli appoggi

$$\varphi = \frac{F\ell^2}{16EJ} = \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})^2}{16 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} =$$

$$= 4.93 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.28^\circ$$

Curvatura flessionale massima

$$K_{\max} = \frac{M_{\max}}{EJ} = \frac{F\ell}{4EJ} =$$

$$= \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})}{4 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} =$$

$$= 4.93 \times 10^{-6} \text{ rad/mm} \Rightarrow$$

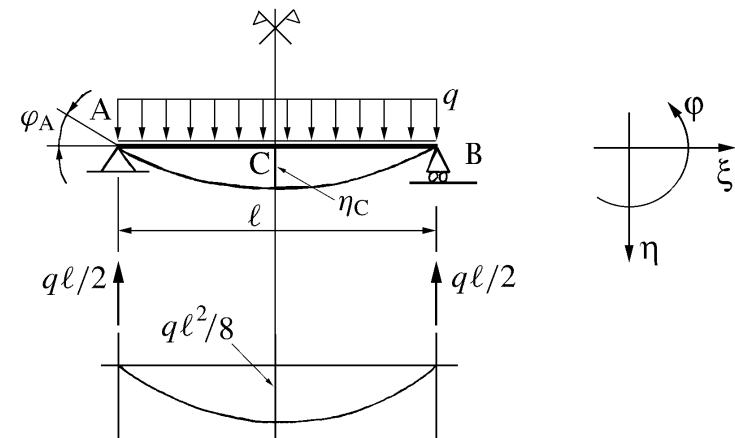
$$\Rightarrow \text{Raggio di curvatura minimo} = 203 \text{ m}$$

3.5 Strutture con uguale deformazione

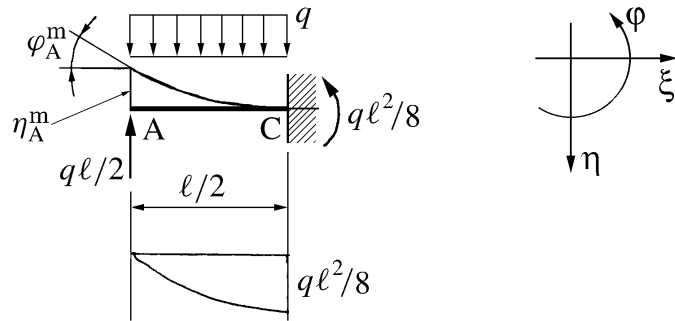
Si supponga che una trave, o una struttura senza sconnessioni interne, sia vincolata e caricata in due modi diversi ma conservando uguale deformazione. Uguale deformazione significa uguale curvatura, ed uguale dilatazione nel caso si tenga conto del contributo dello sforzo normale. Se la deformazione è uguale, i campi di spostamento corrispondenti ai due casi possono differire solo di un moto rigido. Se in uno dei due casi sono noti gli spostamenti (e le rotazioni), è sufficiente individuare il moto rigido differenza basandosi sul rispetto dei vincoli dell'altro caso, per determinarne gli spostamenti e le rotazioni.

3.5.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito

Come primo esempio si consideri la trave appoggiata di figura, soggetta ad un carico ripartito costante q . Se ne consideri il tratto AC incastrato nell'estremità C e soggetto, ol-



tre al carico ripartito, ad un carico concentrato $q\ell/2$ nell'estremità A. In tal modo il momento flettente della mensola coincide con quello del tratto AC della trave appoggiata e di conseguenza coincide anche la loro curvatura flessionale. Ne consegue che gli spostamenti nei due casi differiscono di un moto rigido. Poiché per simmetria la sezione C di mezzzeria della trave appoggiata non può ruotare e né traslare orizzontalmente, in accordo con l'incastro della mensola, il moto rigido coincide con una traslazione verticale. L'ampiezza della traslazione deve essere tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola, poiché nella trave appoggiata tale spostamento è nullo.



Una traslazione non modifica le rotazioni e dunque la rotazione φ_A della sezione A nella trave appoggiata coincide con l'analoga rotazione $\varphi_A^{(m)}$ valutata nella mensola:

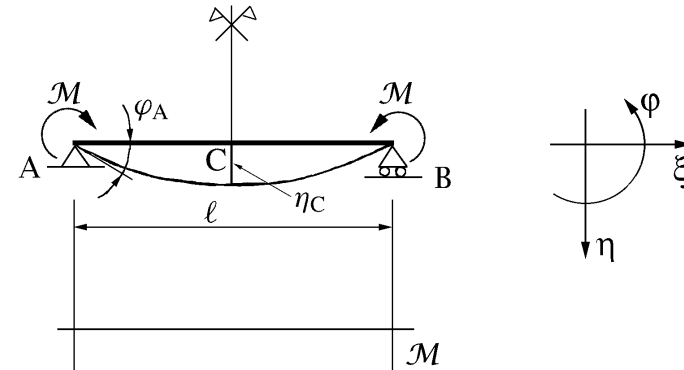
$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} = -\frac{\left(\frac{q\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2EJ} + \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{6EJ} = -\frac{q\ell^3}{24EJ}.$$

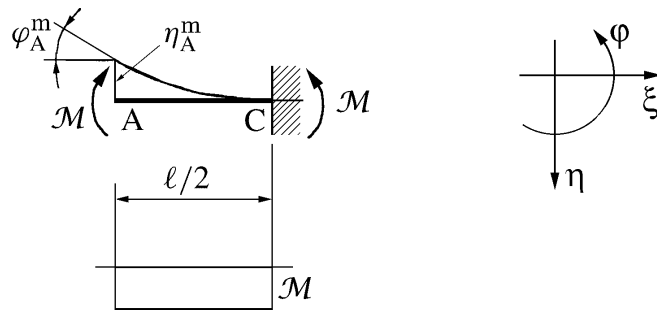
La freccia in mezzzeria η_C della trave appoggiata coincide invece con la traslazione rigida $\bar{\eta}$ che, come detto, annulla lo spostamento $\eta_A^{(m)}$ dell'estremità A della mensola:

$$\eta_C = \bar{\eta} = -\eta_A^{(m)} = \frac{\left(\frac{q\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3EJ} - \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

3.5.2 Trave appoggiata soggetta a due coppie concentrate simmetriche

Il secondo esempio è analogo al precedente, con la differenza che la trave appoggiata è soggetta a due coppie simmetriche $\mathcal{M}$ applicate alle due estremità. procedendo come prima, se ne consideri il tratto AC incastrato nell'estremità C e soggetto alla coppia concentrata $\mathcal{M}$ nell'estremità libera A. Ne consegue che gli spostamenti nei due casi differiscono di un moto rigido di traslazione verticale, di ampiezza tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola.





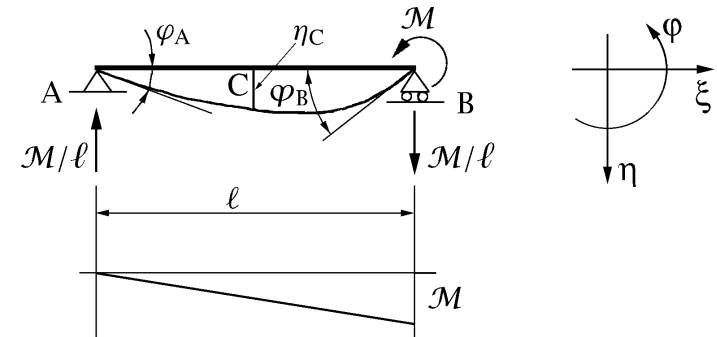
La rotazione φ_A della sezione A e la freccia in mezzeria η_C della trave appoggiata valgono quindi:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} = -\frac{\mathcal{M} \frac{\ell}{2}}{EJ} = -\frac{\mathcal{M} \ell}{2EJ},$$

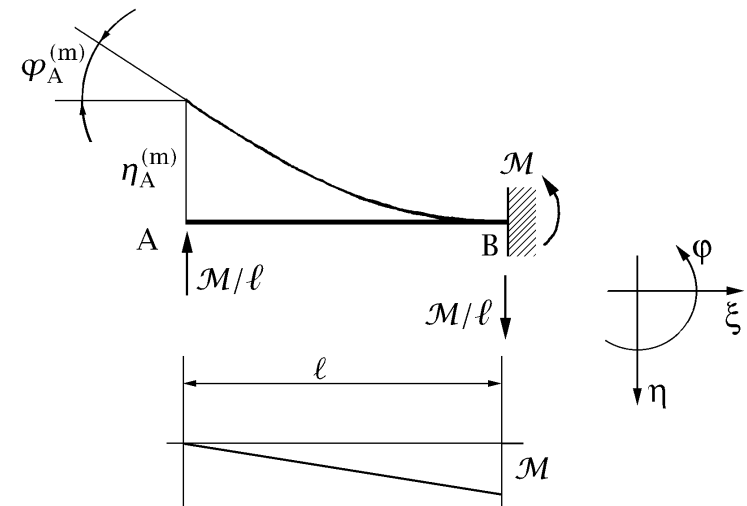
$$\eta_C = \bar{\eta} = -\eta_A^{(m)} = \frac{\mathcal{M} \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2EJ} = \frac{\mathcal{M} \ell^2}{8EJ}.$$

3.5.3 Trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata

Come terzo esempio si consideri la trave appoggiata di figura, soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ applicata alla estremità B. In tal caso non vi è simmetria. Si consideri allora l'intera trave AB incastrata nell'estremità B e soggetta ad un carico concentrato $\mathcal{M}/\ell$ nell'estremità A, in modo tale che il momento flettente della mensola coincide con quello della trave appoggiata e di conseguenza coincide anche la loro curvatura flessionale. Gli spostamenti nei due casi differiscono quindi di un moto rigido. Poiché la sezione B di estremità della trave appoggiata non può traslare, in accordo con l'incastro della mensola, il



moto rigido differenza deve coincidere con una rotazione attorno al punto B. L'ampiezza della rotazione deve essere tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola, poiché nella trave appoggiata tale spostamento è nullo.



La traslazione dell'estremità A della mensola vale:

$$\eta_A^{(m)} = -\frac{\left(\frac{\mathcal{M}}{\ell}\right) \ell^3}{3EJ} = -\frac{\mathcal{M}\ell^2}{3EJ},$$

e di conseguenza la rotazione rigida $\overline{\varphi}$ vale:

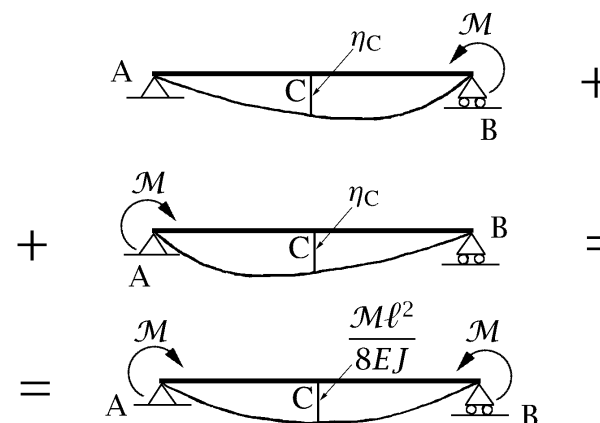
$$\overline{\varphi} = -\frac{\eta_A^{(m)}}{\ell} = \frac{\mathcal{M}\ell}{3EJ}.$$

Sovrapponendo i contributi della rotazione rigida a quelli valutati nella mensola si ottiene la rotazione φ_A dell'estremità A della trave appoggiata, mentre la rotazione φ_B dell'estremità B coincide con la rotazione rigida $\overline{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \varphi_A^{(m)} + \overline{\varphi} = -\frac{\left(\frac{\mathcal{M}}{\ell}\right) \ell^2}{2EJ} + \frac{\mathcal{M}\ell}{3EJ} = -\frac{\mathcal{M}\ell}{6EJ}, \\ \varphi_B &= \overline{\varphi} = \frac{\mathcal{M}\ell}{3EJ}.\end{aligned}$$

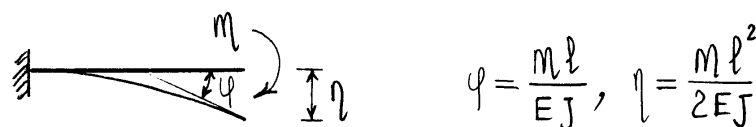
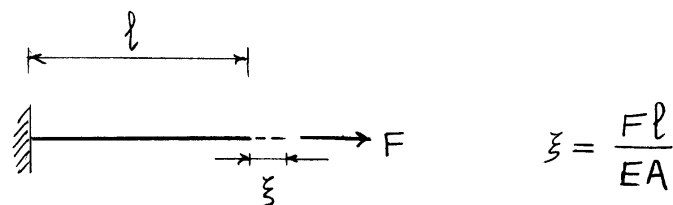
Per calcolare infine la freccia in mezzzeria è sufficiente sommare i due casi simmetrici con la coppia applicata prima ad una estremità e poi nell'altra ottenendo così il caso della trave appoggiata soggetta, nelle estremità, a due coppie simmetriche. Poiché le due soluzioni devono essere l'una la simmetrica dell'altra e poiché la sezione di mezzzeria si trova sull'asse di simmetria, la freccia in mezzzeria coincide nei due casi. Sovrapponendo gli effetti si ottiene quindi:

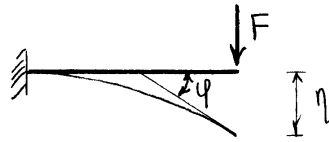
$$\eta_C + \eta_C = \frac{\mathcal{M}\ell^2}{8EJ}, \quad \Rightarrow \quad \eta_C = \frac{\mathcal{M}\ell^2}{16EJ}.$$



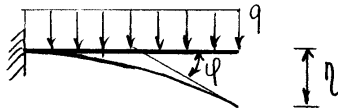
3.6 Coefficienti elastici

3.6.1 Mensole

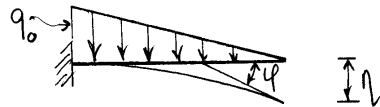




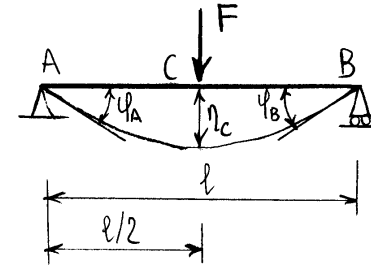
$$\varphi = \frac{Fl^2}{2EJ}, \quad \eta = \frac{Fl^3}{3EJ},$$



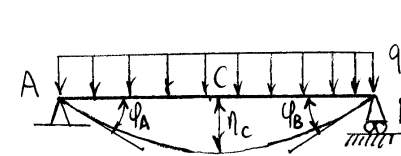
$$\varphi = \frac{ql^3}{6EJ}, \quad \eta = \frac{ql^4}{8EJ},$$



$$\varphi = \frac{q_0 l^3}{24EJ}, \quad \eta = \frac{q_0 l^4}{30EJ},$$

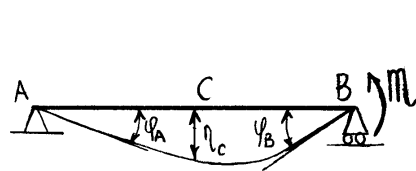


$$\begin{cases} \varphi_A = \varphi_B = \frac{Fl^2}{16EJ} \\ \eta_c = \frac{Fl^3}{48EJ} \end{cases}$$

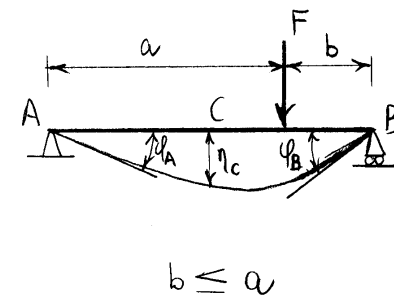


$$\begin{cases} \varphi_A = \varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ} \\ \eta_c = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$

3.6.2 Travi appoggiate

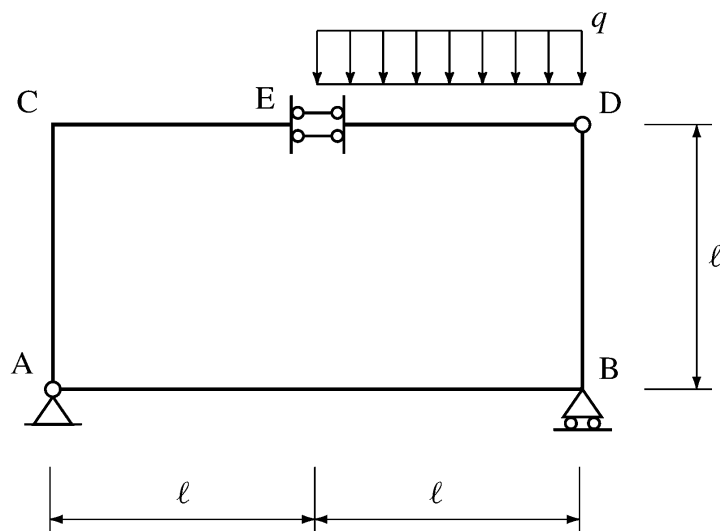


$$\begin{cases} \varphi_A = \frac{Ml}{6EJ}, \quad \varphi_B = \frac{Ml}{3EJ} \\ \eta_c = \frac{Ml^2}{16EJ} \end{cases}$$



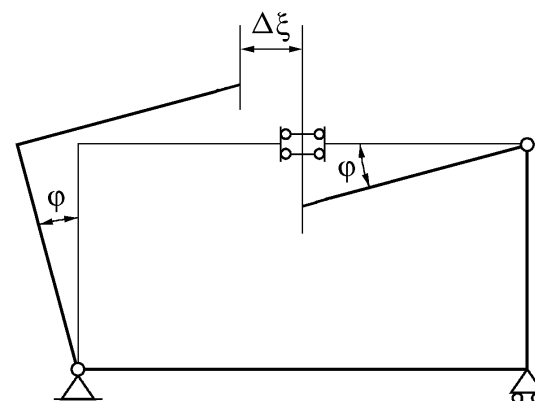
$$\begin{cases} \varphi_A = \frac{Fb(l^2 - b^2)}{6EJl} \\ \varphi_B = \frac{Fa(l^2 - a^2)}{6EJl} \\ \eta_c = \frac{Fb}{48EJ} (3l^2 - 4b^2) \end{cases}$$

3.7 Esercizio (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)

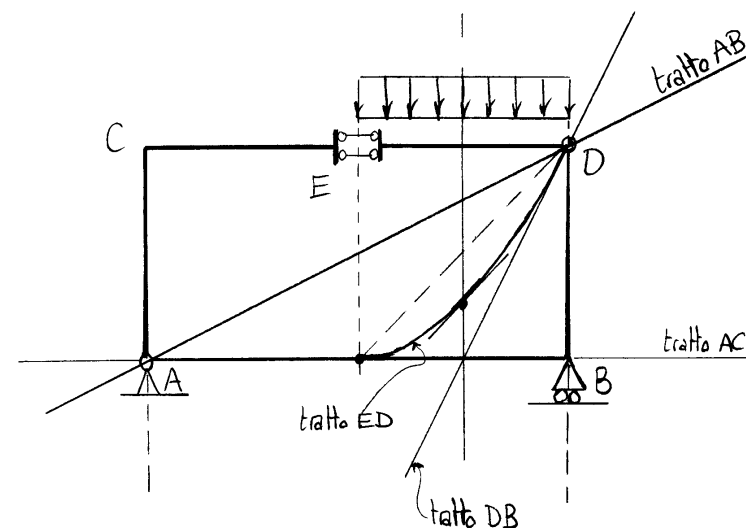


1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Disegnare la deformata della struttura.
5. Calcolare gli spostamenti e le rotazioni dei nodi e in particolare determinare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in E.

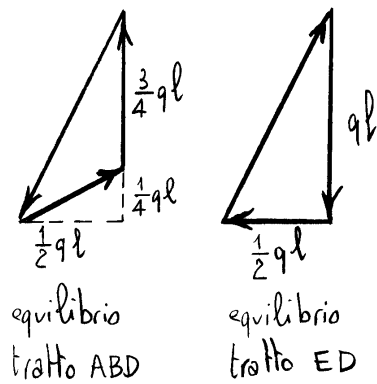
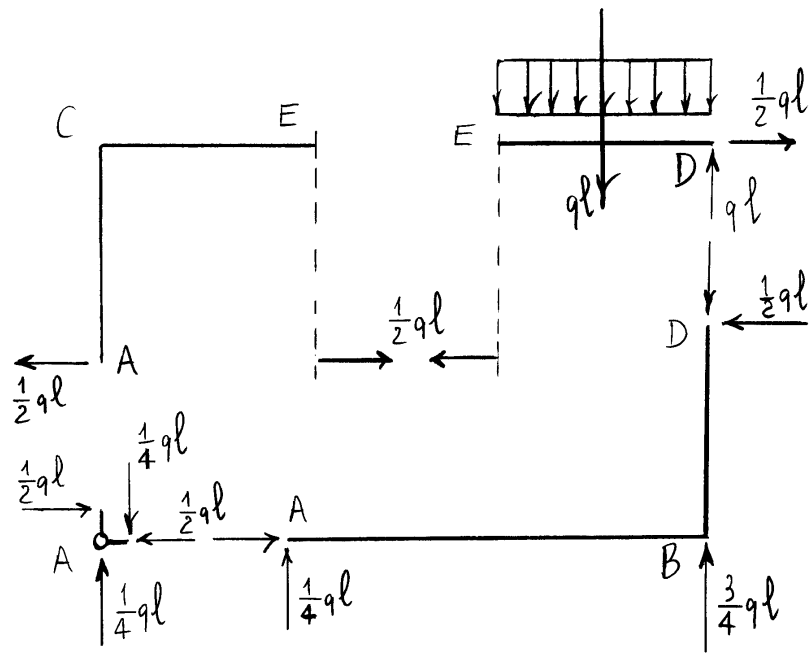
Verifica dell'isostaticità della struttura



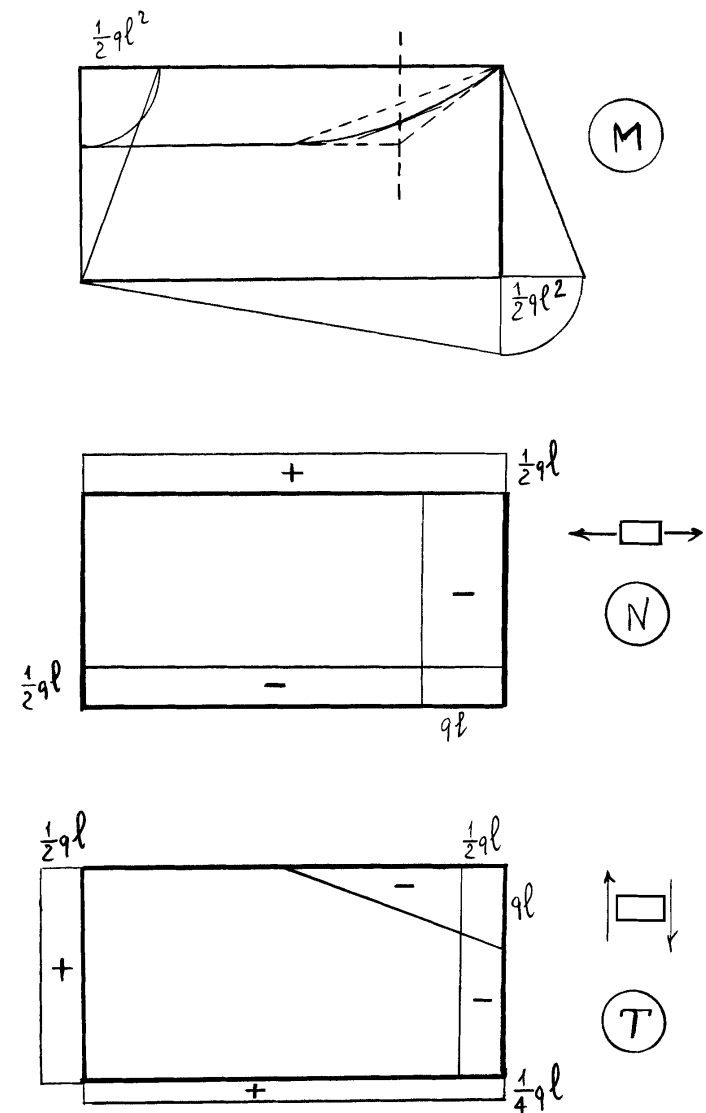
Curva delle pressioni



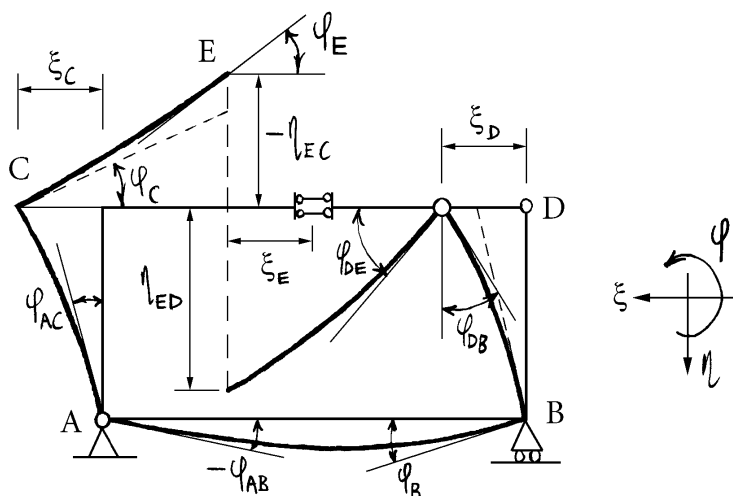
Reazioni interne e esterne



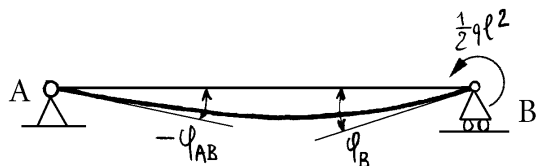
Diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale



Spostamenti e deformata della struttura



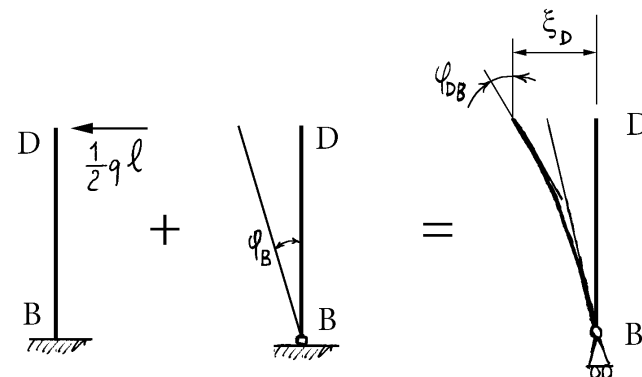
1. Tratto AB:



$$\varphi_{AB} = \frac{-\left(\frac{1}{2}ql^2\right)(2l)}{6EJ} = -\frac{ql^3}{6EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{\left(\frac{1}{2}ql^2\right)(2l)}{3EJ} = \frac{ql^3}{3EJ}$$

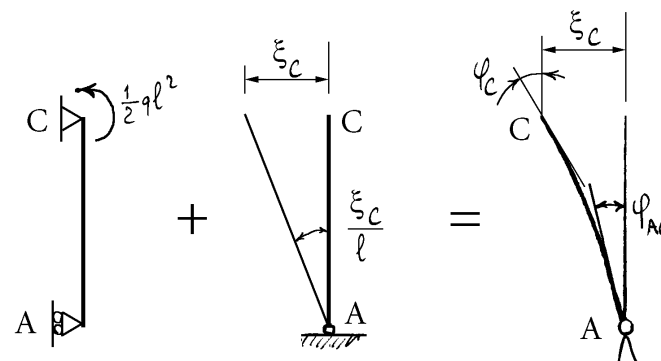
2. Tratto BD:



$$\xi_D = \xi_E = \xi_C = \frac{\left(\frac{1}{2}ql\right)l^3}{3EJ} + \varphi_B l = \frac{ql^4}{2EJ}$$

$$\varphi_{DB} = \frac{\left(\frac{1}{2}ql\right)l^2}{2EJ} + \varphi_B = \frac{7}{12} \frac{ql^3}{EJ}$$

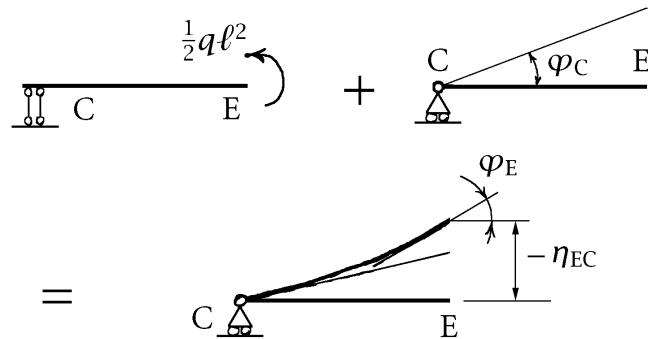
3. Tratto AC:



$$\varphi_{Ac} = \frac{\xi_c}{\ell} - \frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell}{6EJ} = \frac{5}{12} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

$$\varphi_c = \frac{\xi_c}{\ell} + \frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell}{3EJ} = \frac{2}{3} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

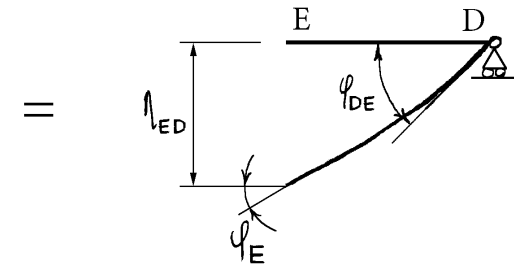
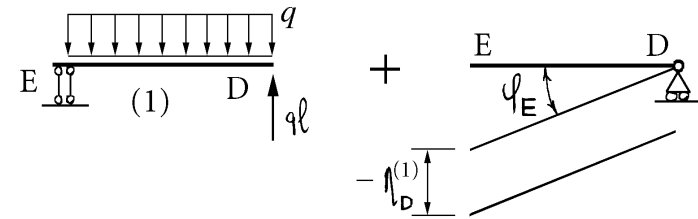
4. Tratto CE:



$$\varphi_E = \frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell}{EJ} + \varphi_C = \frac{7}{6} \frac{q\ell^3}{EJ},$$

$$\eta_{EC} = -\frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell^2}{2EJ} - \varphi_C \ell = -\frac{11}{12} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

5. Tratto ED:



$$\varphi_{DE} = \frac{(ql)\ell^2}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} + \varphi_E = \frac{3}{2} \frac{q\ell^3}{EJ},$$

$$\eta_D^{(1)} = -\frac{(ql)\ell^3}{3EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} = -\frac{5}{24} \frac{q\ell^4}{EJ},$$

$$\eta_{ED} = -\eta_D^{(1)} + \varphi_E \ell = \frac{11}{8} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

6. Spostamento verticale relativo in E

$$\Delta\eta_E = \eta_{ED} - \eta_{EC} = \frac{55}{24} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

3.8 Calcolo di spostamenti con il principio dei lavori virtuali

Data una struttura isostatica comunque caricata si vuole utilizzare il principio dei lavori virtuali per calcolare una componente di spostamento (oppure la rotazione) di una qualunque delle sue sezioni rette, sotto il dato sistema di forze.

A tal fine si osservi che in una struttura isostatica soggetta a un qualunque sistema di forze l'equilibrio è sempre soddisfatto, ovvero sono sempre determinabili (in modo unico) delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione equilibrate. Si osservi inoltre che per l'ipotesi di piccoli spostamenti, i campi degli spostamenti e delle deformazioni dovuti ai carichi applicati soddisfano le condizioni richieste ad un campo di spostamenti virtuali.

Se si vuole calcolare una componente di spostamento (o la rotazione) di una sezione, si scelga innanzitutto un sistema di forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrato ottenuto applicando una forza unitaria (una coppia unitaria) alla data sezione, forza avente la stessa direzione della componente di spostamento da determinare. Poichè l'equilibrio è soddisfatto ne consegue che $L_{ve} = L_{vi}$ per un qualunque campo di spostamenti virtuali, quindi anche per il campo di spostamenti e deformazioni dovuti ai carichi applicati. Con tale scelta il lavoro virtuale esterno coincide con lo spostamento incognito (oppure la rotazione incognita) che quindi coincide con il lavoro virtuale interno.

Il sistema isostatico soggetto ai dati carichi e del quale vuole determinarsi lo spostamento (o la rotazione) di una sezio-

ne viene detto *sistema degli spostamenti e delle deformazioni*, poichè fornisce il campo degli spostamenti virtuali, ma viene anche detto *sistema reale*, poichè rappresenta il sistema che effettivamente interessa e che si vuole risolvere. Nel seguito tale sistema e, se del caso, le quantità ad esso legate saranno indicate con il simbolo (r) .

Il sistema isostatico caricato da una forza (o da una coppia) unitaria viene invece detto *sistema delle forze e delle caratteristiche della sollecitazione*, poichè fornisce le forze e le caratteristiche della sollecitazione equilibrate, ma viene anche detto *sistema fittizio*, in quanto interessa solo quale mezzo per il calcolo del sistema reale. Nel seguito tale sistema e, se del caso, le quantità ad esso legate saranno indicate con il simbolo (f) . Con le convenzioni indicate, il lavoro virtuale interno, che uguaglia lo spostamento (o la rotazione) incognita, si scrive:

$$L_{vi} = \int_{\ell} (N^{(f)} \epsilon^{(r)} + M^{(f)} k_f^{(r)}) ds.$$

Si vedrà nel seguito che le deformazioni reali $\epsilon^{(r)}$ e $k_f^{(r)}$ oltre che ai carichi possono essere dovute anche a delle *distorsioni*. Finchè le deformazioni reali sono dovute ai soli carichi, e quindi alle sole caratteristiche della sollecitazione reali $N^{(r)}$ e $M^{(r)}$:

$$\epsilon^{(r)} = \frac{N^{(r)}}{EA}, \quad k_f^{(r)} = \frac{M^{(r)}}{EJ},$$

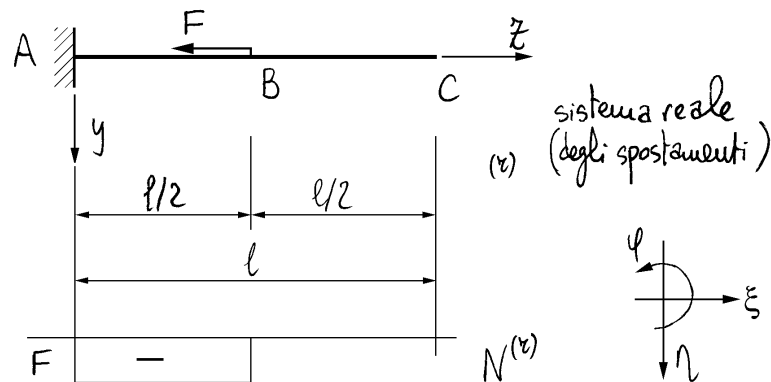
il lavoro virtuale interno diventa:

$$L_{vi} = \int_{\ell} \left(\frac{N^{(f)} N^{(r)}}{EA} + \frac{M^{(f)} M^{(r)}}{EJ} \right) ds.$$

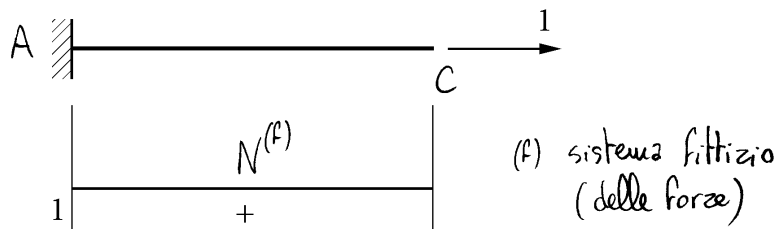
Infine, nel caso di strutture inflesse, ovvero sia nel caso in cui sia trascurabile l'effetto della forza normale sulla deformazione, il termine $N^{(r)}/EA$ è trascurabile e il lavoro virtuale interno diventa:

$$L_{vi} = \int_{\ell} \frac{M^{(f)} M^{(r)}}{EJ} ds.$$

3.8.1 Mensola soggetta ad una forza di tipo assiale



Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale dell'estremità libera C della mensola. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nell'estremità C, ad una forza concentrata orizzontale e unitaria concorde con lo spostamento positivo.



$$N^{(r)} = \begin{cases} -F & \text{per } z < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{per } z > \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon^{(r)} = \begin{cases} -F/EA & \text{per } z < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{per } z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

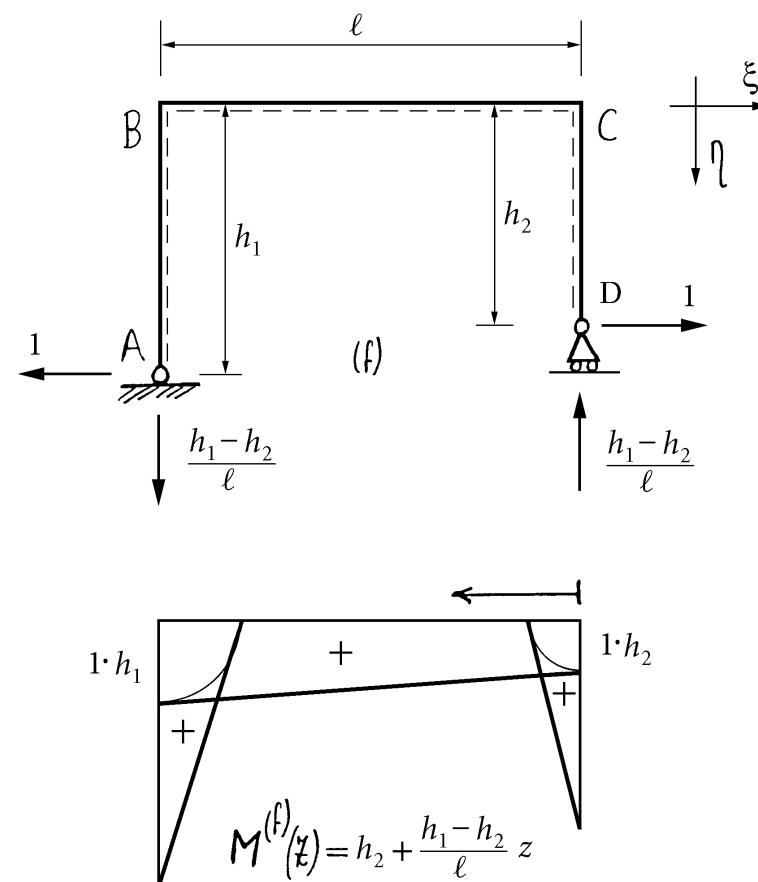
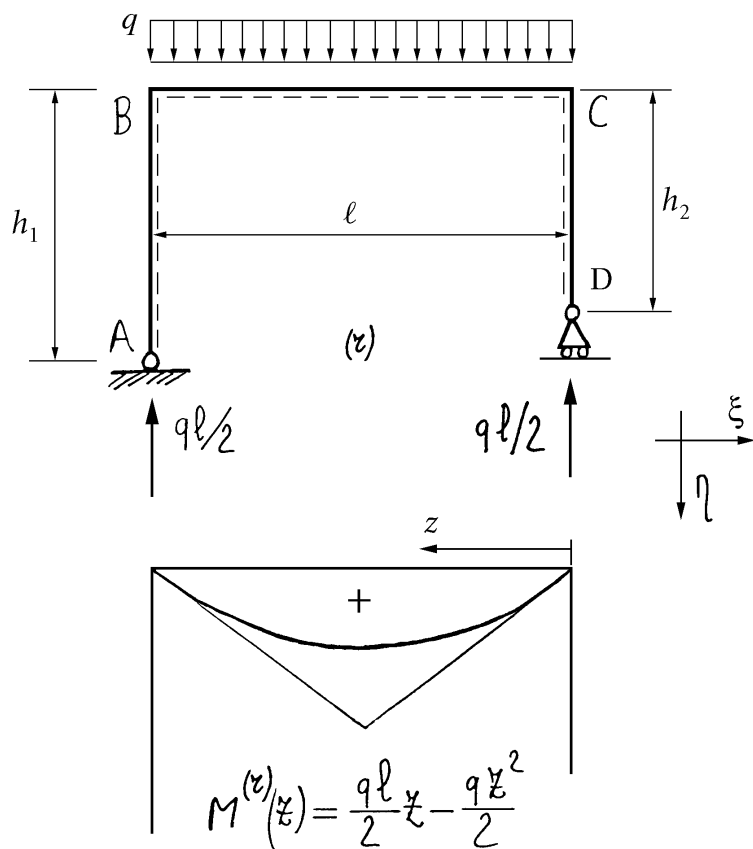
$$N^{(f)} = 1$$

$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_c$$

$$L_{vi} = \int_0^l N^{(f)} \varepsilon^{(r)} dz = - \int_0^{l/2} \frac{1 \cdot F}{EA} dz = - \frac{Fl}{2EA}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \xi_c = - \frac{Fl}{2EA}$$

3.8.2 Portale zoppo soggetto ad un carico ripartito



$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_D$$

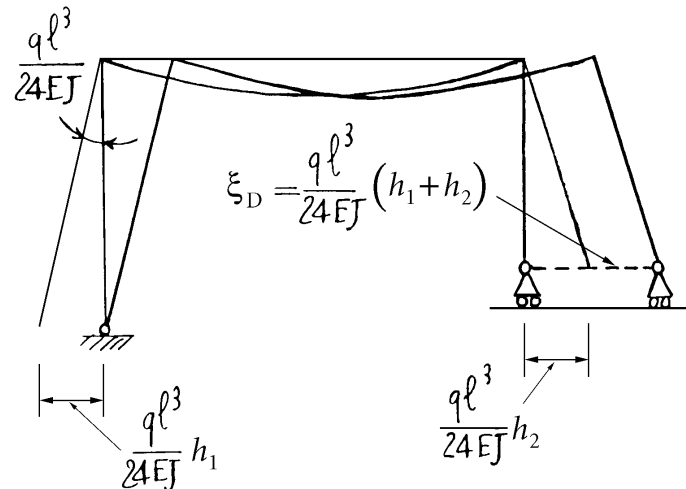
$$L_{vi} = \int_0^\ell \left(h_2 + \frac{h_1-h_2}{\ell} z \right) \left(\frac{q\ell}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) \frac{dz}{EJ} =$$

Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale della sezione D vincolata da un carrello a piano di scorrimento orizzontale. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nella sezione D, ad una forza concentrata orizzontale e unitaria concorde con lo spostamento positivo.

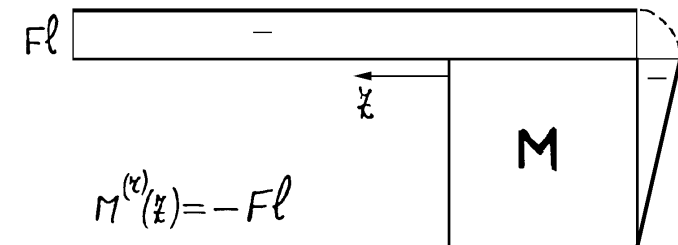
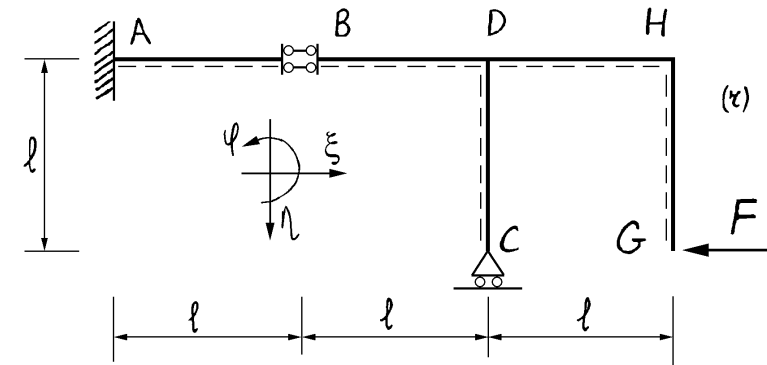
$$= \frac{q\ell^3}{4EJ} h_2 - \frac{q\ell^3}{6EJ} h_2 + \frac{q\ell^3}{6EJ} (h_1 - h_2) - \frac{q\ell^3}{8EJ} (h_1 - h_2) = \frac{q\ell^3}{24EJ} (h_1 + h_2)$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \xi_D = \frac{q\ell^3}{24EJ} (h_1 + h_2)$$

Verifica con la composizione cinematica degli spostamenti:

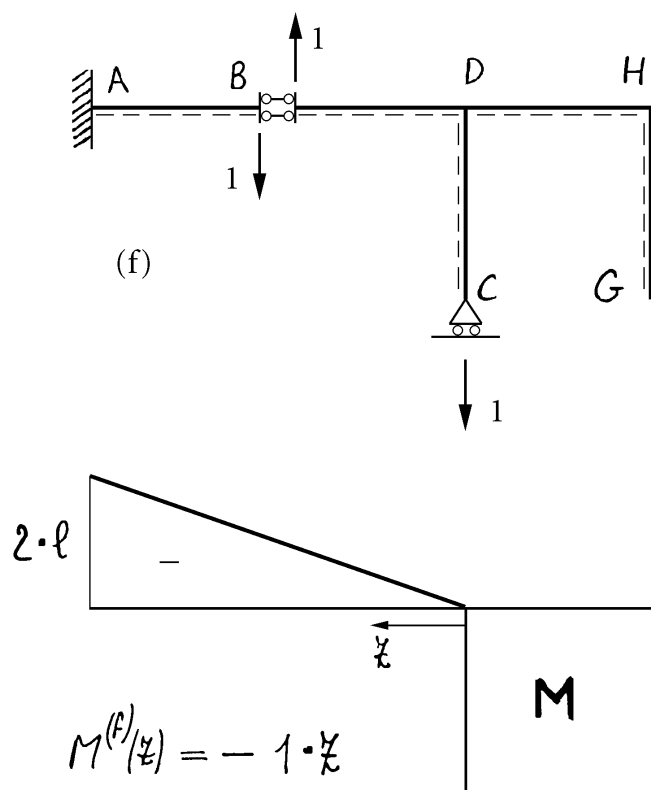


3.8.3 Telaio soggetto ad una forza concentrata



Si vuole calcolare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in B. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nelle due facce della sezione B, a due forze concentrate verticali, unitarie e di verso opposto, con quella di sinistra concorde con il verso positivo. In tal modo il lavoro virtuale esterno vale:

$$L_{ve} = 1 \cdot \Delta \eta_B = 1 \cdot (\eta_{BA} - \eta_{BD})$$

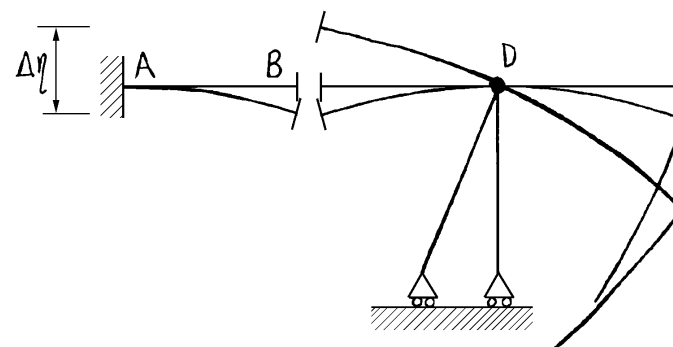


$$L_{vi} = \int_0^{2l} \left\{ -1 \cdot z (-Fl) \right\} \frac{dz}{EJ} =$$

$$= \frac{Fl}{EJ} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2l} = 2 \frac{Fl^3}{EJ}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \Delta \eta_B = 2 \frac{Fl^3}{EJ}$$

Verifica con la composizione cinematica degli spostamenti:



$$\left. \begin{aligned} \eta_{BA} &= \frac{Fl^3}{2EJ} \\ \varphi_{BA} &= -\frac{Fl^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{mensola AB}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{BD} &= \frac{Fl^3}{2EJ} \\ \varphi_{BD} &= \frac{Fl^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{Mensola BD (nodo D fisso)}$$

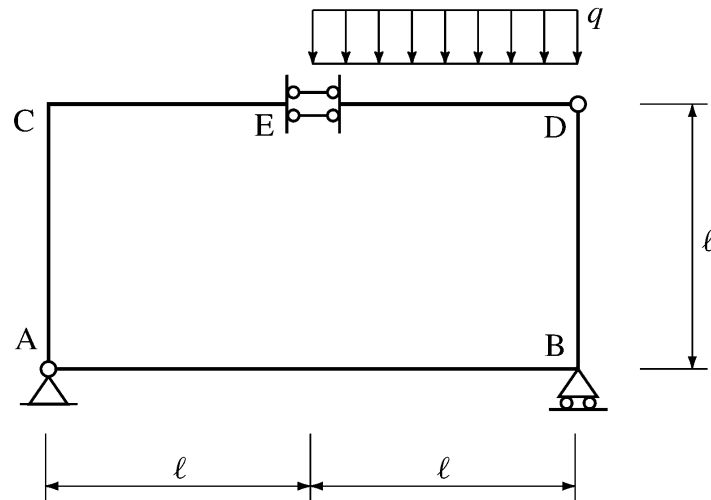
$$\varphi_{BD} + \varphi = \varphi_{BA} \Rightarrow \varphi = -2 \frac{Fl^2}{EJ} \quad (\varphi = \text{rotazione nodo D})$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{BD} &= -\frac{3Fl^3}{2EJ} \\ \varphi_{BD} &= -\frac{Fl^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{tratto BD (globale)}$$

$$\Delta \eta_B = \eta_{BA} - \eta_{BD} = 2 \frac{Fl^3}{EJ}$$

3.8.4 Esercizio 1 (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)

Si vuole determinare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in E della struttura chiusa riportata in figura e già risolta con la composizione cinematica degli spostamenti.

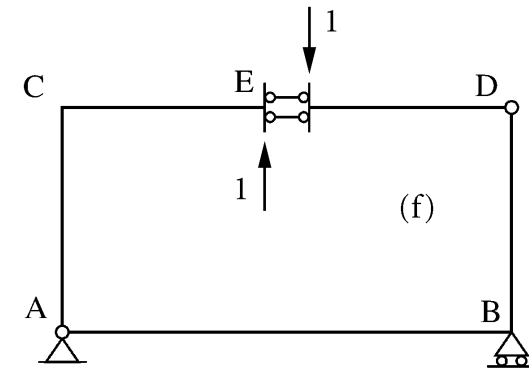


A Tale scopo la struttura fittizia viene caricata, nelle due facce della sezione E, da due forze concentrate verticali, unitarie e di verso opposto, con quella di destra concorde con il verso positivo. Ne consegue che il lavoro virtuale esterno vale:

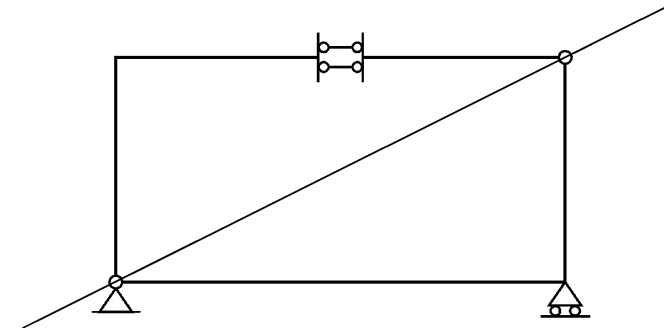
$$L_{ve} = 1 \cdot \eta_{ED} - 1 \cdot \eta_{EC} = 1 \cdot \Delta\eta_E.$$

Si noti che la struttura fittizia è soggetta a due forze autoequilibrate. Essendo tale struttura vincolata esternamente da tre vincoli semplici, le reazioni vincolari esterne sono nulle.

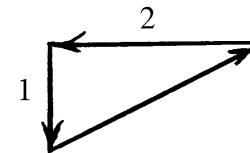
Struttura fittizia:



Curva delle pressioni della struttura fittizia:



Equilibrio tratto ED:



Reazioni interne e esterne della struttura fittizia:

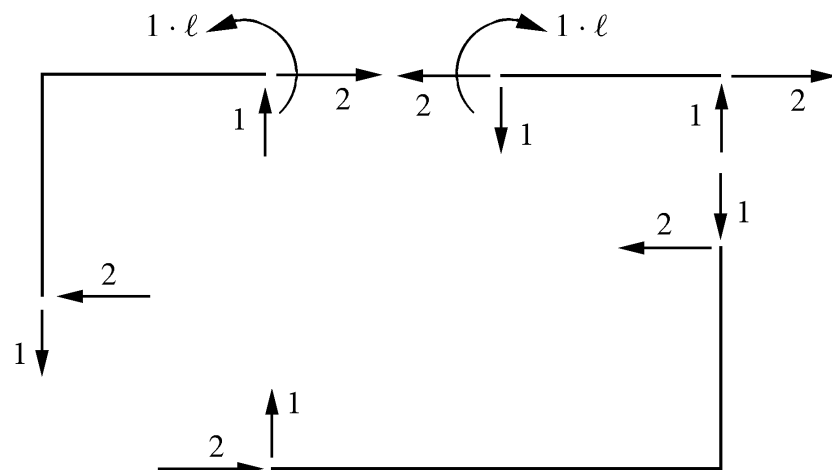
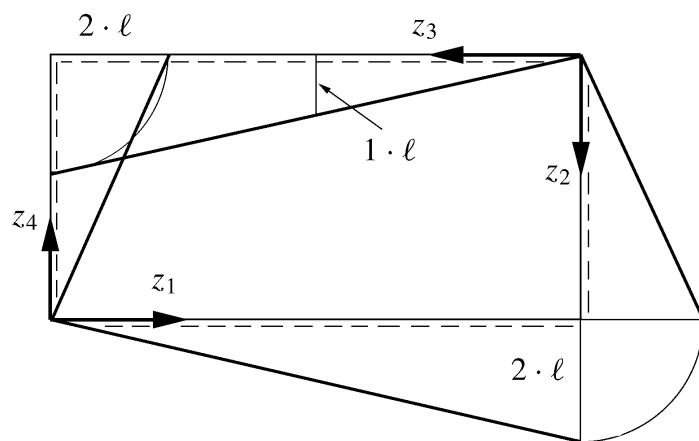


Diagramma del momento flettente della struttura fittizia:



Tenendo conto delle convenzioni indicate nel diagramma dei momenti, le equazioni dei momenti reale e fittizio risultano:

1. Tratto AB:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_1) = \frac{1}{4}q\ell z_1, \\ M^{(f)}(z_1) = 1 \cdot z_1, \end{cases} \quad 0 \leq z_1 \leq 2\ell;$$

2. Tratto BD:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_2) = \frac{1}{2}q\ell z_2, \\ M^{(f)}(z_2) = 2 \cdot z_2, \end{cases} \quad 0 \leq z_2 \leq \ell;$$

3. Tratto CD:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_3) = \begin{cases} q\ell z_3 - \frac{1}{2}qz_3^2, & 0 \leq z_3 \leq \ell, \\ \frac{1}{2}q\ell^2, & \ell \leq z_3 \leq 2\ell, \end{cases} \\ M^{(f)}(z_3) = 1 \cdot z_3, \quad 0 \leq z_3 \leq 2\ell; \end{cases}$$

4. Tratto AC:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_4) = \frac{1}{2}q\ell z_4, \\ M^{(f)}(z_4) = 2 \cdot z_4, \end{cases} \quad 0 \leq z_4 \leq \ell.$$

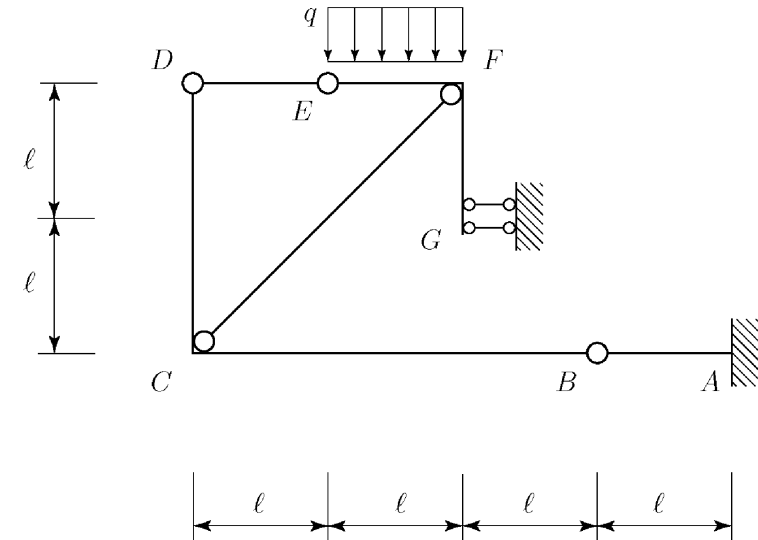
Il lavoro virtuale interno vale dunque:

$$\begin{aligned}
 L_{vi} &= \int_{\ell} \frac{M^{(r)} M^{(f)}}{EJ} ds = \\
 &= \frac{1 \cdot q}{EJ} \left\{ \int_0^{2\ell} \frac{1}{4} \ell z_1^2 dz_1 + \int_0^{\ell} \ell z_2^2 dz_2 + \right. \\
 &+ \left. \left(\int_0^{\ell} \left(\ell z_3^2 - \frac{1}{2} z_3^3 \right) dz_3 + \int_{\ell}^{2\ell} \frac{1}{2} \ell^2 z_3 dz_3 \right) + \int_0^{\ell} \ell z_4^2 dz_4 \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{8}{12} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \right\} \frac{1 \cdot q \ell^4}{EJ} = \\
 &= \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{8} \right) \frac{1 \cdot q \ell^4}{EJ} = \frac{55}{24} \left(\frac{1 \cdot q \ell^4}{EJ} \right),
 \end{aligned}$$

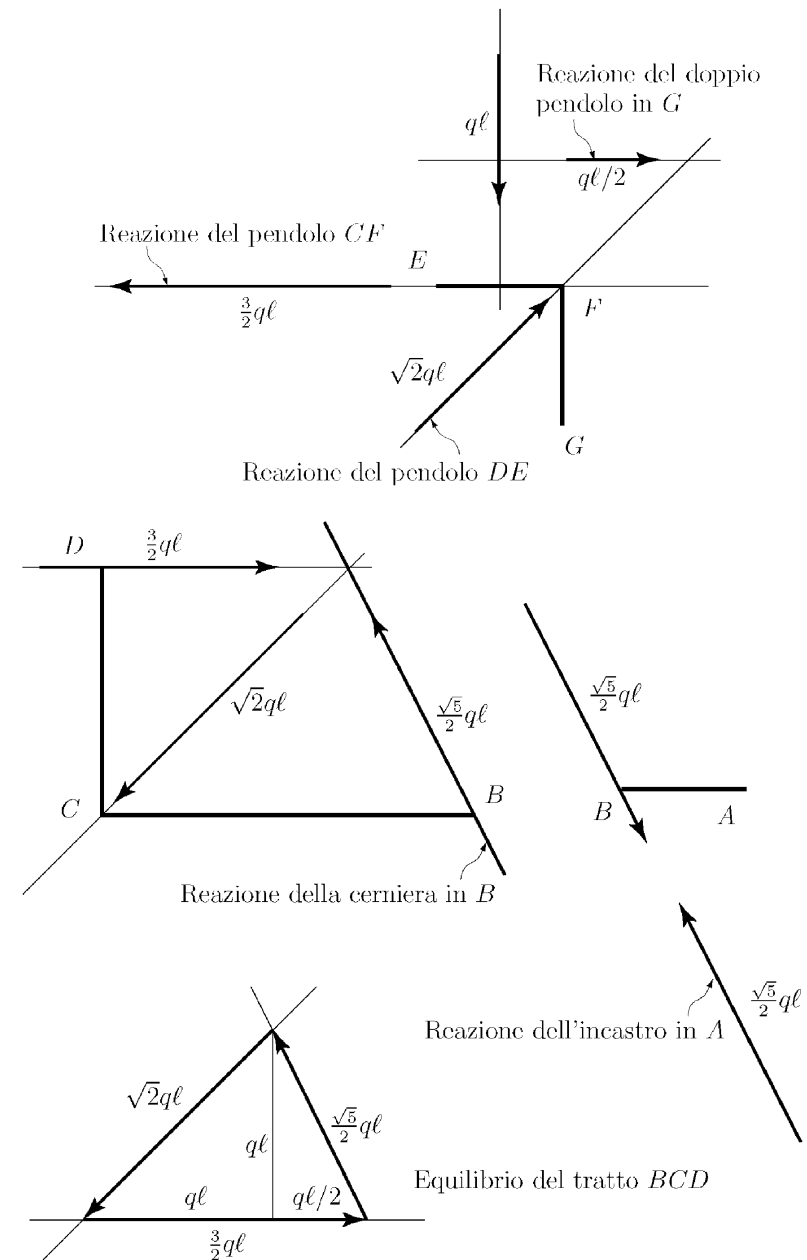
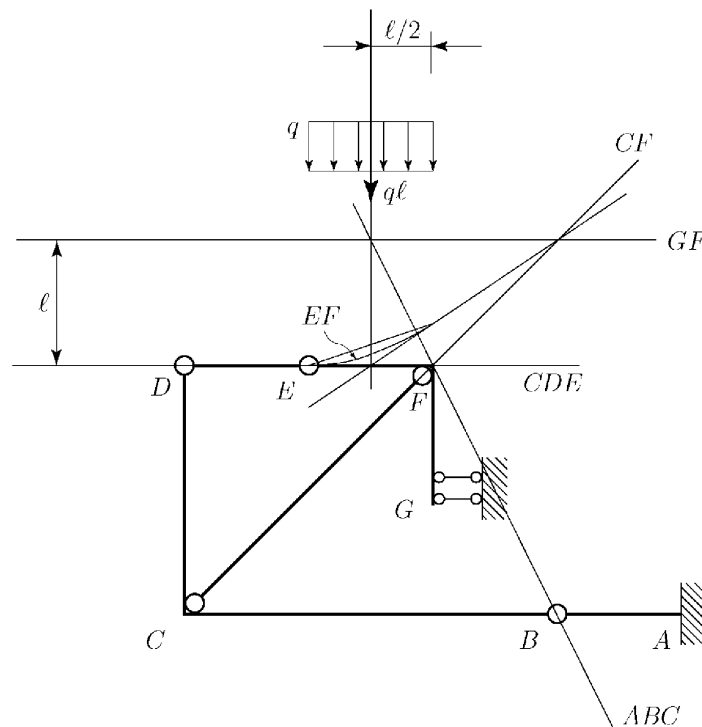
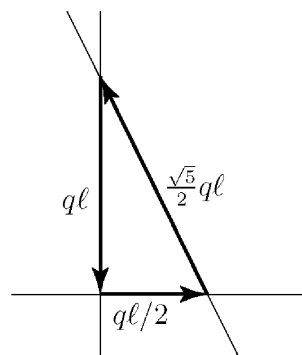
e quindi:

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \Delta \eta_E = \frac{55 q \ell^4}{24 EJ}.$$

3.8.5 Esercizio 2 (struttura soggetta ad un carico ripartito)



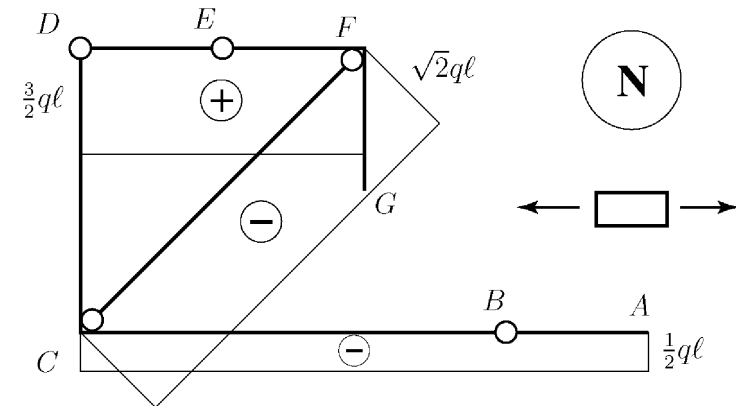
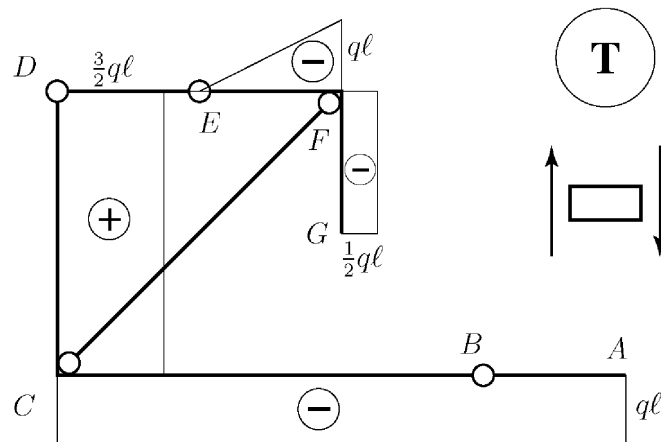
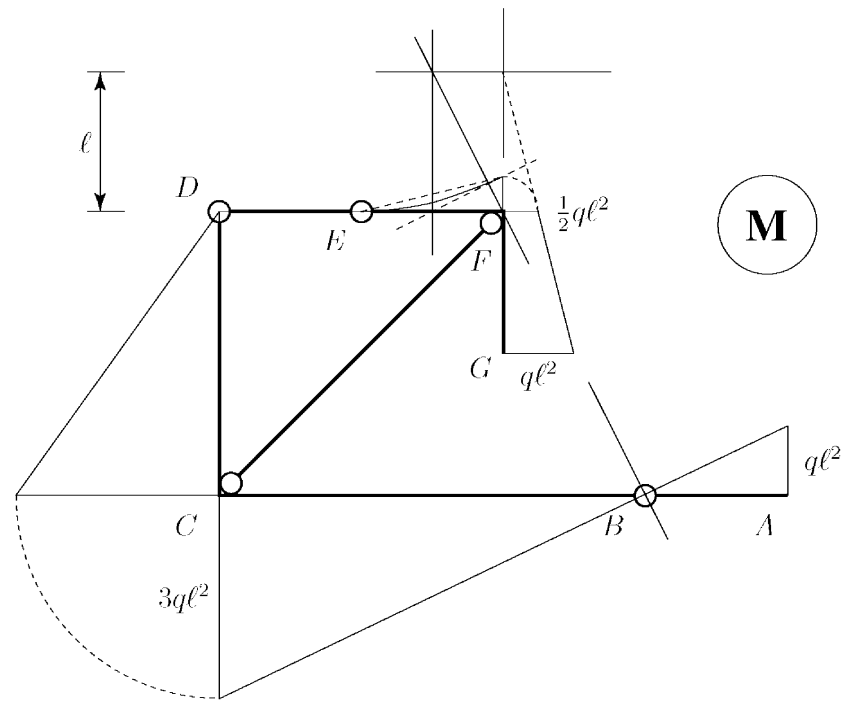
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Determinare graficamente le reazioni dei vincoli esterni ed interni e quantificarle;
- 4) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 5) Determinare la rotazione del pendolo CF (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili nell'ipotesi che il pendolo CF sia deformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioniReazioni interne ed esterne

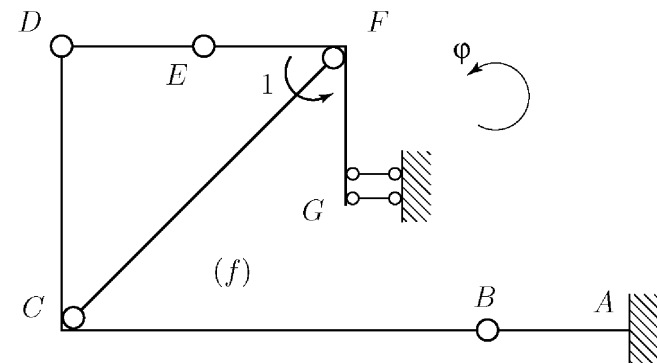
Equilibrio del
tratto $BCDFG$

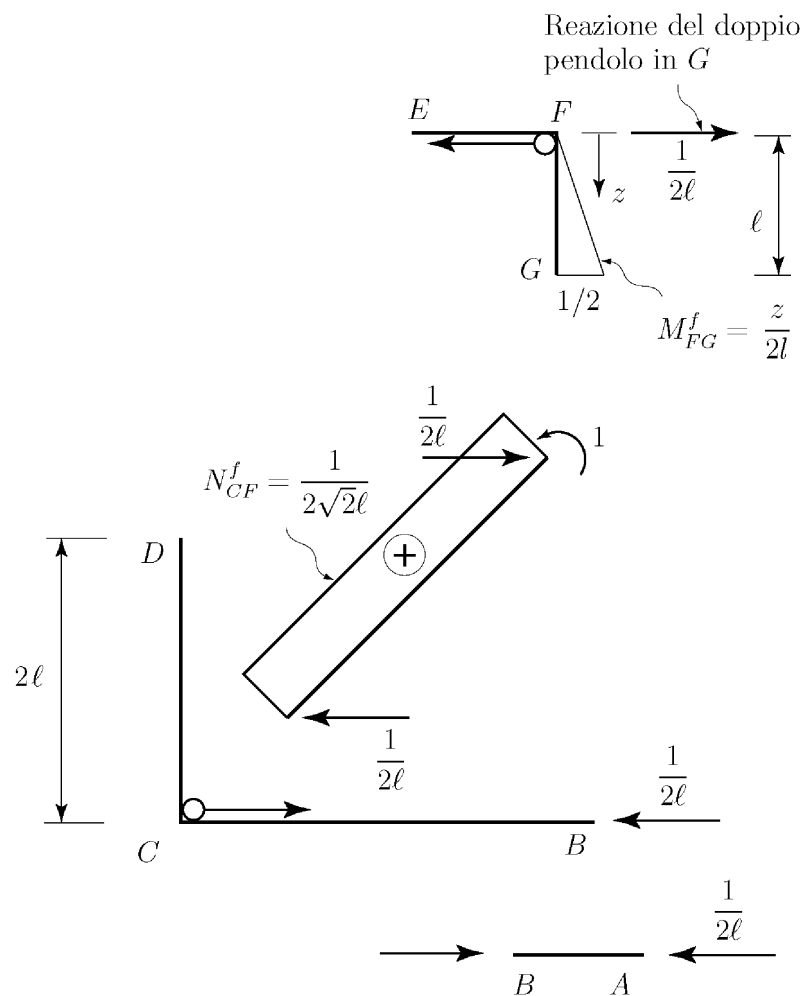
Reazione dell'incastro in A

Equilibrio del tratto BCD

Caratteristiche della sollecitazioneRotazione del pendolo CF

Schema delle forze per il calcolo della rotazione del pendolo CF





$$\varphi_{CF} = -\frac{1}{EA} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\ell} \right) (\sqrt{2}q\ell)(2\sqrt{2}\ell) +$$

$$+ \int_0^\ell \frac{1}{EJ} \left(\frac{z}{2\ell} \right) \left[\frac{q\ell}{2}(z + \ell) \right] dz = -\frac{\sqrt{2}q\ell}{EA} + \frac{5}{24} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

Capitolo 4

Soluzione dei sistemi iperstatici col metodo delle forze

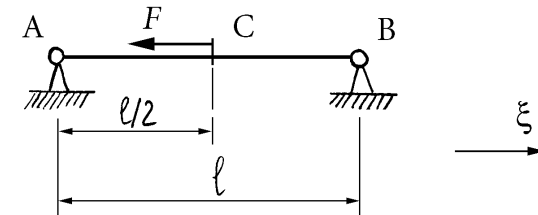
Un sistema iperstatico con grado di labilità nullo può essere reso isostatico togliendo un numero di vincoli semplici iperstatici pari al grado di iperstaticità. La struttura isostatica che così si ottiene, soggetta ai carichi applicati e alle reazioni iperstatiche staticamente indeterminate, e quindi incognite, viene detta *struttura principale*.

La struttura principale isostatica è determinata sia per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione che per il calcolo degli spostamenti. È così possibile calcolare, nella struttura principale, quegli spostamenti che nella struttura originale sono impediti o comunque limitati dai vincoli iperstatici rimossi, per poi imporre a tali spostamenti le condizioni imposte da tali vincoli. Le equazioni che così si ottengono e che sono in egual numero alle reazioni vincolari iperstatiche vengono dette *equazioni di congruenza*. Poiché le incognite che compaiono nelle equazioni di congruenza sono delle reazioni vincolari iperstatiche, e cioè delle forze, il metodo di soluzione illustrato viene detto *metodo delle forze*.

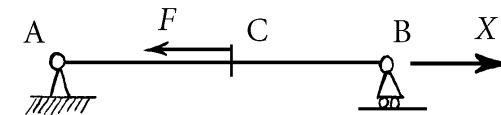
Notiamo subito che la struttura che si vuole risolvere può anche essere iperstatica e labile, purché equilibrata. In tal caso rimuovendo gli opportuni vincoli iperstatici si ottiene una struttura principale labile a grado di iperstaticità nullo, nella quale gli spostamenti necessari per la scrittura delle equazioni di congruenza sono sempre determinabili in modo univoco o, in altri termini, non sono influenzati dai possibili moti rigidi dovuti alla labilità del sistema principale.

4.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale

Struttura iperstatica:



Struttura principale isostatica:

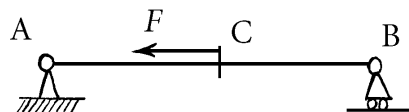
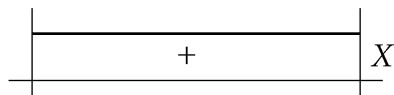
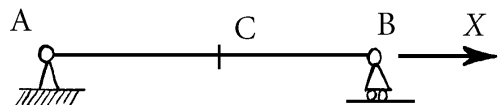


$X \equiv$ Reazione iperstatica incognita

Il punto B può subire, nella struttura principale, uno spostamento orizzontale ξ_B . Nella struttura originale iperstatica il punto B è fisso.

Lo spostamento ξ_B misura l'assenza di congruenza (incompatibilità) tra la struttura principale e quella originaria. Per ripristinare la congruenza occorre annullare l'incompatibilità tra le due strutture:

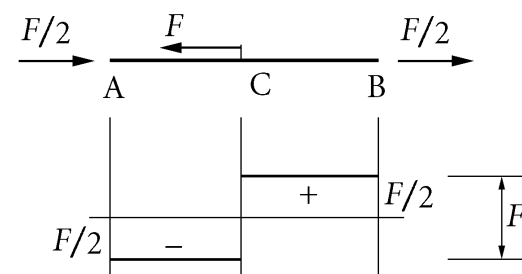
$$\xi_B = 0 \quad (\text{equazione di congruenza})$$



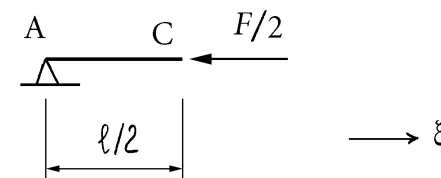
Si ottiene:

$$\xi_B = \frac{X\ell}{EA} - \frac{F(\ell/2)}{EA}$$

$$\xi_B = 0 \implies X = \frac{F}{2}$$



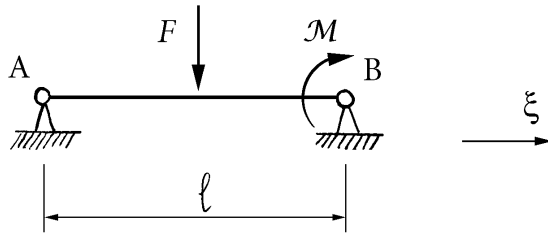
Calcolo di ξ_c :



$$\xi_c = -\frac{(F/2)(\ell/2)}{EA} = -\frac{F\ell}{4EA}$$

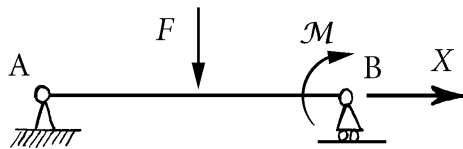
4.2 Trave appoggiata soggetta a carichi di tipo flessionale

Sia data una *trave appoggiata*, cioè una trave ad asse rettilineo appoggiata alle due estremità, soggetta a forze di tipo flessionale (forze ortogonali alla linea d'asse e coppie). Si scelga quale struttura principale la *trave appoggio-carrello*, cioè la trave con un appoggio ad una estremità e un carrello con piano di scorrimento orizzontale all'altra estremità.



La reazione iperstatica incognita è orizzontale ed origina tutto la forza normale della trave. Ne risulta che lo spostamento orizzontale del carrello nella struttura principale dipende dalla sola reazione iperstatica X :

$$\xi_B = \frac{X\ell}{EA}.$$



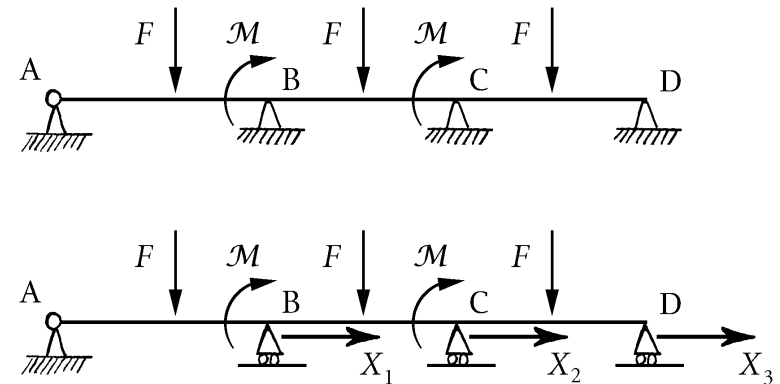
L'equazione di congruenza $\xi_B = 0$ impone quindi che la rea-

zione iperstatica sia nulla:

$$X = 0.$$

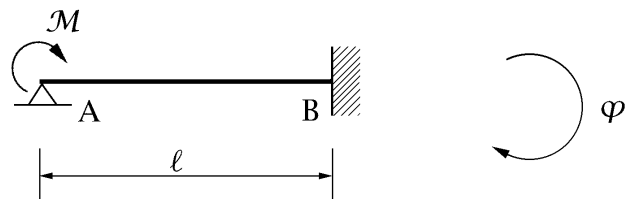
Se ne deduce così il seguente risultato generale: *Una trave appoggiata soggetta a forze di tipo flessionale è equivalente ad una trave appoggio-carrello.*

Si noti che tale risultato può essere generalizzato anche a travi ad asse rettilineo su n appoggi soggette a carichi di tipo flessionale. In tal caso infatti si consideri la trave su un appoggio e $n - 1$ carrelli a piano di scorrimento orizzontale. La forza normale, e quindi gli spostamenti orizzontali dei carrelli, dipende solo dalle reazioni iperstatiche orizzontali. Le equazioni di congruenza che impongono che gli spostamenti dei carrelli siano nulli sono dunque omogenee (non dipendono dai carichi di tipo flessionale). Ne consegue che le reazioni iperstatiche orizzontali degli appoggi sono nulle e che quindi: *Una trave ad asse rettilineo su n appoggi soggetta a forze di tipo flessionale è equivalente ad una trave su un appoggio e $n - 1$ carrelli.*

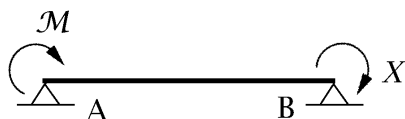


4.3 Travi incastro-appoggio

4.3.1 Trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia in corrispondenza dell'appoggio



Struttura principale:



La rotazione della sezione B nella struttura principale vale:

$$\varphi_B = \frac{X\ell}{3EJ} - \frac{M\ell}{6EJ}.$$

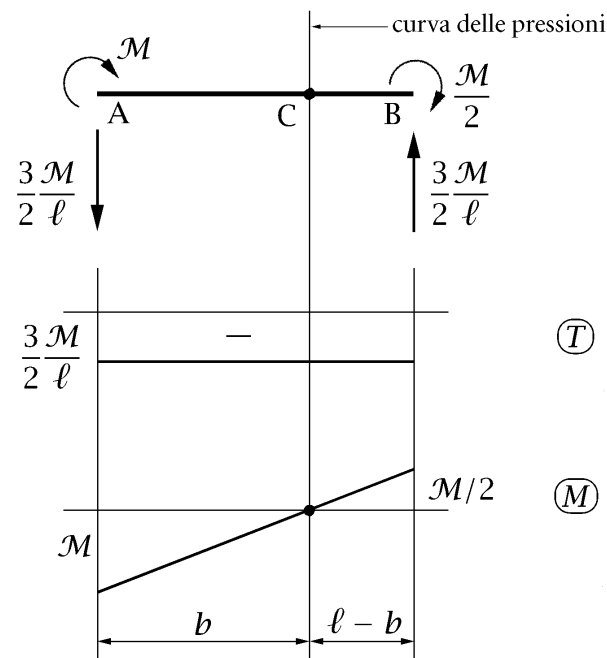
La congruenza implica:

$$\varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{M}{2}.$$

La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

$$\varphi_A = \frac{M\ell}{3EJ} - \frac{\left(\frac{M}{2}\right)\ell}{6EJ} = \frac{M\ell}{4EJ}.$$

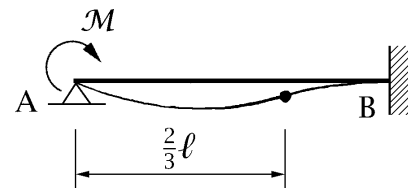
Reazioni vincolari e diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione:



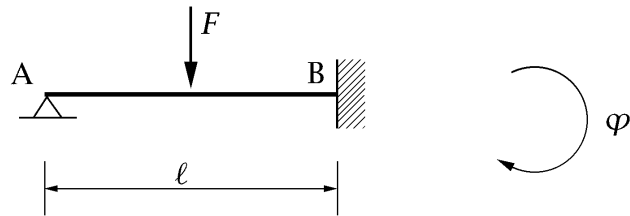
Punto di nullo del momento flettente (punto di flesso della deformata elastica):

$$\frac{b}{M} = \frac{\ell}{M + M/2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3}\ell.$$

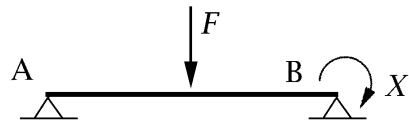
Deformata elastica:



4.3.2 Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza concentrata in mezzeria



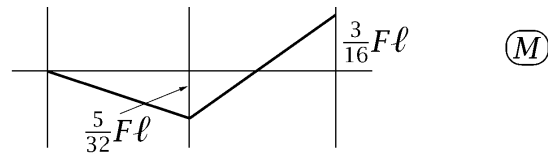
Struttura principale:



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{3EJ} - \frac{F\ell^2}{16EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{3}{16}F\ell.$$

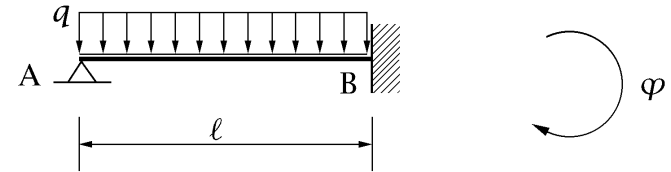
Diagramma del momento:



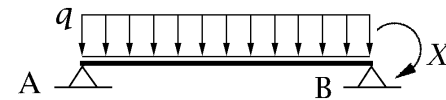
La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

$$\varphi_A = \frac{F\ell^2}{16EJ} - \frac{\left(\frac{3}{16}F\ell\right)\ell}{6EJ} = \frac{F\ell^2}{32EJ}.$$

4.3.3 Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita



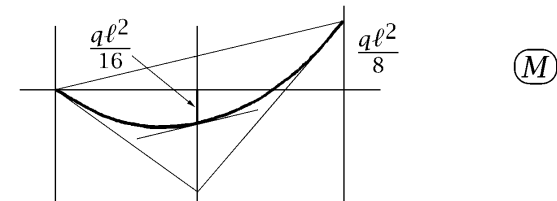
Struttura principale:



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{3EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{q\ell^2}{8}.$$

Diagramma del momento:

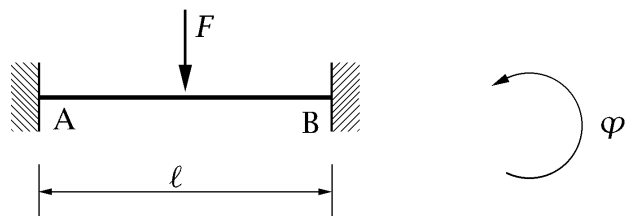


La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

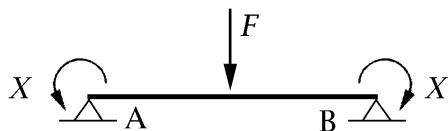
$$\varphi_A = \frac{q\ell^3}{24EJ} - \frac{\left(\frac{q\ell^2}{8}\right)\ell}{6EJ} = \frac{q\ell^3}{48EJ}.$$

4.4 Travi incastro-incastro

4.4.1 Trave incastro-incastro soggetta ad una forza concentrata in mezzeria



Struttura principale (simmetrica):



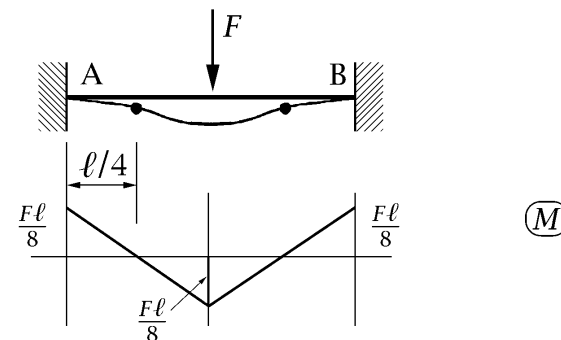
La rotazione della sezione A nella struttura principale vale:

$$\varphi_A = \frac{X\ell}{2EJ} - \frac{F\ell^2}{16EJ}.$$

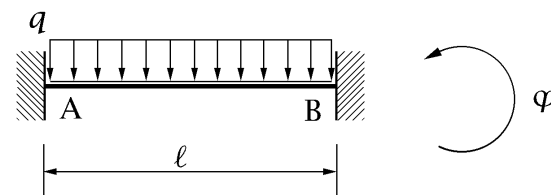
La congruenza implica:

$$\varphi_A = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F\ell}{8}.$$

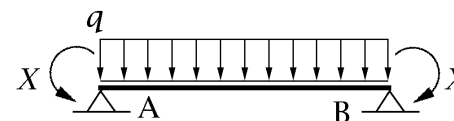
Diagramma del momento e deformata elastica:



4.4.2 Trave incastro-incastro soggetta ad una forza distribuita



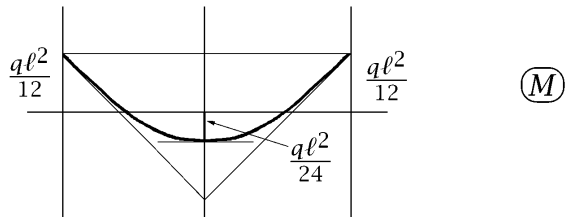
Struttura principale (simmetrica):



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{q\ell^2}{12}.$$

Diagramma del momento:



4.5 Travi continue

Una *trave continua* è una trave senza sconnessioni interne vincolata, oltre che nelle due estremità, anche in punti intermedi, o, in altri termini, è una trave su più appoggi.

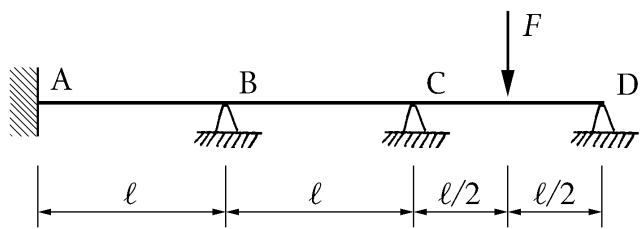
La struttura principale “naturale” si ottiene inserendo delle cerniere sugli appoggi intermedi, cioè sconnettendo la continuità della rotazione delle sezioni su tali appoggi. Le incognite iperstatiche sono quindi delle coppie e le equazioni di congruenza richiedono il calcolo delle rotazioni relative in corrispondenza delle sconnessioni. Nella struttura principale i tratti fra gli appoggi intermedi divengono delle travi appoggiate alle estremità e soggette alle coppie iperstatiche ed agli eventuali carichi esterni che competono al tratto in questione. Per quel che riguarda i due tratti esterni, questi sono delle travi appoggiate oppure delle travi incastro-appoggio a seconda che l'estremità sia appoggiata oppure incastrata. Nel caso in cui un tratto esterno sia a *sbalzo*, ovverossia con l'estremità non vincolata, sull'appoggio interno del tratto non va effettuata la sconnessione, altrimenti il tratto diventa labile.

Non ha importanza che i vincoli intermedi siano degli appoggi fissi oppure dei carrelli a piano di scorrimento orizzontale, perché, come si è già visto, le eventuali incognite iperstatiche di tipo assiale dipendono solo dalle forze di tipo assiale e sono nulle se queste sono nulle. Se sia le forze di tipo assiale che quelle di tipo flessionale non sono nulle occorrerà risolvere entrambi i problemi (flessionale e assiale), problemi che, in ogni caso, sono indipendenti l'uno dall'altro.

4.5.1 Esempio di trave continua

La trave continua di figura ha tre gradi di libertà se svincolata e ha nove gradi di vincolo. Poiché l'incastro da solo impedisce qualunque moto rigido, la trave non è labile e quindi ha sei gradi di iperstaticità:

$$g = 3, v = 9 \Rightarrow i - l = 6, \quad l = 0 \Rightarrow i = 6.$$

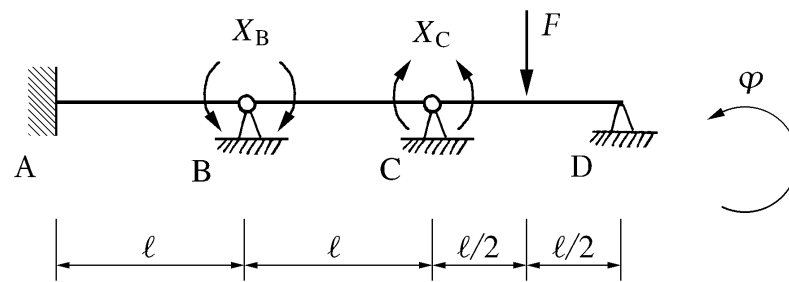


Poiché l'incastro da solo impedisce la traslazione orizzontale, la trave ha tre gradi di iperstaticità i_a di tipo assiale (anche i tre appoggi in B, C e D impediscono lo spostamento orizzontale) e quindi tre gradi di iperstaticità i_f di tipo flessionale:

$$i_a = 3, \quad i_f = 3.$$

Inserendo due cerniere nei nodi B e C si ottiene una struttura una volta iperstatica flessionalmente soggetta alle coppie X_B e X_C in corrispondenza delle facce di B e C rispettivamente, facce rese libere dalle due sconnessioni operate. Tale struttura, anche se iperstatica flessionalmente, può essere utilizzata quale struttura principale poiché il tratto iperstatico AB costituisce una trave incastro-appoggio

soggetta alla coppia X_B applicata in corrispondenza dell'appoggio, tipo di trave già risolta una volta per tutte. Se ci si riducesse ad uno schema flessionalmente isostatico inserendo una cerniera anche in A, si dovrebbe riscrivere l'equazione di congruenza $\varphi_A = 0$ della trave incastro-appoggio che ancora darebbe come risultato che il momento in A è in modulo la metà e di segno opposto di quello applicato in B.



Per risolvere la struttura dobbiamo scrivere le equazioni di congruenza in corrispondenza delle due sconnessioni:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0, \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0, \end{cases}$$

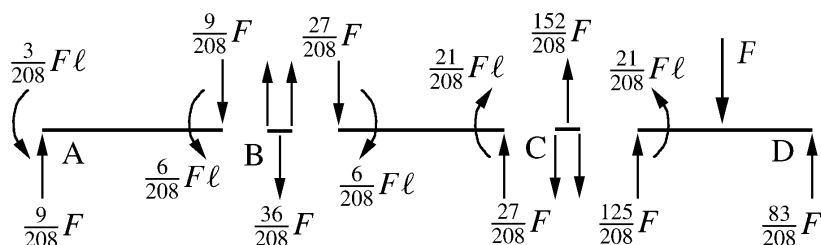
ottenendo:

$$\begin{cases} \left(-\frac{X_B \ell}{3EJ} + \frac{X_C \ell}{6EJ} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{4EJ} \right) = 0, \\ \left(\frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{F \ell^2}{16EJ} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{6EJ} - \frac{X_C \ell}{3EJ} \right) = 0. \end{cases}$$

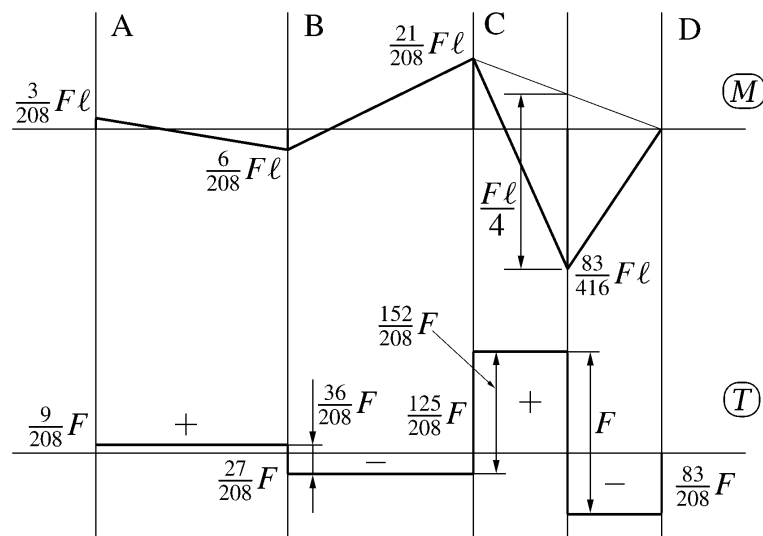
Semplificando e risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} -7X_B + 2X_C = 0, \\ -X_B + 4X_C - \frac{3}{8}F\ell = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = \frac{6}{208}F\ell, \\ X_C = \frac{21}{208}F\ell. \end{cases}$$

Reazioni interne ed esterne:



Diagrammi del momento flettente e del taglio:



Capitolo 5

Cedimenti vincolari e distorsioni

5.1 Cedimenti vincolari elastici

Un vincolo è detto essere cedevole elasticamente se la reazione del vincolo dipende univocamente dallo spostamento del vincolo stesso (cedimento). In particolare il cedimento può essere elastico-lineare, ovvero sia la reazione del vincolo può essere proporzionale al cedimento stesso, tramite una costante K di rigidezza che rappresenta la reazione vincolare corrispondente al cedimento unitario:

$$R = K s,$$

dove R è la reazione e s il cedimento del vincolo.

Naturalmente, questo è equivalente a dire che il cedimento del vincolo è proporzionale alla reazione vincolare tramite una costante c di cedevolezza (o di flessibilità) che rappresenta il cedimento vincolare corrispondente alla reazione unitaria:

$$s = c R.$$

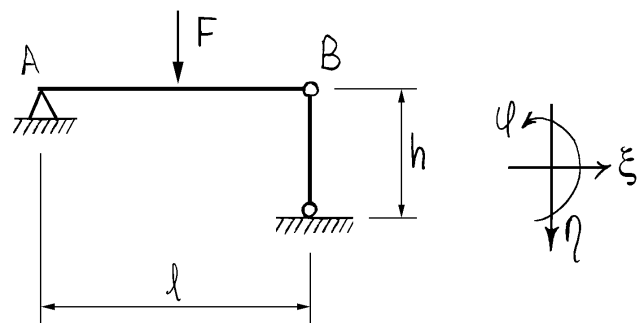
Naturalmente, la cedevolezza è l'inverso della rigidità:

$$c = \frac{1}{K}.$$

Un vincolo cedevole elasticamente si può indicare con il simbolo di una molla.

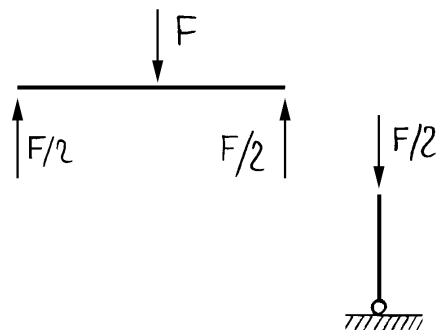
È evidente che se la struttura non è caricata la reazione è nulla e non vi sono cedimenti.

Un pendolo deformabile assialmente è equivalente ad un appoggio cedevole elasticamente, come indicato nell'esempio seguente.



La cedevolezza del vincolo vale:

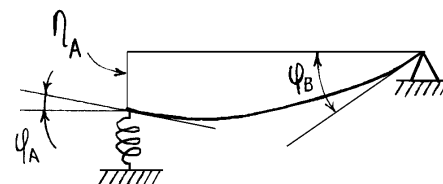
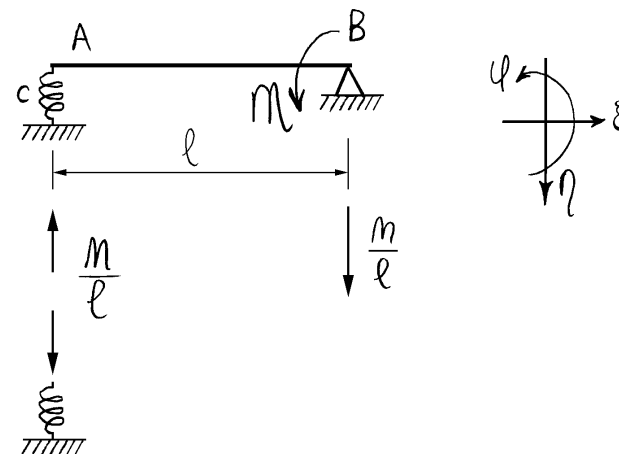
$$c = \frac{h}{EA}.$$



Il cedimento del vincolo vale invece:

$$\eta_B = \frac{F}{2} \frac{h}{EA}$$

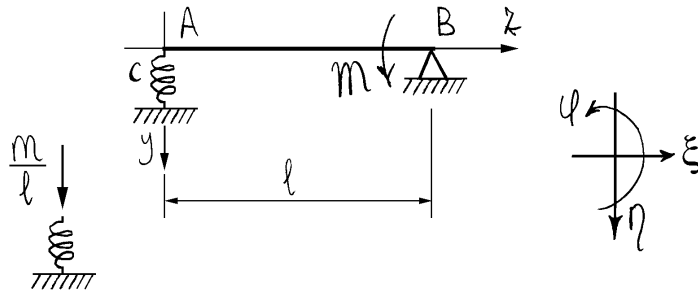
5.1.1 Esempio 1 (trave appoggiata con un appoggio cedevole)



$$\begin{cases} \eta_A = c \frac{m}{l} \\ \phi_A = c \frac{m}{l^2} - \frac{m l}{6 E J} \\ \phi_B = \frac{m}{k l^2} + \frac{m l}{3 E J} \end{cases}$$

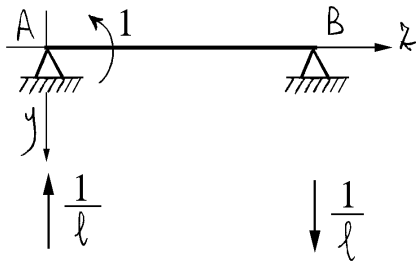
Calcolo di φ_A col principio dei lavori virtuali

Schema reale



$$\eta_A^{(v)} = c \frac{m}{l}, \quad M^{(v)} = \frac{m}{l} \xi$$

Schema delle forze



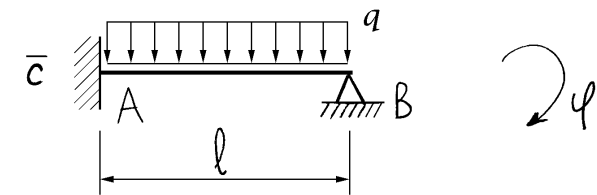
$$M^{(f)} = \frac{\xi}{l} - 1$$

$$L_{ve} = \varphi_A - \left(\frac{1}{l}\right) \left(c \frac{m}{l}\right) = \varphi_A - \frac{c}{l^2} m$$

$$L_{vi} = \int_0^l \frac{m}{EJl} \xi \left(\frac{\xi}{l} - 1\right) d\xi = -\frac{ml}{6EJ}$$

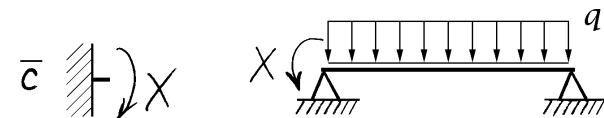
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \varphi_A = -\frac{ml}{6EJ} + \frac{c}{l^2} m$$

5.1.2 Esempio 2 (trave incastro-appoggio con incastro cedevole angolarmente)



$\bar{c} \equiv$ cedevolezza angolare

Struttura principale:



Vincolo angolare cedevole elasticamente:

$$\varphi_A = \bar{c} X$$

Rotazione φ_A valutata nella struttura principale:

$$\varphi_A = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ}$$

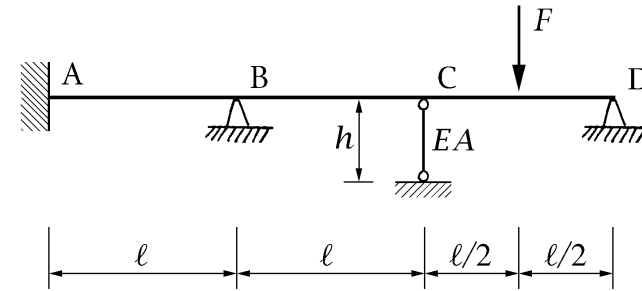
Congruenza:

$$\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} = \bar{c} X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{ql^3}{8(3EJ\bar{c} + l)}$$

$\bar{c}$ è una rotazione per unità di coppia e quindi ha le dimensioni $F^{-1}L^{-1}$, per cui $EJ\bar{c}$ ha le dimensioni di una lunghezza

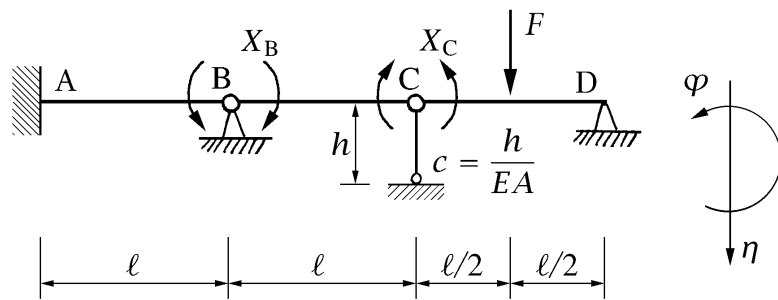
5.1.3 Esempio 3 (trave continua con un appoggio cedevole)



Il vincolo cedevole non impedisce lo spostamento della sezione C vincolata, ma reagisce con una forza proporzionale allo spostamento. Tale spostamento comunque non influenza l'equilibrio poiché questi, nell'ambito della validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, viene scritto sulla struttura indeformata. Al fine della valutazione cinematica della struttura, occorre dunque conteggiare anche il vincolo cedevole in C. La struttura risulta dunque tre volte iperstatica flessionalmente, come nel caso, già analizzato, in cui il vincolo in C era rigido.

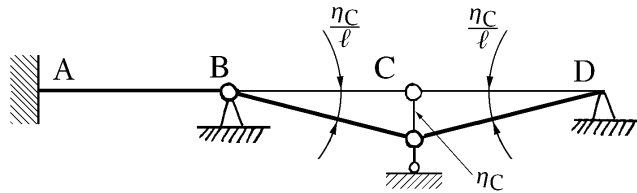
La struttura principale si ottiene ancora inserendo due cerniere in corrispondenza dei punti B e C. Le equazioni di congruenza in corrispondenza delle due sconnessioni sono ancora:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0, \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0. \end{cases}$$



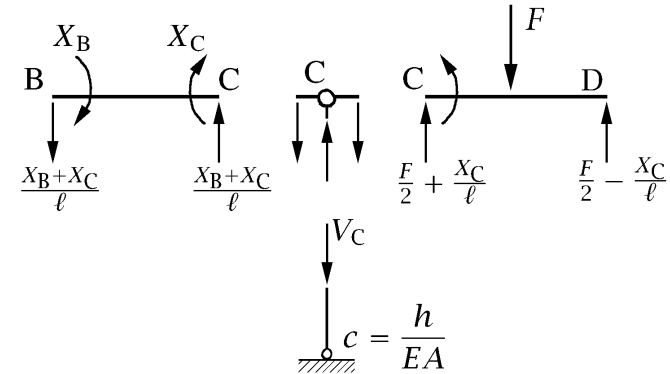
Per esplicitare tali equazioni, si considera prima il punto C fisso (come se avesse un appoggio rigido) e poi si sovrappone l'effetto del moto rigido dovuto al cedimento di C:

$$\begin{cases} \left(-\frac{X_B \ell}{3EJ} + \frac{X_C \ell}{6EJ} - \frac{\eta_C}{\ell} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{4EJ} \right) = 0, \\ \left(\frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{F \ell^2}{16EJ} + \frac{\eta_C}{\ell} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{6EJ} - \frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{\eta_C}{\ell} \right) = 0. \end{cases} \quad (a)$$



Lo spostamento η_C di C è proporzionale alla reazione V_C tramite la cedevolezza c dell'appoggio:

$$\eta_C = cV_C, \quad c = \frac{h}{EA}. \quad (b)$$



L'equilibrio del nodo C impone:

$$V_C = \frac{X_B + 2X_C}{\ell} + \frac{F}{2}. \quad (c)$$

Sostituendo la (c) nella (b) e questa nella (a) si ottengono due equazioni nelle due incognite iperstatiche X_B e X_C .

5.2 Cedimenti vincolari anelastici

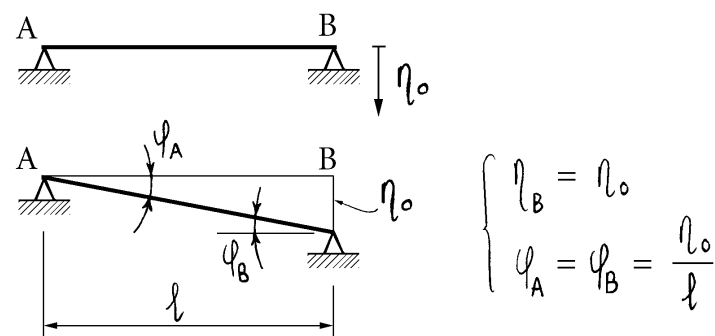
I vincoli cedevoli anelasticamente sono di vario tipo: plastici, viscosi, elasto-plastici, ecc. Un vincolo viscoso, per esempio, è tale da aumentare il cedimento sotto carico costante, ovvero senza incremento della reazione vincolare.

Un caso particolare di vincolo anelastico è quello di uno spostamento impresso. Questo spostamento (che rappresenta il cedimento del vincolo) è un dato del problema ed è indipendente dalle forze applicate. In particolare, agisce anche sulla struttura non caricata.

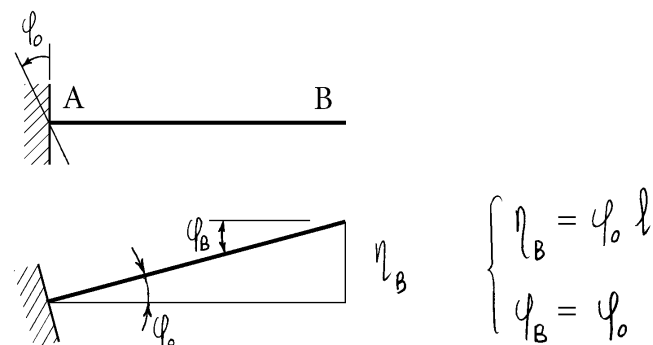
Se la struttura è isostatica, uno spostamento

impresso provoca soli moti rigidi delle parti che compongono la struttura.

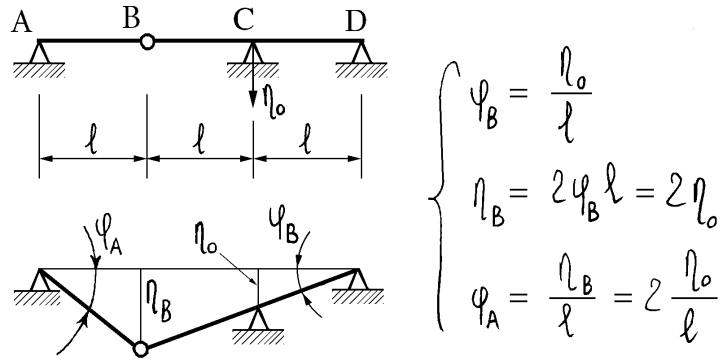
Esempio 1 (cedimento di un appoggio):



Esempio 2 (cedimento angolare di un incastro):



Esempio 3 (cedimento di un appoggio):

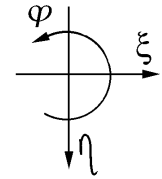
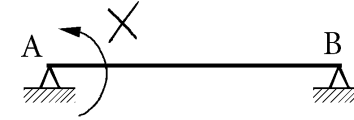


Se la struttura è iperstatica, salvo casi particolari, la struttura si deve deformare per consentire il cedimento vincolare elastico impresso.

Esempio 1:

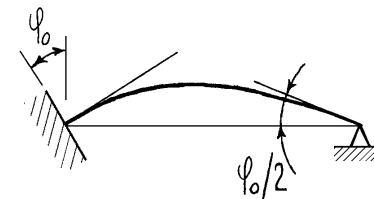
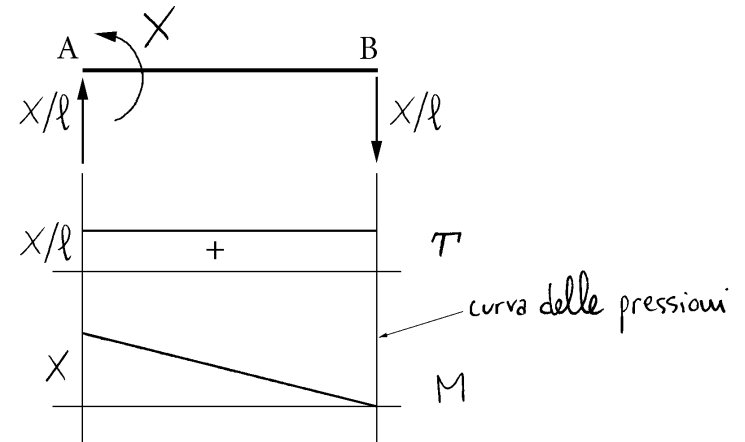


struttura principale:



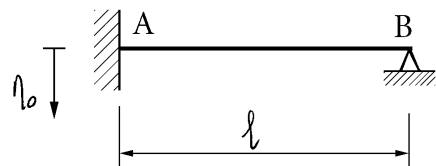
$$\varphi_A = \frac{Xl}{3EJ}$$

Congruenza: $\varphi_A = \varphi_0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l} \varphi_0$

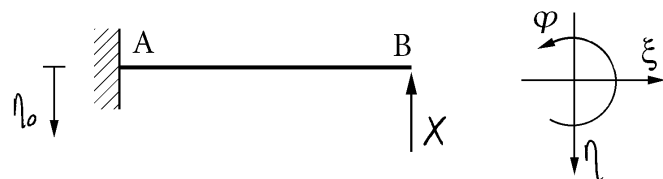


$$\varphi_B = -\frac{Xl}{6EJ} = -\frac{\varphi_0}{2}$$

Esempio 2:



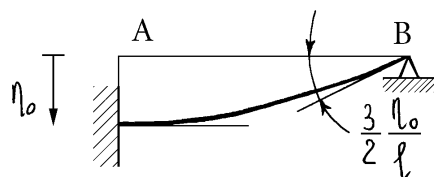
struttura principale:



$$\eta_B = \eta_0 - \frac{X l^3}{3EJ}$$

Congruenza:

$$\eta_B = 0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l^3} \eta_0$$

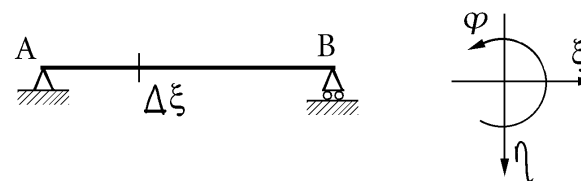


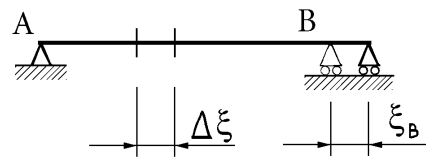
$$\varphi_B = \frac{X l^2}{2EJ} = \frac{3}{2} \frac{\eta_0}{l}$$

5.3 Distorsioni concentrate

Se si sconnette una trave in corrispondenza di una sezione interna, si impone uno spostamento relativo e infine si riconnette la trave si ottiene una cosiddetta distorsione concentrata. Se la trave è isostatica, a seguito della distorsione impressa si hanno dei semplici moti rigidi delle due parti in cui la trave è stata sconnessa.

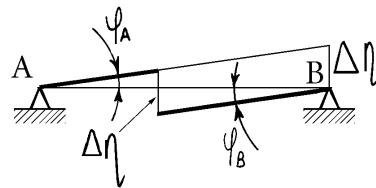
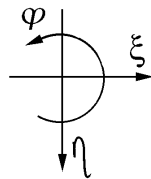
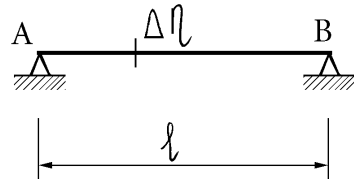
Distorsione di tipo assiale nella sezione interna di una trave con appoggio e carrello:





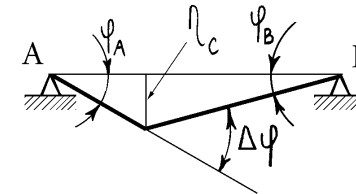
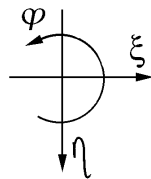
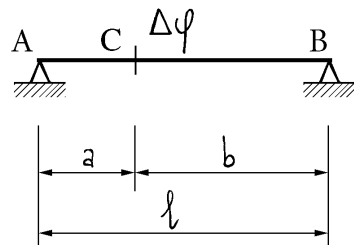
$$\xi_B = \Delta \xi$$

Distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna di una trave appoggio-appoggio:



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{\Delta \eta}{l}$$

Distorsione di rotazione relativa in una sezione interna di una trave appoggio-appoggio:

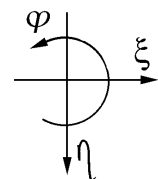
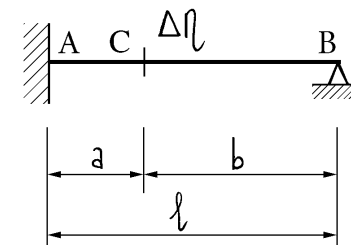


$$\begin{cases} a \varphi_A = b \varphi_B \\ \varphi_A + \varphi_B = \Delta \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_A = \frac{b}{l} \Delta \varphi \\ \varphi_B = \frac{a}{l} \Delta \varphi \end{cases}$$

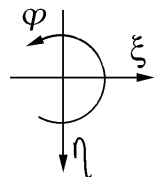
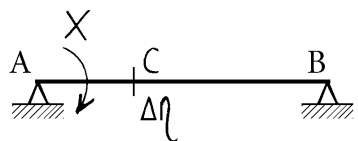
$$\eta_c = a \varphi_A = b \varphi_B = \frac{a b}{l} \Delta \varphi$$

Se la trave è iperstatica, si deve deformare per consentire lo sviluppo della distorsione impressa.

Distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna di una trave incastro-appoggio:

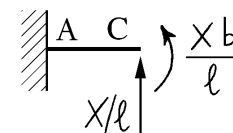
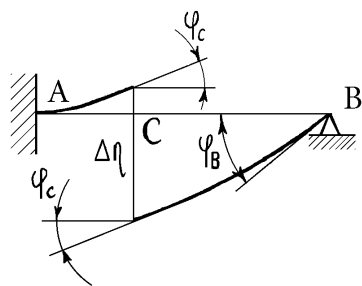
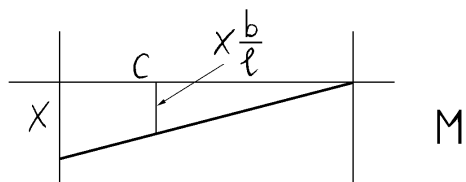
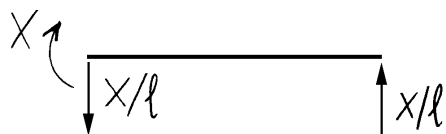


Struttura principale:

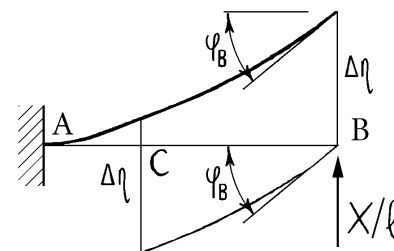


$$\varphi_A = \frac{\Delta\eta}{l} - \frac{Xl}{3EJ}$$

Congruenza: $\varphi_A = 0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l^2} \Delta\eta$



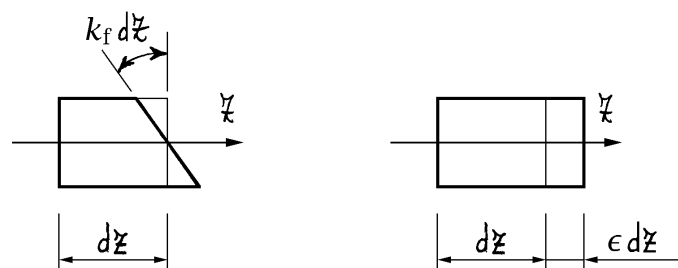
$$\varphi_c = \frac{Xba}{lEJ} + \frac{Xa^2}{2lEJ}$$



$$\varphi_B = \frac{(X/l)l^2}{2EJ} = \frac{3}{2} \frac{\Delta\eta}{l}$$

5.4 Distorsioni distribuite

Si dice che un elemento di trave subisce una *distorsione distribuita* se viene in un qualche modo deformato, a partire da una configurazione naturale (cioè non soggetta a forze e a caratteristiche della sollecitazione), fino a portarlo in una nuova configurazione naturale, quindi deformata rispetto alla precedente ma ancora non soggetta a forze e caratteristiche della sollecitazione. A seconda del tipo di deformazione impressa, dilatazione lineare ϵ oppure curvatura flessionale k_f , la distorsione può essere di tipo assiale oppure flessionale.



Si noti che nel caso di distorsione distribuita le due sezioni di estremità dell'elemento di trave subiscono un moto relativo infinitesimo, a differenza del caso delle distorsioni concentrate in cui si aveva un moto relativo finito tra le due facce di una stessa sezione. Se la distorsione è distribuita su un tratto di lunghezza finita si genererà un moto relativo finito tra due sezioni qualunque del tratto poste a distanza finita.

Se il sistema è isostatico, le eventuali distorsioni possono svilupparsi liberamente e il sistema si deforma in assenza di caratteristiche della sollecitazione. Se invece il sistema è iperstatico, lo sviluppo delle distorsioni può essere contrastato e si possono generare reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione. In quest'ultimo caso, la deformazione totale (rispetto alla configurazione che si aveva prima della distorsione) sarà la somma tra quella dovuta alla distorsione e quella dovuta alle caratteristiche della sollecitazione.

Ci sono due importanti casi in cui si sviluppano distorsioni distribuite. Il primo caso è quello dell'interazione con gli effetti termici, poiché gli incrementi di temperatura danno luogo a delle dilatazioni lineari in assenza di sollecitazioni, almeno fino a che tali dilatazioni possono svilupparsi liberamente. Il secondo caso è invece quello in cui le sollecitazioni impresse superano il limite di snervamento e si sviluppano delle deformazioni plastiche nel materiale. Ne risultano delle deformazioni permanenti, cioè delle distorsioni, una volta che i carichi vengano rimossi. Come vedremo nel seguito, nei sistemi di travi inflesse le distorsioni dovute alla plasticità del materiale sono normalmente limitate in zone ristrette nell'intorno delle sezioni dove si raggiungono i massimi relativi del diagramma del momento flettente. Ne consegue che tali distorsioni distribuite possono allora essere approssimate da distorsioni concentrate in tali sezioni (*cerniere plastiche*).

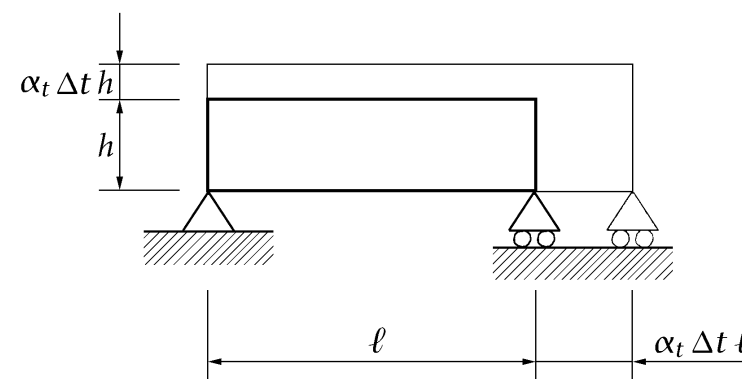
5.5 Distorsioni termiche

Un incremento uniforme di temperatura Δt produce, in un corpo continuo di materiale termicamente omogeneo, una dilatazione ϵ costante di tutte le linee interne al corpo in assenza di scorrimenti. La configurazione “deformata” dall’incremento di temperatura è dunque omotetica alla configurazione soggetta alla sola temperatura iniziale, con costante di omotetia pari alla dilatazione ϵ . Inoltre, tali deformazioni si sviluppano senza provocare sollecitazioni. Questo significa che se il corpo è inizialmente in una configurazione naturale (privo di forze agenti e di sollecitazioni interne) allora continua a restare in una configurazione naturale anche dopo la distorsione termica. Quindi la configurazione naturale di un corpo termicamente omogeneo varia, in modo omotetico, a seguito di un incremento uniforme di temperatura. Se invece l’incremento di temperatura non è uniforme oppure se il corpo non è termicamente omogeneo, nel corpo possono sorgere delle cosiddette *autotensioni*, cioè delle sollecitazioni interne autoequilibrate (i carichi esterni continuano ad essere nulli).

La dilatazione lineare α_t per unità di incremento di temperatura viene chiamata *coefficiente di dilatazione termica*:

$$\alpha_t = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\epsilon(\Delta t)}{\Delta t},$$

ed è in generale funzione della temperatura t . Comunque, nell’ambito dei problemi strutturali, il coefficiente di dilatazione termica può essere considerato costante con sufficiente approssimazione. Per esempio, per l’acciaio e il ferro tra 0° e 100°



si può utilizzare il valore medio $\alpha_t = 0.000012$. Nel caso di un corpo termicamente omogeneo, il coefficiente di dilatazione termica è costante nel corpo.

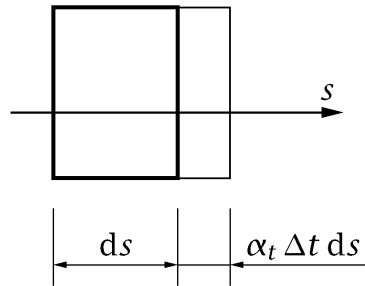
Se il coefficiente di dilatazione termica viene considerato costante, la dilatazione lineare ϵ dovuta ad un incremento di temperatura Δt vale:

$$\epsilon = \alpha_t \Delta t,$$

e, nel caso di incremento uniforme e corpo termicamente omogeneo, l’allungamento di una linea inizialmente di lunghezza ℓ vale:

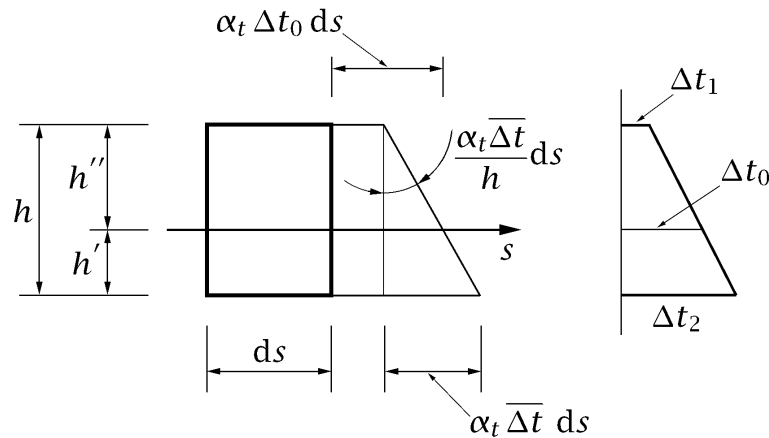
$$\Delta \ell = \alpha_t \Delta t \ell.$$

Nell’ambito della teoria della trave, si è solo in grado di studiare gli effetti delle dilatazioni delle fibre longitudinali. Prendendo allora dalla dilatazione delle altre fibre, si consideri un elemento di trave soggetto ad una variazione termica uniforme. Come illustrato, l’elemento di trave, inizialmente di lunghezza ds , si allunga della quantità $\alpha_t \Delta t ds$. Si noti che affinché un elemento di trave si deformi in tal modo basta che Δt e



α_t siano costanti sulla sezione retta di cui l'elemento è intorno. Per il resto, sia l'incremento di temperatura che il coefficiente di dilatazione termica possono essere variabili lungo la linea d'asse, ovvero possono essere funzioni della coordinata s della linea d'asse.

Se poi l'incremento di temperatura Δt varia linearmente lungo l'altezza della trave, la deformazione termica viene ancora assorbita in assenza di autotensioni. Se la variazione termica passa dal valore Δt_1 all'estradosso al valore Δt_2 all'intrados-



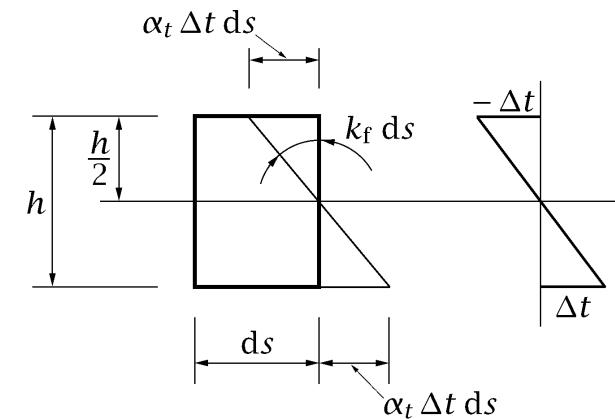
so ne risulta, come illustrato, sia una dilatazione lineare della linea d'asse che una curvatura flessionale. La dilatazione della linea d'asse è dovuta all'incremento Δt_0 di temperatura al livello della fibra baricentrica:

$$\Delta t_0 = \Delta t_1 + \frac{h''}{h}(\Delta t_2 - \Delta t_1) = \frac{h' \Delta t_1 + h'' \Delta t_2}{h},$$

dove h'' è la distanza del baricentro dall'estradosso e h l'altezza della sezione mentre la curvatura flessionale è dovuta invece al salto totale $\overline{\Delta t} = \Delta t_2 - \Delta t_1$ di temperatura tra estradosso e intradosso. Ne risulta:

$$\epsilon_G = \alpha_t \Delta t_0, \quad k_f = \frac{\alpha_t \overline{\Delta t}}{h}.$$

Se la variazione termica passa dal valore Δt all'intradosso a quello opposto $-\Delta t$ all'estradosso si dice che si ha una *variazione termica a farfalla*. Il salto totale di temperatura tra estra-



dosso e intradosso vale ora $\overline{\Delta t} = 2 \Delta t$ e ne risulta la seguente curvatura flessionale della linea d'asse:

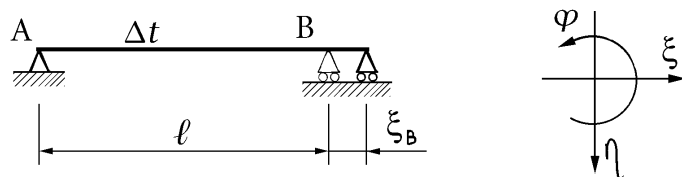
$$k_f = \frac{2\alpha_t \Delta t}{h}.$$

Si noti che se l'asse baricentrico non si trova a metà altezza, a seguito della distorsione termica a farfalla risulta anche una dilatazione della linea d'asse baricentrica:

$$\epsilon_G = \alpha_t \frac{(h'' - h')}{h} \Delta t.$$

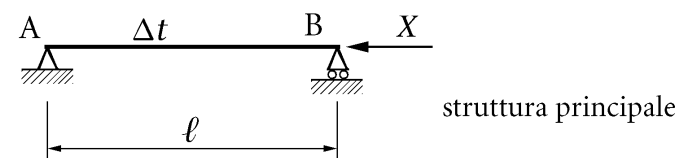
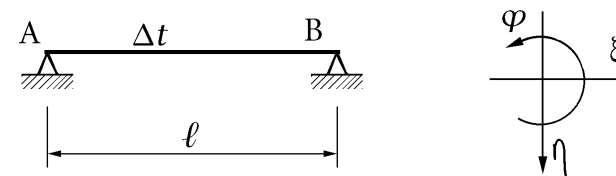
Tale dilatazione è comunque normalmente trascurabile poiché baricentro e metà altezza, se non coincidenti, sono di norma poco discosti.

5.5.1 Esempio 1 (trave appoggio-carrello soggetta ad una variazione termica uniforme)



$$\xi_B = \alpha_t \Delta t \ell$$

5.5.2 Esempio 2 (trave appoggio-appoggio soggetta ad una variazione termica uniforme)



$$\xi_B = \alpha_t \Delta t \ell - \frac{X \ell}{EA}$$

$$\text{Congruenza: } \xi_B = 0 \implies X = EA \alpha_t \Delta t.$$

Deformazione finale:

$$\epsilon_G = \alpha_t \Delta t - \frac{X}{EA} = \alpha_t \Delta t - \alpha_t \Delta t = 0.$$

Quindi la trave resta “indeformata” rispetto alla configurazione naturale dell'asta AB prima dell'incremento termico, che però non rappresenta la configurazione naturale della

stessa asta dopo l'incremento termico. Rispetto a quest'ultima configurazione, la configurazione finale è deformata

$$\epsilon_G = \frac{ds - ds(1 + \alpha_t \Delta t)}{ds(1 + \alpha_t \Delta t)} = -\frac{\alpha_t \Delta t}{1 + \alpha_t \Delta t},$$

e quindi:

$$\epsilon_G \approx -\alpha_t \Delta t,$$

poichè $\alpha_t \Delta t$ è piccolo. Essendo questa la dilatazione rispetto alla configurazione naturale che si ha dopo l'incremento uniforme di temperatura, ne risulta una forza normale N :

$$N = EA\epsilon_G = -EA\alpha_t \Delta t,$$

in accordo con la soluzione iperstatica.

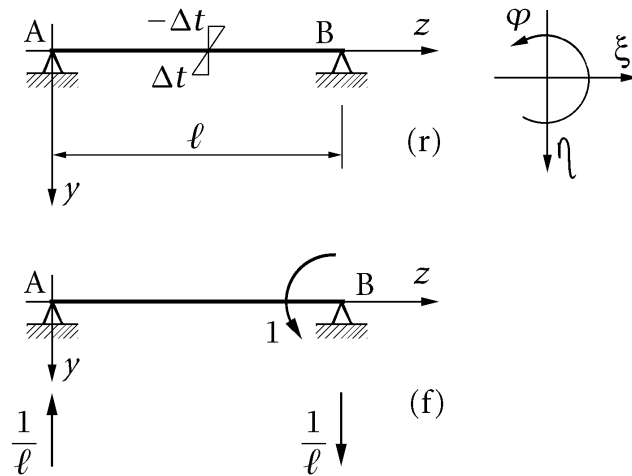
5.5.3 Esempio 3 (trave appoggiata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)

Si vuole valutare la rotazione nella sezione B di estremità e a tale scopo si utilizza il principio dei lavori virtuali.

La trave appoggiata soggetta alla distorsione termica a farfalla rappresenta lo schema reale, cioè lo schema degli spostamenti e deformazioni congruenti. Poiché il salto totale di temperatura vale $2\Delta t$ la curvatura flessionale reale risulta:

$$k_f^{(r)} = \frac{\alpha_t \overline{\Delta t}}{h} = 2\frac{\alpha_t \Delta t}{h}.$$

Lo schema fittizio, cioè lo schema delle forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrate, è la stessa trave appog-



ta soggetta ad una coppia unitaria in B. Il momento flettente fittizio vale:

$$M^{(f)} = \frac{1z}{\ell}.$$

I lavori virtuali esterno ed interno valgono:

$$L_{ve} = 1\varphi_B,$$

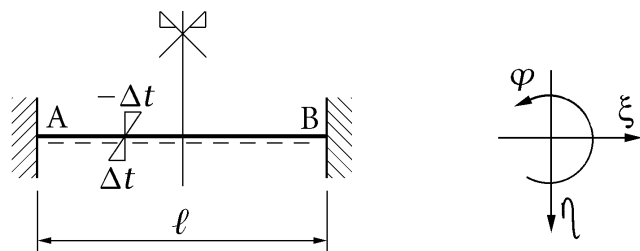
$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_0^\ell M^{(f)} k_f^{(r)} dz = \\ &= \int_0^\ell \left(\frac{1z}{\ell}\right) \left(2\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\right) dz = 2\frac{\alpha_t \Delta t}{\ell h} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^\ell = \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h}. \end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$L_{ve} = L_{vi} \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h}.$$

5.5.4 Esempio 4 (trave doppiamente incastrata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)

La struttura è due volte flessionalmente iperstatica. Svincolando le rotazioni agli incastri, si ottiene quale struttura principale una trave appoggiata e poiché le due reazioni devono essere simmetriche il problema presenta una sola incognita.

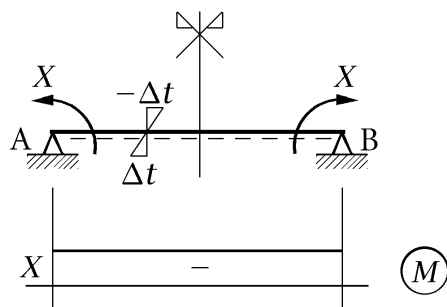


La rotazione della sezione B nella struttura principale vale:

$$\varphi_B = -\frac{X\ell}{2EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h},$$

e quindi la congruenza impone:

$$\varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 2 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$



La deformazione finale, valutata rispetto alla configurazione naturale che si aveva prima della distorsione termica, vale:

$$k_f = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} - \frac{X}{EJ} = 0,$$

e quindi la trave resta “indeformata” rispetto a tale configurazione.

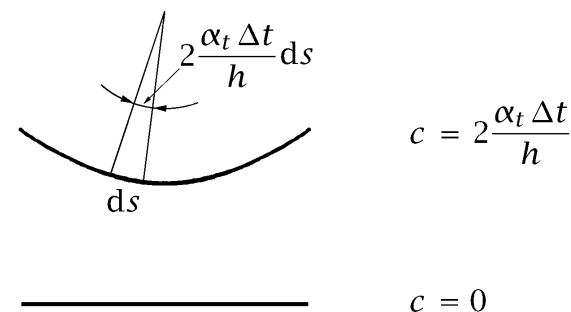
Nella configurazione naturale che l'asta assume a seguito della distorsione termica un elemento di trave presenta la curvatura geometrica positiva $c = 2\alpha_t \Delta t/h$. La configurazione finale è invece rettilinea e quindi presenta una curvatura nulla ($c = 0$). Ne consegue che rispetto alla configurazione naturale che l'asta assume a seguito della distorsione termica la deformazione finale vale:

$$k_f = -2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h},$$

e dunque:

$$M = EJk_f = -2 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$

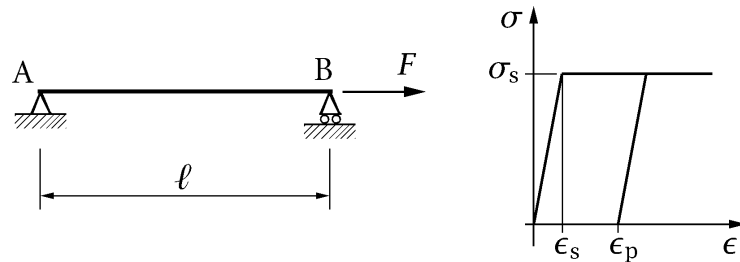
in accordo con la soluzione iperstatica.



5.6 Distorsioni plastiche

5.6.1 Distorsione plastica distribuita di tipo assiale

Si consideri una trave appoggiata costituita di materiale elastoplastico e soggetta ad una forza F di tipo assiale. Si supponga che la risposta elastoplastica sia di tipo bilineare e perfettamente plastica, come riportato nel diagramma.



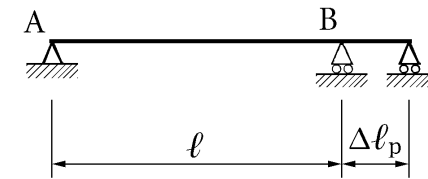
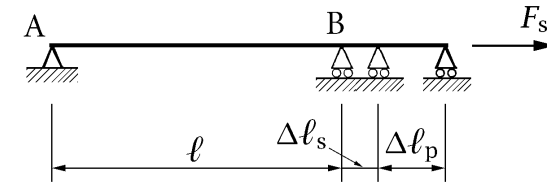
Si incrementi la forza F fino al valore F_s che plasticizza la sezione:

$$F_s = \sigma_s A,$$

dove σ_s è la tensione di snervamento. La trave si allunga di $\Delta\ell_s$ per effetto della deformazione elastica:

$$\Delta\ell_s = \frac{F_s \ell}{EA},$$

dopodiché la deformazione fluisce liberamente. Si immagina di fermare il flusso della deformazione plastica quando la trave si è allungata di un ulteriore $\Delta\ell_p$ e indi di scaricare la trave. La quota elastica $\Delta\ell_s$ dell'allungamento viene recupe-



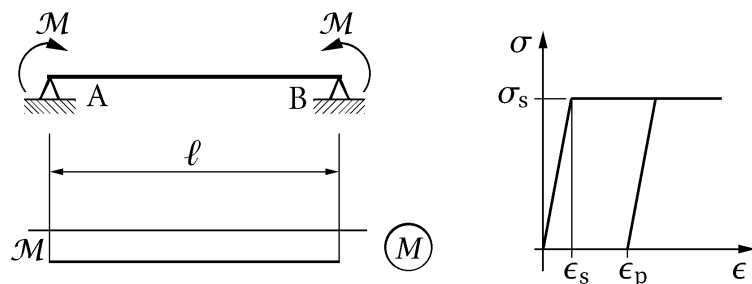
rata e la trave risulta scarica e non soggetta a caratteristiche della sollecitazione. Grazie alla plasticità del materiale si è passati così da una configurazione naturale in cui la trave è lunga ℓ ad un'altra configurazione naturale in cui la trave è lunga $\ell + \Delta\ell_p$. La deformazione plastica permanente:

$$\epsilon_p = \frac{\Delta\ell_p}{\ell},$$

rappresenta una distorsione distribuita lungo l'asse della trave.

5.6.2 Distorsione plastica distribuita di tipo flessionale

Si consideri una trave appoggiata di sezione rettangolare, costituita di materiale elastoplastico e soggetta a due coppie $\mathcal{M}$ simmetriche alle estremità. Si supponga che la risposta elastoplastica sia ancora di tipo bilineare e perfettamente plastica. Il momento flettente M è costante e pari alle coppie $\mathcal{M}$ applicate.

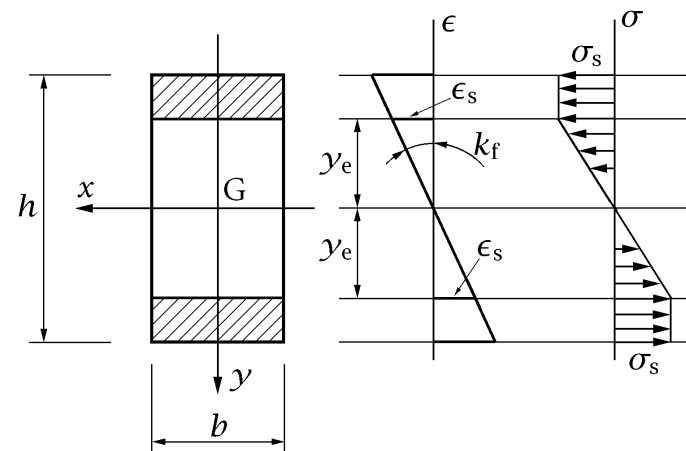


Si incrementino le coppie $\mathcal{M}$, e quindi il momento flettente, fino a che questi assuma il valore M_s di snervamento che plasticizza i lembi estremi della sezione:

$$M_s = W\sigma_s = \frac{bh^2}{6}\sigma_s,$$

dove σ_s è la tensione di snervamento e $W = bh^2/6$ il modulo di resistenza della sezione. Al momento di snervamento M_s corrisponde la curvatura flessionale k_s di snervamento:

$$k_s = 2\frac{\epsilon_s}{h},$$



dove $\epsilon_s = \sigma_s/E$ è la dilatazione di snervamento. Il diagramma M - k_f tra momento flettente e curvatura flessionale è lineare finché il comportamento del materiale è elastico lineare:

$$M = EJk_f = E\frac{bh^3}{12}k_f.$$

Continuando ad incrementare il momento flettente la plasticizzazione si propaga all'interno della sezione, sezione che resta così divisa in due parti: una parte centrale elastica con andamento lineare della tensione normale e una parte esterna plasticizzata in cui la tensione normale è costante e pari alla tensione σ_s di snervamento. Detta y_e la distanza del baricentro della sezione dai lembi estremi della parte a comportamento elastico, la curvatura flessionale k_f e il momento flettente M corrispondenti valgono:

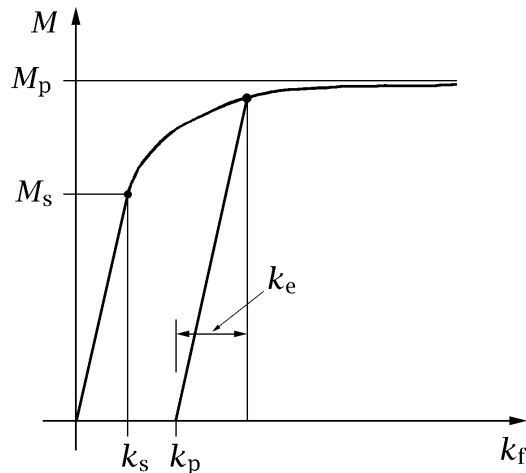
$$k_f = \frac{\epsilon_s}{y_e},$$

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{1}{2} b \sigma_s y_e \right) \left(\frac{4}{3} y_e \right) + \left\{ b \sigma_s \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \right\} \left(\frac{h}{2} + y_e \right) \\
 &= \frac{2}{3} b \sigma_s y_e^2 + b \sigma_s \left(\frac{h^2}{4} - y_e^2 \right) = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3} \right) \sigma_s.
 \end{aligned}$$

Queste sono le equazioni parametriche (di parametro y_e) di una curva $M-k_f$, valida per $k_f > k_s$. All'aumentare del momento flettente aumenta la zona plasticizzata e diminuisce di conseguenza l'ampiezza y_e della zona elastica. Se $y_e \rightarrow 0$ allora $k_f \rightarrow \infty$ e $M \rightarrow M_p$, dove M_p è detto *momento plastico* e vale:

$$M_p = \frac{b h^2}{4} \sigma_s.$$

La curva $M-k_f$ risulta quindi asintotica al momento plastico per $k_f \rightarrow \infty$.



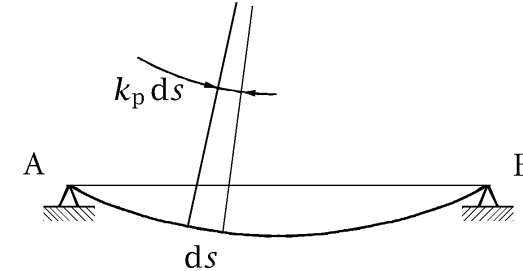
Si aumentino ora le coppie applicate fino a portare il momento flettente M a superare il momento di snervamento e a sviluppare quindi delle distorsioni plastiche, e poi si scari-

chino le coppie applicate fino ad annullarle. Durante lo scarico tutte le fibre si comportano elasticamente per cui viene recuperata la sola parte elastica della curvatura flessionale:

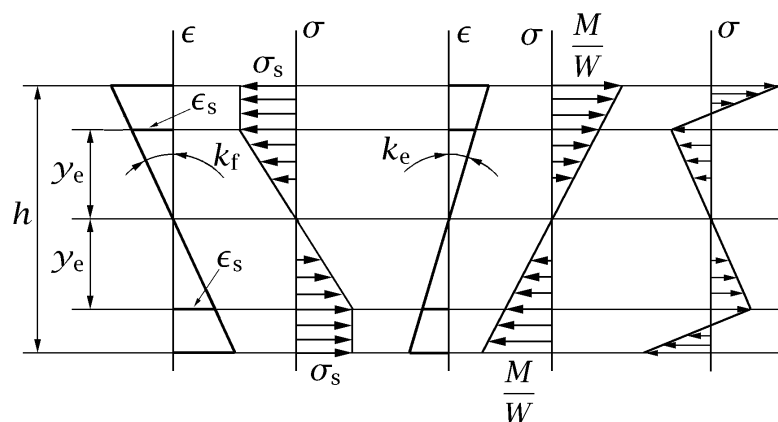
$$k_e = \frac{M}{EJ} = \frac{3h^2 - 4y_e^2}{h^3} \epsilon_s,$$

quantità che dipende dal livello del momento flettente M e cioè dal parametro y_e . Dopo l'annullarsi del momento flettente, resta quindi una curvatura flessionale permanente k_p che rappresenta una distorsione distribuita lungo l'asse della trave:

$$k_p = \frac{\epsilon_s}{y_e} - \frac{3h^2 - 4y_e^2}{h^3} \epsilon_s.$$



Si noti che per scaricare la zona centrale elastica occorrerebbe recuperare tutta la curvatura. Permangono quindi delle tensioni normali che equivalgono ad una coppia flettente, tensioni che sono autoequilibrate da quelle che permangono nella zona che ha subito la plasticizzazione e che originano una coppia complessiva equilibrante la precedente. Il valore delle autotensioni al passaggio tra la zona elastica e quella che ha



subito la plasticizzazione è data dalla relazione:

$$\sigma(y_e) = Ek_p y_e,$$

mentre quelle ai lembi estremi della sezione valgono:

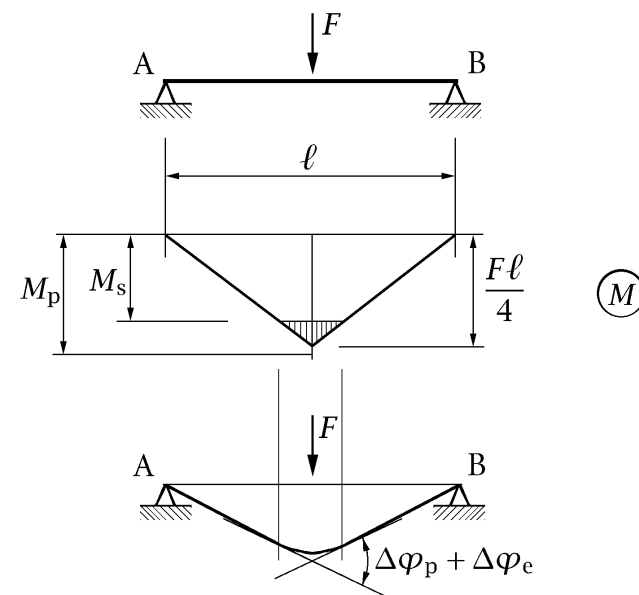
$$\sigma\left(\frac{h}{2}\right) = \sigma_s - \frac{M}{W} = \frac{M_s - M}{W}.$$

Quest'ultima tensione ha segno opposto di quella che si è generata durante il caricamento poiché $M > M_s$.

5.6.3 Distorsioni plastiche concentrate (cerniere plastiche)

Nell'esempio del paragrafo precedente il momento flettente è costante e la plasticizzazione si sviluppa contemporaneamente in tutta la trave. Nei sistemi di travi soggetti prevalentemente a momento flettente in generale il momento non è costante. Questo significa che la plasticizzazione si sviluppa a partire dalle sezioni in cui il momento è massimo, quando tale momento uguaglia il momento di snervamento.

Si consideri, quale esempio, la trave appoggiata di sezione rettangolare e soggetta ad un carico concentrato F in mezzzeria. All'incrementarsi del carico il momento $F\ell/4$ in mezzzeria raggiunge il valore di snervamento M_s . A questo punto il momento nella sezione continua ad incrementarsi con il carico e

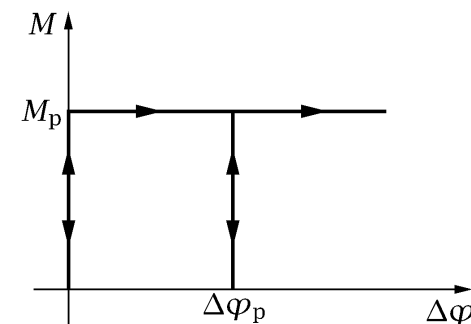


la zona plasticizzata tende ad interessare un intorno di tale sezione. In tale zona il legame tra momento flettente e curvatura flessionale segue la curva non lineare stabilita al paragrafo precedente: piccoli incrementi del momento provocano grandi incrementi della curvatura flessionale e ne risultano delle notevoli rotazioni relative $\Delta\varphi_p$ nella, ristretta, zona plasticizzata. Tali rotazioni relative dovute alla plasticizzazione vanno a sommarsi alle rotazioni relative $\Delta\varphi_e$, di ampiezza notevolmente inferiore, che si sono sviluppate durante il comportamento elastico del materiale.

Si ottiene allora la situazione in cui nella sezione di momento massimo il momento flettente si approssima al momento plastico M_p e nell'intorno di tale sezione tende a svilupparsi una rotazione relativa tendenzialmente infinita (prescindendo dalla resistenza del materiale). Tale situazione suggerisce l'introduzione del modello approssimato di *cerniera plastica* basata sulle due assunzioni seguenti:

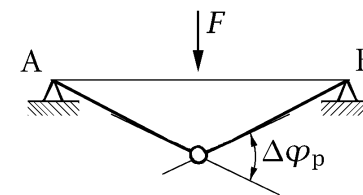
1. La rotazione relativa che si sviluppa nell'intorno della sezione di momento massimo e dovuta alla distorsione plastica viene concentrata in tale sezione;
2. La rotazione relativa concentrata nella sezione di momento massimo inizia a svilupparsi quando il momento nella sezione ha raggiunto il livello del momento plastico, senza ulteriori aumenti del momento flettente nella sezione.

Queste due assunzioni possono compendiarsi in un diagramma bilineare $M-\Delta\varphi$ di comportamento elasto-perfettamente plastico della sezione generica di una trave prevalentemente soggetta a momento flettente. Si osservi che lo sviluppo



di una rotazione relativa a momento flettente costante corrisponde all'inserimento di una cerniera nella sezione. Nelle due facce così sconnesse continua naturalmente ad agire il momento plastico.

Si vogliono ora verificare le implicazioni del modello di cerniera plastica per il caso della trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria. La trave si comporta elasti-

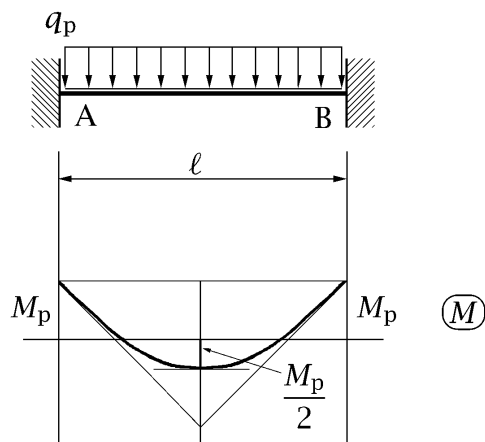


camente al crescere del carico finché il momento in mezzeria uguaglia il momento plastico. A questo punto nella sezione di mezzeria si sviluppa una cerniera plastica che rende la trave labile. Ne consegue che continuando a permanere il carico la rotazione relativa nella sezione di mezzeria tende a divenire infinita.

5.6.4 Esempio (calcolo a rottura di una trave in acciaio a sezione rettangolare, incastrata e soggetta ad un carico ripartito)

Si consideri una trave incastrata alle due estremità, di sezione rettangolare e soggetta ad un carico ripartito q . Si vuole determinare il valore q_r del carico ripartito che provoca la rottura della trave adottando il modello di cerniera plastica. Nello spirito di tale modello si raggiunge la rottura quando si sono formate un numero di cerniere plastiche sufficienti a rendere labile la struttura. Infatti a questo punto le rotazioni relative si possono sviluppare illimitatamente senza incrementare sensibilmente il carico, circostanza che porta inevitabilmente alla rottura del materiale.

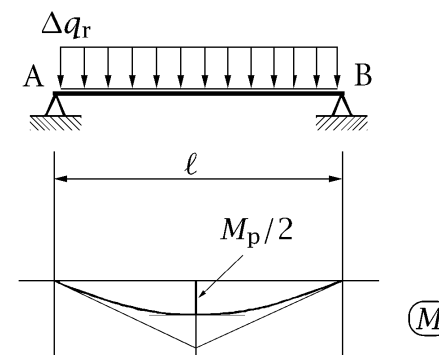
Si incrementi allora il carico ripartito q a partire dalla configurazione naturale. La trave inizialmente si comporta in modo elastico-lineare fino al livello q_p del carico che porta al-



la formazione di due cerniere plastiche agli incastrati, dove il momento è massimo (in modulo):

$$\frac{q_p \ell^2}{12} = M_p \quad \Rightarrow \quad q_p = 12 \frac{M_p}{\ell^2} = 3 \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Ulteriori incrementi Δq del carico vengono ad agire sulla trave appoggiata e determinano un incremento $\Delta q \ell^2 / 8$ del momento in mezzeria. Tenendo conto che il momento in mezzeria



sotto il carico q_p vale $M_p/2$, l'incremento Δq_r del carico che porta alla formazione della cerniera plastica in mezzeria e quindi alla rottura della trave è individuato dalla condizione:

$$\frac{\Delta q_r \ell^2}{8} + \frac{M_p}{2} = M_p \quad \Rightarrow \quad \Delta q_r = 4 \frac{M_p}{\ell^2} = \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Il carico di rottura q_r vale quindi:

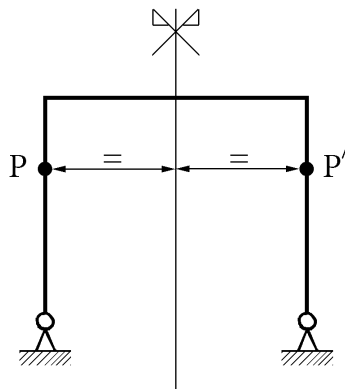
$$q_r = q_p + \Delta q_r = 16 \frac{M_p}{\ell^2} = 4 \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Capitolo 6

Strutture simmetriche

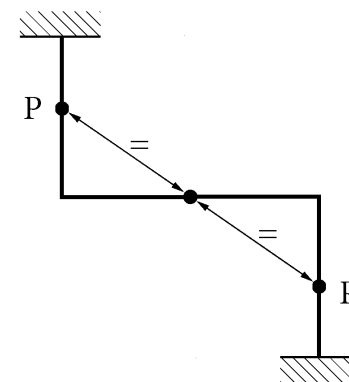
Una struttura è *simmetrica* se è invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, sotto certe trasformazioni. Nel seguito si considereranno, per le strutture piane, due tipi di trasformazioni: le *riflessioni* rispetto ad un asse e le *rotazioni di 180°* attorno ad un punto detto *polo*.

In una riflessione il punto corrispondente a un dato punto è posto sulla perpendicolare all'asse di riflessione per tale punto, dalla parte opposta rispetto all'asse e ad ugual distanza dall'asse. Una struttura invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, per riflessione rispetto ad un asse è detta *assialsimmetrica*. Spesso, quando si dice che una struttura è *simmetrica* senza nessuna altra specificazione si intende che è assialsimmetrica. Si noti che una riflessione è equivalente ad una rotazione di 180° attorno all'as-



se di riflessione. Tale rotazione comunque, a differenza della riflessione, coinvolge la terza dimensione. Con riferimento alle sezioni delle travi si è anche parlato di (*assial*)*simmetria obliqua*: in tal caso, dato un punto, la trasformazione gli fa corrispondere il punto posto sulla retta per il punto dato e avente la data direzione obliqua, dalla parte opposta rispetto all'asse e ad ugual distanza dall'asse.

Una rotazione di 180° attorno a un polo è equivalente alla trasformazione che a un dato punto fa corrispondere il punto posto sulla congiungente per il polo, dalla parte opposta rispetto al polo e ad ugual distanza dal polo. Una struttura



invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, per rotazioni di 180° attorno a un polo è detta *polarsimmetrica*.

6.1 Azioni su strutture simmetriche

Si consideri ora un sistema di travi simmetrico (in senso generico, ovvero sia assialsimmetrico oppure polarsimmetrico

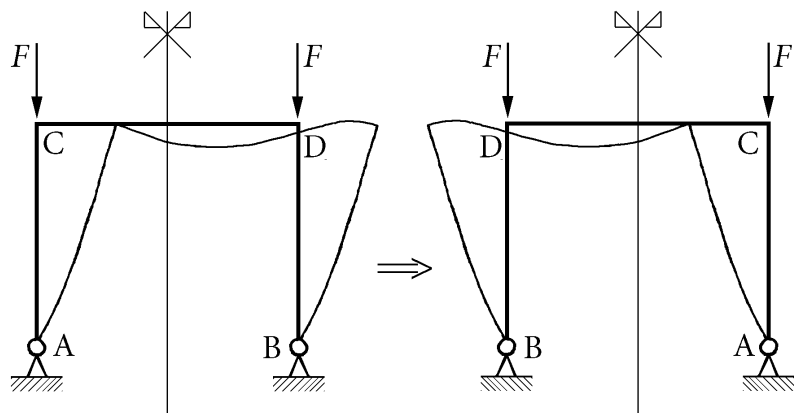
o altro). Le azioni che agiscono sulla struttura (forze, distorsioni, vincoli) possono essere:

1. *Simmetriche*, se sono invarianti a seguito della trasformazione;
2. *Emisimmetriche* (o *antisimmetriche*) se nella trasformazione si ottengono le azioni cambiate di segno;
3. Generiche, ovverossia né simmetriche e né emisimmetriche.

6.1.1 Sistemi simmetrici soggetti ad azioni simmetriche

Si consideri innanzitutto un sistema simmetrico soggetto ad azioni simmetriche e si supponga che ammetta una soluzione non simmetrica (quando ciò avviene si parla di *rottura di simmetria*).

Eseguendo la trasformazione la struttura e le azioni restano invariate mentre la soluzione si trasforma nella sua simmetrica. Questo implica che se un sistema simmetrico sotto certe

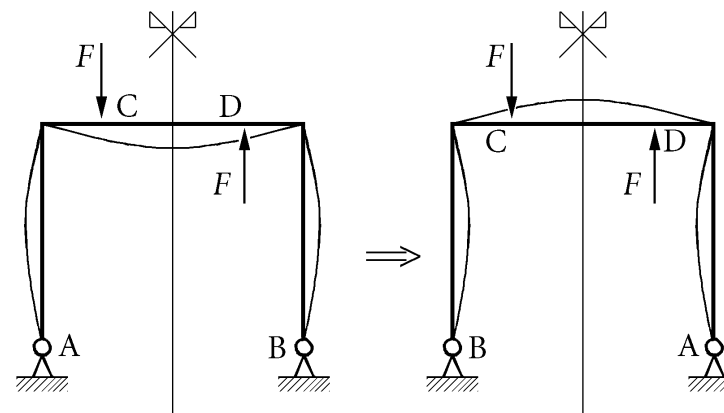


azioni simmetriche ammette una soluzione non simmetrica, anche la simmetrica di tale soluzione è una soluzione. In particolare se ne può concludere che le (eventuali) soluzioni non simmetriche si presentano sempre a coppie.

Poiché i sistemi lineari, tipo quelli che si stanno al momento considerando, ammettono una sola soluzione se ne può concludere che questa, unica, soluzione deve essere simmetrica.

6.1.2 Sistemi simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche

Si consideri ora un sistema simmetrico soggetto ad azioni emisimmetriche e si supponga che ammetta una soluzione non emisimmetrica. Eseguendo la trasformazione la struttura resta invariata, le azioni cambiano di segno e la soluzione si trasforma nella sua simmetrica. Se il sistema è anche omogeneo di grado uno (come nel caso dei sistemi lineari) e sotto certe azioni ammette una soluzione allora sotto le azioni cambiate di segno (cioè moltiplicate per -1) ammette la soluzione precedente cambiata di segno. Dopo la trasformazione



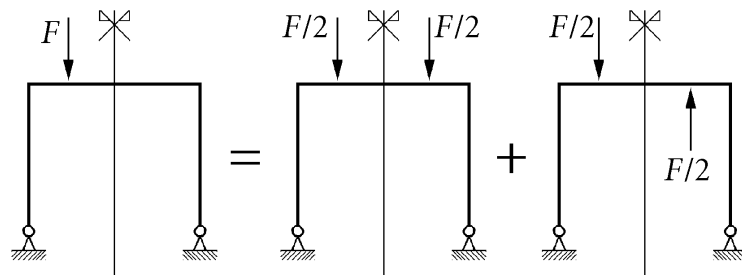
si cambi allora segno sia alle forze che alla soluzione (simmetrica della soluzione di partenza) ottenendo così le forze originali e la emisimmetrica della soluzione di partenza. Quindi le eventuali soluzioni non emisimmetriche di un sistema omogeneo di grado uno simmetrico e soggetto ad azioni emisimmetriche si presentano a coppie.

Nel caso dei sistemi lineari simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche si può quindi concludere che la soluzione, unica, deve essere emisimmetrica.

6.1.3 Sistemi simmetrici soggetti ad azioni generiche

Infine, se le azioni su una struttura simmetrica sono generiche e se vale la sovrapposizione degli effetti (come nel caso delle strutture lineari), possono sempre decomporsi nella somma di azioni simmetriche e di azioni emisimmetriche.

Infatti, se in punto è data una certa azione, basta dividerla a metà, una metà farà parte delle azioni simmetriche e l'altra metà di quelle emisimmetriche. In più, delle azioni simmetriche farà parte la simmetrica di tale metà e delle azioni emi-



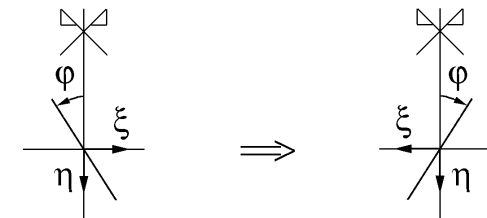
simmetriche farà parte la sua emisimmetrica. Sommando si riottiene l'intera azione mentre la simmetrica e l'emisimmetrica di metà di tale azione si elidono reciprocamente.

6.2 Sistemi assialsimmetrici

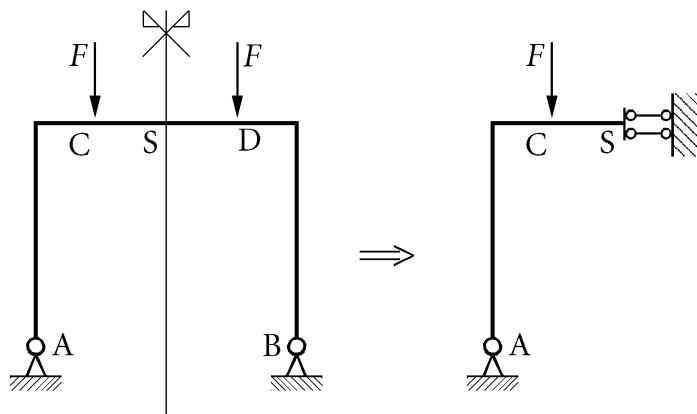
Si concentri ora l'attenzione sui sistemi assialsimmetrici, quindi, come detto, invarianti per riflessione rispetto ad un asse. Nel seguito analizzeremo tali sistemi sia soggetti ad azioni simmetriche che emisimmetriche, con particolare riferimento alla situazione che si presenta in corrispondenza di sezioni poste sull'asse di simmetria.

6.2.1 Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni simmetriche

Come detto, la risposta di una struttura simmetrica ad azioni simmetriche, nel caso delle strutture lineari, è simmetrica. Ne consegue che una sezione posta sull'asse di simmetria può solo traslare lungo l'asse di simmetria. Infatti, per riflessione, tale spostamento resta invariato, mentre sia una traslazione ortogonale all'asse di simmetria che una rotazione vengono



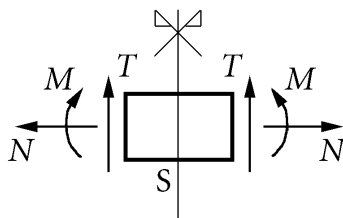
cambiate di segno nella riflessione (sono cioè emisimmetriche). Ne consegue che le condizioni cinematiche imposte dalla simmetria sono equivalenti a quelle dovute ad un doppio pendolo.



Si consideri ora la situazione statica di una sezione posta sull'asse di simmetria e di traccia coincidente con l'asse. Per equilibrio del nodo, la sezione può essere soggetta a forza normale e a momento flettente mentre il taglio deve essere nullo, almeno se la sezione non è direttamente caricata:

Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse di simmetria

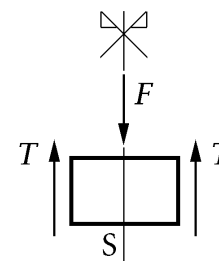
$$\Rightarrow T = 0.$$



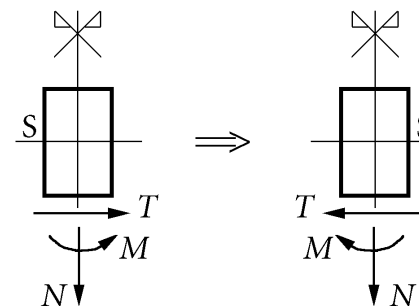
Se la sezione è invece caricata da una forza simmetrica, cioè da una forza avente la direzione dell'asse di simmetria, l'equilibrio impone che nelle due facce poste immediatamente prima e dopo l'asse di simmetria il taglio valga metà della forza applicata:

Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse di simmetria

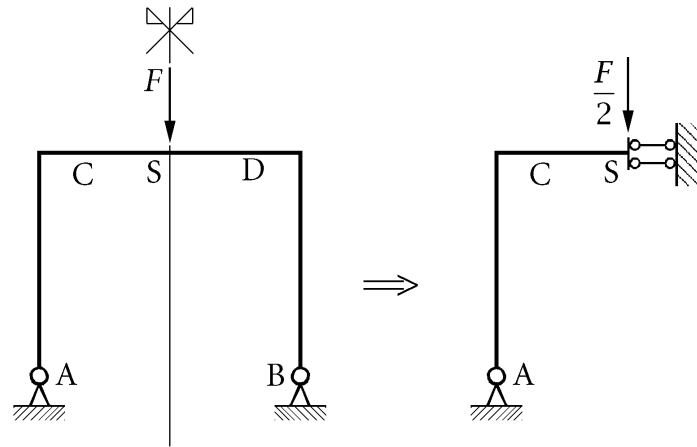
$$\Rightarrow T = \frac{F}{2}.$$



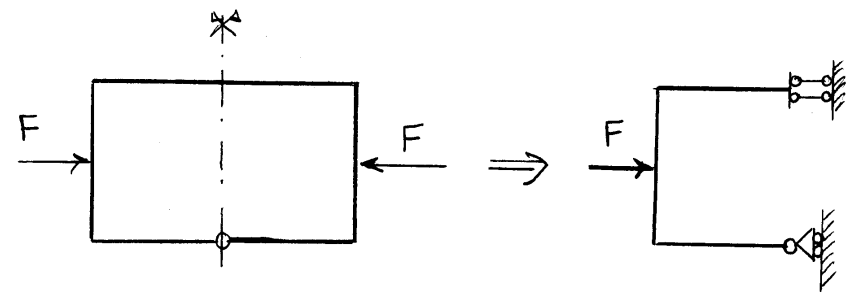
Si consideri poi una sezione posta sull'asse di simmetria ma di traccia ortogonale all'asse. In tale caso risulta che la sezione è soggetta alla sola forza normale. Infatti la forza normale è l'unica caratteristica della sollecitazione che si rifletta restando invariante.



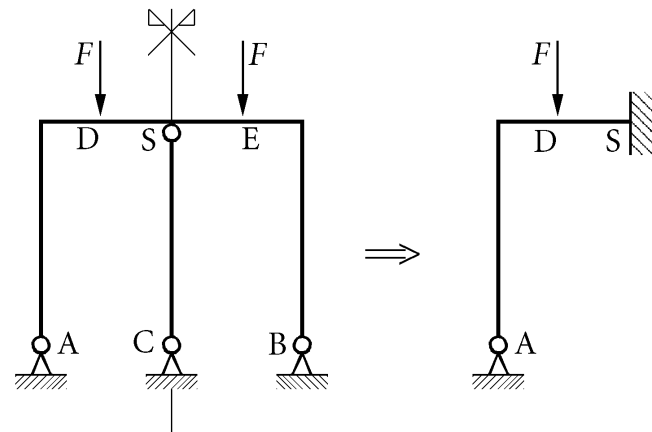
Esempio 1:



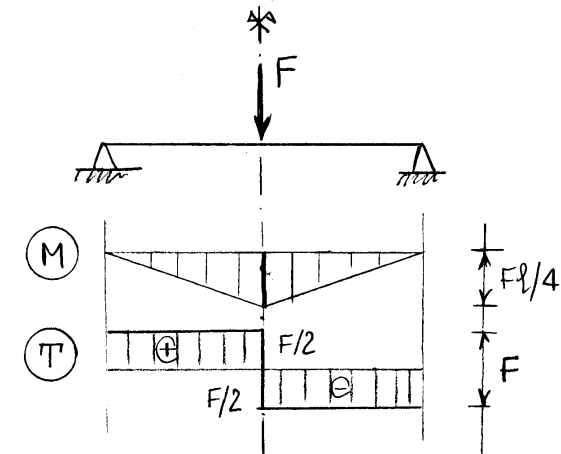
Esempio 3:



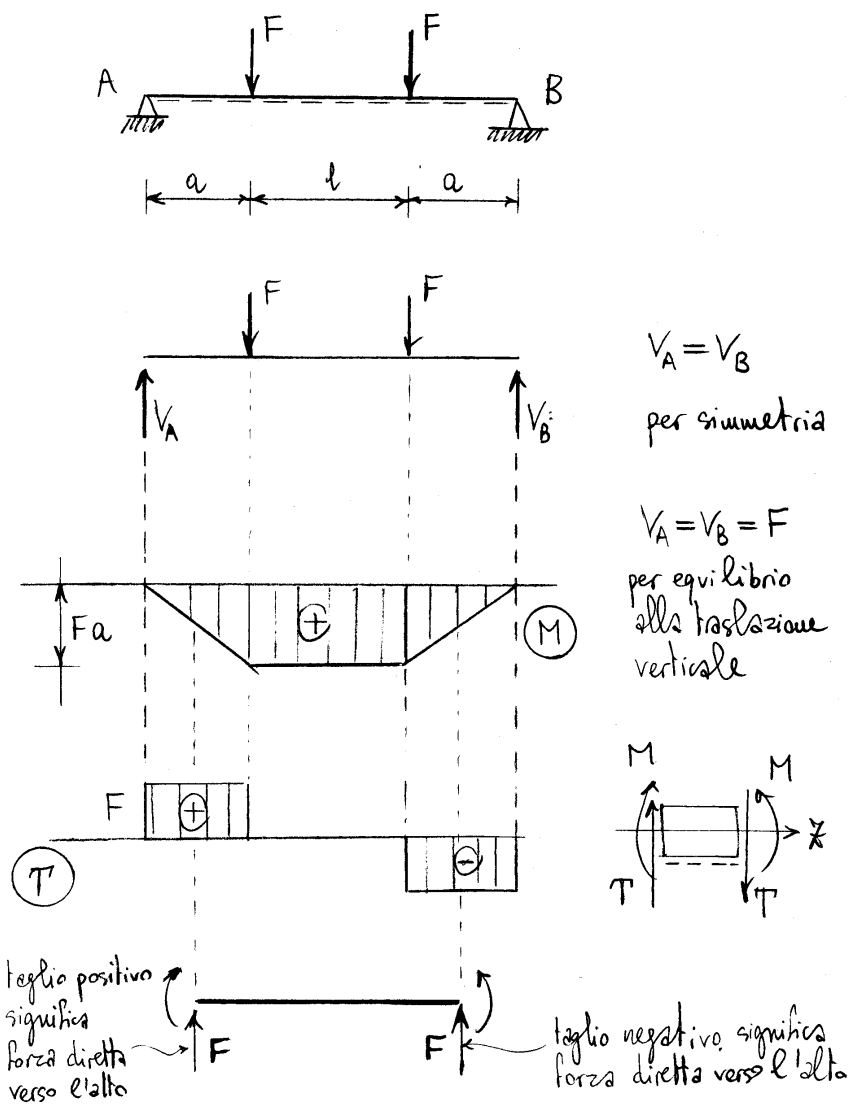
Esempio 2:



Esempio 4:

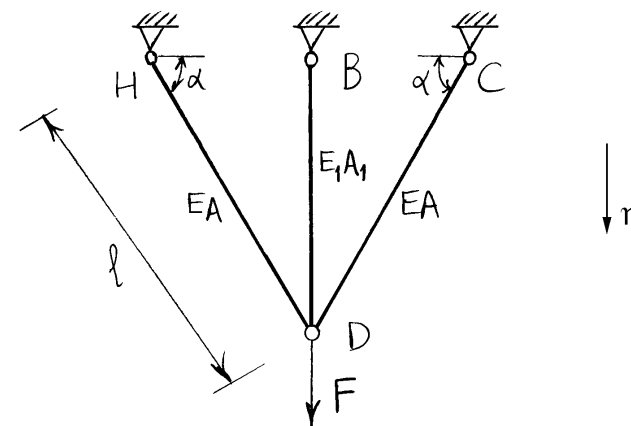


Esempio 5:



il diagramma del taglio e' emisimmetrico, ma le forze sono simmetriche

6.2.1.1 Cavalletto iperstatico soggetto ad un carico simmetrico

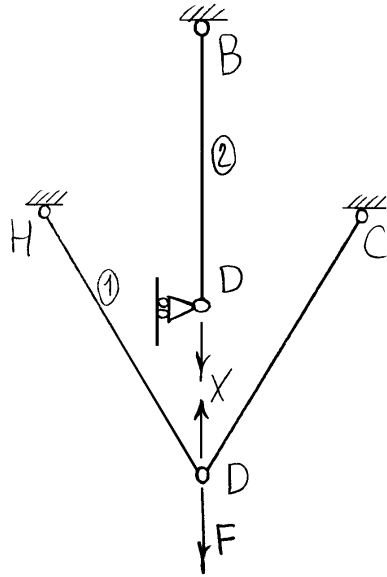


$$\begin{cases} g = 3 \times 3 = 9 \\ v = 5 \times 2 = 10 \\ i = 1 \end{cases}$$

oppure, considerando il nodo D vincolato dai pendoli:

$$\begin{cases} g = 2 \\ v = 3 \\ i = 1 \end{cases}$$

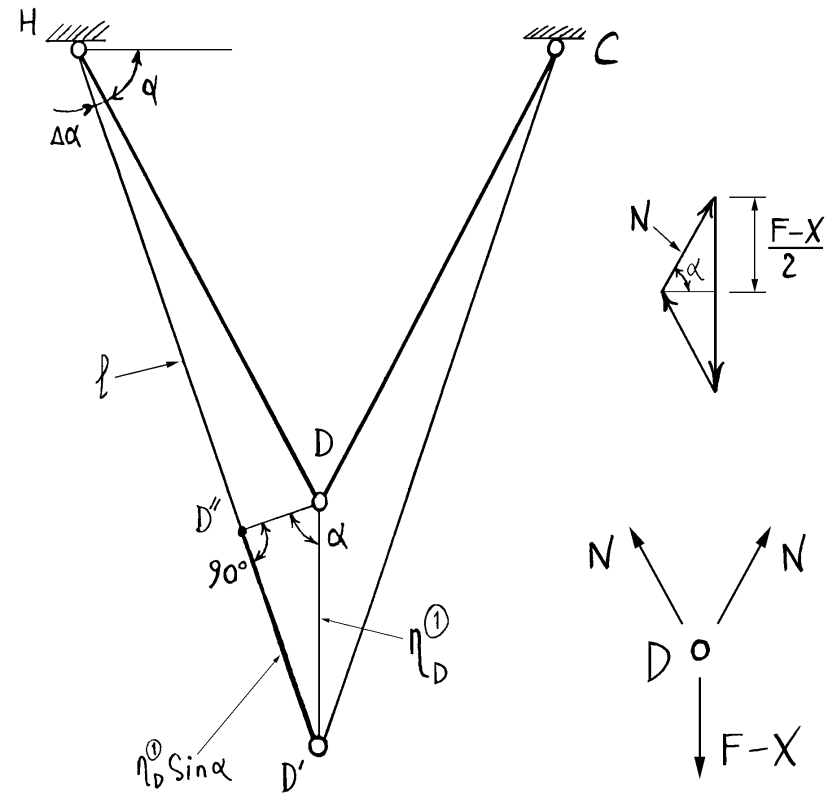
Struttura principale



Equazione di congruenza: $\eta_D^{(1)} = \eta_D^{(2)}$

$$\eta_D^{(2)} = \frac{X l \sin \alpha}{E_1 A_1}$$

$$\eta_D^{(1)} \sin \alpha = \frac{N l}{E A} \Rightarrow \eta_D^{(1)} = \frac{N l}{E A \sin \alpha}$$



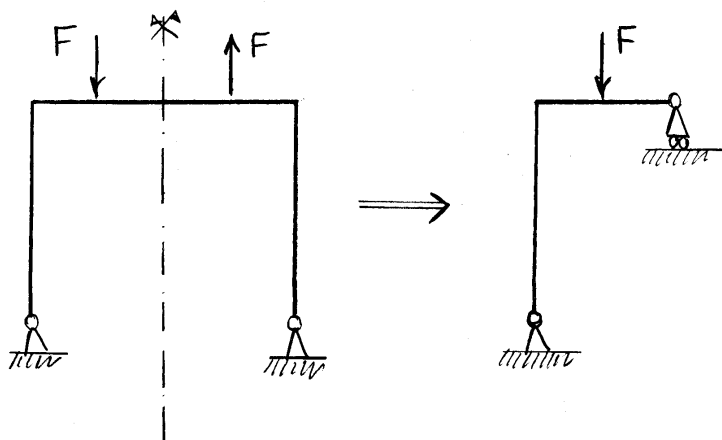
$$N = \frac{F - X}{2 \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_D^{(1)} = \frac{F l}{2 E A \sin^2 \alpha} - \frac{X l}{2 E A \sin^2 \alpha}$$

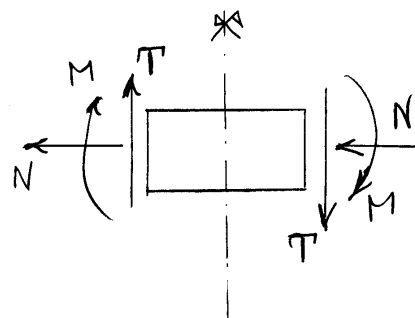
$$\eta_D^{(1)} = \eta_D^{(2)} \Rightarrow X = \frac{F / 2 E A \sin^2 \alpha}{1 / 2 E A \sin^2 \alpha + \sin \alpha / E_1 A_1}$$

6.2.2 Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche

La sezione posta sull'asse di simmetria può traslare in direzione ortogonale all'asse e può ruotare mentre non può traslare nella direzione dell'asse. Infatti, per riflessione, lo spostamento nella direzione dell'asse non cambia di segno e quindi rappresenta uno spostamento simmetrico. Le condizioni cinematiche imposte dalla emisimmetria ad una sezione posta sull'asse di simmetria sono dunque equivalenti a quelle dovute ad un carrello con piano di scorrimento ortogonale all'asse di simmetria.



Per equilibrio del nodo posto sull'asse di emisimmetria, la relativa sezione può essere soggetta a taglio mentre la forza normale ed il momento flettente devono essere nulli, almeno nel caso in cui la sezione posta sull'asse non è caricata.



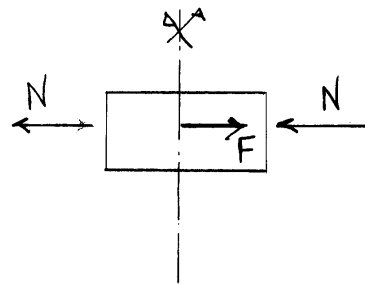
Nodo sull'asse di simmetria
di una struttura simmetrica
caricata emisimmetricamente

Equilibrio alla traslazione
ortogonamente all'asse di simmetria $\Rightarrow N = 0$

Equilibrio alla rotazione $\Rightarrow M = 0$

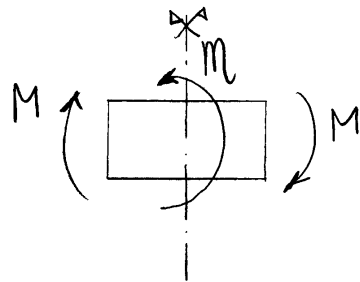
Se il nodo è caricato da una forza emisimmetrica l'equilibrio impone che la forza normale a destra e a sinistra del nodo valga metà della forza applicata.

Analogamente, se il nodo è caricato da una coppia, l'equilibrio impone che il momento flettente a destra e a sinistra del nodo valga metà della coppia applicata.



Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente e soggetta ad una forza (emisimmetrica) nella sezione di simmetria

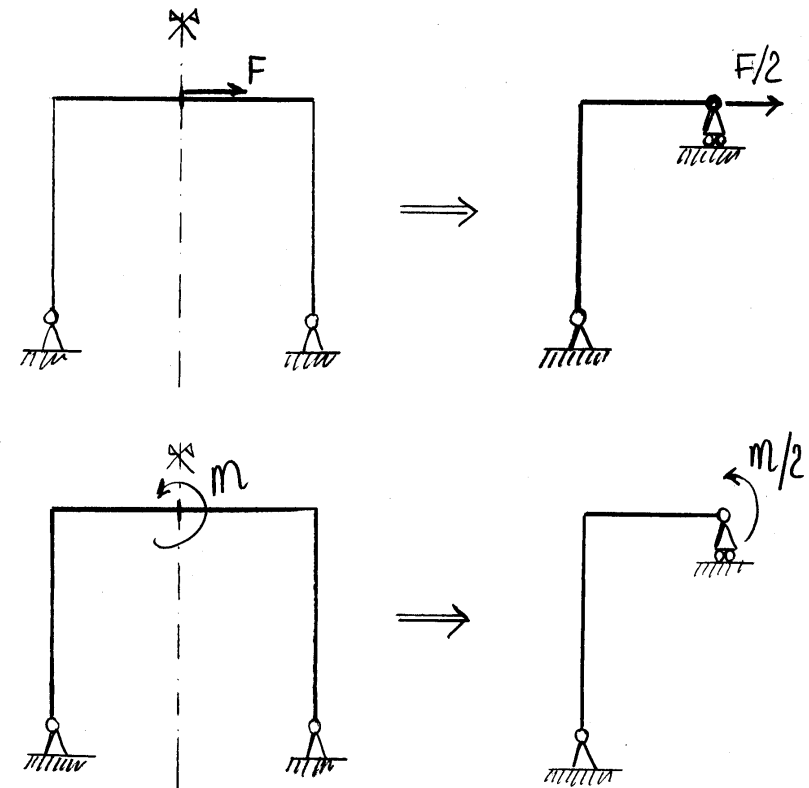
Equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale all'asse di simmetria $\Rightarrow N = \frac{F}{2}$



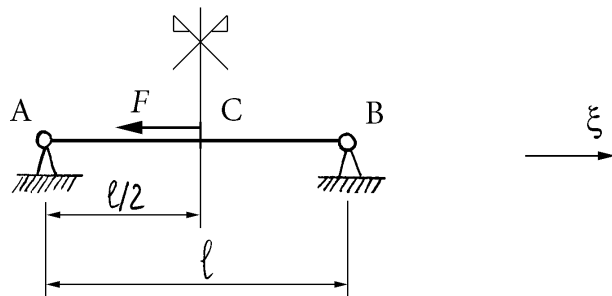
Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente e soggetta ad una coppia nella sezione di simmetria

Equilibrio alla rotazione $\Rightarrow M = \frac{m}{2}$

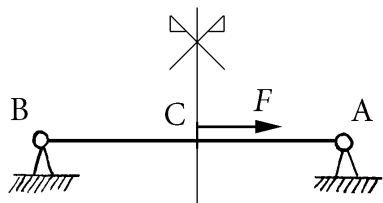
Si noti che una forza diretta come l'asse di simmetria ed applicata in corrispondenza di una sezione posta sull'asse di simmetria, rappresenta un carico simmetrico.



6.2.2.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale emisimmetrico

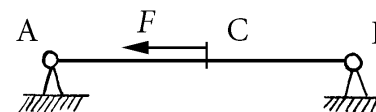


La trave è geometricamente e materialmente simmetrica rispetto all'asse verticale passante per il punto C di mezzeria. La forza F risulta invece antisimmetrica:

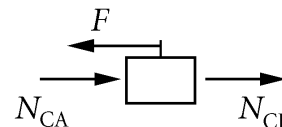


riflessione rispetto all'asse di simmetria
(situazione identica alla precedente, ma con le forze cambiate di segno)

È possibile risolvere il problema imponendo che la soluzione riflessa coincida con la soluzione originaria cambiata di segno.

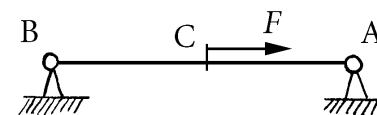


Struttura originaria

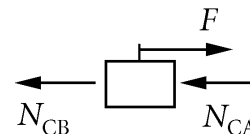


Equilibrio nodo C

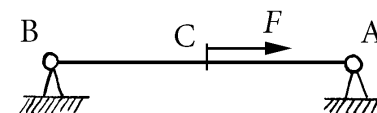
$$N_{CA} + N_{CB} = F$$



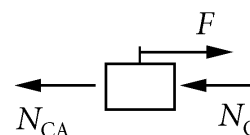
Struttura riflessa



Forze normali riflesse



Struttura soggetta alla forza cambiata di segno



Forze normali cambiate di segno

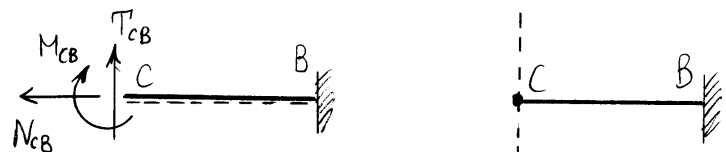
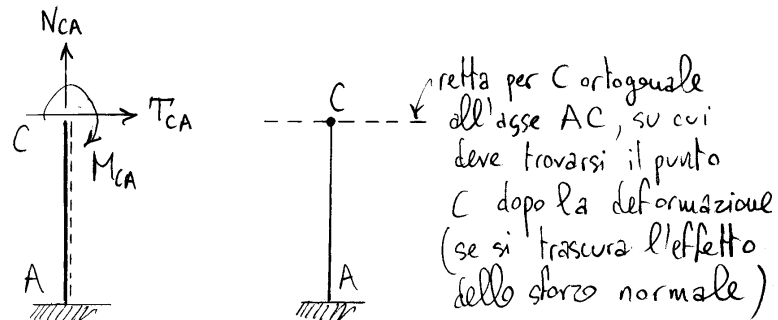
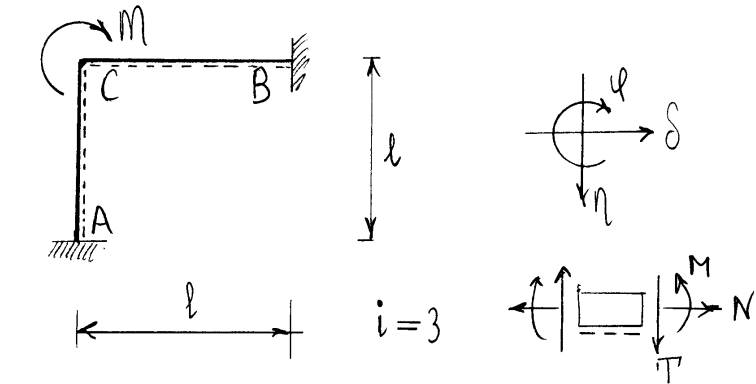
La struttura riflessa è indistinguibile dalla struttura originaria soggetta alle forze cambiate di segno e quindi deve risultare:

$$N_{CA} = N_{CB}.$$

L'equilibrio del nodo C impone infine che sia:

$$N_{CA} = N_{CB} = \frac{F}{2}.$$

6.2.2.2 Esecizio (Telaio soggetto ad una coppia)

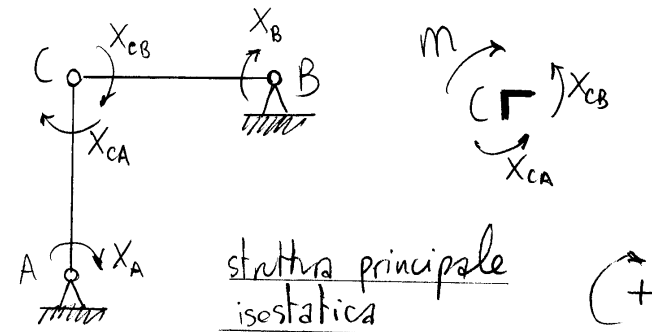


retta per C ortogonale all'asse CB, su cui deve trovarsi il punto C dopo la deformazione (se si trascura l'effetto dello sforzo normale)

Dovendo il punto C trovarsi, dopo la deformazione, contemporaneamente su due rette che hanno il solo punto C in comune, il punto C non si sposta e quindi:

$$\eta_c = \delta_c = 0$$

Vediamo la soluzione con il metodo delle forze.



Equilibrio del nodo:

$$X_{CA} + X_{CB} = M$$

Congruenza:

$$\varphi_B = 0 \Rightarrow \frac{X_B l}{3EJ} - \frac{X_{CB} l}{6EJ} = 0$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \frac{X_A l}{3EJ} - \frac{X_{CA} l}{6EJ} = 0$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} \Rightarrow \frac{X_{CA} l}{3EJ} - \frac{X_A l}{6EJ} = \frac{X_{CB} l}{3EJ} - \frac{X_B l}{6EJ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{CA} + X_{CB} = M \\ 2X_B - X_{CB} = 0 \\ 2X_A - X_{CA} = 0 \\ X_A - X_B - 2(X_{CA} - X_{CB}) = 0 \end{array} \right.$$

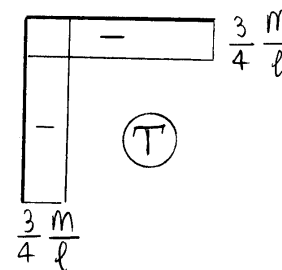
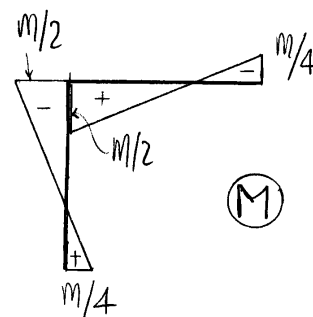
Sistema di 4 equazioni in 4 incognite. La seconda e la terza equivalgono alla soluzione di una trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia all'estremità:

$$X_B = X_{CB}/2, \quad X_A = X_{CA}/2.$$

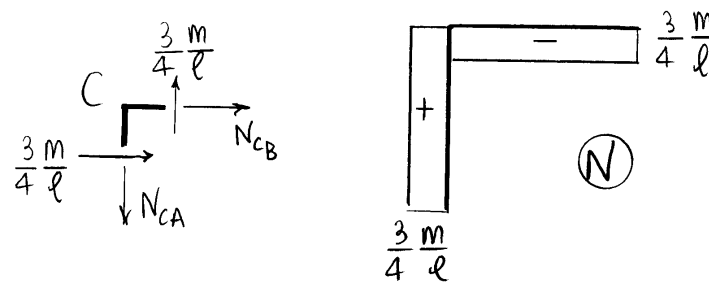
La quarta equazione diviene:

$$X_{CA} - X_{CB} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{CA} = X_{CB} = \frac{M}{2} \\ X_A = X_B = \frac{M}{4} \end{array} \right.$$

$$\varphi_C = \varphi_{CA} = \varphi_{CB} = \frac{\frac{M}{2} l}{3EJ} - \frac{\frac{M}{4} l}{6EJ} = \frac{Ml}{8EJ}$$



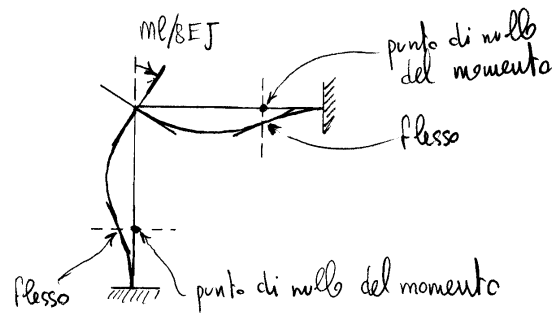
equilibrio alla
traslazione del
nodo C $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} N_{CA} = \frac{3}{4} \frac{m}{l} \\ N_{CB} = -\frac{3}{4} \frac{m}{l} \end{array} \right.$



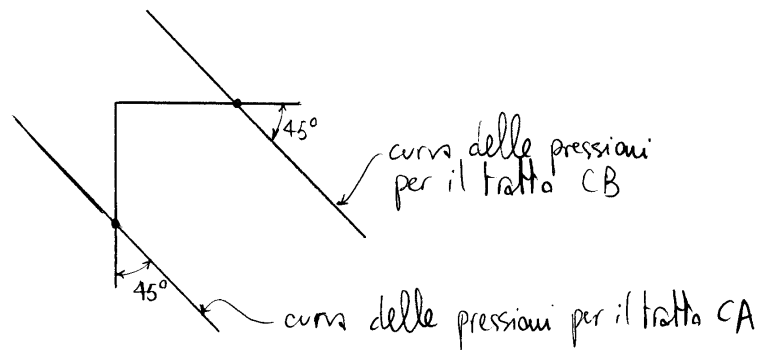
Nota che la forza normale non è nulla e che quindi è essenziale trascurare i suoi effetti sulla deformazione per poter affermare che il nodo C ruota

senza spostarsi.

Deformata:

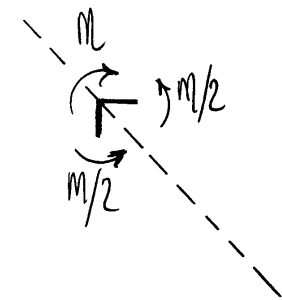
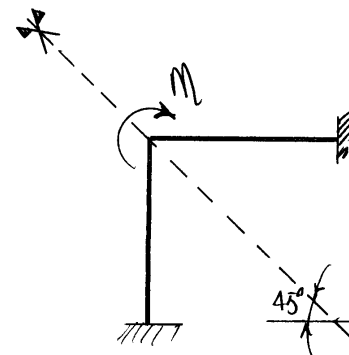


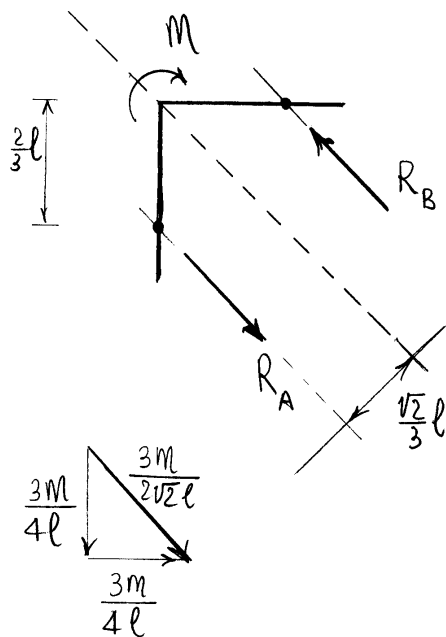
Curva delle pressioni



La struttura presenta un asse di simmetria geometrica e materiale e la coppia M , applicata nel nodo C , rappresenta un carico emisimmetrico

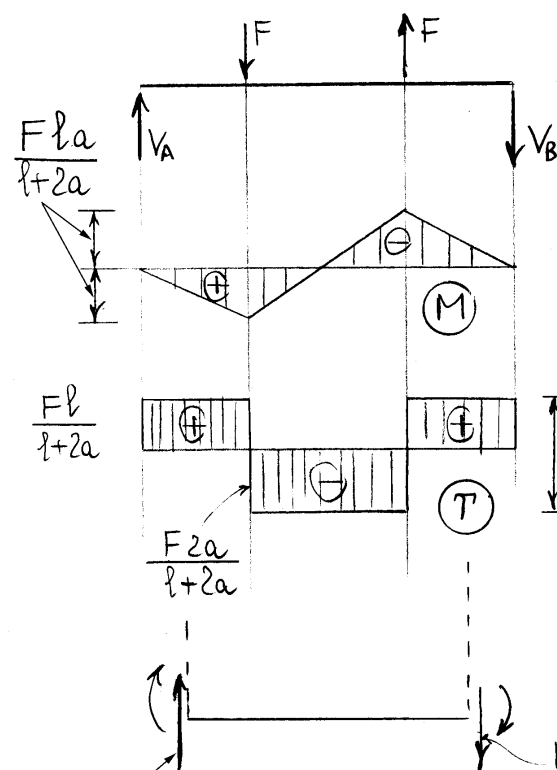
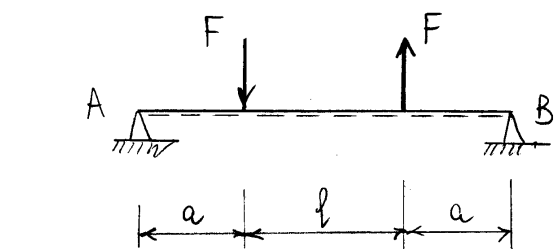
(antisimmetrico). Ciò impone che i momenti flettenti agenti a destra e a sinistra del nodo C siano emisimmetrici, cioè uguali in modulo e di verso concorde. Non solo, ciò impone anche che le rette d'azione delle risultanti degli incastri in A e in B , parallele fra loro poiché le due risultanti devono equivalere ad una coppia, siano anche parallele all'asse di simmetria. La soluzione del problema iperstatico impone che le rette d'azione delle risultanti devono passare a $2l/3$ dal nodo per cui il braccio della coppia vale $2\sqrt{2}l/3$.





$$R_A = R_B = \frac{3M}{2\sqrt{2}l}$$

6.2.2.3 Diagrammi nel caso emisimmetrico



$$V_A = V_B$$

per emisimmetria

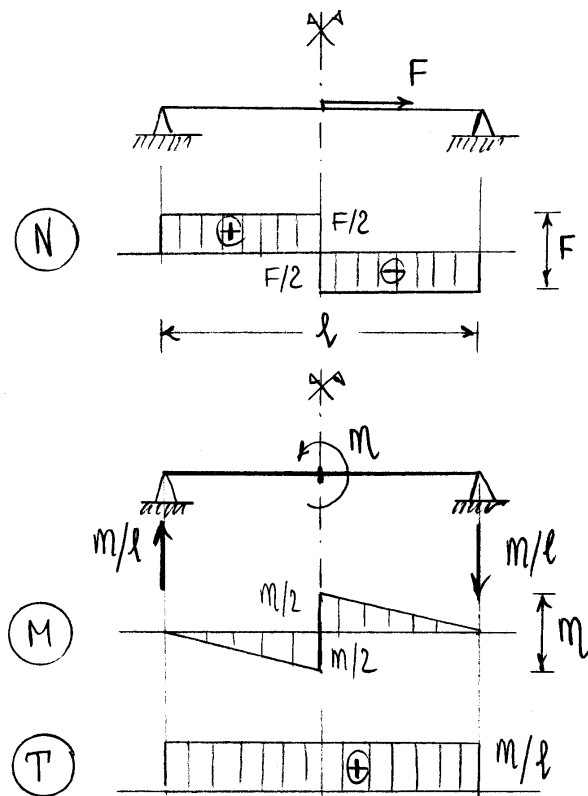
$$V_A = V_B = \frac{F \cdot l}{l + 2a}$$

per equilibrio alla rotazione

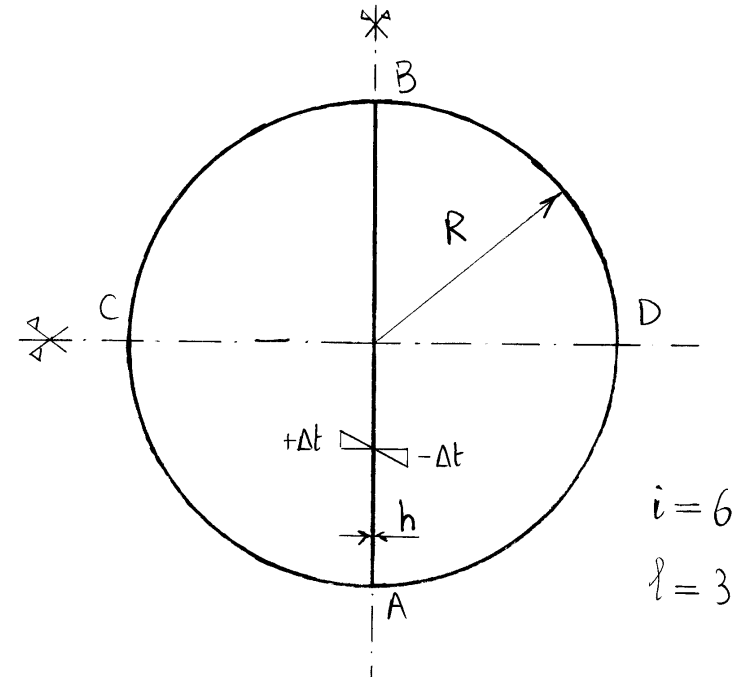
taglio positivo significa forza diretta verso l'alto

taglio positivo significa forza diretta verso il basso

il diagramma del taglio è simmetrico, ma le forze sono emisimmetriche

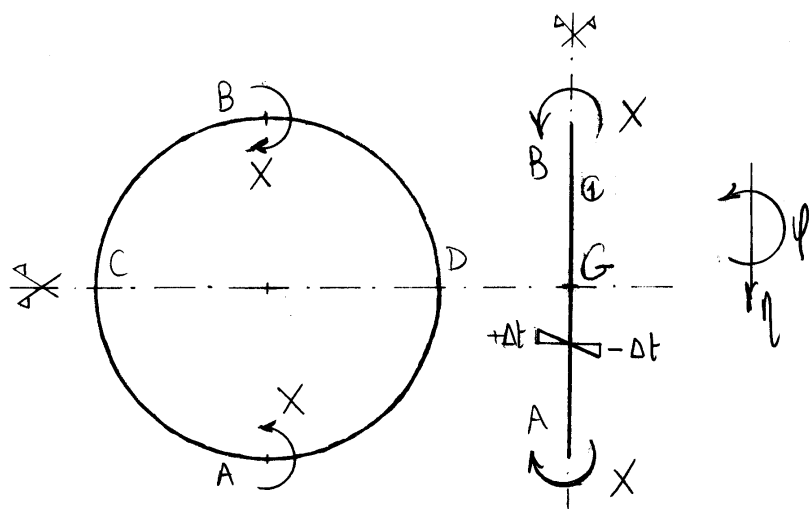


6.2.3 Esecizio (anello con diaframma soggetto ad una distorsione termica)



La struttura è simmetrica rispetto all'asse CD ed emisimmetrica rispetto all'asse AB . Inoltre è 3 volte labile e 6 volte iperstatica.

Per ridurre ad una struttura staticamente determinata, iniziamo a separare l'asta AB soggetta alla variazione termica dell'anello circolare. Per la simmetria rispetto all'asse CD , le sezioni

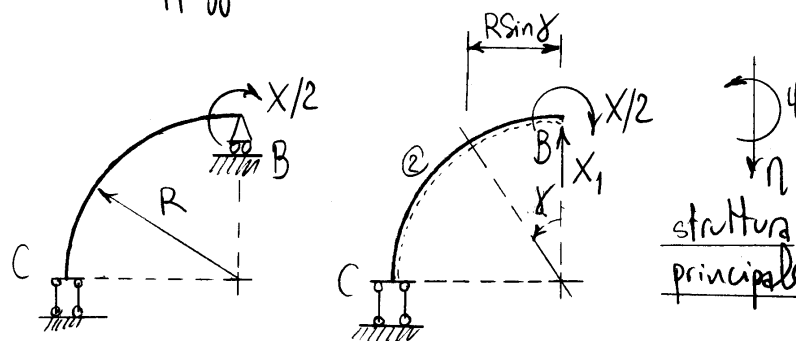


A e B di estremità dell'asta AB sono soggette ad un momento flettente X simmetrico e non sono soggette a taglio (per equilibrio alla traslazione orizzontale), mentre per la emisimmetria rispetto all'asse AB la forza normale è nulla (la forza normale è una forza simmetrica). La rotazione di G è inoltre nulla per la simmetria rispetto a CD e quindi la rotazione di B (e per simmetria anche di A) può valutarsi considerando che il tratto GB si deforma come una mensola, a meno di una traslazione orizzontale:

$$\varphi_B^{\textcircled{1}} = \frac{XR}{EJ} - \frac{2R\alpha\Delta t}{h}.$$

Separiamo ora il quarto di circonferenza BC , tenendo

conto che B è una sezione di emisimmetria e che C è una sezione di simmetria. Si ottiene così una struttura una volta labile e una volta iperstatica, che può essere resa staticamente determinata rimuovendo l'appoggio in B :



Congruenza:

$$\begin{cases} \varphi_B^{\textcircled{2}} = \varphi_B^{\textcircled{1}} \\ \eta_B^{\textcircled{2}} = 0 \end{cases}$$

$$M(\gamma) = X_1 R \sin \gamma - X/2$$

$$d\varphi_B^{\textcircled{2}} = \frac{M}{EJ} ds$$

$$d\eta_B^{\textcircled{2}} = -\frac{M}{EJ} R \sin \gamma ds$$

Procedendo con il metodo cinematico sulla struttura principale, si ottiene:

$$\varphi_B^{\textcircled{2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{R}{EJ} (X_1 R \sin \gamma - X/2) d\gamma = \frac{R^2}{EJ} X_1 - \frac{\pi R}{4EJ} X,$$

$$\begin{aligned}\theta_B^2 &= - \int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{EJ} (X_1 R \sin \gamma - X/2) \sin \gamma d\gamma \\ &= - \frac{R^2}{2EJ} \left(\frac{\pi R}{2} X_1 - X \right)\end{aligned}$$

$$\theta_B^2 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{2}{\pi R} X$$

$$\begin{aligned}\varphi_B^2 = \varphi_B^1 &\Rightarrow \frac{2R}{\pi EJ} X - \frac{\pi R}{4EJ} X = \frac{XR}{EJ} - \frac{2R\alpha\Delta t}{h} \\ &\Rightarrow \frac{R}{EJ} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) X = R \frac{2\alpha\Delta t}{h}\end{aligned}$$

La soluzione risulta dunque:

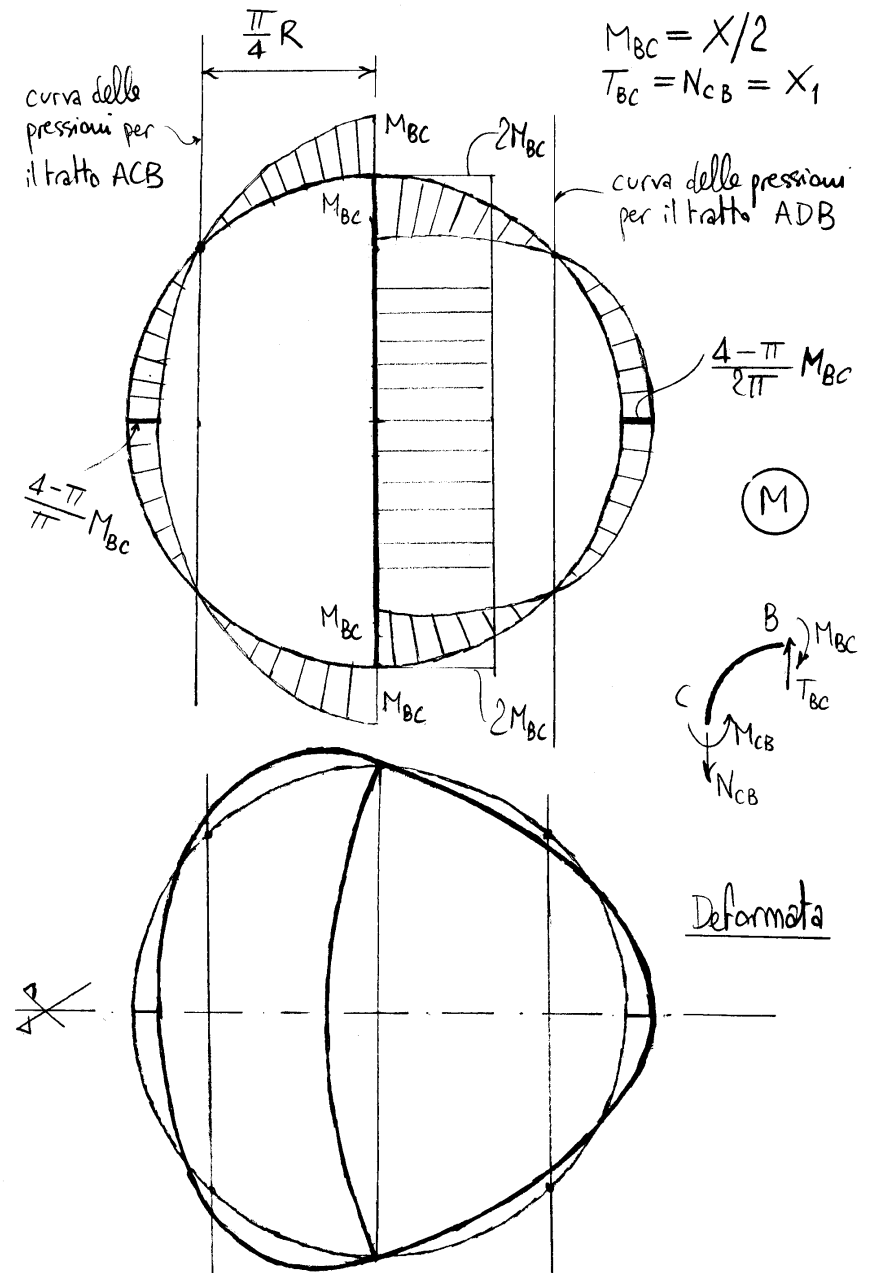
$$\begin{cases} X = \frac{8\pi}{4\pi + \pi^2 - 8} \frac{EJ\alpha\Delta t}{h} \\ X_1 = \frac{16}{4\pi + \pi^2 - 8} \frac{EJ\alpha\Delta t}{hR} \end{cases}$$

Il rapporto $b = (X/2)/X_1$ tra la coppia delle forze agenti in B misura la distanza tra la sezione B e la retta d'azione della risultante in B:

$$b = \frac{\pi}{4} R < R$$

Il momento cambia dunque di segno tra B e C e in C vale:

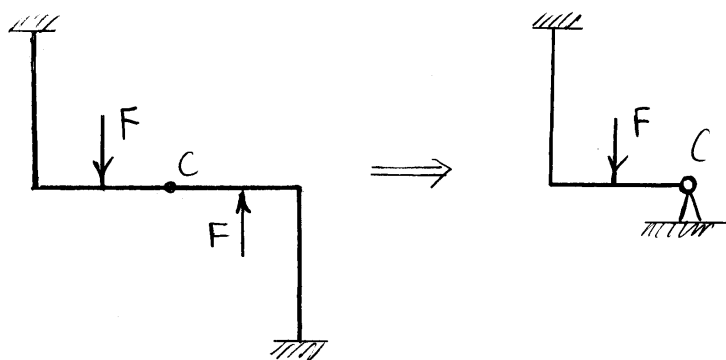
$$M_C = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} X - \frac{1}{2} X = \frac{4-\pi}{2\pi} X$$



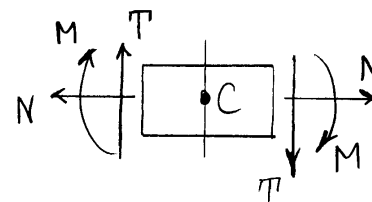
6.3 Sistemi polarsimmetrici

6.3.1 Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polarsimmetriche

Se il polo C appartiene alla struttura, la corrispondente sezione può ruotare ma non può traslare, poiché la sola rotazione risulta essere polarsimmetrica. Le condizioni cinematiche imposte dalla polarsimmetria sono dunque quelle di una cerniera fissa.

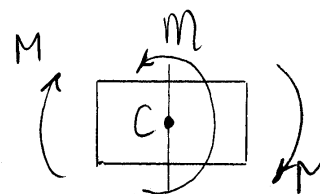


Per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione, l'equilibrio impone che in corrispondenza del polo C (se appartiene alla struttura) si annulli il momento flettente, salvo che non vi sia una coppia esterna applicata in C . In quest'ultimo caso il momento flettente a destra e a sinistra di C vale la metà della coppia applicata.



Equilibrio alla rotazione

$$M = 0$$

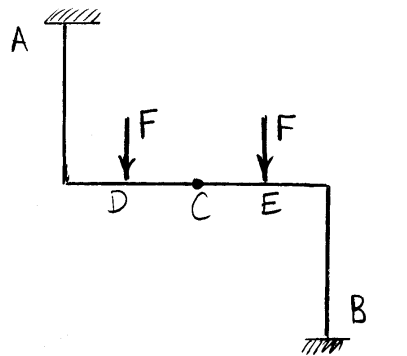


Equilibrio alla rotazione

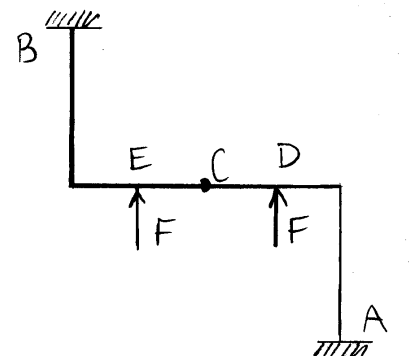
$$M = m/2$$

6.3.2 Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polaremisimmetriche

Se una struttura polar-simmetrica è caricata polar-emisimmetricamente, una rotazione di 180° della struttura attorno al polo la rende indistinguibile dalla struttura originaria sottoposta alle forze cambiate di segno. Ne consegue che anche la risposta della struttura deve essere polar-emisimmetrica.

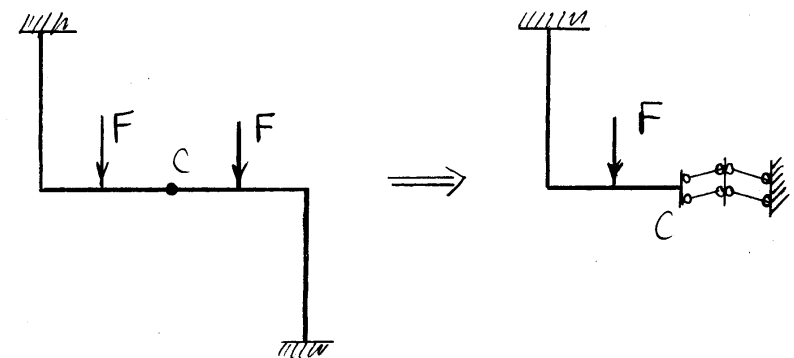


Struttura polar-simmetrica
caricata polar-emisimmetricamente



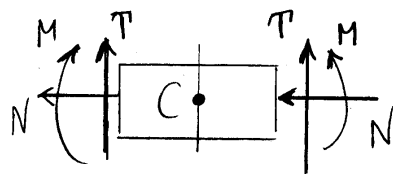
struttura dopo la rotazione di 180°
attorno a C (indistinguibile dalla
originaria soggetta alle forze
cambiate di segno)

Se il polo C appartiene alla struttura, la corrispondente sezione può solo traslare (in una direzione qualunque) ma non può ruotare, essendo solo la traslazione polar-emisimmetrica. Le condizioni cinematiche imposte dalla polar-emisimmetria sono dunque equivalenti a quelle di un doppio-doppio pendolo.



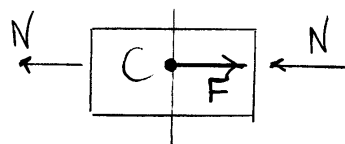
Delle caratteristiche della sollecitazione, risulta presente, per equilibrio, il solo momento flettente, a meno che non sia presente una forza applicata in C.

In quest'ultimo caso, la forza normale vale la metà della componente assiale della forza applicata e il taglio la metà della componente ortogonale all'asse della trave.



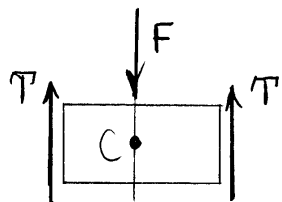
Equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$



Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse della struttura:

$$N = F/2$$



Equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale all'asse della struttura

$$T = F/2$$

Capitolo 7

Telai e travature reticolari

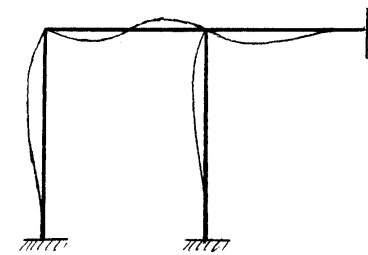
7.1 Telai piani

Come già detto, i sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente inflesse sono detti "telai" (telai piani nel caso di travi piane) e tale denominazione è utilizzata quale sinonimo di sistema di travi prevalentemente inflesse.

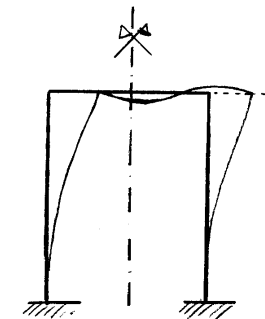
È utile distinguere i telai in telai a "nodi fissi" ed in telai a "nodi spostabili". Un telaio è detto a nodi fissi se i nodi del telaio (i punti di giunzione delle singole travi) possono solo ruotare, altrimenti è detto a nodi spostabili. Un telaio in cui non si trascuri l'effetto

della deformabilità assiale sarà sempre, salvo casi particolari, un telaio a nodi spostabili.

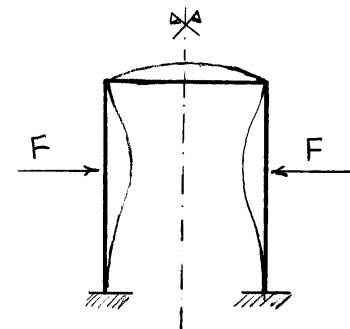
Alcuni esempi:



Telaio a nodi fissi



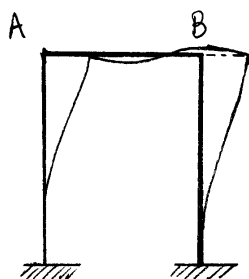
Telaio a nodi spostabili



Telaio a nodi fissi per simmetria strutturale e di carico

Un telaio in cui venga trascurata la deformabilità assiale associata alla forza normale viene detto "telaio a n nodi spostabili" se n è il numero degli spostamenti di nodo indipendenti fra loro.

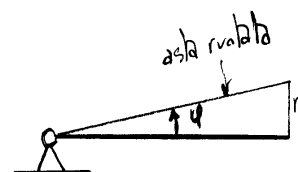
Esempio:



Telaio a un nodo spostabile poiché gli spostamenti orizzontali dei punti A e B sono uguali

Per determinare il numero dei nodi spostabili si può fare riferimento ad un telaio rigido associato ottenuto dallo stesso telaio inserendo cerniere in corrispondenza di tutti i nodi, comprese le sezioni che sono vincolate esternamente, e considerando rigide tutte le travi che compongono il telaio.

Il comportamento di un'asta ad asse rettilineo è qualitativamente lo stesso, relativamente agli spostamenti di una delle due estremità, se la si considera rigida ed incernierata all'altra estremità oppure se la si considera deformabile flessionalmente (ma non assialmente) ed incastrata oppure incernierata all'altra estremità.



Asta rigida incernierata:

l'estremità libera può spostarsi perpendicolarmente all'asse dell'asta

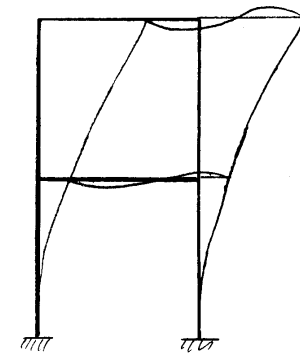
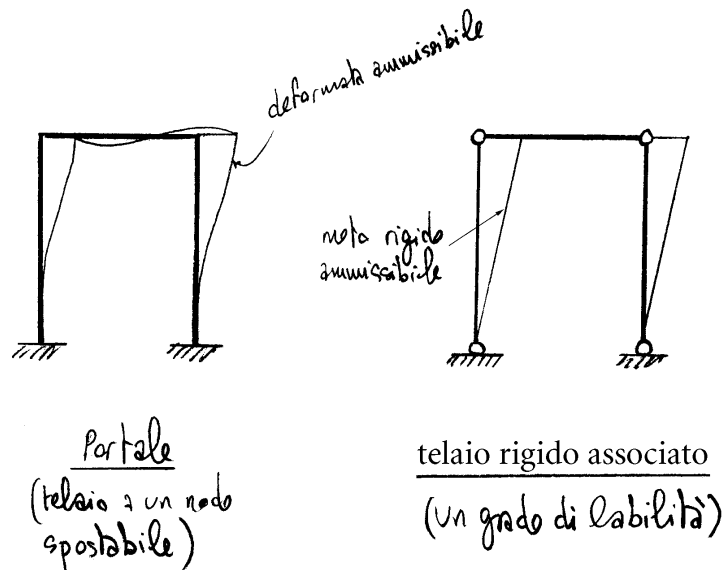


Asta incastrata deformabile flessionalmente:

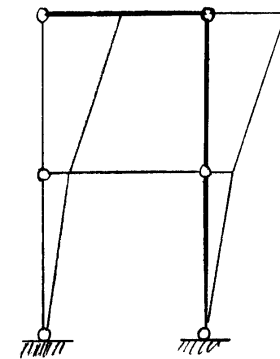
l'estremità libera può spostarsi perpendicolarmente all'asse dell'asta

Questo fatto comporta che il telaio rigido associato e il telaio stesso hanno, qualitativamente, gli stessi spostamenti di nodo. Il numero degli spostamenti indipendenti di nodo di un telaio coincide dunque con il grado di libertà del telaio rigido associato.

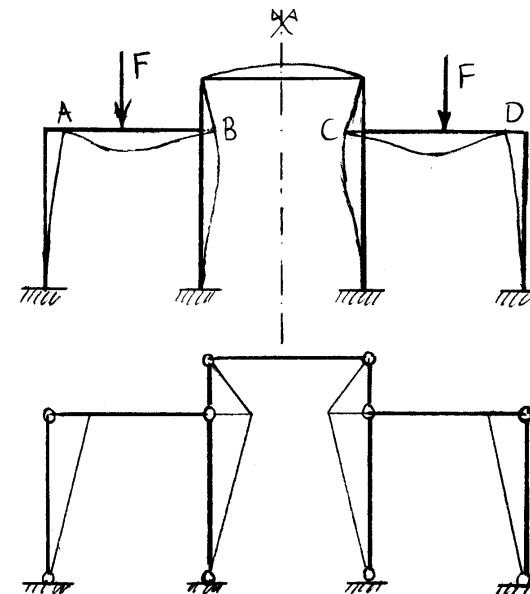
Esempi:



Telaio a due nodi spostabili



telaio rigido associato (due gradi di libertà)



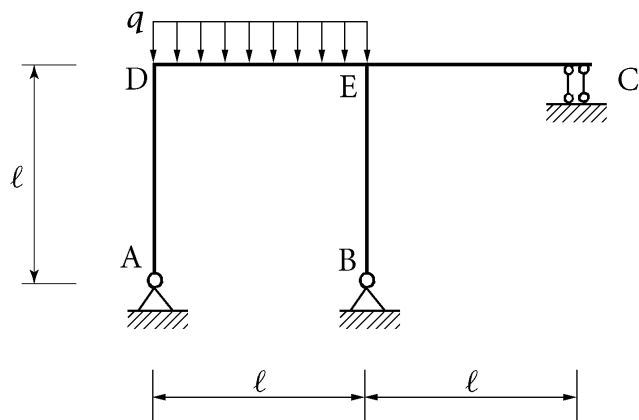
Telaio cattedrale

Telaio simmetrico simmetricamente caricato. Poiché i punti A, B, C, D si muovono della stessa quantità rappresenta un telaio a un nodo spostabile.

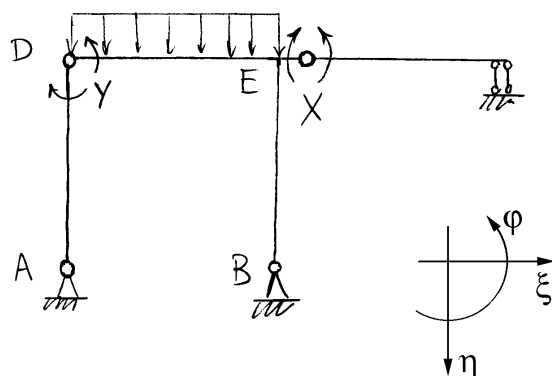
telaio rigido associato (1 grado di libertà per moto rigido simmetrico)

7.2 Esercizio su un telaio a un nodo spostabile

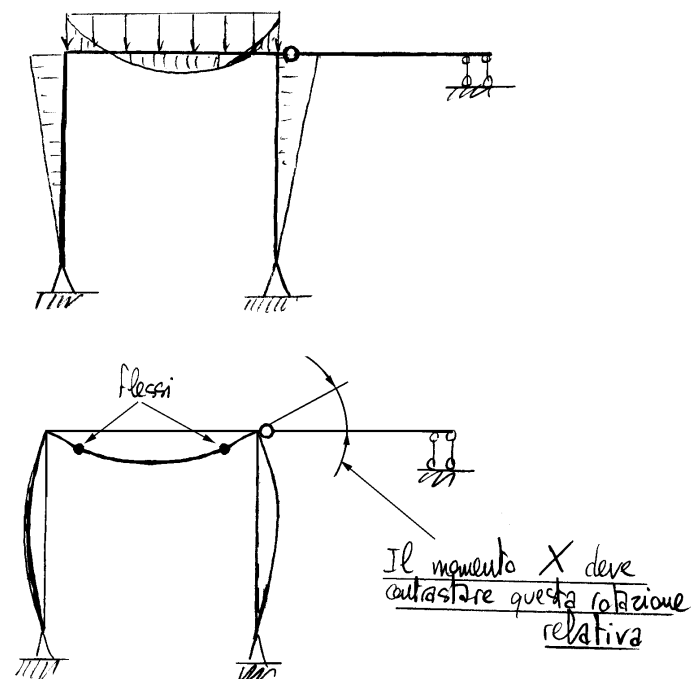
7.2.1 Soluzione col metodo delle forze



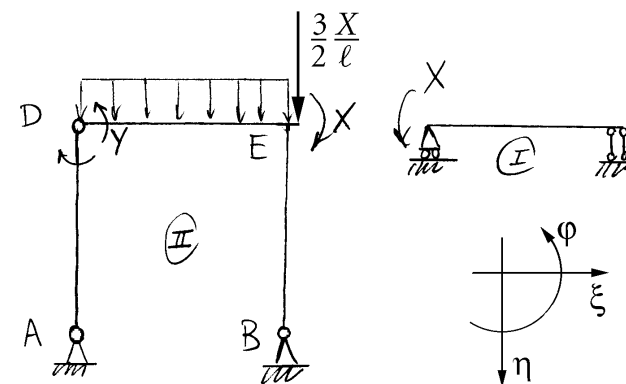
Sistema principale



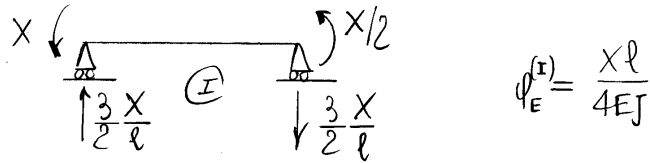
Previsione del verso della X



Schema risolvente

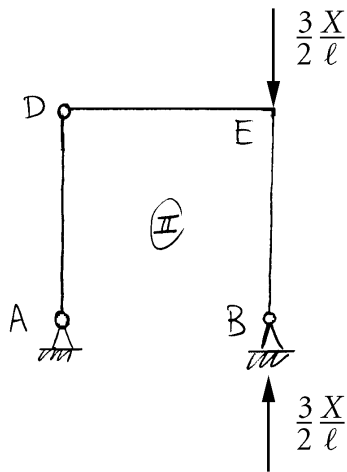


Trave incastro-appoggio (a meno di uno spostamento orizzontale)



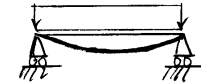
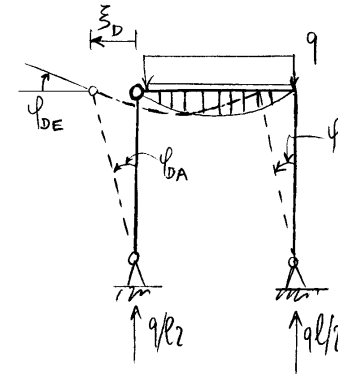
$$\varphi_E^{(I)} = \frac{Xl}{4EJ}$$

Carico $\frac{3X}{2l}$



La struttura è soggetta a sola forza normale e quindi resta indeformata.

Carico q



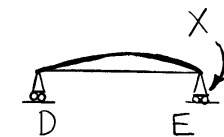
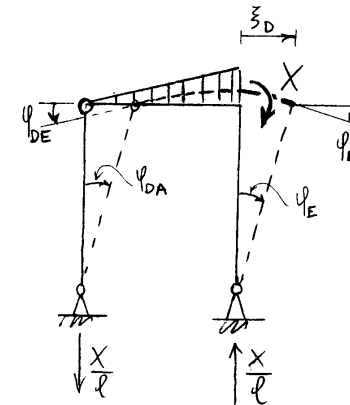
$$\varphi_{DE} = \frac{-ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_{DA} = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_E = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\xi_D = \frac{-ql^4}{24EJ}$$

Coppia X



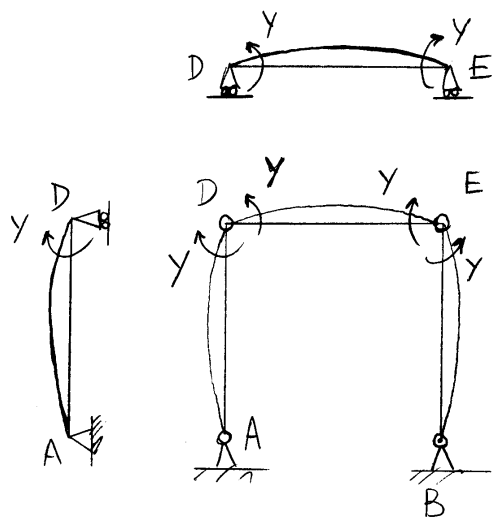
$$\varphi_{DE} = \frac{Xl}{6EJ}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{Xl}{3EJ}$$

$$\varphi_E = -\frac{Xl}{3EJ}$$

$$\xi_D = +\frac{Xl^2}{3EJ}$$

Coppie Y (punti D ed E fissi)



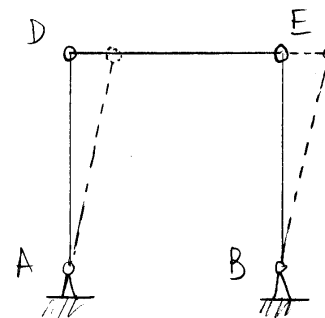
$$\begin{cases} \varphi_{DA} = -\frac{Yl}{3EJ} \\ \varphi_{DE} = \frac{Yl}{2EJ} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_{EB} = \frac{Yl}{3EJ} \\ \varphi_{ED} = -\frac{Yl}{2EJ} \end{cases}$$

Se i nodi D ed E vengono tenuti fissi in E si ha un incremento $\Delta\varphi_E$ pari a:

$$\Delta\varphi_E = \varphi_{EB} - \varphi_{ED} = \frac{5}{6} \frac{Yl}{EJ}$$

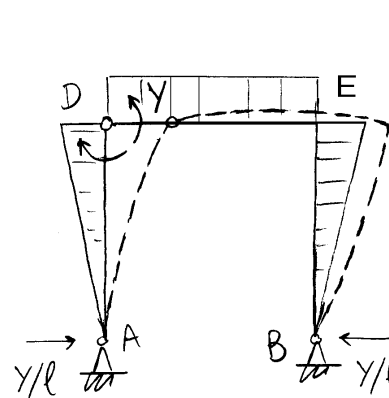
Coppie Y (ripristino della congruenza)

Il nodo E è rigido e tale $\Delta\varphi_E$ non può realizzarsi. Per ripristinare la congruenza occorre ruotare il tratto BE di $-\Delta\varphi_E$ attorno al punto B:



$$\begin{cases} \xi_D = \frac{5}{6} \frac{Yl^2}{EJ} \\ \varphi_{ED} = \varphi_{DE} = 0 \\ \varphi_{EB} = \varphi_{DA} = -\frac{5}{6} \frac{Yl}{EJ} \end{cases}$$

Coppie Y (globale)



$$\begin{cases} \varphi_{DE} = \frac{Yl}{2EJ} \\ \varphi_{DA} = -\frac{Yl}{3EJ} - \frac{5Yl}{6EJ} = -\frac{7Yl}{6EJ} \\ \varphi_E = -\frac{Yl}{2EJ} \\ \xi_D = +\frac{5Yl^2}{6EJ} \end{cases}$$

Equazioni di congruenza

$$\varphi_E^I = \varphi_E^{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Xl}{4EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} - \frac{Yl}{2EJ} \\ -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Xl}{6EJ} + \frac{Yl}{2EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} - \frac{7Yl}{6EJ} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6X = ql^2 - 8X - 12Y \\ -ql^2 + 4X + 12Y = ql^2 - 8X - 28Y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12Y + 14X = ql^2 \\ 40Y + 12X = 2ql^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 6Y + 7X = \frac{ql^2}{2} \\ 10Y + 3X = \frac{ql^2}{2} \end{array} \right.$$

$$-4Y + 4X = 0 \Rightarrow \boxed{X = Y = \frac{ql^2}{26}}$$

Spostamenti globali

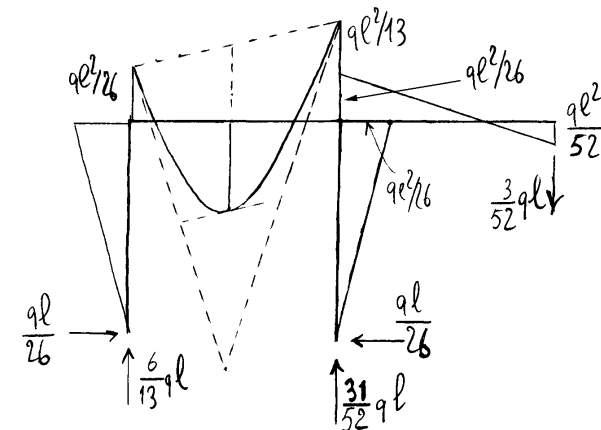
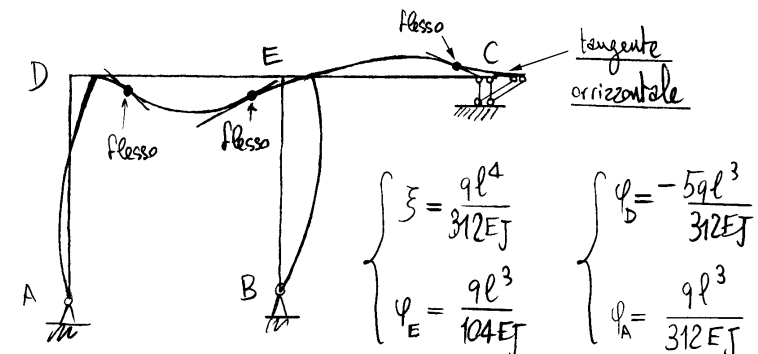
$$\xi_D = \frac{-ql^4}{24EJ} + \frac{ql^4}{3 \times 26EJ} + \frac{5ql^4}{6 \times 26EJ} = \frac{-ql^4}{24EJ} + \frac{7ql^4}{6 \times 26EJ} =$$

$$= \left(-\frac{1}{24} + \frac{7}{12 \times 13} \right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{-13 + 14}{8 \times 12 \times 13} \frac{ql^4}{EJ}$$

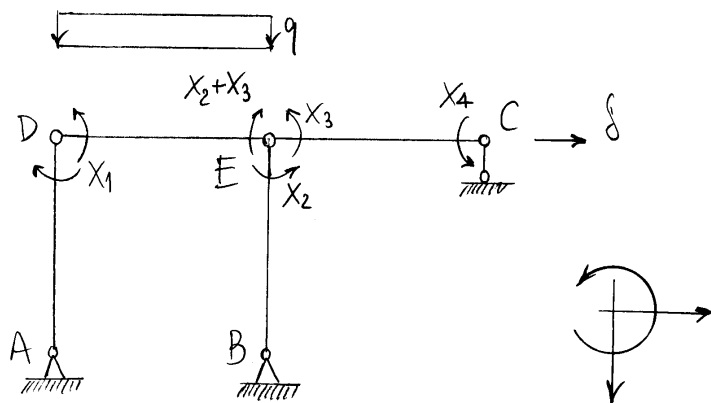
$$\varphi_E = \frac{ql^3}{4 \times 26EJ}$$

$$\varphi_D = -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql^3}{6 \times 26EJ} + \frac{ql^3}{2 \times 26EJ} = -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql^3}{3 \times 13} = -\frac{5}{24 \times 13} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_A = \frac{Yl}{6EJ} - \frac{\xi}{l} = \frac{\left(\frac{ql^2}{26}\right)l}{6EJ} - \frac{ql^3}{312EJ} = \frac{ql^3}{312EJ}$$

Diagramma del momento flettenteDeformata

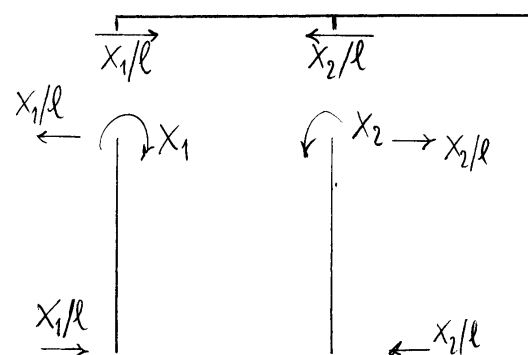
7.2.2 Soluzione col metodo dei telai

Struttura principale labile

5 incognite $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ statiche: } X_1, X_2, X_3, X_4 \\ 1 \text{ cinematica: } \delta \end{array} \right.$

5 equazioni $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ di congruenza: } \varphi_{DA} = \varphi_{DE}, \varphi_{ED} = \varphi_{EB} \\ \varphi_{ED} = \varphi_{EC}, \varphi_C = 0 \\ 1 \text{ di equilibrio: traslazione orizzontale} \\ \text{travata DEC} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \varphi_{DA} &= -\frac{X_1 l}{3EJ} - \frac{\delta}{l} \\ \varphi_{DE} &= \frac{X_1 l}{3EJ} + \frac{(X_2 + X_3)l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{ED} &= -\frac{(X_2 + X_3)l}{3EJ} - \frac{X_1 l}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{EB} &= \frac{X_2 l}{3EJ} - \frac{\delta}{l} \\ \varphi_{EC} &= \frac{X_3 l}{3EJ} - \frac{X_4 l}{6EJ} \\ \varphi_C &= -\frac{X_3 l}{6EJ} + \frac{X_4 l}{3EJ} \end{aligned}$$



equilibrio:

$$X_1 = X_2$$

Sistema risolvibile

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ 4X_1 + X_2 + X_3 + \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ X_1 + 4X_2 + 2X_3 - \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 = \frac{ql^2}{4} \\ X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = X_2 \\ X_3 = 2X_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad 5X_2 + 2X_4 + \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ \textcircled{2} \quad \begin{cases} 5X_2 + 4X_4 - \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ 3X_2 + 7X_4 = \frac{ql^2}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: 2X_4 = \frac{12EJ}{l^2} \delta \Rightarrow \delta = \frac{X_4 l^2}{6EJ}$$

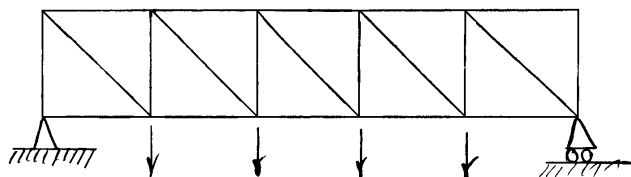
$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad 5X_2 + 3X_4 = \frac{ql^2}{4} \\ \textcircled{2} \quad 3X_2 + 7X_4 = \frac{ql^2}{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: 2X_2 - 4X_4 = 0 \Rightarrow X_2 = 2X_4$$

$$13X_4 = \frac{ql^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} X_4 = \frac{1}{52} ql^2 \\ X_1 = X_2 = \frac{1}{26} ql^2 \\ X_3 = \frac{1}{26} ql^2 \\ X_2 + X_3 = \frac{1}{13} ql^2 \\ \delta = \frac{1}{312} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$

7.3 Travature reticolari

Le travature reticolari sono sistemi di travi soggette prevalentemente a forze di tipo assiale, nelle quali non è quindi trascurabile la deformabilità assiale delle singole travi. Le travi che compongono le strutture reticolari vengono tradizionalmente denominate "aste". Tali aste sono collegate tra di loro alle estremità tramite nodi cerniera oppure nodi incastro.

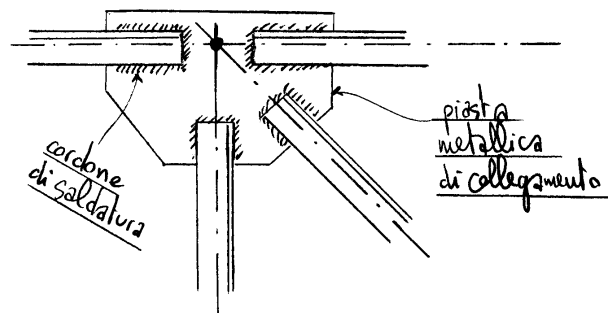


Se le aste sono incernierate (articolate) nei nodi e se le forze esterne agiscono solo nei

nodi, l'unica sollecitazione presente è quella di forza normale. Se vi sono forze esterne agenti lungo le aste, queste risultano anche inflesse. Se però le forze prevalenti sono quelle applicate nei nodi, prevalgono le forze normali sulle azioni flettenti. Per esempio, il peso proprio delle aste componenti le strutture reticolari producono normalmente dei momenti flettenti trascurabili rispetto all'entità delle forze normali. Inoltre, delle azioni flettenti, se importanti, si può tenere conto in un secondo momento sovrapponendo gli effetti.

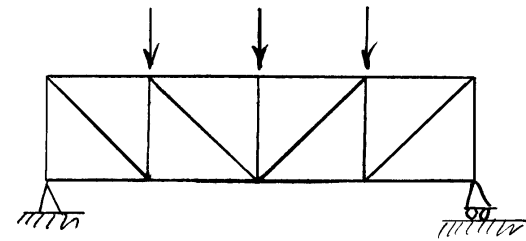
Se le aste sono collegate tra loro da nodi rigidi, tramite i nodi vengono trasmessi dei momenti flettenti. Tuttavia, se il numero delle aste non

è inferiore a quello necessario ad avere un sistema non labile nel caso le aste fossero articolate nei nodi: tali azioni flessionali sono trascurabili. Una travatura reticolare con nodi rigidi può quindi essere risolta come se le aste fossero articolate nei nodi.

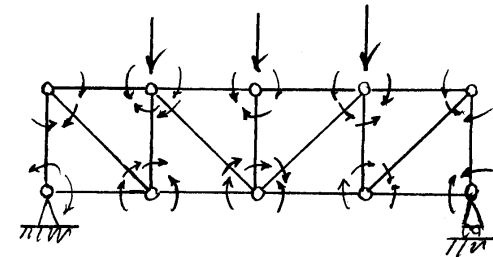


tipico nodo incastro

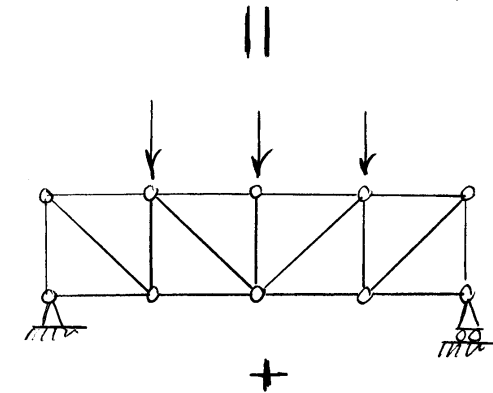
Infatti, in tal caso, il problema iperstatico potrebbe risolversi considerando le aste articolate nei nodi. Per ripristinare la congruenza occorre che le rotazioni



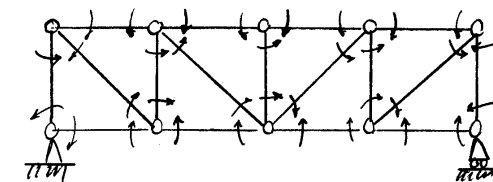
travatura reticolare a nodi rigidi



sistema principale



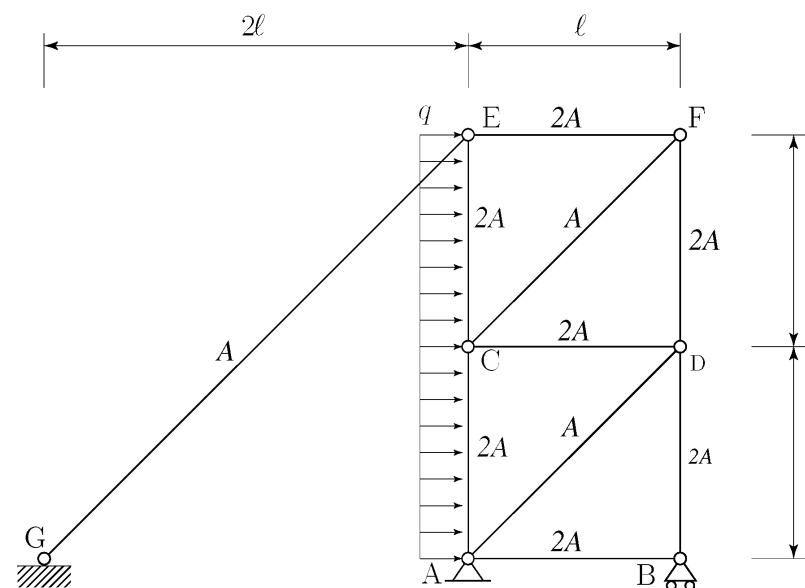
solo forze normali



si devono originare le stesse rotazioni relative che si originano nel sistema soggetto ai soli carichi esterni

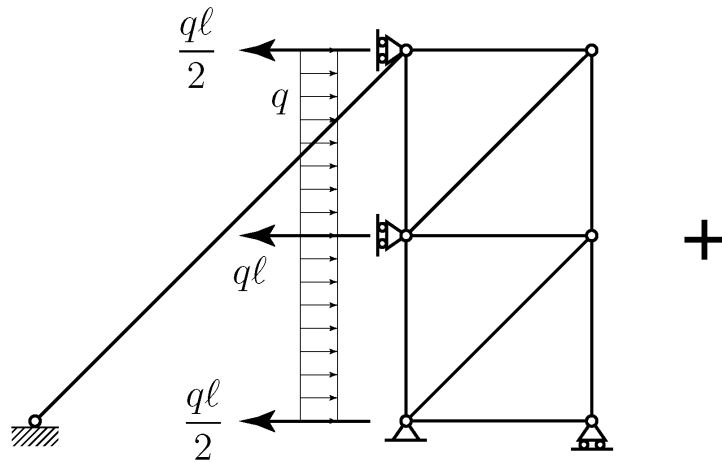
relative dovute ai carichi esterni (applicati solo nei nodi e che quindi originano solo forze normali) uguagliano quelle dovute alle incognite iperstatiche. Poiché le rotazioni dovute all'effetto delle forze normali sono "piccole" rispetto a quelle dovute all'effetto dei momenti flettenti, la congruenza sarà rispettata in corrispondenza a "piccoli" valori delle incognite iperstatiche, gli effetti delle quali sono quindi normalmente trascurabili.

7.4 Esercizio su una travatura reticolare iperstatica

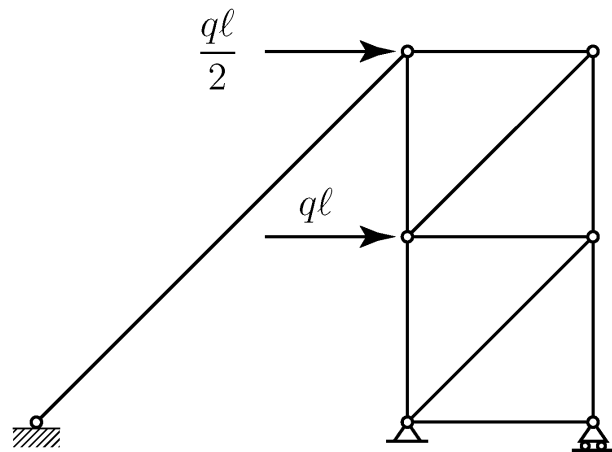


- 1) Risolvere la struttura;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 3) Compilare una tabella riassuntiva della forza normale, precisando se la singola asta è un tirante oppure un puntone.

7.4.1 Sovrapposizione degli effetti

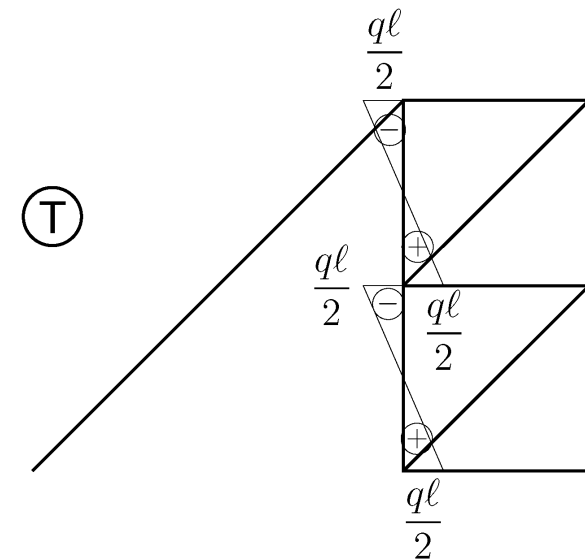
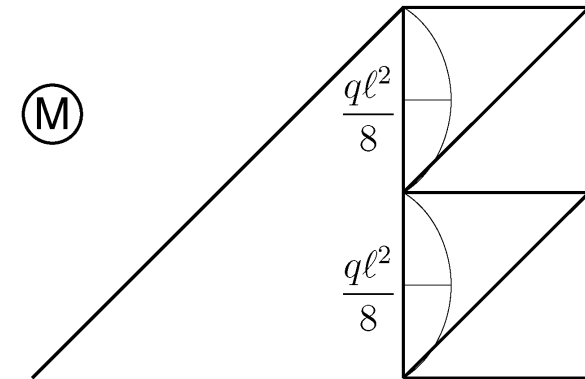


Azioni flettenti

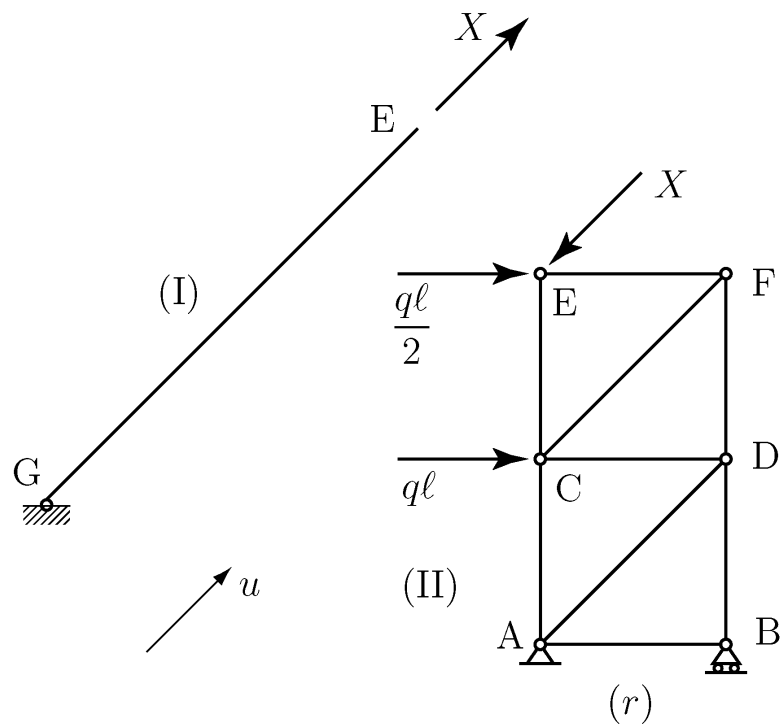


Azioni normali

7.4.2 Soluzione flessionale



7.4.3 Soluzione assiale

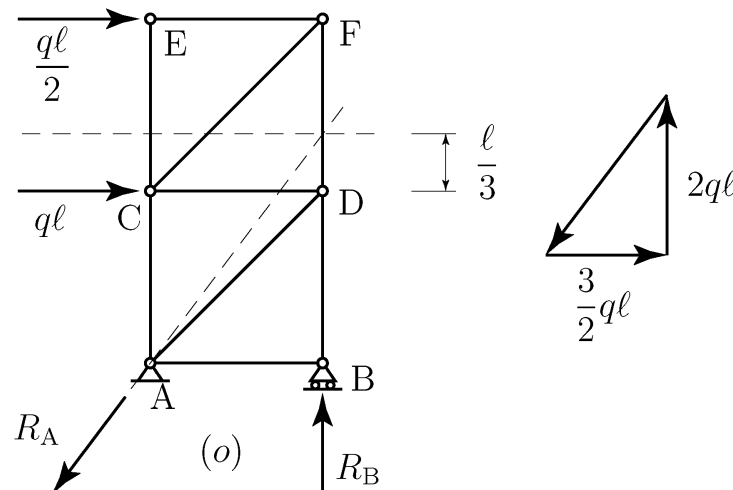
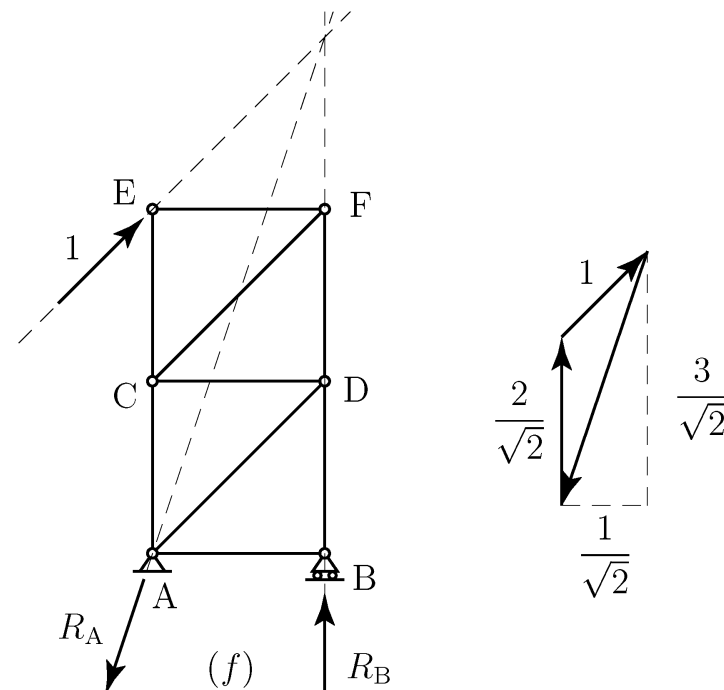


Struttura principale

Congruenza

$$u_E^{(II)} = \frac{2\sqrt{2}\ell}{EA} X$$

Principio dei lavori virtuali



$$L_{vi} = \int_{\ell} N^{(f)} \frac{N^{(r)}}{EA} ds = \sum_i N_i^{(f)} \frac{N_i^{(r)}}{E_i A_i} \ell_i$$

$$N_i^{(r)} = N_i^{(o)} - X N_i^{(f)}$$

$$X = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{15 + 16\sqrt{2}}{3 + 4\sqrt{2}} q\ell = 0.7684 q\ell$$

asta	luce	area	$N^{(f)}$	$N^{(o)}$	$N^{(r)}$	$N^{(r)} _{X=0.77q\ell}$	tipo asta
AC	ℓ	$2A$	$2/\sqrt{2}$	$q\ell/2$	$-2X/\sqrt{2} + q\ell/2$	$-0.59q\ell$	puntone
CE	ℓ	$2A$	$1/\sqrt{2}$	0	$-X/\sqrt{2}$	$-0.54q\ell$	puntone
BD	ℓ	$2A$	$-2/\sqrt{2}$	$-2q\ell$	$2X/\sqrt{2} - 2q\ell$	$-0.91q\ell$	puntone
DF	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - q\ell/2$	$-0.04q\ell$	puntone
AB	ℓ	$2A$	0	0	0	0	=
CD	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-3q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - 3q\ell/2$	$-0.96q\ell$	puntone
EF	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - q\ell/2$	$-0.04q\ell$	puntone
AD	$\sqrt{2}\ell$	A	1	$3q\ell/\sqrt{2}$	$-X + 3q\ell/\sqrt{2}$	$1.35q\ell$	tirante
CF	$\sqrt{2}\ell$	A	1	$q\ell/\sqrt{2}$	$-X + q\ell/\sqrt{2}$	$-0.06q\ell$	puntone

Capitolo 8

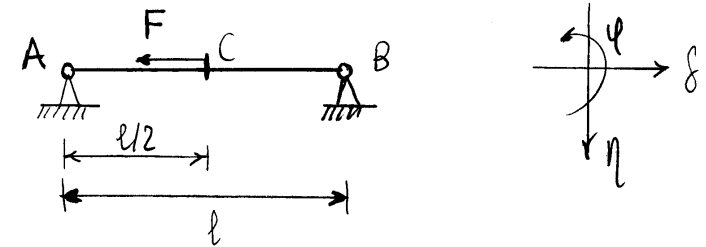
Soluzione dei sistemi iperstatici col metodo degli spostamenti

Si assumono come incognite un numero di spostamenti sufficienti a rendere definita la struttura e si scrivono delle equazioni di equilibrio.

Nel caso di travi omogenee a sezione costante e ad asse rettilineo, le cui equazioni differenziali possono essere integrate con facilità, gli spostamenti (e le rotazioni) sufficienti a rendere definita la struttura sono quelli, incogniti, di estremità delle singole travi, salvo che nella stessa estremità non sia nota la corrispondente condizione statica di equilibrio al contorno. Ne risulta quindi che in generale gli spostamenti incogniti saranno quelli dei nodi rigidi e dei nodi cerniera della struttura mentre le rotazioni incognite saranno quelle dei soli nodi rigidi. Infatti, si ricordi che, per definizione, i nodi della struttura sono i punti dove convergono più di due travi. Quindi in generale se il nodo è rigido non è nota a priori nessuna delle condizioni statiche nelle estremità delle singole travi che convergono nel nodo. Invece se il nodo è cerniera sono note le sole condizioni statiche che riguardano il momento flettente, il che rende superfluo inserire tra le incognite le rotazioni di estremità delle singole travi che convergono nel nodo cerniera.

8.1 Esempi

8.1.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale



Per rendere definita la trave basta conoscere gli spostamenti del punto C : $\delta_c, \eta_c, \varphi_c$.
Queste sono le nostre incognite.

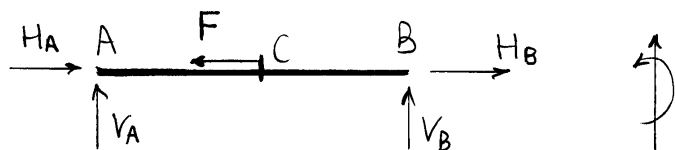
Dal punto di vista flessionale la trave è staticamente determinata. Infatti le reazioni verticali in A e B sono nulle:

1) equilibrio alla rotazione attorno ad A:

$$V_B l = 0 \Rightarrow V_B = 0;$$

2) equilibrio alla traslazione verticale:

$$V_B + V_A = 0 \Rightarrow V_A = 0.$$



Quindi il taglio e il momento flettente sono nulli in tutti i punti della trave e l'asse della trave resta rettilineo. Poiché i punti A e B sono fissi ne consegue che l'asse deformato (ancora rettilineo) giace sulla retta AB e dunque $\eta_C = \varphi_C = 0$.

Resta dunque la sola incognita δ_C . Si imponga allora uno spostamento δ_C arbitrario e si risolva la struttura. Imporre uno spostamento significa imporre un vincolo. Dunque, ad uno spostamento

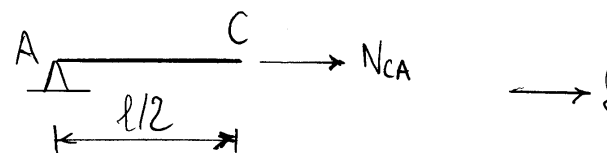
δ_C corrisponde una reazione vincolare R_C duale, avente la stessa direzione di δ_C .

Ad un valore arbitrario δ_C corrisponde una trave congruente ma in generale non equilibrata poiché in generale R_C non coincide con la forza effettivamente applicata. L'equazione risolvante (di equilibrio) si scrive pertanto:

$$R_C = -F.$$

La somma $R_C + F$, che in soluzione deve essere nulla, misura dunque l'assenza di equilibrio della struttura vincolata a subire lo spostamento δ_C .

Tratto AC



Vediamo quale forza normale N_{CA} occorre applicare in C affinché lo spostamento valga δ_C :

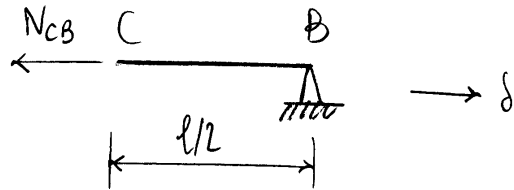
$$\frac{N_{CA} \frac{l}{2}}{EA} = \delta_c \Rightarrow N_{CA} = 2 \frac{EA}{l} \delta_c.$$

La quantità

$$k_{AC} = \frac{2EA}{l}$$

(dimensionalmente una forza per unità di lunghezza) rappresenta la forza normale che occorre applicare per avere lo spostamento assiale δ_c unitario ed è detta rigidezza assiale (in tal caso dell'asta AC).

Tutto CB



$$-\frac{N_{CB} \frac{l}{2}}{EA} = \delta_c \Rightarrow N_{CB} = -\frac{2EA}{l} \delta_c$$

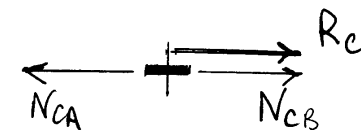
Il segno negativo dipende dal fatto che una N_{CB} positiva sposta il punto C nel verso negativo di δ . La rigidezza di CB vale

$$k_{CB} = \frac{2EA}{l}$$

come per l'asta AC. D'altronde le due parti AC e BC sono equivalenti.

Reazione del vincolo in C

$$R_C = N_{CA} - N_{CB}.$$



Equilibrio del nodo C

$$R_c = -F \Rightarrow N_{cA} - N_{cB} = -F.$$

Risulta quindi:

$$k_{AC} \delta_c + k_{CB} \delta_c = -F,$$

e infine:

$$\delta_c = -\frac{F}{k_C} = -\frac{Fl}{4EA}.$$

dove la quantità:

$$k_C = k_{AC} + k_{CB} = \frac{4EA}{l}$$

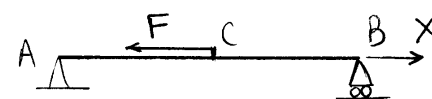
rappresenta la rigidezza del nodo C.

Le caratteristiche della sollecitazione risultano quindi:

$$\begin{cases} N_{cA} = 2 \frac{EA}{l} \delta_c = -\frac{2EA}{l} \frac{Fl}{4EA} = -\frac{F}{2} \\ N_{cB} = -2 \frac{EA}{l} \delta_c = \frac{2EA}{l} \frac{Fl}{4EA} = \frac{F}{2} \end{cases}$$

Metodo delle forze

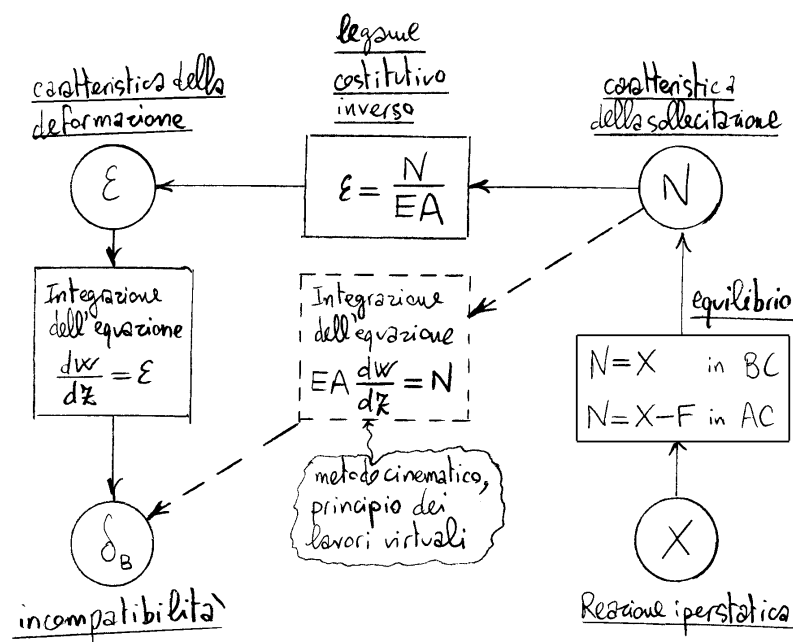
Struttura principale equilibrata (staticamente nota)



Equazione risolvete (di congruenza)

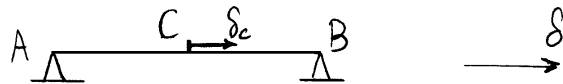
$$\delta_B = 0$$

Diagramma



Metodo delle deformazioni

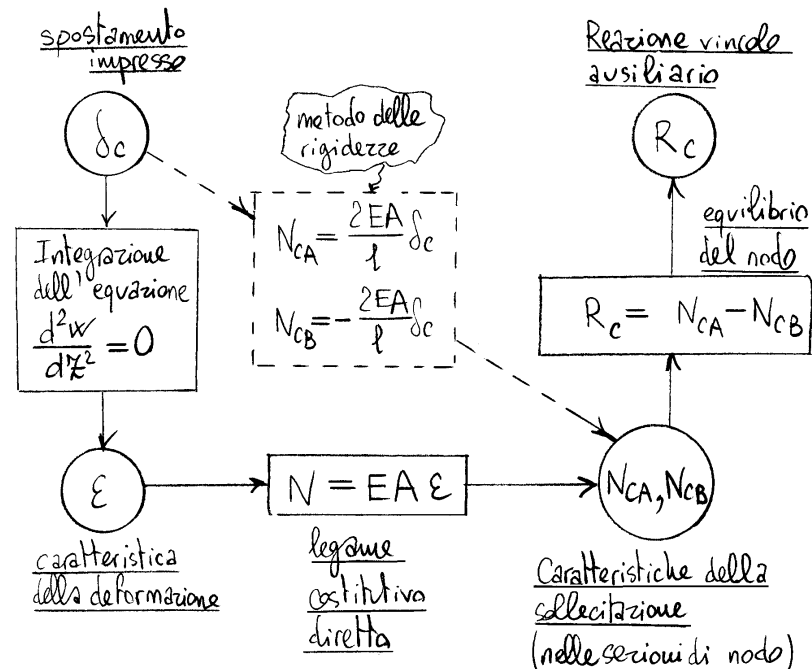
struttura principale congruente (cinematicamente nota)



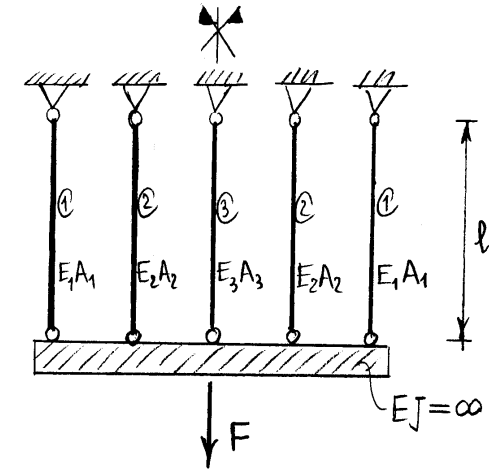
Equazione risolvente (di equilibrio)

$$R_C = -F$$

Diagramma



8.1.2 Sistema di pendoli paralleli



$$\begin{cases} g = 6 \times 3 = 18 \\ v = 10 \times 2 = 20 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases}$$

oppure, considerando
la trave vincolata
da i pendoli:

$$\begin{cases} g = 3 \\ v = 5 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases}$$

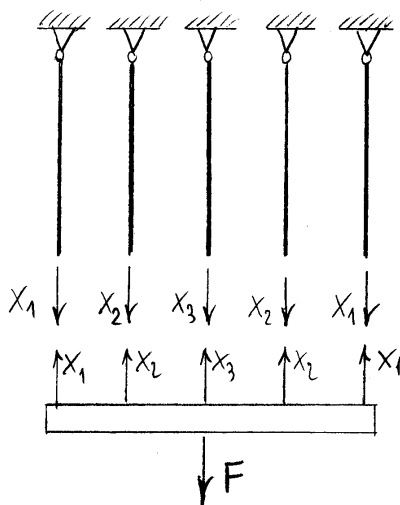
$\eta \equiv$ spostamento verticale della trave rigida

$K_i \equiv$ rigidità assiale dell' i -esimo pendolo:

$$K_i = \frac{E_i A_i}{l}$$

Risulta:

$$X_1 = K_1 \eta, \quad X_2 = K_2 \eta, \quad X_3 = K_3 \eta.$$



Equilibrio della trave alla traslazione verticale :

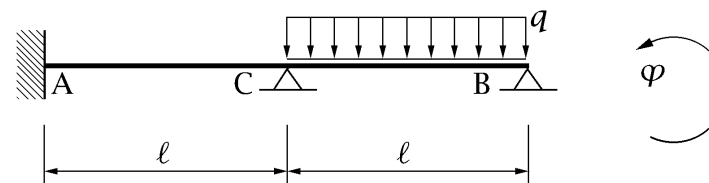
$$2X_1 + 2X_2 + X_3 = F \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{F}{k_t},$$

dove $k_t = 2k_1 + 2k_2 + k_3$ rappresenta la rigidità totale delle 5 aste. Gli sforzi nelle aste risultano quindi :

$$X_i = \frac{k_i}{k_t} F.$$

8.1.3 Trave continua

La trave continua di figura è 4 volte iperstatica, due volte assialmente e due volte flessionalmente. La soluzione col metodo delle forze richiede quindi 4 incognite iperstatiche, a meno di semplificazioni.

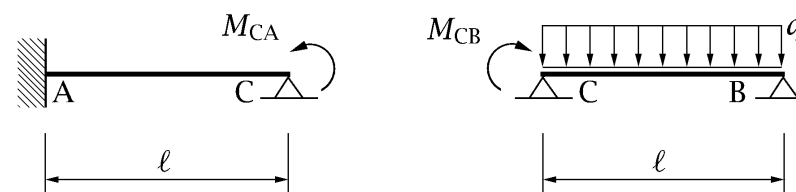


L'unico nodo C della struttura può solo ruotare e quindi il metodo degli spostamenti richiede una sola incognita, la rotazione φ_C del nodo C.

Si risolvano separatamente, in funzione di φ_C , i due tratti AC e CB della struttura.

Detti M_{CA} e M_{CB} i momenti agenti nelle estremità C dei tratti AC e CB rispettivamente, positivi se tendono le fibre inferiori, risulta:

$$\varphi_C = \frac{M_{CA} \ell}{4EJ} \quad \Rightarrow \quad M_{CA} = \frac{4EJ}{\ell} \varphi_C,$$



$$\varphi_C = -\frac{M_{CB}\ell}{3EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} \quad \Rightarrow \quad M_{CB} = -\frac{3EJ}{\ell}\varphi_C - \frac{q\ell^2}{8}.$$

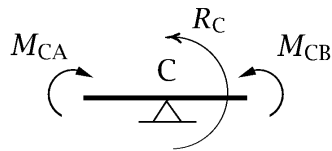
I termini:

$$k_{CA} = \frac{4EJ}{\ell}, \quad k_{CB} = \frac{3EJ}{\ell},$$

rappresentano le *rigidezze alla rotazione* dei due tratti AC e CB rispettivamente, ovvero le coppie che applicate nelle estremità C dei due tratti provocano, in assenza di forze applicate lungo l'asse della trave, la rotazione unitaria dell'estremità del tratto relativo. La quantità $-\frac{q\ell^2}{8}$ rappresenta invece, per il tratto CB, il momento in C corrispondente al vincolo $\varphi_C = 0$, e detto per tale motivo *momento di incastro perfetto*. Il momento di incastro perfetto per il tratto AC è invece nullo, non essendo il tratto caricato.

L'equilibrio del nodo C impone:

$$R_C = M_{CA} - M_{CB} \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{7EJ}{\ell}\varphi_C + \frac{q\ell^2}{8}.$$



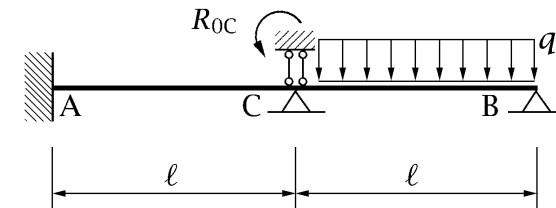
Il termine:

$$k_C = \frac{7EJ}{\ell},$$

rappresenta la *rigidezza alla rotazione* del nodo C, ovvero la coppia che applicata nel nodo C provoca, in assenza di forze applicate lungo l'asse della trave, la rotazione unitaria del nodo stesso. La quantità:

$$R_{0C} = \frac{q\ell^2}{8},$$

rappresenta invece la *reazione di incastro perfetto* in C, ovvero la reazione del vincolo $\varphi_C = 0$.

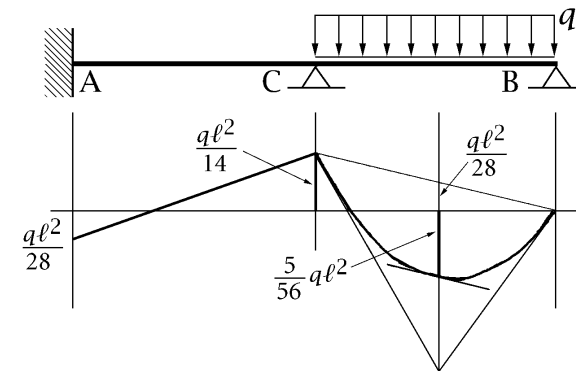


Risulta quindi:

$$\varphi_C = -\frac{q\ell^3}{56EJ},$$

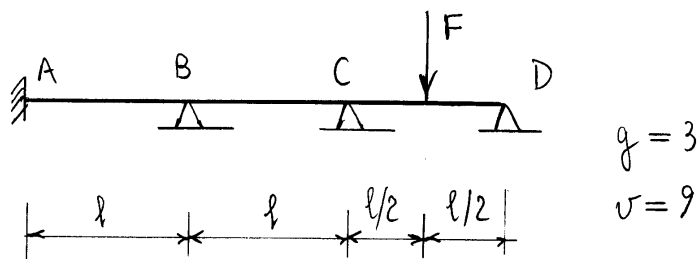
e i momenti M_{CA} e M_{CB} risultano infine:

$$M_{CA} = M_{CB} = -\frac{4}{56}q\ell^2.$$



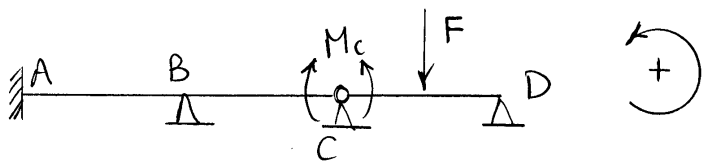
8.1.4 Analisi qualitativa basata sulle rigidezze

Trave continua 6 volte iperstatica (3 iperstaticità flessionali e tre iperstaticità assiali)



Si scommetta in C e si indichi con K la rigidezza alla rotazione del tratto AC (coppia unitaria in C che provoca la rotazione unitaria). Risulta quindi:

$$M_c = -K\varphi_{CA}.$$



Congruenza:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CD}.$$

Poiché:

$$\varphi_{CA} = -\frac{M_c}{K},$$

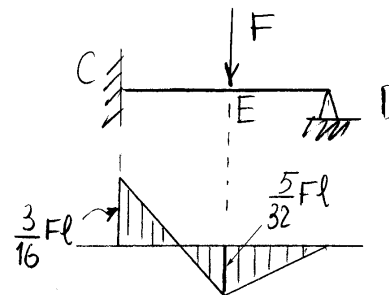
$$\varphi_{CD} = \frac{M_c l}{3EJ} - \frac{F l^2}{16EJ},$$

si ottiene quindi:

$$M_c = \frac{\frac{3}{16}Fl}{1 + 3EJ/Kl}.$$

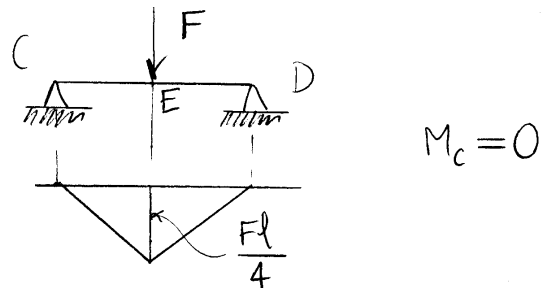
Si presentano due casi limite:

- 1) $K \rightarrow \infty$ (trave incastrata appoggio)



$$M_c = \frac{3}{16}Fl$$

2) $k \rightarrow 0$ (trave appoggiata)

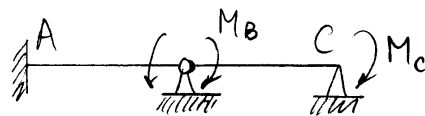


Quindi:

$$0 < M_C < \frac{3}{16} Fl \quad (\text{tese le fibre dell'estradosso})$$

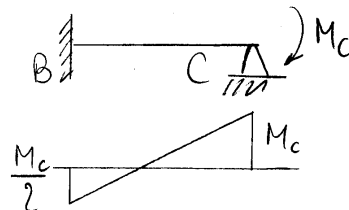
$$\frac{5}{32} Fl < M_E < \frac{Fl}{4} \quad (\text{tese le fibre dell'intradosso})$$

Si sconnetta ora in B:

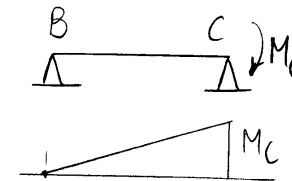


Casi limite per il momento in B:

1) trave incastra appoggio



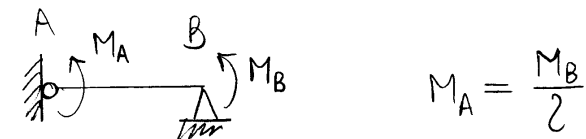
2) trave appoggiata



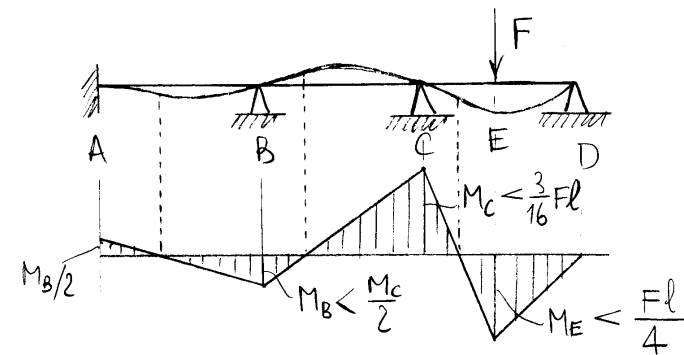
Dunque:

$$0 < M_B < \frac{M_C}{2} \quad (\text{tese le fibre dell'intradosso})$$

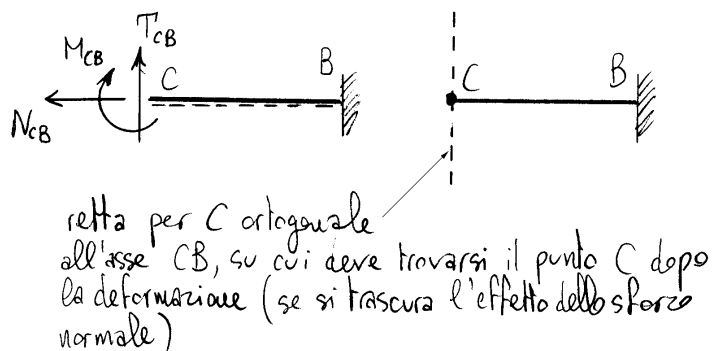
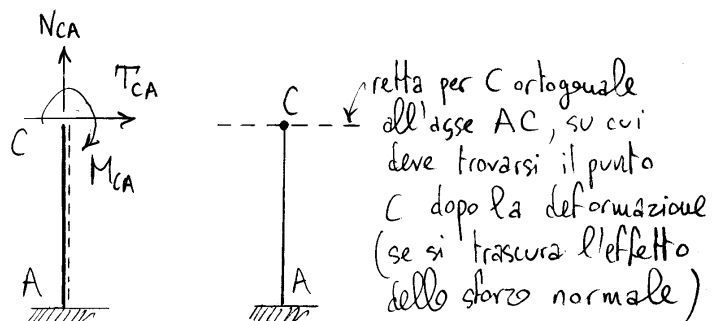
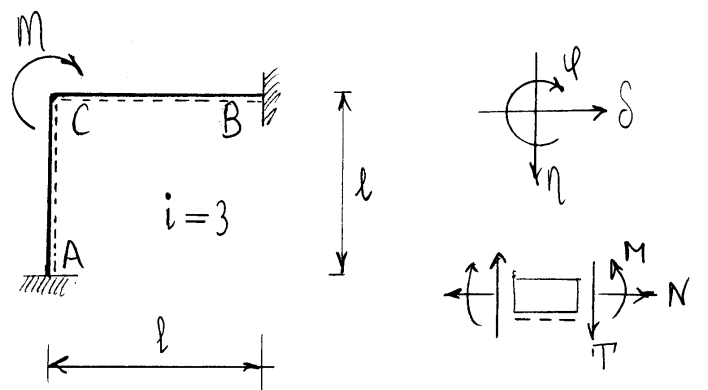
Per quel che riguarda il tratto AB, non si hanno casi limite dato che il tratto è equivalente a una trave incastro-appoggio.



Deformata e diagramma del momento:



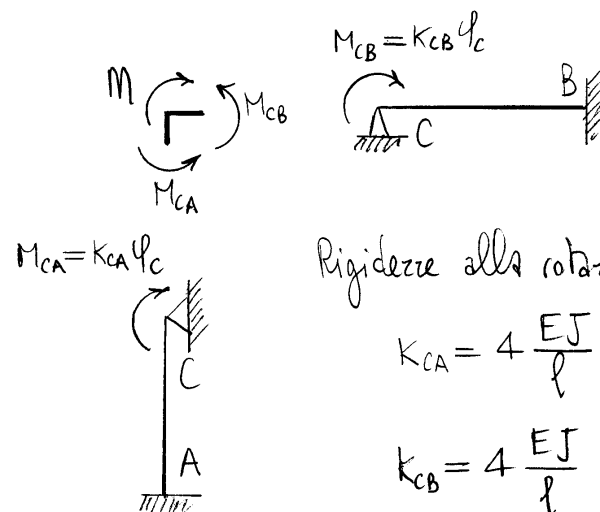
8.1.5 Telaio soggetto ad una coppia concentrata



Dovendo il punto C trovarsi, dopo la deformazione, contemporaneamente su due rette che hanno il solo punto C in comune, il punto C non si sposta e quindi:

$$\eta_c = \delta_c = 0$$

Si può dunque applicare il metodo delle deformazioni prendendo quale unica incognita la rotazione φ_c del nodo C.



Rigidità alla rotazione:

$$K_{CA} = 4 \frac{EJ}{l}$$

$$K_{CB} = 4 \frac{EJ}{l}$$

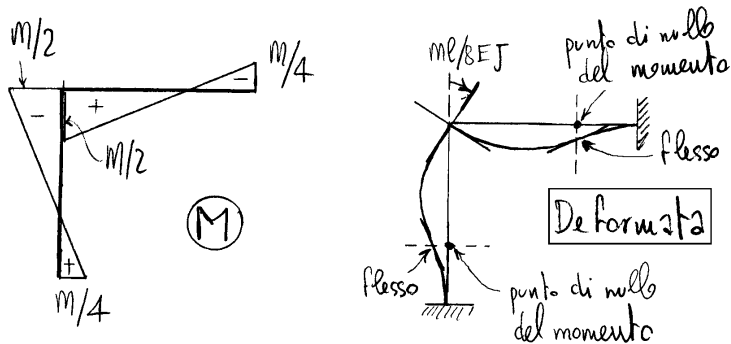
Equilibrio alla rotazione del nodo C :

$$-M_{CA} - M_{CB} + m = 0,$$

$$K_{CA} \varphi_C + K_{CB} \varphi_C = m,$$

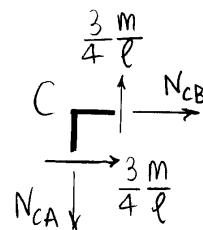
$$\varphi_C = \frac{m}{K_{CA} + K_{CB}} = \frac{m l}{8 E J},$$

$$M_{CA} = M_{CB} = m/2.$$

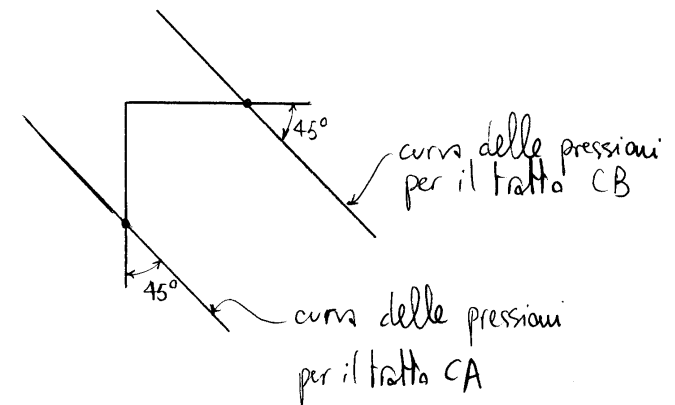
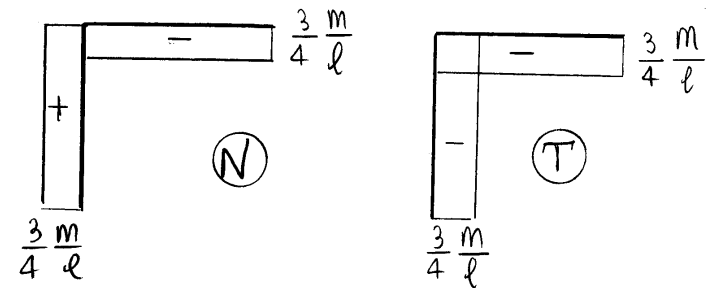


Equilibrio alla traslazione del nodo C :

$$N_{CA} = \frac{3}{4} \frac{m}{l}, \quad N_{CB} = -\frac{3}{4} \frac{m}{l}.$$

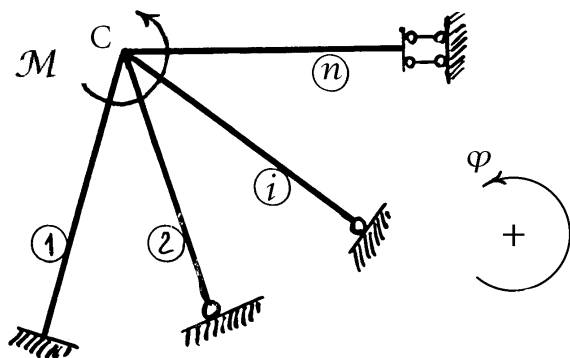


Notare che lo sforzo normale non è nullo e che quindi è essenziale trascurare i suoi effetti sulla deformazione per poter affermare che il nodo C ruota senza spostarsi.



8.2 Schema fondamentale dei telai a nodi fissi

Si consideri un sistema di n travi ad asse rettilineo connesse ad una estremità in un nodo rigido C soggetto ad una coppia concentrata $\mathcal{M}$. Se si trascura la deformabilità assiale delle travi componenti la struttura il nodo non può subire spostamenti, salvo il caso di due sole travi aventi la stessa direzione, caso che però rientra nell'analisi seguente se il nodo si suppone vincolato esternamente da un appoggio fisso. L'unico nodo della struttura può quindi solo ruotare e il metodo degli spostamenti richiede una sola incognita, la rotazione φ_C del nodo.

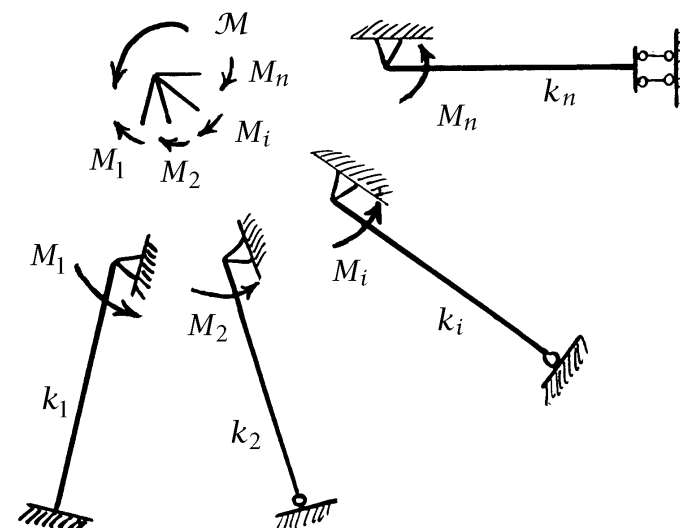


L'equazione di equilibrio del nodo richiede:

$$\sum_i M_i = \mathcal{M}.$$

Occorre allora esprimere i momenti M_i in funzione della rotazione φ_C del nodo:

$$M_i = k_i \varphi_C,$$



dove k_i è la *rigidezza alla rotazione* dell' i -esima trave. Si ottiene quindi:

$$\sum_i k_i \varphi_C = \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \varphi_C = \frac{\mathcal{M}}{k_C},$$

dove:

$$k_C = \sum_i k_i,$$

rappresenta la rigidezza alla rotazione del nodo C.

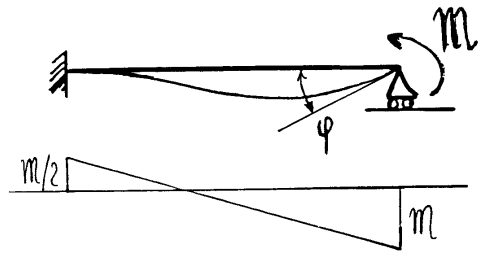
I momenti M_i che agiscono in C alla estremità delle travi valgono quindi:

$$M_i = \frac{k_i}{k_C} \mathcal{M},$$

dove i rapporti $\frac{k_i}{k_C}$ tra le rigidezze delle aste e la rigidezza del nodo rappresentano i *coefficienti di ripartizione* del momento $\mathcal{M}$ applicato nel nodo.

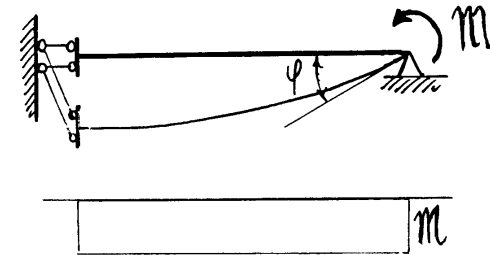
Rigidezza alla rotazione della trave incastro-appoggio:

$$\varphi = \frac{m \ell}{4EJ} \Rightarrow k = \frac{4EJ}{\ell}$$



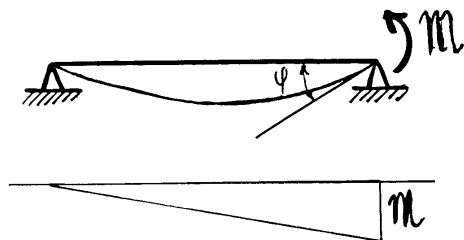
Rigidezza alla rotazione della trave doppio pendolo-appoggio:

$$\varphi = \frac{m \ell}{EJ} \Rightarrow k = \frac{EJ}{\ell}$$



Rigidezza alla rotazione della trave appoggio-appoggio:

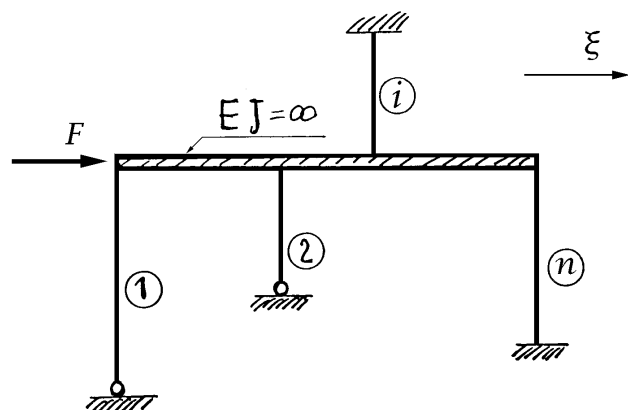
$$\varphi = \frac{m \ell}{3EJ} \Rightarrow k = \frac{3EJ}{\ell}$$



8.3 Schema fondamentale dei telai a nodi spostabili

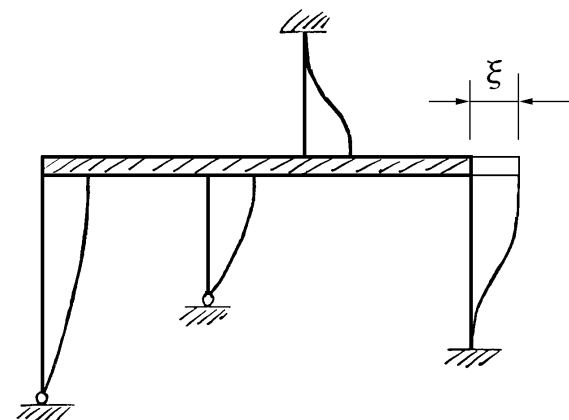
Si consideri un sistema composto:

1. di una trave ad asse rettilineo che resta indeformata flessionalmente, o perché tale deformazione è impedita da opportuni vincoli o perché infinitamente rigida, e soggetta in un suo punto ad una forza concentrata F avente la direzione della trave stessa;
2. di n travi ad asse rettilineo ortogonali alla trave precedente e connesse a questa ad una estremità.



Se si trascura la deformabilità assiale delle travi componenti la struttura, la trave indeformabile non può traslare nella direzione ortogonale alla trave stessa e non può ruotare, salvo il caso in cui sia connessa, ad una o a due travi, in un solo punto. Tale caso particolare rientra però nell'analisi seguente se la trave indeformabile è opportunamente vincolata.

La trave indeformabile può quindi solo traslare nella direzione della trave stessa e il metodo degli spostamenti richiede questa traslazione quale unica incognita.



L'equazione di equilibrio alla traslazione della trave indeformabile, nella direzione della stessa trave, si scrive:

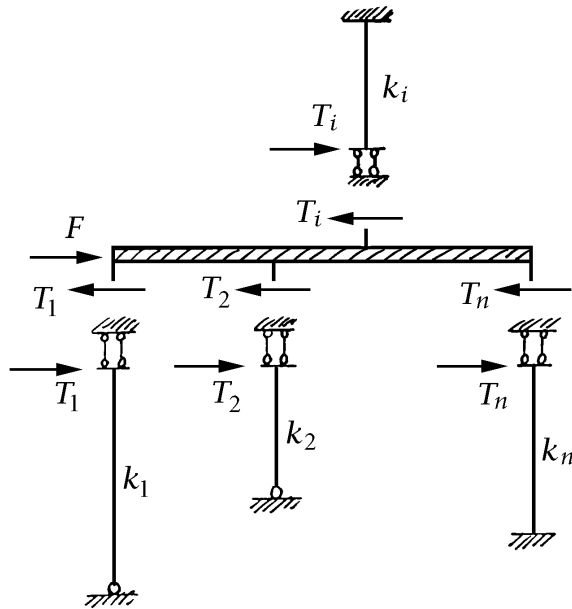
$$\sum_i T_i = F.$$

Occorre allora esprimere i tagli T_i in funzione dello spostamento ξ della trave:

$$T_i = k_i \xi,$$

dove k_i è la *rigidezza tagliante* dell' i -esima trave, ovvero sia la forza che occorre applicare alla sua estremità per provocare lo spostamento unitario in direzione ortogonale al suo asse (senza che la sezione di estremità ruoti). Si ottiene quindi:

$$\sum_i k_i \xi = F \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{F}{k},$$



dove:

$$k = \sum_i k_i,$$

rappresenta la rigidezza alla traslazione della trave indeformabile.

I tagli T_i che agiscono alle estremità delle travi valgono quindi:

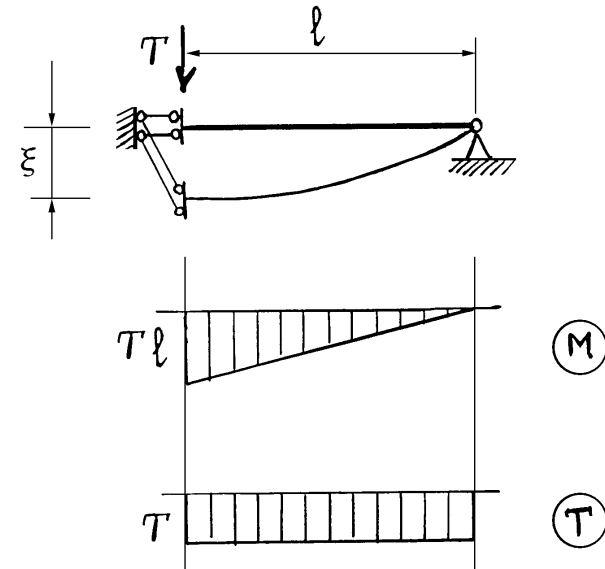
$$T_i = \frac{k_i}{k} F,$$

dove i rapporti $\frac{k_i}{k}$ tra le rigidezze delle travi deformabili e la rigidezza alla traslazione della trave indeformabile rappresentano i *coefficienti di ripartizione* della forza F applicata alla trave indeformabile.

8.3.1 Rigidezze taglianti

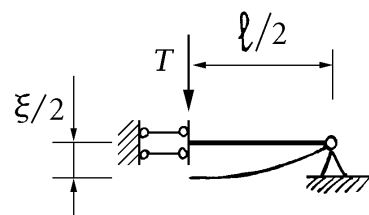
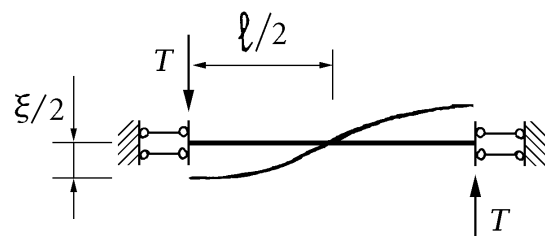
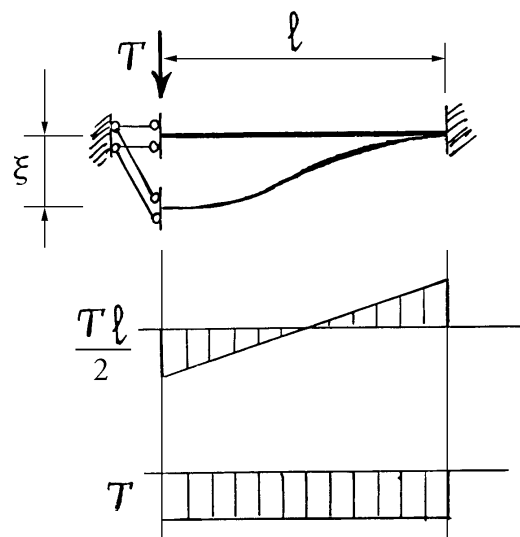
8.3.1.1 Rigidezza tagliente della trave appoggio-doppio pendolo

$$\xi = \frac{T \ell^3}{3EJ} \Rightarrow k = \frac{3EJ}{\ell^3}$$



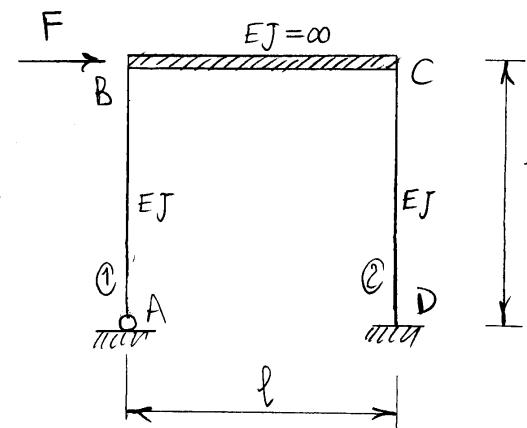
8.3.1.2 Rigidezza tagliente della trave incastro-doppio pendolo

$$\xi = \frac{T \ell^3}{12EJ} \Rightarrow k = \frac{12EJ}{\ell^3}$$



8.3.2 esempi di telai con traversi rigidi

8.3.2.1 Portale con traverso rigido



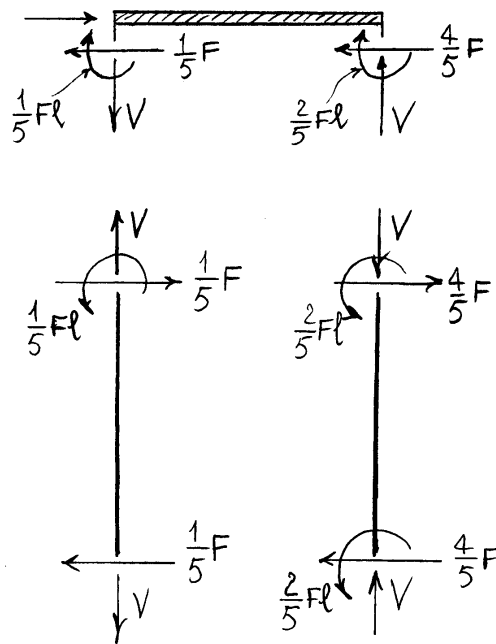
Rigidità tagliante della colonna ① : $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$

Rigidità tagliante della colonna ② : $k_2 = 12 \frac{EJ}{l^3}$

Rigidità tagliante globale : $k = k_1 + k_2 = 15 \frac{EJ}{l^3}$

Coefficienti di ripartizione del carico orizzontale :

$$c_1 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \quad c_2 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

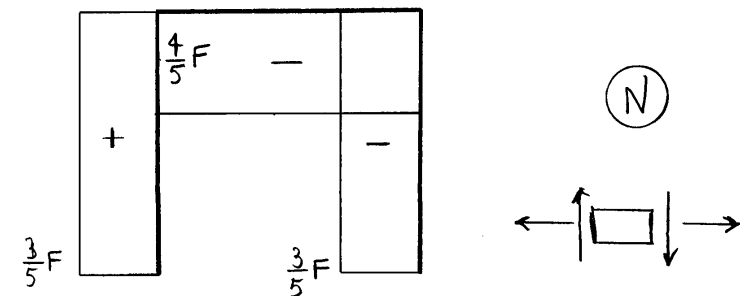
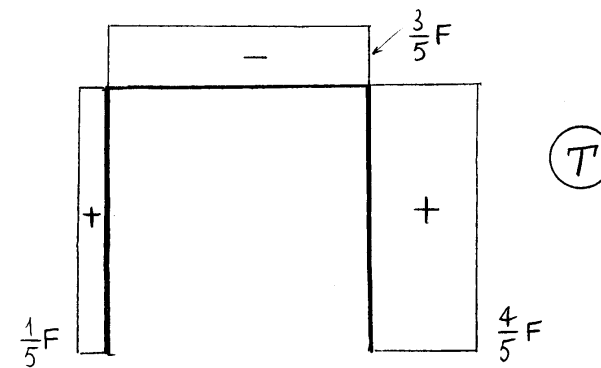
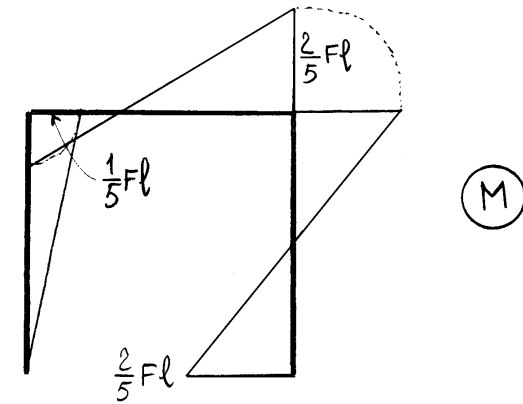


Spostamento del traverso:

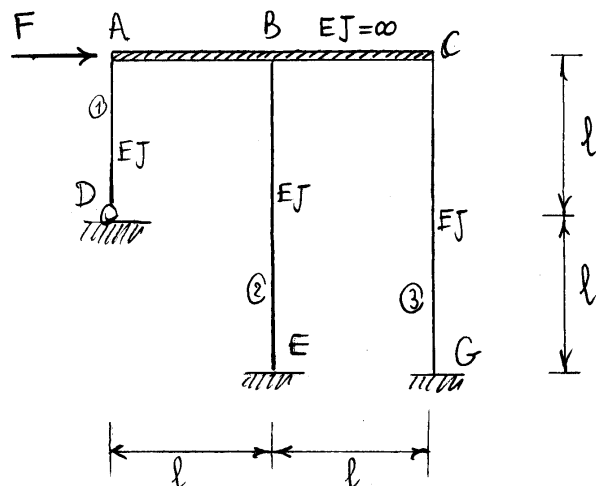
$$\xi_{BC} = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{15 EJ}$$

Equilibrio alla rotazione del traverso:

$$Vl = \frac{3}{5} Fl \Rightarrow V = \frac{3}{5} F$$



8.3.2.2 Telaio con traverso rigido e tre ritti

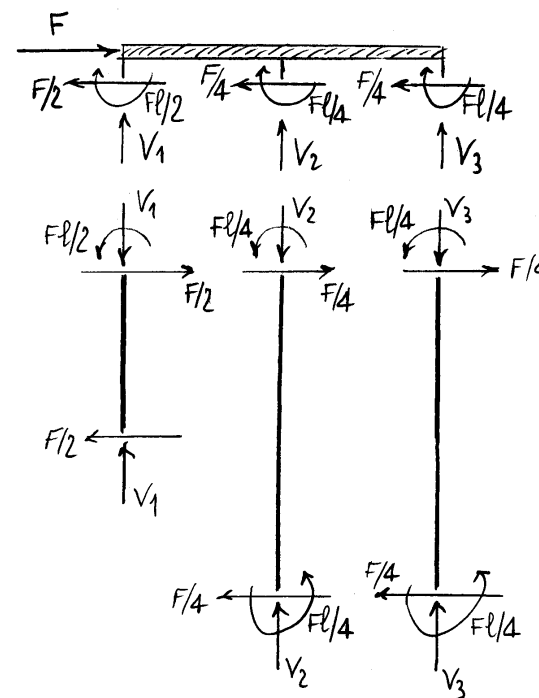


Rigidità taglianti: $k_1 = 3 \frac{EI}{l^3}$, $k_2 = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3}$, $k_3 = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3}$.

Rigidità globale: $k = 6 \frac{EI}{l^3}$.

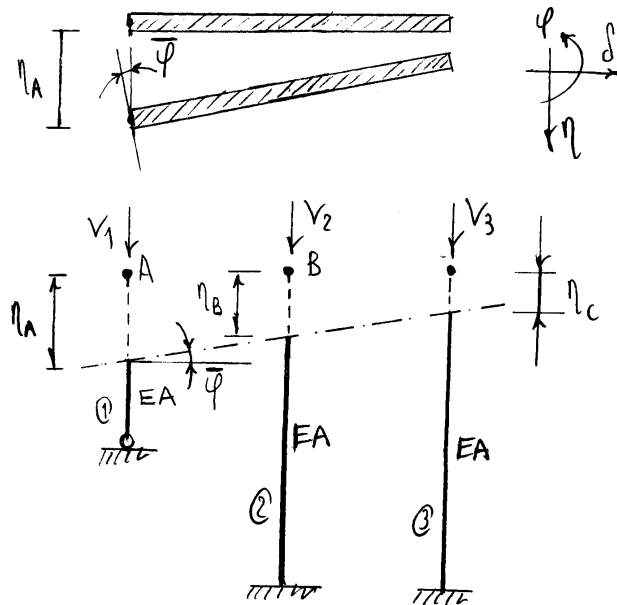
Spostamento trasverso: $\xi = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{6EI}$.

Coefficienti di ripartizione: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{4}$.



Gli equilibri alla rotazione ed alla traslazione verticale del traverso rigido non sono sufficienti per determinare gli sforzi normali V_1, V_2, V_3 nei ritti. Per rimuovere l'indeterminazione, che è di tipo assiale, occorre rimuovere l'ipotesi di indeformabilità assiale.

dei ritti. Procedendo poi via metodo delle deformazioni, si possono assumere quali incognite lo spostamento verticale η_A del punto A e la rotazione $\bar{\varphi}$ del traverso rigido. In funzione dei parametri η_A e $\bar{\varphi}$ si determinano gli sforzi normali nei ritti e si impongono poi le due equazioni di equilibrio, sufficienti a determinare le due incognite.



Spostamenti η_B e η_C in funzione di η_A e $\bar{\varphi}$:

$$\begin{cases} \eta_B = \eta_A - \bar{\varphi} l \\ \eta_C = \eta_A - 2\bar{\varphi} l \end{cases}$$

Rigidità assiali: $k_1 = \frac{EA}{l}$, $k_2 = \frac{EA}{2l}$, $k_3 = \frac{EA}{2l}$.

Sforzi normali (di compressione) nei ritti:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{EA}{l} \eta_A \\ V_2 = \frac{EA}{2l} \eta_B = \frac{EA}{2l} (\eta_A - \bar{\varphi} l) \\ V_3 = \frac{EA}{2l} \eta_C = \frac{EA}{2l} (\eta_A - 2\bar{\varphi} l) \end{cases}$$

Equilibrio alla traslazione verticale del traverso:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow 2\eta_A - \frac{3}{2}\bar{\varphi} l = 0.$$

Equilibrio alla rotazione del traverso attorno al punto C:

$$-V_1 2l - V_2 l - \frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{4} - \frac{Fl}{4} = 0,$$

e quindi:

$$-\frac{5}{2}EA\eta_A + \frac{1}{2}EA\bar{\varphi} - F\ell = 0.$$

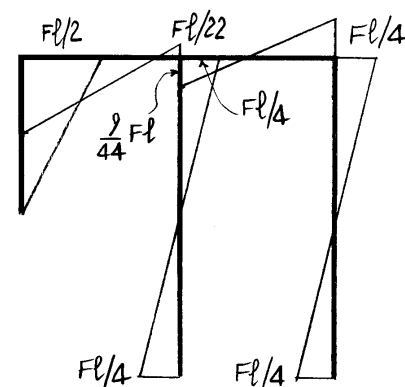
Si ottiene:

$$\begin{cases} 4\eta_A - 3\ell\bar{\varphi} = 0 \\ 5\eta_A - \ell\bar{\varphi} = -2\frac{F\ell}{EA} \end{cases},$$

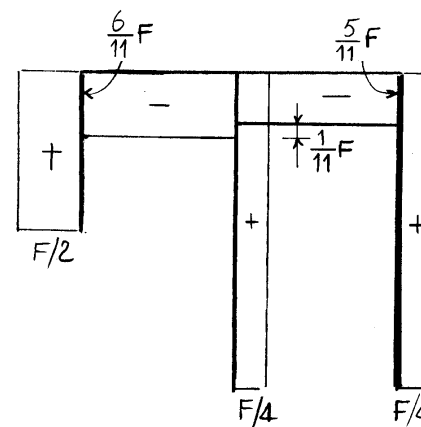
$$\begin{cases} \eta_A = -\frac{6}{11}\frac{F\ell}{EA} \\ \bar{\varphi} = -\frac{8}{11}\frac{F}{EA} \end{cases},$$

e infine:

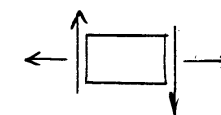
$$\begin{cases} V_1 = -\frac{6}{11}F \\ V_2 = \frac{1}{11}F \\ V_3 = \frac{5}{11}F \end{cases}.$$



(M)

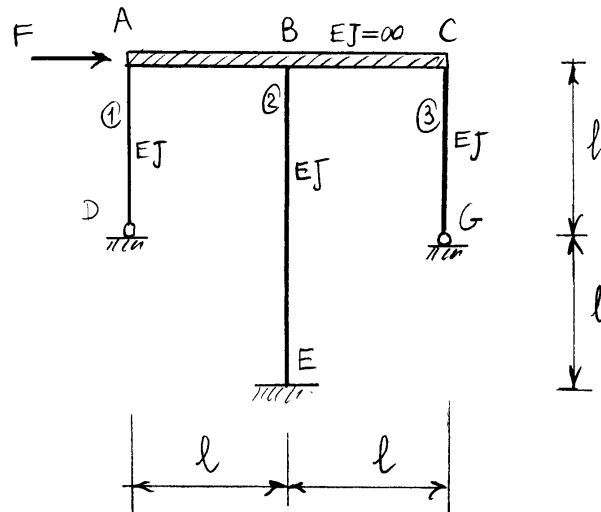


(T)



(N)

8.3.2.3 Telaio simmetrico con traverso rigido e tre ritti

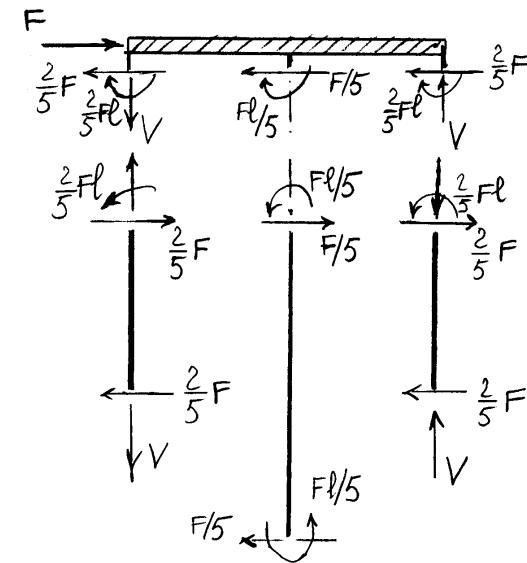


Rigidezze taglianti: $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$, $k_2 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l^3}$, $k_3 = 3 \frac{EJ}{l^3}$.

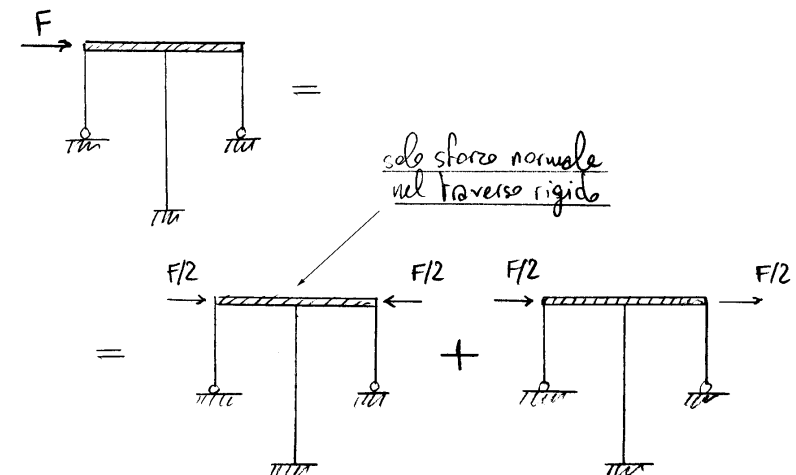
Rigidezza globale: $k = \frac{15}{2} \frac{EJ}{l^3}$.

Spostamento trasverso: $\xi = \frac{F}{k} = \frac{2}{15} \frac{Fl^3}{EJ}$.

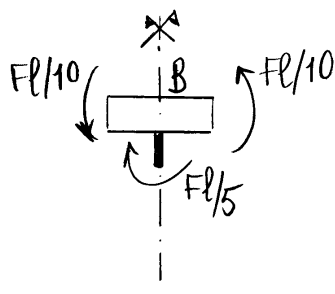
Coefficienti di ripartizione: $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{1}{5}$, $c_3 = \frac{2}{5}$.



La struttura è simmetrica e il carico può essere scisso nella somma di un carico simmetrico e di un carico antisimmetrico:

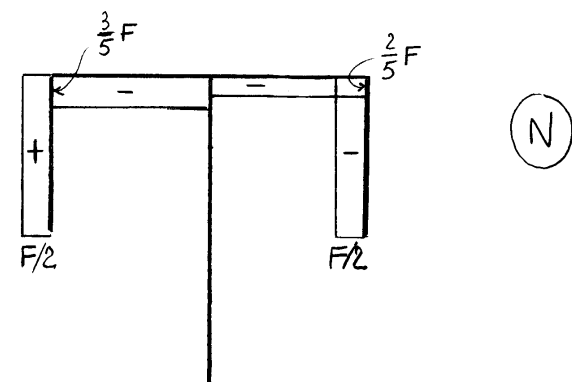
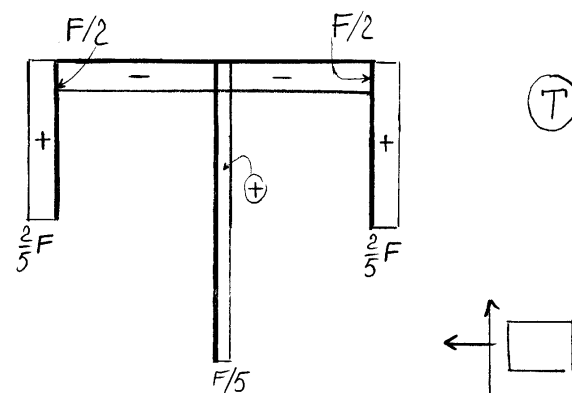
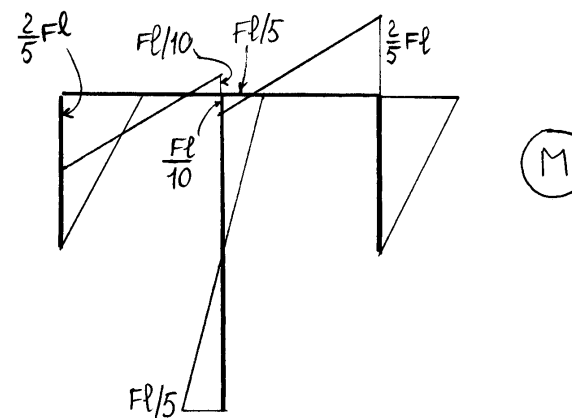


Ne consegue che in corrispondenza della sezione B posta sull'asse di simmetria il momento $Fl/5$ trasmesso dal ritto BE si sciinde in due quote emisimmetriche pari a $Fl/10$, lo sforzo normale nel ritto BE



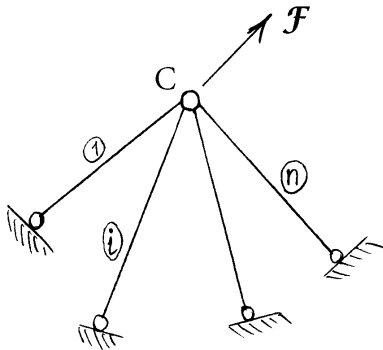
è nullo e gli sforzi normali nei ritti AD e CG sono emisimmetrici, uguali in modulo ed opposti in verso. L'equilibrio alla rotazione della travata richiede:

$$V = F/2.$$



8.4 Sistema di pendoli connessi in un nodo

Si consideri un sistema di n pendoli connessi ad una estremità in un nodo cerniera C soggetto ad una forza concentrata $\mathcal{F}$. Il sistema è soggetto a sola forza normale e quindi occorre mettere in conto la deformabilità assiale. Escludendo il caso, labile, di due pendoli aventi la stessa direzione, il sistema è determinato dallo spostamento $\mathbf{u}_C$ del nodo, spostamento che diventa quindi l'unica incognita del metodo degli spostamenti.



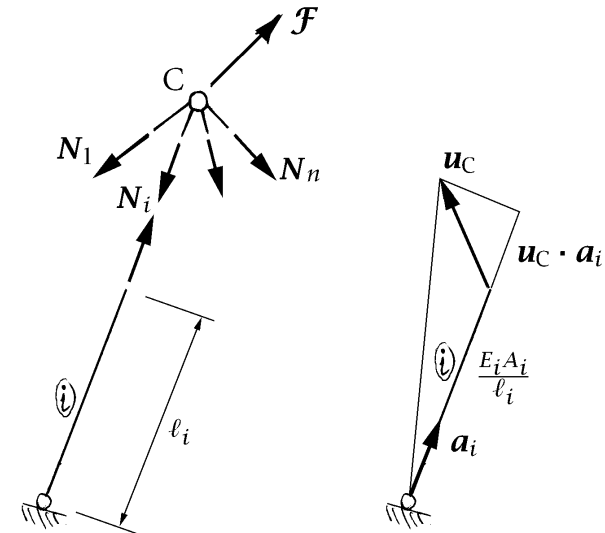
L'equazione vettoriale di equilibrio alla traslazione del nodo richiede:

$$\sum_i \mathbf{N}_i = \mathcal{F},$$

dove $\mathbf{N}_i$ è la forza assiale trasmessa al nodo dall' i -esimo pendolo, avente la direzione dell'asse del pendolo.

Occorre allora esprimere le forze assiali $\mathbf{N}_i$ in funzione dello spostamento $\mathbf{u}_C$ del nodo:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{u}_C,$$



dove $\mathbf{k}_i$ è il *tensore di rigidezza assiale* dell' i -esimo pendolo. Per esplicitare tale tensore si considerino i versori $\mathbf{a}_i$ delle direzioni dei pendoli, di versi positivi uscenti dalle estremità dei pendoli, e le rigidezze assiali $k_i = \frac{E_i A_i}{l_i}$ dei pendoli. Risulta:

$$\mathbf{N}_i = k_i (\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i = k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{u}_C,$$

poiché $\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i$ è l'allungamento del pendolo. Il tensore di rigidezza assiale vale dunque:

$$\mathbf{k}_i = k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i),$$

L'equazione di equilibrio del nodo diventa quindi:

$$\sum_i \mathbf{k}_i \mathbf{u}_C = \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_C = \mathbf{k}_C^{-1} \mathcal{F},$$

dove:

$$\mathbf{k}_C = \sum_i k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i),$$

rappresenta il *tensore di rigidezza alla traslazione* del nodo C.

Gli sforzi normali N_i nei pendoli valgono quindi:

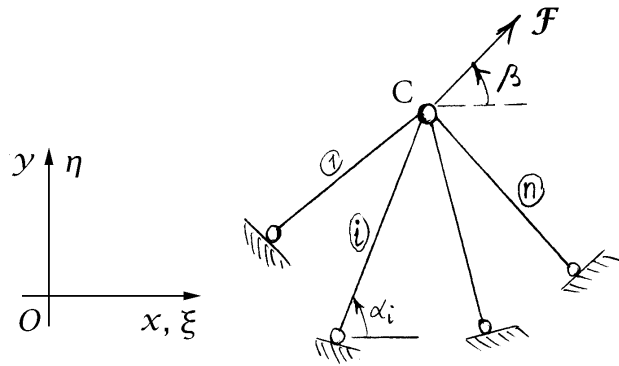
$$N_i = k_i (\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i) = k_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}_C^{-1} \mathcal{F}).$$

Si noti che l'analisi precedente vale in generale anche per i sistemi spaziali di pendoli connessi in un nodo.

Si consideri ora un sistema piano di pendoli connessi in un nodo e si assuma un sistema di riferimento piano Oxy . Sia poi α_i l'angolo che individua l'asse dell' i -esimo pendolo rispetto all'asse x e β l'analogo angolo che individua la retta d'azione della forza applicata $\mathcal{F}$. Le componenti del tensore $\mathbf{k}_C$ di rigidezza risultano allora:

$$k_{xx} = \sum_i k_i \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_x = \sum_i k_i \cos^2 \alpha_i,$$

$$k_{yy} = \sum_i k_i \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_y = \sum_i k_i \sin^2 \alpha_i,$$



$$k_{xy} = k_{yx} = \sum_i k_i \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_y = \sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i.$$

Detto poi F il modulo della forza nodale $\mathcal{F}$, le componenti di questa risultano:

$$\{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} F \cos \beta \\ F \sin \beta \end{Bmatrix}.$$

Se infine ξ_C e η_C sono le componenti rispetto agli assi x e y dello spostamento $\mathbf{u}_C$ del nodo, le equazioni scalari di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale risultano rispettivamente:

$$\left(\sum_i k_i \cos^2 \alpha_i \right) \xi_C + \left(\sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \eta_C = F \cos \beta,$$

$$\left(\sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \xi_C + \left(\sum_i k_i \sin^2 \alpha_i \right) \eta_C = F \sin \beta.$$

Capitolo 9

Analisi del metodo delle forze

9.1 Struttura delle equazioni di congruenza

Se la struttura è n volte iperstatica, si sopprimono n vincoli (interni ed esterni) sovrabbondanti. Si ottiene così un sistema isostatico detto sistema principale.

Ai vincoli soppressi vengono sostituite le reazioni vincolari incognite X_i .

Il sistema effettivo e il sistema principale risultano identici staticamente e cinematicamente se alle X_i si attribuiscono i valori effettivi.

È chiaro che esistono diverse scelte riguardo agli

n vincoli da sopprimere, dovendo questi soddisfare alla sola condizione di essere sovrabbondanti, e che ad ogni scelta corrisponde una diversa struttura principale.

Per valori arbitrari delle incognite iperstatiche X_i ($i=1, \dots, n$) il sistema principale è equilibrato ma in generale non congruente, ovvero gli spostamenti u_i ($i=1, \dots, n$) corrispondenti ai vincoli soppressi non rispettano le condizioni imposte dai vincoli stessi nella struttura effettiva. Se con $\bar{u}_i$ indichiamo lo spostamento imposto dal vincolo ($\bar{u}_i=0$ se il vincolo è rigido) le condizioni di congruenza si scrivono:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i=1, \dots, n)$$

Queste rappresentano n equazioni nelle n incognite X_i . Se il vincolo è cedevole elasticamente $\bar{u}_i$ dipende dalla X_i .

Vediamo di indagare la forma delle equazioni di congruenza, sia allo scopo di dedurre informazioni generali sulla risolubilità del sistema di equazioni che allo scopo di dedurre metodi generali per la scrittura dello stesso sistema di equazioni.

La struttura principale è soggetta ai carichi (eventualmente cedimenti anelastici dei vincoli oppure a distorsioni di varia natura) e alle reazioni iperstatiche incognite X_i ($i=1, \dots, n$). Lo spostamento u_i può allora scriversi, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti:

$$u_i = u_{0i} + \sum_{j=1}^n c_{ij} X_j \quad (i=1, \dots, n),$$

dove u_{0i} rappresenta lo spostamento u_i nella struttura principale soggetta ai soli carichi (e/o distorsioni) mentre il generico coefficiente c_{ij} , detto cedevolezza, rappresenta lo spostamento u_i nella struttura principale soggetta al solo carico $X_j = 1$.

Per il teorema di Betti risulta:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Scritto il sistema risolvibile in forma matriciale

$$\underline{u}_0 + \underline{c} \underline{X} = \underline{\bar{u}},$$

la matrice $\underline{c}$, di cedevolezza, è quindi simmetrica:

$$\underline{c} = \underline{c}^T.$$

Non solo, ma poiché nella struttura principale soggetta alle solle X_i il lavoro di deformazione risulta:

$$L_e = \frac{1}{2} \underline{X}^T \underline{c} \underline{X},$$

dalla condizione

$$L_e \geq 0 \quad \& \quad (L_e = 0 \Leftrightarrow \underline{X} = \underline{0}),$$

si deduce che $\underline{c}$ è definita positiva e quindi invertibile. Esiste perciò una e una sola soluzione del problema iperstatico:

$$\underline{X} = \underline{c}^{-1} (\underline{\bar{u}} - \underline{u}_0).$$

9.2 Scrittura delle equazioni di congruenza

Per la scrittura delle equazioni di congruenza, occorre determinare gli spostamenti u_i della struttura principale soggetta ai carichi e alle reazioni iperstatiche. Si può procedere per via cinematica (integrazione delle linee elastiche) oppure utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Procedendo con il principio dei lavori virtuali, al fine del calcolo dello spostamento u_i occorre considerare quale struttura fittizia delle forze la struttura principale soggetta alla $X_i = 1$. Occorre dunque considerare n strutture fittizie.

Limitandosi al caso piano, le caratteristiche della sollecitazione della struttura reale risultano pertanto:

$$\begin{cases} N^{(r)} = N^{(o)} + \sum_{i=1}^n X_i N^{(i)} \\ T^{(r)} = T^{(o)} + \sum_{i=1}^n X_i T^{(i)} \\ M^{(r)} = M^{(o)} + \sum_{i=1}^n X_i M^{(i)} \end{cases}$$

dove $N^{(o)}$, $T^{(o)}$ e $M^{(o)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione dovuta ai soli carichi e $N^{(i)}$, $T^{(i)}$ e $M^{(i)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione nella i -esima struttura fittizia.

Limitandosi ai sistemi di travi inflesse, le caratteristiche della struttura reale valgono quindi:

$$\varepsilon^{(r)} = \varepsilon^{(d)} + \frac{N^{(o)}}{EA} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i N^{(i)}}{EA}$$

$$K^{(r)} = K^{(d)} + \frac{M^{(o)}}{EJ} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i M^{(i)}}{EJ},$$

dove $\varepsilon^{(d)}$ e $K^{(d)}$ sono gli effetti delle distorsioni sulla struttura principale. Gli spostamenti cercati risultano dunque:

$$u_i = \int_s \left\{ N^{(i)} \left(\varepsilon^{(d)} + \frac{N^{(o)}}{EA} \right) + M^{(i)} \left(K^{(d)} + \frac{M^{(o)}}{EJ} \right) \right\} ds \quad \left. \vphantom{\int_s} \right\} u_{oi}$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^n X_j \int_s \left\{ \frac{N^{(i)} N^{(j)}}{EA} + \frac{M^{(i)} M^{(j)}}{EJ} \right\} ds}_{c_{ij}}.$$

9.3 Indeformabilità assiale

Nel caso in cui si trascuri l'indeformabilità assiale delle travi, l'iperstaticità del sistema da mettere in conto è solo quella di tipo flessionale. Ovverossia, non occorre tenere conto delle iperstaticità dovute a vincoli di tipo assiale, cioè a vincoli che, a seguito della indeformabilità assiale delle aste, non modificano il modo di deformarsi della struttura. Se n è l'iperstaticità del sistema, n_f l'iperstaticità di tipo flessionale e n_a quella di tipo assiale, risulta:

$$n = n_a + n_f.$$

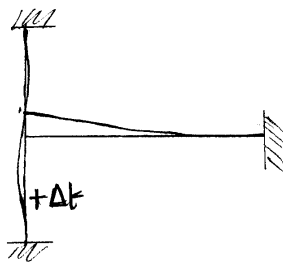
La struttura principale si ottiene eliminando n_f vincoli flessionali sovrabbondanti. La struttura

principale risulta determinata per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione di tipo flessionale, e cioè taglio T e momento M , mentre continua ad essere n_a volte iperstatica riguardo alla forza normale, forza che non influisce sul modo di deformarsi della struttura. Se $n_a = 0$, una volta risolto il problema iperstatico di tipo flessionale, è possibile determinare la forza normale per via del solo equilibrio. Se $n_a \neq 0$ questo non è possibile. Occorre allora rinvocare l'ipotesi di indeformabilità assiale nella struttura principale caricata dalle forze esterne più le reazioni iperstatiche di tipo flessionale già determinate, e scegliere quindi una nuova struttura principale, questa volta effettivamente isostatica, eliminando n_a vincoli sovrabbondanti.

Quando si trascura la deformabilità assiale delle aste, oltre alla deformazione dovuta al taglio, il principio dei lavori virtuali si scrive:

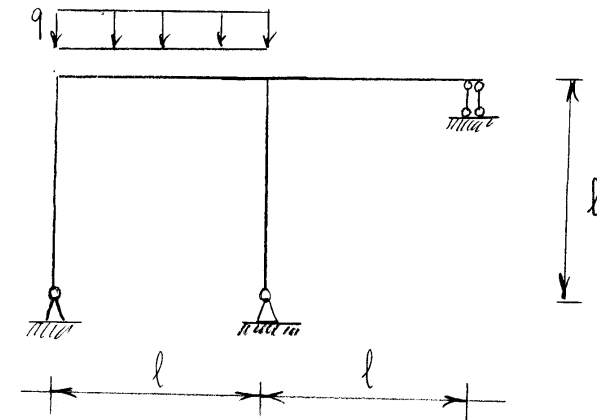
$$u_i = \int_s \left\{ N^{(i)} \varepsilon^{(d)} + T^{(i)} \gamma^{(d)} + M^{(i)} \left(\kappa^{(d)} + \frac{M^{(d)}}{EJ} \right) \right\} ds + \sum_{j=1}^{n_f} X_j \int_s \frac{M^{(i)} M^{(j)}}{EJ} ds \quad (i=1, \dots, n_f)$$

Osservare che nelle aste soggette ad una distorsione $\varepsilon^{(d)}$ di tipo assiale lo sforzo normale deve essere staticamente determinato (nella struttura principale). In caso contrario, per rendere determinato il problema, occorre rimuovere anche degli

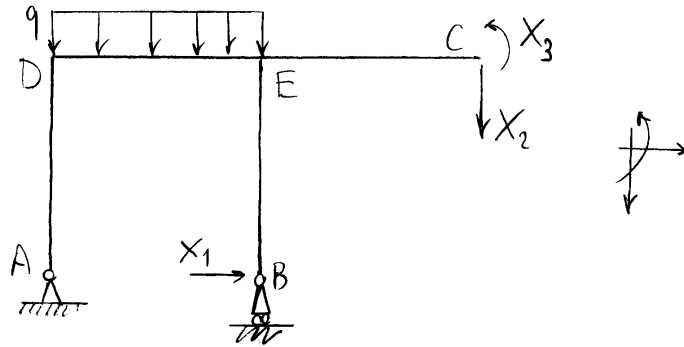


opportuni vincoli di tipo assiale e supporti deformabili assialmente tutte le aste interessate da tali vincoli, come nel caso illustrato in figura.

9.4 Esempio: telaio a un nodo spostabile



Struttura principale



Configurazione equilibrata dovuta al carico
e alle tre forze X_1 , X_2 ed X_3

In generale non congruente per valori arbitrari
di X_1 , X_2 ed X_3

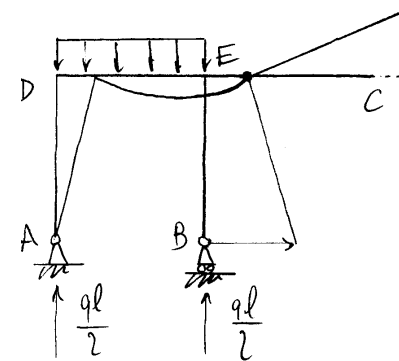
Anche congruente se X_1 , X_2 ed X_3 sono i
valori che assumono le incognite iperstatiche

Condizioni di congruenza (sugli spostamenti duali
delle incognite)

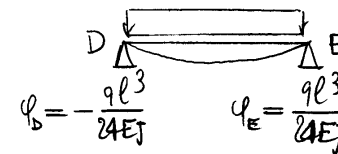
$$\begin{cases} u_B = 0 \\ v_C = 0 \\ \varphi_C = 0 \end{cases}$$

Spostamenti calcolati utilizzando il metodo cinematico
(composizione degli spostamenti)

(0) Sole forze esterne:



$$\begin{cases} u_B^{(0)} = \frac{ql^4}{12EJ} \\ v_C^{(0)} = -\frac{ql^4}{24EJ} \\ \varphi_C^{(0)} = \frac{ql^3}{24EJ} \end{cases}$$



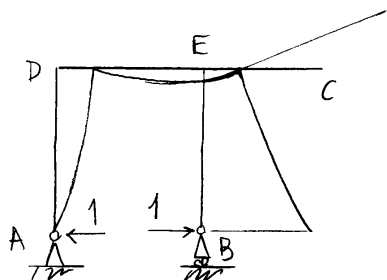
$$\varphi_A = \varphi_D \quad (\text{congruenza in D})$$

$$u_C = u_D = u_E = -\varphi_D l = \frac{ql^4}{24EJ}$$

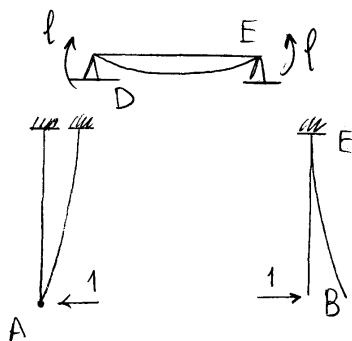
$$\varphi_C = \varphi_E = \frac{ql^3}{24EJ} \quad (\text{trave appoggiata})$$

$$u_B = v_E + \varphi_E l = \frac{ql^4}{12EJ}$$

$$v_C = -\varphi_E l = -\frac{ql^4}{24EJ}$$

(1) Sola forza X_1 unitaria :

$$\begin{cases} v_B^{(1)} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ} \\ v_C^{(1)} = -\frac{l^3}{2EJ} \\ \varphi_C^{(1)} = \frac{l^2}{2EJ} \end{cases}$$



$$\varphi_D = -\frac{l^2}{2EJ} \quad \varphi_C = \varphi_E = \frac{l^2}{2EJ}$$

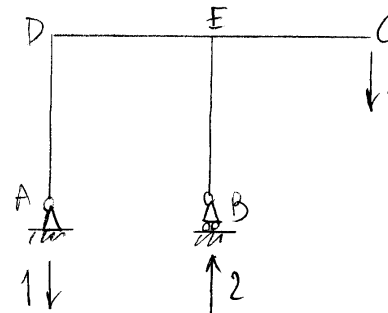
$$\varphi_A = -\frac{l^2}{2EJ} + \varphi_D = -\frac{l^2}{EJ}$$

$$v_A = 0$$

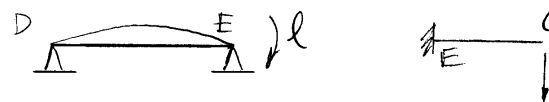
$$v_D = v_E = v_C = \frac{l^3}{3EJ} - \varphi_D l = \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ}$$

$$v_B = v_E + \varphi_E l + \frac{l^3}{3EJ} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{l^3}{EJ} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$v_C = -\varphi_E l = -\frac{l^3}{2EJ}$$

(2) Sola forza X_2 unitaria :

$$\begin{cases} v_B^{(2)} = -\frac{l^3}{2EJ} \\ v_C^{(2)} = +\frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ} \\ \varphi_C^{(2)} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ} \end{cases}$$



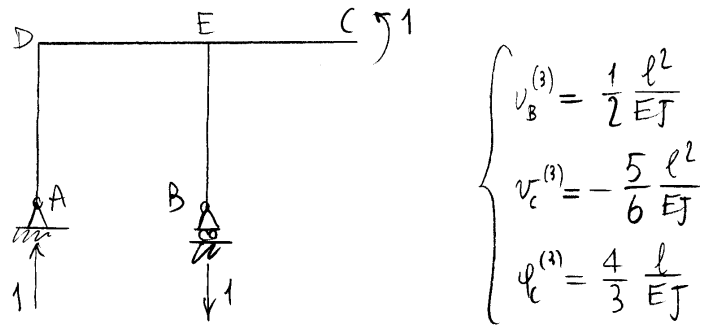
$$\varphi_A = \varphi_D = +\frac{l^2}{6EJ}$$

$$v_D = v_E = v_C = -\varphi_D l = -\frac{l^3}{6EJ}$$

$$\varphi_E = \frac{-l^2}{3EJ} \Rightarrow v_B = v_E + \varphi_E l = -\frac{l^3}{2EJ}$$

$$v_C = +\frac{l^3}{3EJ} - \varphi_E l = +\frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = \varphi_E - \frac{l^2}{2EJ} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ}$$

(3) Sol2 X₃ unitaria

$$\phi_A = \phi_D = -\frac{l}{6EJ} \quad \phi_E = \phi_B = \frac{l}{3EJ}$$

$$\phi_C = \phi_E + \frac{l}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{l}{EJ}$$

$$v_D = v_E = v_C = -\phi_A l = \frac{l^2}{6EJ}$$

$$v_B = v_E + \phi_E l = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \frac{l^2}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ}$$

$$v_C = -\phi_E l - \frac{l^2}{2EJ} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{l^2}{EJ} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ}$$

Matrice di cedevolezza:

$$\underline{c} = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 10l^2 & -3l^2 & 3l \\ -3l^2 & 4l^2 & -5l \\ 3l & -5l & 8 \end{bmatrix}.$$

Spostamenti dovuti ai soli carichi esterni:

$$\underline{u}_0 = \frac{ql^3}{24EJ} \begin{Bmatrix} 2l \\ -l \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{ql^2}{4} \begin{Bmatrix} 2l \\ -l \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10l^2 & -3l^2 & 3l \\ -3l^2 & 4l^2 & -5l \\ 3l & -5l & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Equazioni risolventi:

$$\begin{cases} 20X_1l - 6X_2l + 6X_3 = -ql^2 \\ 12X_1l - 16X_2l + 20X_3 = -ql^2 \\ 12X_1l - 20X_2l + 32X_3 = -ql^2 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla seconda:

$$4x_2 l - 12x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \frac{x_3}{l}.$$

Sostituendo nella prima e nella seconda:

$$20x_1 l - 12x_3 = -ql^2.$$

$$12x_1 l - 28x_3 = -ql^2.$$

Sottraendo la seconda di queste dalla prima di queste:

$$8x_1 l + 16x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \frac{x_3}{l},$$

e infine:

$$-40x_3 - 12x_3 = -ql^2 \Rightarrow x_3 = \frac{ql^2}{52}.$$

Soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{ql}{26} \\ x_2 = \frac{3}{52} ql \\ x_3 = \frac{ql^2}{52} \end{cases}.$$

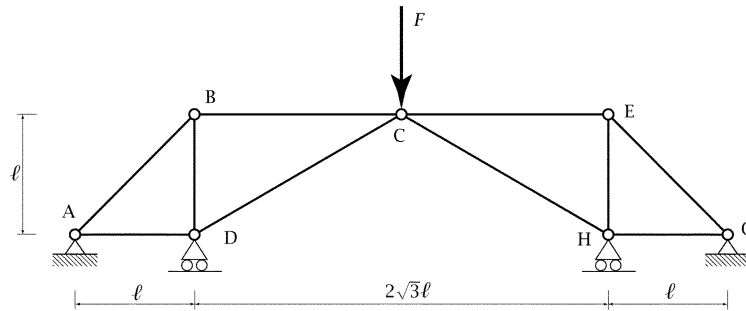
Spostamenti:

$$\begin{cases} \xi = \frac{ql^4}{24EJ} + \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ} x_1 - \frac{l^3}{6EJ} x_2 + \frac{l^2}{6EJ} x_3 \\ \eta_D = -\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{l^2}{2EJ} x_1 + \frac{l^2}{6EJ} x_2 - \frac{l}{6EJ} x_3 \\ \eta_E = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{l^2}{2EJ} x_1 - \frac{l^2}{3EJ} x_2 + \frac{l}{3EJ} x_3 \end{cases},$$

e quindi:

$$\begin{cases} \xi = \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{6 \times 26} - \frac{3}{6 \times 52} + \frac{1}{6 \times 52} \right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{ql^4}{312EJ} \\ \eta_D = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{2 \times 26} + \frac{3}{6 \times 52} - \frac{1}{6 \times 52} \right) \frac{ql^3}{EJ} = -\frac{5ql^3}{312EJ} \\ \eta_E = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2 \times 26} - \frac{3}{3 \times 52} + \frac{1}{3 \times 52} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{ql^3}{104EJ} \end{cases}.$$

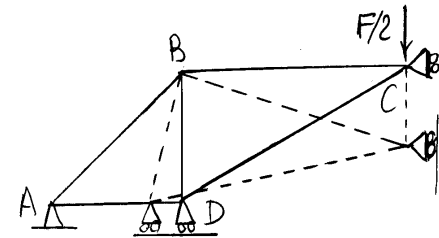
9.5 Esempio: Struttura reticolare



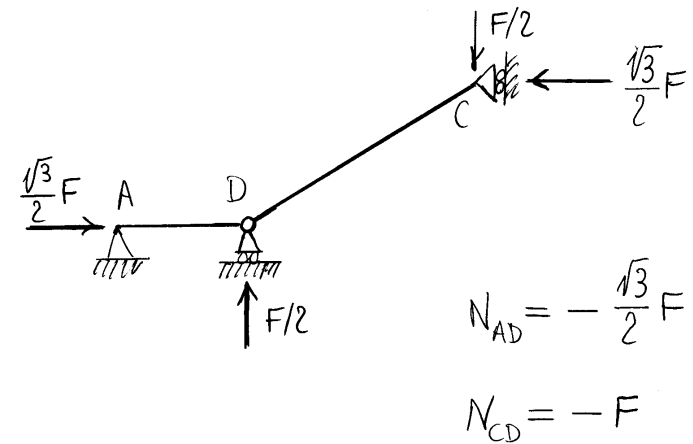
- 1) Risolvere la struttura reticolare iperstatica sopra illustrata utilizzando il metodo delle forze, scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali e supponendo che tutte le aste abbiano area uguale;
- 2) Compilare una tabella riassuntiva che riporti lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
- 3) Calcolare con il metodo cinematico gli spostamenti dei punti B, C e D;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura e calcolare l'energia elastica di deformazione.

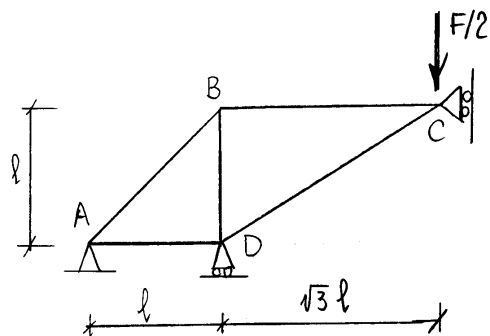
Soluzione di confronto

Risulta possibile deformare le aste AD e CD senza deformare le restanti aste soddisfacendo le condizioni imposte dai vincoli.

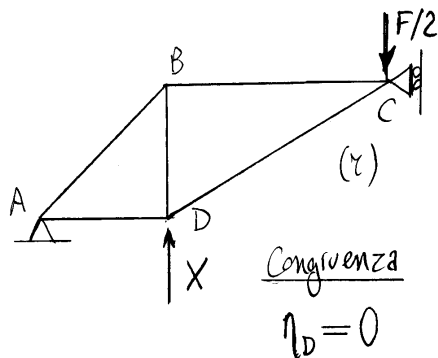


Dato che il nodo B non è caricato risulta quindi possibile assorbire il carico $F/2$ tramite le aste AD e CD soddisfacendo la congruenza e ottenendo così la soluzione del sistema iperstatico.

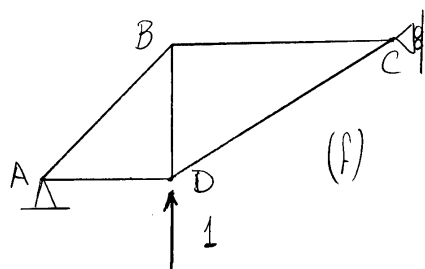


Soluzione col metodo delle forze

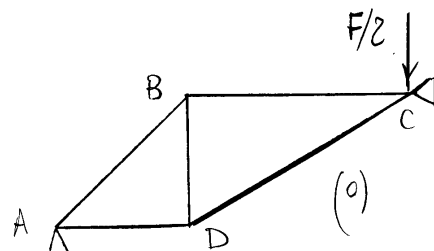
Struttura equivalente
per simmetria



Struttura principale
(schema degli
spostamenti - deformazioni
congruenti)

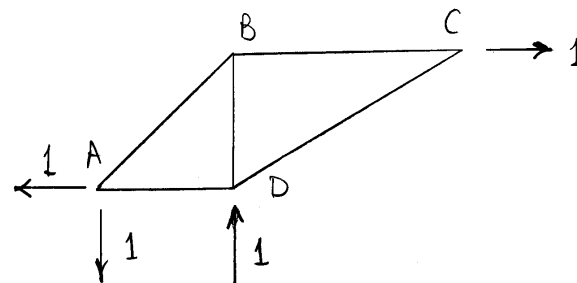


schema delle
forze - caratteristiche della
sollecitazione equilibrate
(per il calcolo di η_D
nella struttura principale)



Struttura principale
sovrapposta alle sole forze
esterne

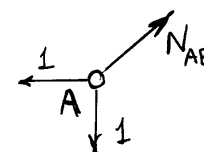
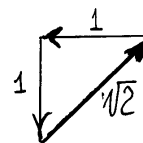
Schema (f)



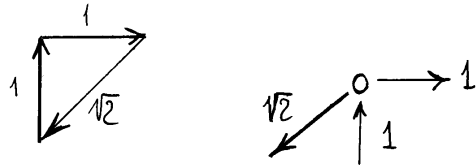
Equilibrio nodo C $\Rightarrow$ Asta CD scarica, $N_{BC} = 1$

Equilibrio nodo D $\Rightarrow$ Asta AD scarica, $N_{BD} = -1$

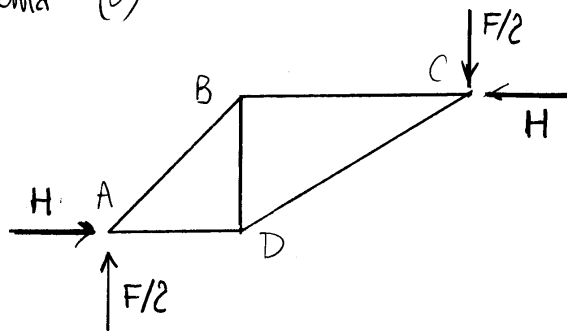
Equilibrio nodo A $\Rightarrow N_{AB} = \sqrt{2}$



Equilibrio nodo B (per controllo)

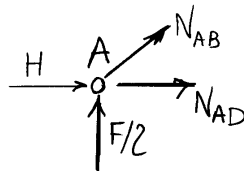
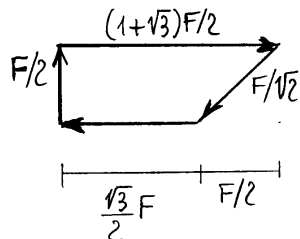


Schema (o)



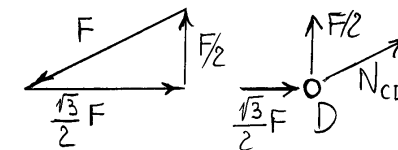
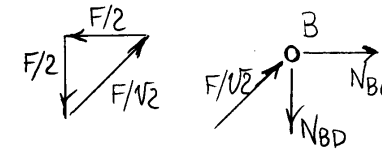
$$Hl = \frac{F}{2}(1+\sqrt{3})l \Rightarrow H = \frac{1+\sqrt{3}}{2}F$$

Equilibrio nodo A $\Rightarrow N_{AB} = -F/\sqrt{2}$, $N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$



Equilibri nodi B e D

$$N_{BC} = -\frac{F}{2}, \quad N_{BD} = \frac{F}{2}, \quad N_{CD} = -F$$



Equilibrio nodo C (per controllo)

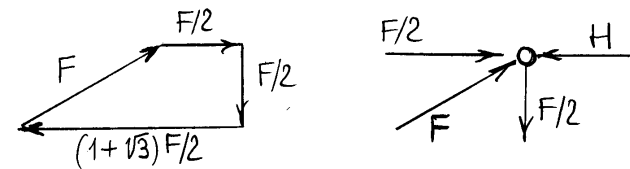


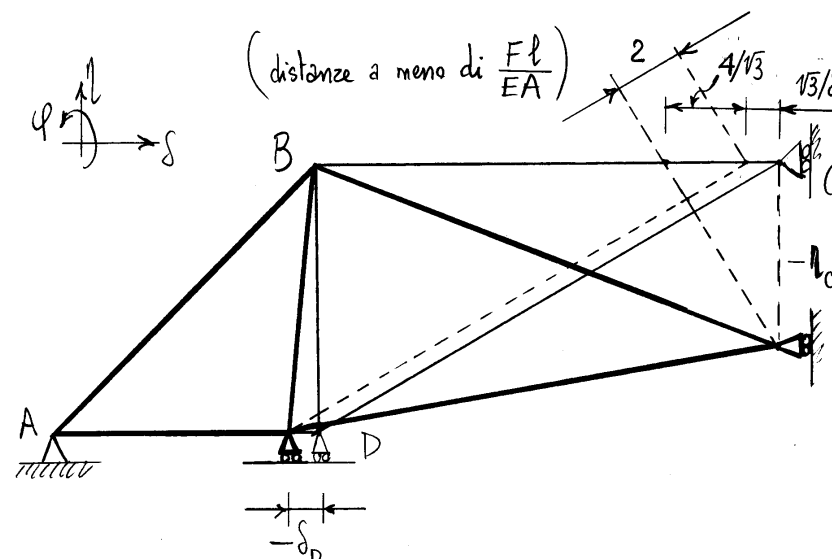
Tabella riassuntiva

					$X = F/2$	
Asta	l_i	$N^{(F)}$	$N^{(0)}$	$N^{(x)}$	Tipo	N (in modulo)
AB	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}$	$-\frac{F}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}}$	Scarica	0
AD	l	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	Puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2}F$
BD	l	-1	$\frac{F}{2}$	$-X + \frac{F}{2}$	Scarica	0
BC	$\sqrt{3}l$	1	$-\frac{F}{2}$	$X - \frac{F}{2}$	Scarica	0
CD	$2l$	0	$-F$	$-F$	Puntone	F

Principio dei lavori virtuali:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \eta_D &= \sum_{\text{aste } i} N_i^{(F)} \frac{N_i^{(x)} l_i}{EA} \\
 &= \frac{l}{EA} \left\{ \sqrt{2} \left(\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} - 1 \left(-X + \frac{F}{2} \right) + 1 \left(X - \frac{F}{2} \right) \sqrt{3} \right\} \\
 &= (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \frac{l}{EA} \left(X - \frac{F}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\eta_D = 0 \Rightarrow X = \frac{F}{2}$$



$$-\delta_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$-\eta_C = \sqrt{3} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \eta_C = \frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$\delta_B = \eta_B = 0$$

Lavoro di deformazione (su tutta la struttura)

$$L_d = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 \ell_i}{EA} = \frac{\ell}{EA} \left\{ \frac{3}{4} F^2 + 2 F^2 \right\} = \frac{11}{4} \frac{F^2 \ell}{EA}$$

Verifica con il teorema di Clapeyron

$$L_d = -\frac{1}{2} F \eta_c = \frac{11}{4} \frac{F^2 \ell}{EA}$$

Capitolo 10

Analisi del metodo degli spostamenti

10.1 Struttura delle equazioni risolventi

Si assumono come incognite del problema gli spostamenti (generalizzati) dei nodi della struttura, cioè dei punti intersezione delle singole travi. Conoscendo tali spostamenti è possibile determinare univocamente lo stato di deformazione e di sollecitazione in ogni sezione della struttura integrando l'equazione della linea elastica per ogni trave della struttura.

Siano u_i ($i = 1, \dots, n$) gli spostamenti dei nodi (imposti) e siano R_i ($i = 1, \dots, n$) le relative reazioni vincolari (tenere presente che imporre condizioni cinematiche

equivale ad imporre dei vincoli), ovvero sia le forze che occorre applicare ai nodi per ottenere gli spostamenti u_i .

Per valori arbitrari degli spostamenti u_i incogniti la deformata della struttura è congruente ma in generale non equilibrata, ovvero sia le reazioni R_i associate non coincidono con le forze effettivamente applicate nei nodi. Se con F_i indichiamo le forze applicate in corrispondenza dei nodi ($F_i = 0$ se i nodi sono scarichi) le equazioni risolventi si scrivono pertanto:

$$(1) \quad R_i = F_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

con le F_i che si ritengono indipendenti dalle u_i .

Queste equazioni costituiscono un sistema di n equazioni nelle n incognite u_i , e hanno il significato di equazioni di equilibrio dei nodi, nodi che sono appunto soggetti alle

forze F_i e a cui le aste trasmettono le forze $-R_i$.

Vediamo di indagare la forma delle equazioni di equilibrio. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la reazione R_i può scriversi:

$$R_i = R_{oi} + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j \quad (i=1, \dots, n),$$

dove le R_{oi} rappresentano le reazioni R_i in corrispondenza della scelta $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$, avvenuta nella struttura con i nodi impediti di muoversi, e per tale motivo sono dette reazioni di incastro perfetto. Inoltre il generico coefficiente k_{ij} rappresenta la reazione R_i nella struttura scarica con tutti i movimenti di nodo impediti salvo $u_j = 1$, cioè rappresenta una rigidezza della struttura, dimensionalmente una forza per unità di spostamento (generalizzato).

In forma matriciale il sistema si scrive:

$$R_o + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{F}.$$

La matrice $\mathbf{k}$ è detta *matrice delle rigidezze* e risulta essere simmetrica:

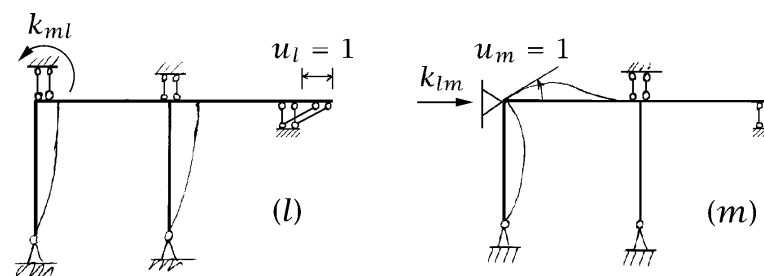
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^T.$$

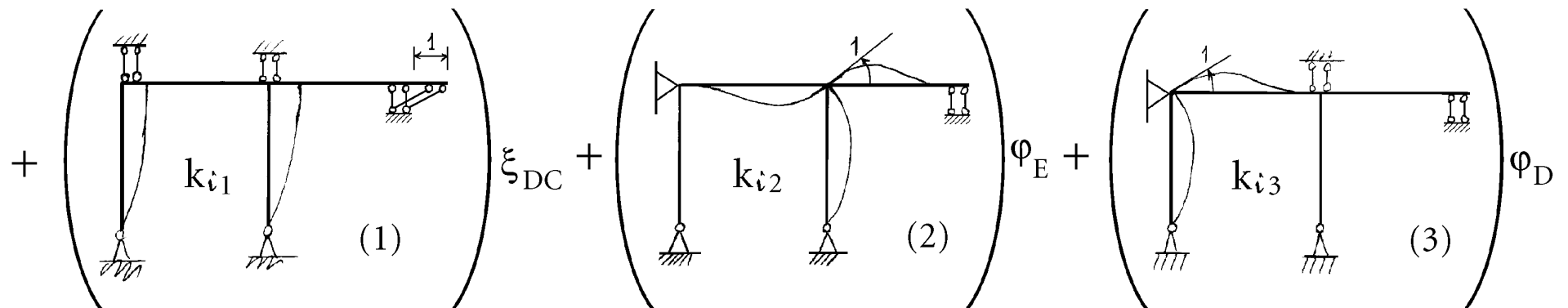
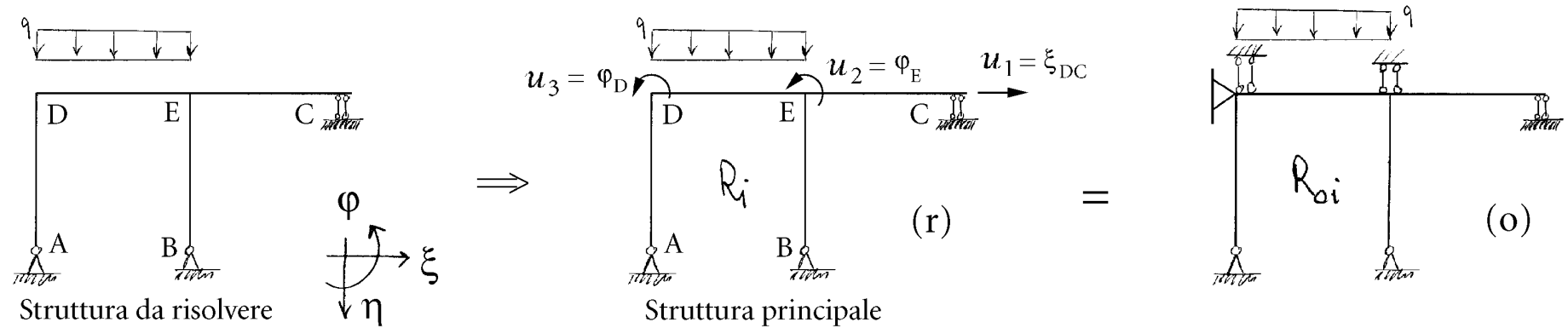
Infatti, si applichi il teorema di Betti alla struttura (l) soggetta all' l -esimo spostamento di nodo unitario ($u_l = 1$) e a tutti gli altri spostamenti nulli, e alla struttura (m) analogamente soggetta all' m -esimo spostamento di nodo unitario ($u_m = 1$) e a tutti gli altri spostamenti nulli. La struttura (m) è soggetta alle rigidezze k_{im} ($i = 1, 2, \dots, n$) e il loro lavoro per gli spostamenti del sistema (l) , che rappresenta il lavoro mutuo L_{ml} , vale:

$$L_{ml} = k_{lm} \times 1.$$

Analogamente il lavoro mutuo che compiono le forze del sistema (l) per gli spostamenti del sistema (m) valgono:

$$L_{lm} = k_{ml} \times 1,$$





Sovrapposizione degli effetti che conduce alle equazioni

$$R_i = R_{oi} + k_{i1} \xi_{DC} + k_{i2} \varphi_E + k_{i3} \varphi_D \quad (i = 1, 2, 3)$$

e quindi risulta:

$$k_{lm} = k_{ml},$$

come volevasi dimostrare.

Il sistema risolvibile può anche scriversi nella forma:

$$\mathbf{ku} = \mathbf{F} - \mathbf{R}_0,$$

dove le forze $-\mathbf{R}_0$ sono le reazioni di incastro perfetto cambiate di segno.

Se si considera la struttura soggetta ai soli movimenti di nodo (forze esterne nulle, cioè $\mathbf{R}_0 = 0$), le reazioni $\mathbf{R}$ valgono

$$\mathbf{R} = \mathbf{k} \mathbf{u},$$

e il lavoro di deformazione, per il teorema di Clapeyron, risulta:

$$L_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}.$$

La condizione $L_e \geq 0$ e ($L_e = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$) impone a $\mathbf{k}$ di essere definita positiva.

E' allora possibile ottenere la soluzione nella forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{R}_0).$$

10.2 Scrittura delle equazioni di equilibrio

Per determinare le reazioni $\mathbf{R}_0$ di incastro perfetto e i coefficienti della matrice si può procedere via integrazione della linea elastica oppure utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Nel caso si utilizzi il principio dei lavori virtuali occorre assumere quale struttura delle forze equilibrate quella reale, mentre la i -esima struttura fittizia congruente sarà individuata dallo spostamento $u_i = 1$ e da tutti gli altri spostamenti $u_j = 0$ ($j \neq i$).

Le caratteristiche della sollecitazione della struttura reale risultano:

$$\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{N}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^{(i)} u_i,$$

$$T^{(r)} = T^{(0)} + \sum_{i=1}^n T^{(i)} u_i,$$

$$M^{(r)} = M^{(0)} + \sum_{i=1}^n M^{(i)} u_i,$$

dove $N^{(0)}, T^{(0)}, M^{(0)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione dovuta ai soli carichi (ed eventualmente anche alle distorsioni imposte) sulla struttura con i nodi bloccati ($u_i = 0, i=1, \dots, n$), mentre $N^{(i)}, T^{(i)}, M^{(i)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione nella i -esima struttura fittizia ($u_i = 1, u_j = 0, j=1, \dots, n, j \neq i$). Sotto l'ipotesi di travi inflesse le caratteristiche della deformazione nella i -esima struttura fittizia risultano:

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{EA},$$

$$\kappa^{(i)} = \frac{M^{(i)}}{EJ}.$$

Il lavoro virtuale esterno relativo alla i -esima struttura congruente vale:

$$L_{ve} = R_i \times 1 + \int_{\ell} (q v^{(i)} + p w^{(i)} + m \varphi^{(i)}) ds + \sum_h (Q_h v_h^{(i)} + P_h w_h^{(i)} + \mathcal{M}_h \varphi_h^{(i)}),$$

dove le R_i sono le reazioni nella struttura reale soggetta ai carichi $q(s)$, $p(s)$ e $m(s)$ distribuiti, ai carichi Q_h , P_h e $\mathcal{M}_h$ concentrati nei punti P_h e ai vincoli u_i .

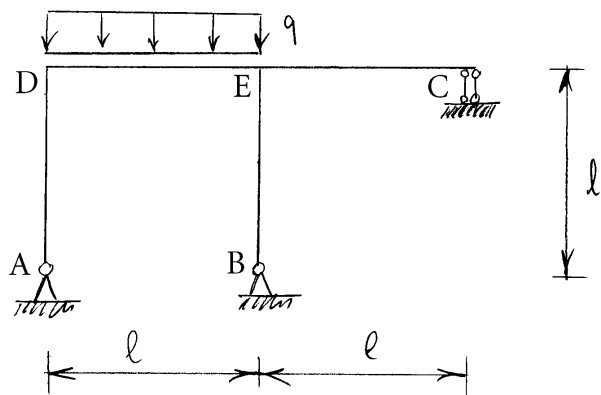
Uguagliando il lavoro virtuale esterno a quello interno si ottiene infine:

$$R_i = \left. \begin{aligned} & \int_{\ell} \left(\frac{N^{(0)} N^{(i)}}{EA} + \frac{M^{(0)} M^{(i)}}{EJ} \right) ds + \\ & - \int_{\ell} (q v^{(i)} + p w^{(i)} + m \varphi^{(i)}) ds \\ & - \sum_h (Q_h v_h^{(i)} + P_h w_h^{(i)} + \mathcal{M}_h \varphi_h^{(i)}) \end{aligned} \right\} R_{oi}$$

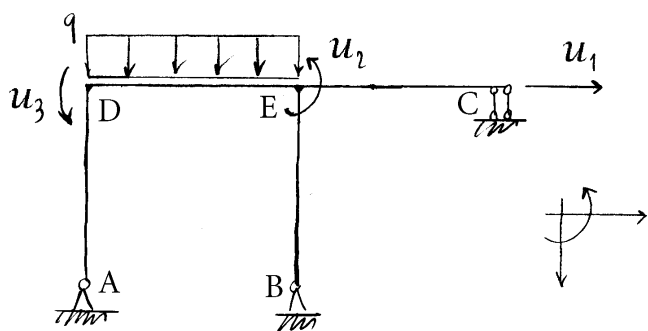
$$+ \sum_{j=1}^n u_j \underbrace{\int_{\ell} \left(\frac{N^{(j)} N^{(i)}}{EA} + \frac{M^{(j)} M^{(i)}}{EJ} \right) ds}_{k_{ij}}.$$

10.3 Esempio di un telaio a un nodo spostabile risolto col metodo degli spostamenti

Telaio a un nodo spostabile soggetto ad un carico distribuito



Struttura principale (metodo degli spostamenti)



Configurazione congruente dovuta al carico e ai tre spostamenti impressi u_1 , u_2 e u_3 di nodo.

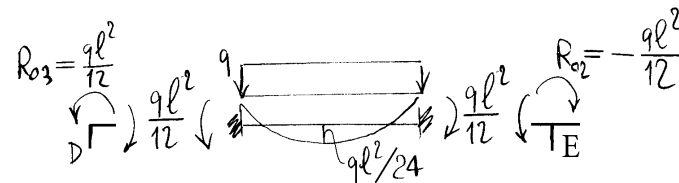
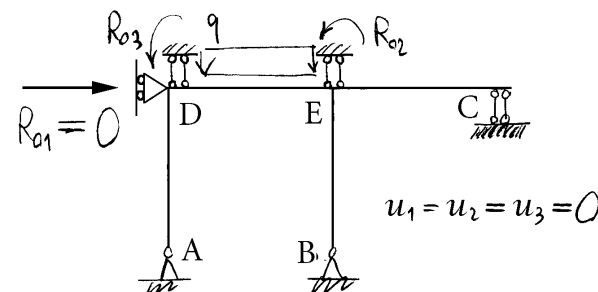
In generale non equilibrata per valori arbitrari di u_1 , u_2 e u_3 .

Anche equilibrata se u_1 , u_2 e u_3 sono i valori che assumono gli spostamenti reali.

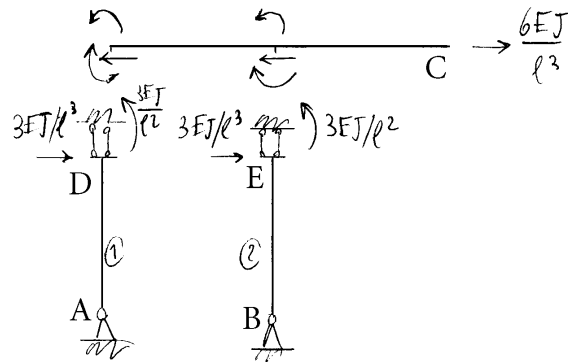
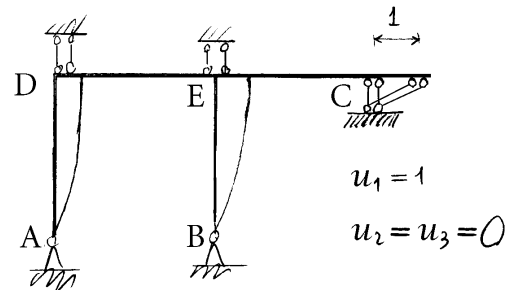
Condizioni di equilibrio (sulle reazioni duali degli spostamenti)

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \end{cases}$$

(0) Reazioni di incastro perfetto :



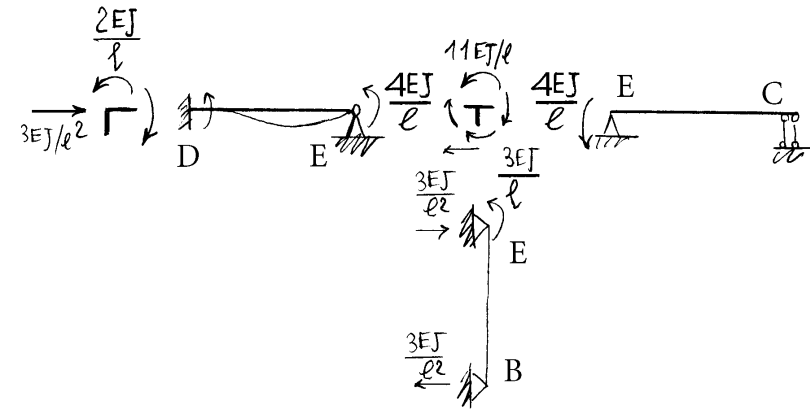
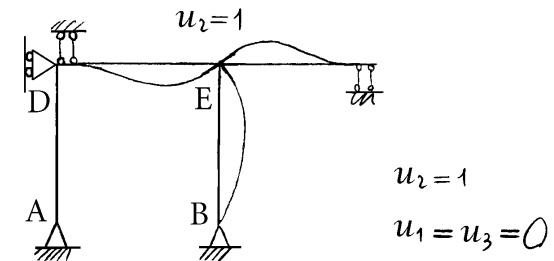
(1) Spostamento impresso u_1 unitario :



$$k_{11} = \frac{6EJ}{l^3}$$

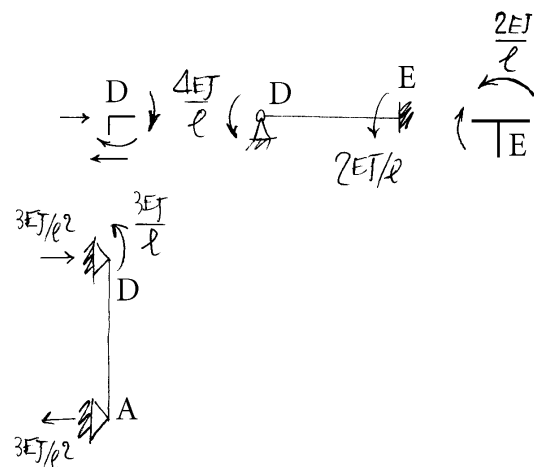
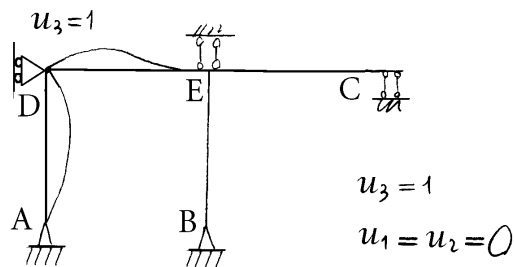
$$k_{13} = k_{12} = \frac{3EJ}{l^2}$$

(2) Spostamento impresso u_2 unitario :



$$\begin{cases} k_{12} = 3EJ/l^2 \\ k_{22} = 11EJ/l \\ k_{32} = 2EJ/l \end{cases}$$

(3) Spostamento impresso u_3 unitario:



$$\begin{cases} k_{13} = \frac{3EJ}{l^2} \\ k_{23} = \frac{2EJ}{l} \\ k_{33} = \frac{7EJ}{l} \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio:

$$\frac{ql^2}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & 3l \\ 3l & 11l^2 & 2l^2 \\ 3l & 2l^2 & 7l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Sviluppando si ottiene:

$$\begin{aligned} (i) \quad & 6u_1 + 3lu_2 + 3lu_3 = 0 \\ (ii) \quad & 3u_1 + 11lu_2 + 2lu_3 = +\frac{ql^4}{12EJ} \\ (iii) \quad & 3u_1 + 2lu_2 + 7lu_3 = -\frac{ql^4}{12EJ} \end{aligned}$$

e manipolando tali equazioni si ha poi:

$$(iv) \quad u_2 + u_3 = -2\frac{u_1}{l}, \quad (\text{dalla } i)$$

$$(v) \quad 13u_2 + 9u_3 = -6\frac{u_1}{l}, \quad (\text{sommando la ii alla iii})$$

$$(vi) \quad 10u_2 + 6u_3 = 0, \quad (\text{togliendo la iv moltiplicata per 3 dalla v})$$

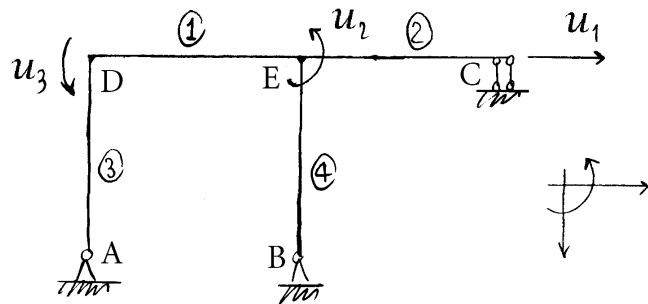
$$(vii) \quad u_2 = -\frac{3}{5}u_3, \quad (\text{dalla vi})$$

$$(viii) \quad u_1 = -\frac{1}{5}u_3l. \quad (\text{dalla v con la vii})$$

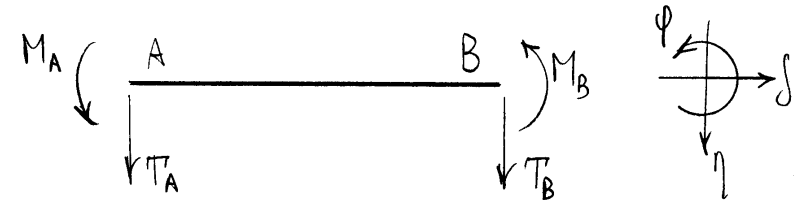
Inserendo le (vii) e (viii) nella (ii) si ottiene infine:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{312} \frac{ql^4}{EJ} \\ u_2 = \frac{1}{104} \frac{ql^3}{EJ} \\ u_3 = -\frac{5}{312} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases} .$$

10.3.1 Costruzione della matrice di rigidezza per assemblaggio delle matrici delle singole travi

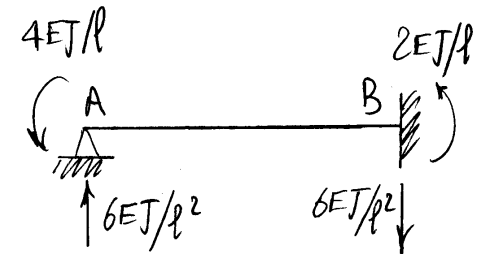


10.3.1.1 Matrice di rigidezza di una trave inflessa con tutti i movimenti di nodo vincolati

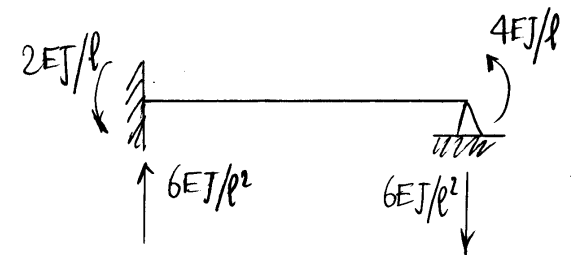


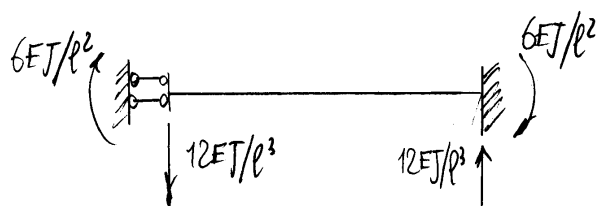
Generazione delle colonne della matrice della rigidezza dell'asta:

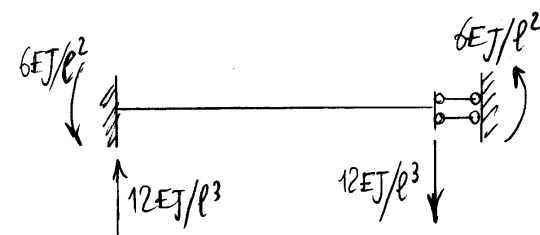
$$\begin{cases} \varphi_A = 1 \\ \varphi_B = \eta_A = \eta_B = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_B = 1 \\ \varphi_A = \eta_A = \eta_B = 0 \end{cases}$$



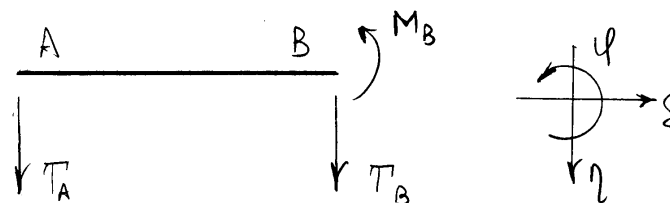
$$\begin{cases} \eta_A = 1 \\ \varphi_A = \varphi_B = \eta_B = 0 \end{cases}$$


$$\begin{cases} \eta_B = 1 \\ \varphi_A = \varphi_B = \eta_A = 0 \end{cases}$$


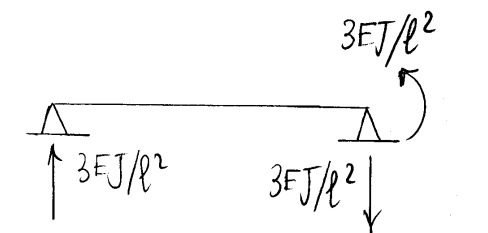
Si ottiene:

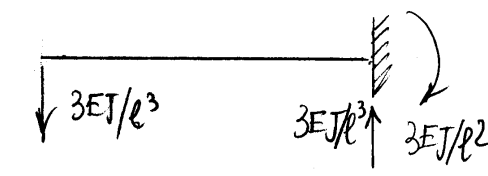
$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 & -6l & 6l \\ 2l^2 & 4l^2 & -6l & 6l \\ -6l & -6l & 12 & -12 \\ 6l & 6l & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix}.$$

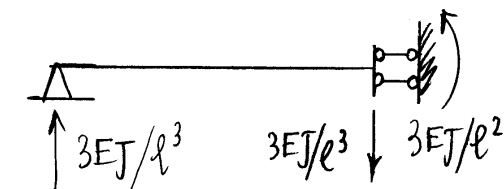
10.3.1.2 Matrice di rigidezza di una trave inflessa nella quale una rotazione di nodo non è vincolata



Generazione delle colonne della matrice della rigidezza dell'asta:

$$\begin{cases} \varphi_B = 1 \\ \eta_A = \eta_B = 0 \end{cases}$$


$$\begin{cases} \eta_A = 1 \\ \varphi_B = \eta_B = 0 \end{cases}$$


$$\begin{cases} \eta_B = 1 \\ \varphi_B = \eta_A = 0 \end{cases}$$


Si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} M_B \\ T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & -3l & 3l \\ -3l & 3 & -3 \\ 3l & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix}$$

10.3.2 Matrici di rigidezza delle singole travi e loro assemblaggio

Incidenze aste tipo 1

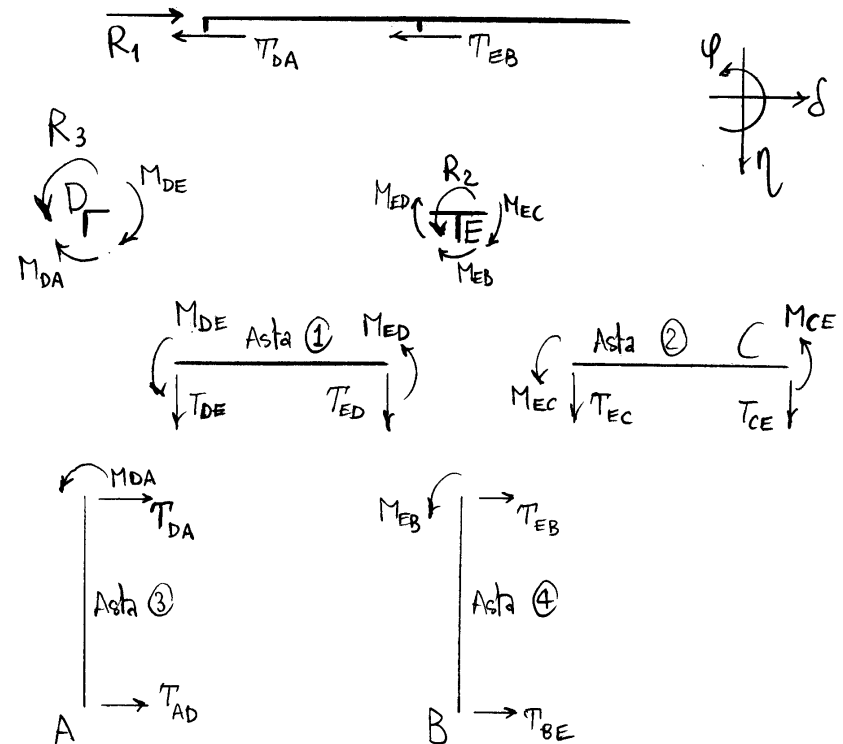
	φ_A	φ_B	η_A	η_B
Asta 1	u_3	u_2	0	0
Asta 2	u_2	0	0	0

Incidenze aste tipo 2

	φ_B	η_A	η_B
Asta 3	u_3	0	u_1
Asta 4	u_2	0	u_1

Matrice Asta ① ($\eta_D = \eta_E = 0$, $\varphi_D = u_3$, $\varphi_E = u_2$)

$$\begin{Bmatrix} M_{DE} \\ M_{ED} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$



Matrice Asta ② ($\varphi_C = \eta_E = \eta_C = 0$, $\varphi_E = u_2$)

$$\begin{Bmatrix} M_{EC} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \end{Bmatrix}.$$

Matrice Asta ③ ($\delta_A = 0, \varphi_D = u_3, \delta_D = u_1$)

$$\begin{Bmatrix} M_{DA} \\ T_{DA} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_1 \end{Bmatrix}.$$

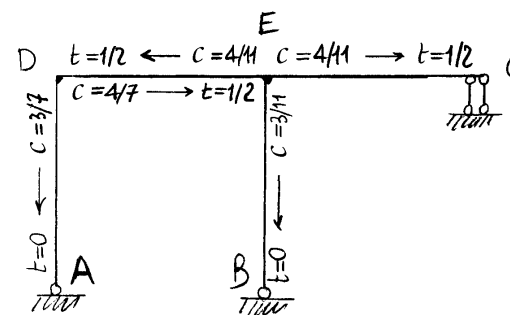
Matrice Asta ④ ($\delta_B = 0, \varphi_E = u_2, \delta_E = u_1$)

$$\begin{Bmatrix} M_{EB} \\ T_{EB} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}.$$

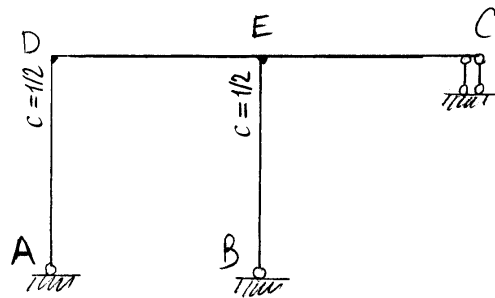
Matrice assemblata:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{DA} + T_{EB} \\ M_{ED} + M_{EC} + M_{EB} \\ M_{DA} + M_{DE} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3+3 & 3l & 3l \\ 3l & 4l^2+4l^2+3l^2 & 2l^2 \\ 3l & 2l^2 & 4l^2+3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

10.3.3 Metodo iterativo di Cross

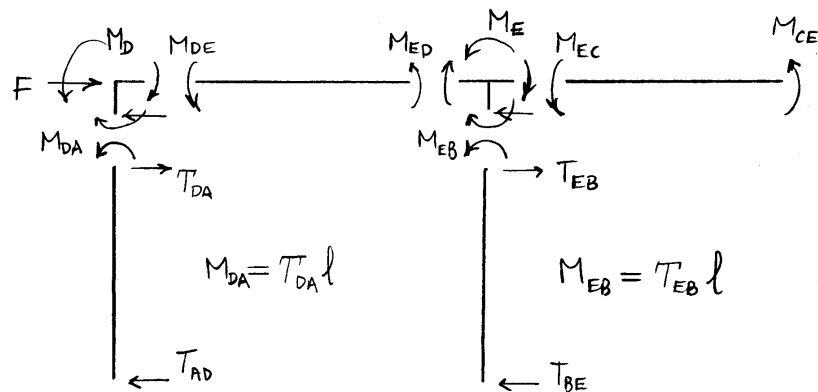


Nodo	Rigidezza alla rotazione (a meno di EJ/l)	Coefficiente di ripartizione	Coefficiente di trasmissione del momento
①	$k_{DA} = 3$ $k_{DE} = 4$ $k_D = 7$	$c_{DA} = 3/7$ $c_{DE} = 4/7$	$t_{DA} = 0$ $t_{DE} = 1/2$
②	$k_{ED} = 4$ $k_{EC} = 4$ $k_{EB} = 3$ $k_E = 11$	$c_{ED} = 4/11$ $c_{EC} = 4/11$ $c_{EB} = 3/11$	$t_{ED} = 1/2$ $t_{EC} = 1/2$ $t_{EB} = 0$

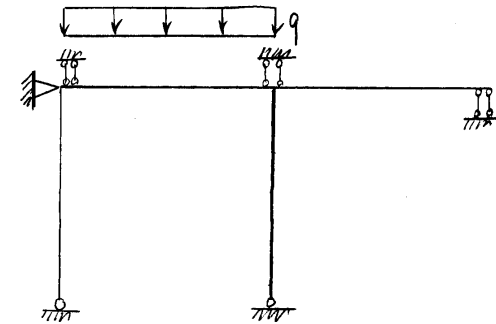


Travata	Rigidità alla traslazione (a meno di EJ/l^3)	Coefficiente di ripartizione della forza	Coefficiente di trasformazione taglio $\rightarrow$ momento
DEC	$k_{DA} = 3$ $k_{EB} = 3$ <u>$k_{DEC} = 6$</u>	$c_{DA} = 1/2$ $c_{EB} = 1/2$	l l

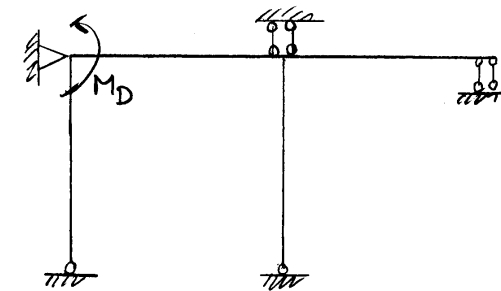
Convenzioni di segno



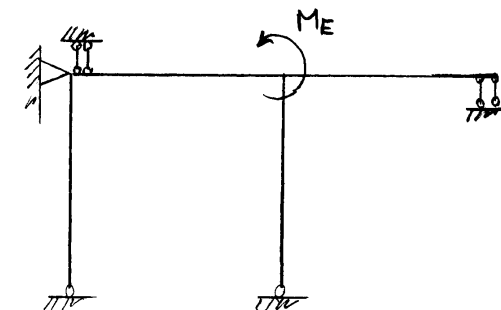
Momenti di incastro perfetto

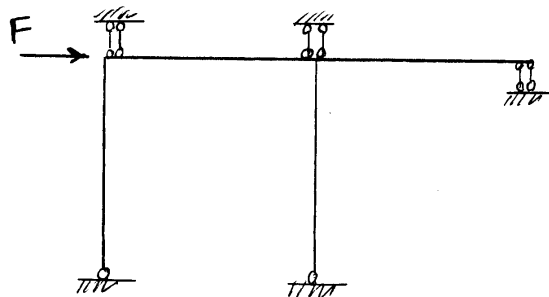
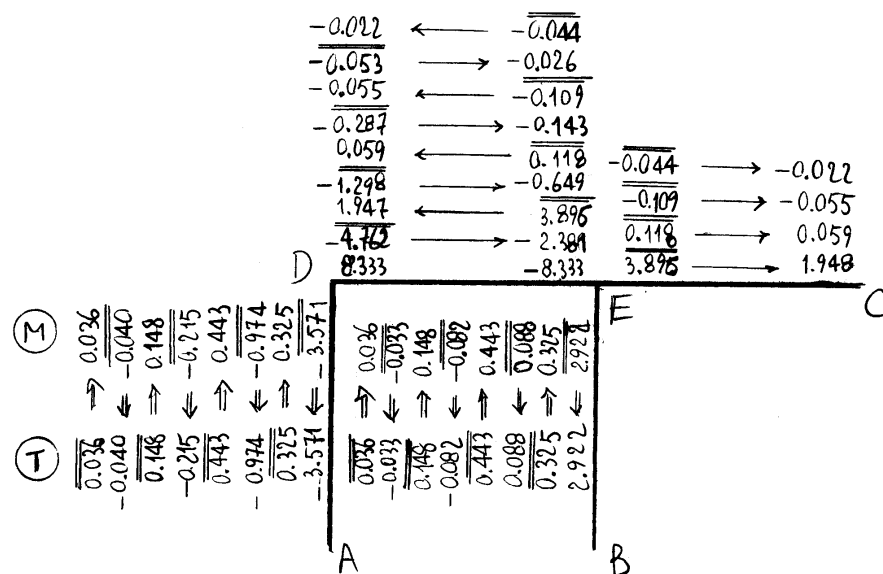


Equilibrio nodo D



Equilibrio nodo E



Equilibrio travata DECIterazioni

0) Momenti di incastro perfetto

1) Equilibrio nodo D $M_D = -8.333$ 2) Equilibrio nodo E $M_E = 10.714$ 3) Equilibrio travata DEC $F = 0.649$ 4) Equilibrio nodo D $M_D = -2.272$ 5) Equilibrio nodo E $M_E = 0.324$ 6) Equilibrio travata DEC $F = 0.886$ 7) Equilibrio nodo D $M_D = -0.502$ 8) Equilibrio nodo E $M_E = -0.300$ 9) Equilibrio travata DEC $F = 0.297$ 10) Equilibrio nodo D $M_D = -0.093$ 11) Equilibrio nodo E $M_E = -0.122$ 12) Equilibrio travata DEC $F = 0.073$ Valori iteratiValori esatti

$$M_{DA} = -3.848 \quad (M_{DA} = -3.846)$$

$$M_{DE} = 3.862 \quad (M_{DE} = 3.846)$$

$$M_{ED} = -7.671 \quad (M_{ED} = -7.692)$$

$$M_{EB} = 3.847 \quad (M_{EB} = 3.846)$$

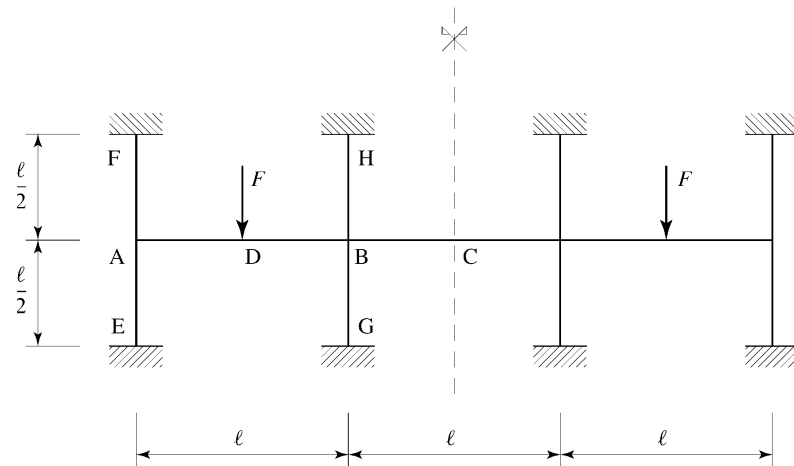
$$M_{EC} = 3.861 \quad (M_{EC} = 3.846)$$

$$M_{CE} = 1.930 \quad (M_{CE} = 1.923)$$

Momenti a meno di $ql^2/100$, tagli a meno di $ql/100$

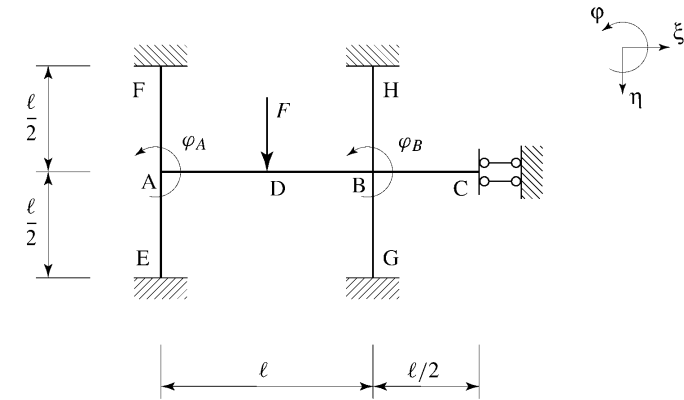
10.4 Esercizi

10.4.1 Telaio simmetrico soggetto ad un carico concentrato

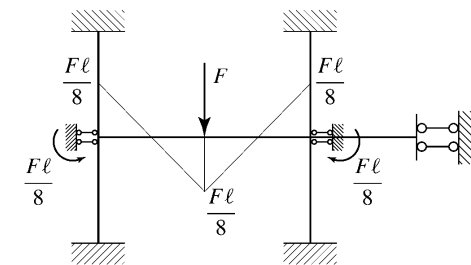


- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Calcolare lo spostamento del punto D di applicazione della forza concentrata e l'energia elastica di deformazione.

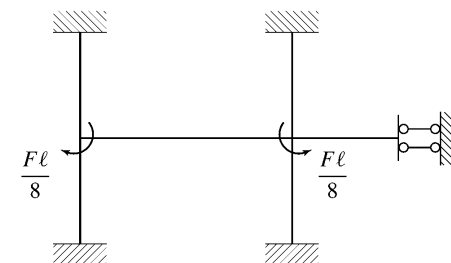
Schema equivalente



Incastri perfetti

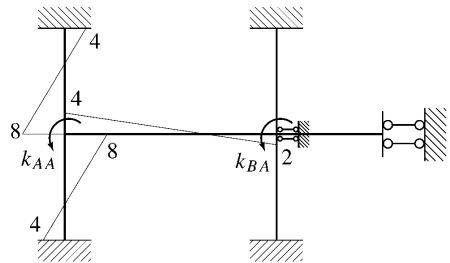


Reazioni cambiate di segno



$$\begin{Bmatrix} \mathcal{M}_A \\ \mathcal{M}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix}$$

1^a colonna matrice di rigidezza

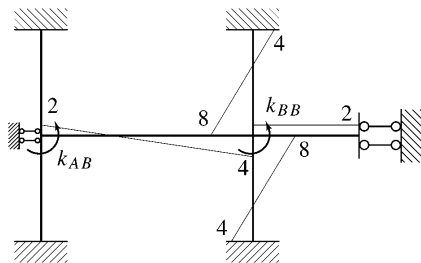


$$\begin{aligned} \varphi_A &= 1 \\ \varphi_B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{AA} &= \frac{20EJ}{\ell} \\ k_{BA} &= \frac{2EJ}{\ell} \end{aligned}$$

Rigidezze alla rotazione a meno di $\frac{EJ}{\ell}$

2^a colonna matrice di rigidezza



$$\begin{aligned} \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{BB} &= \frac{22EJ}{\ell} \\ k_{AB} &= \frac{2EJ}{\ell} \end{aligned}$$

Rigidezze alla rotazione a meno di $\frac{EJ}{\ell}$

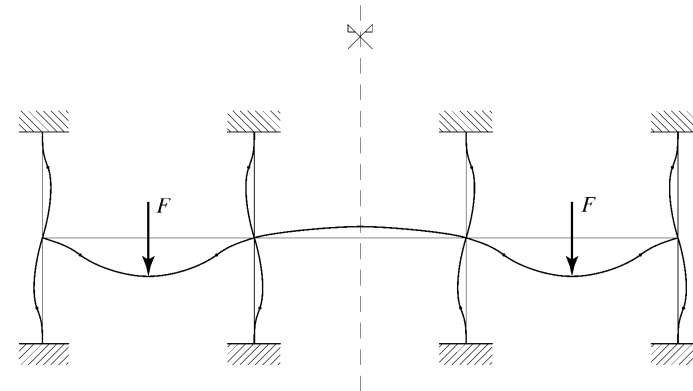
Sistema risolvete:

$$\frac{EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix} = \frac{F\ell}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

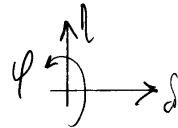
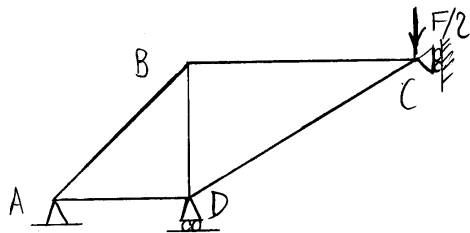
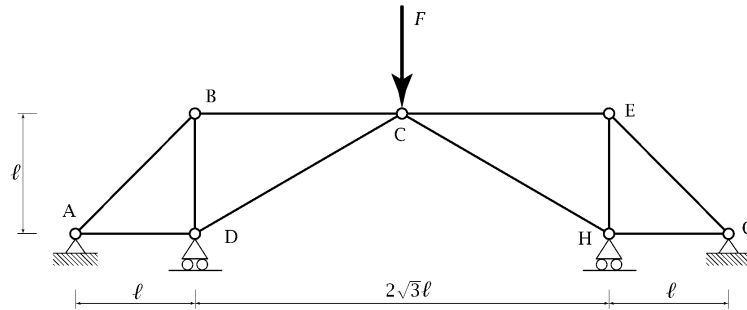
Soluzione:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\frac{3}{436} \frac{F\ell^2}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{11}{4 \times 436} \frac{F\ell^2}{EJ} \end{aligned}$$

Deformata:



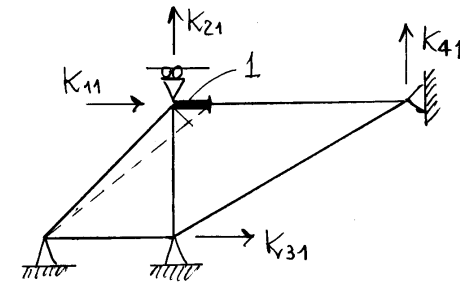
10.4.2 Struttura reticolare iperstatica simmetrica



Incognite : $\delta_B, \eta_B, \delta_D, \eta_C$

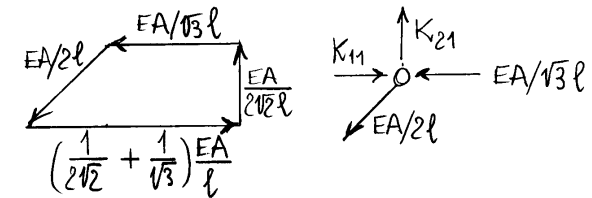
Prima colonna della matrice di rigidezza

$$\delta_B = 1 \quad \eta_B = \delta_D = \eta_C = 0$$



$$-\frac{N_{BC}(\sqrt{3}l)}{EA} = 1 \Rightarrow N_{BC} = -\frac{EA}{\sqrt{3}l}$$

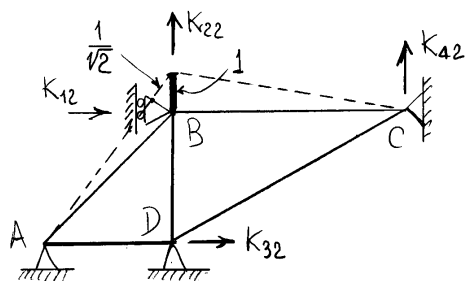
$$\frac{N_{AB}(\sqrt{2}l)}{EA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_{AB} = \frac{EA}{2l}$$



$$\begin{cases} K_{11} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{EA}{l} \\ K_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \\ K_{31} = K_{41} = 0 \end{cases}$$

Seconda colonna della matrice di rigidezza

$$\eta_B = 1 \quad \delta_B = \delta_D = \eta_C = 0$$



$$N_{BD} = \frac{EA}{l}$$

$$N_{AB} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l}$$

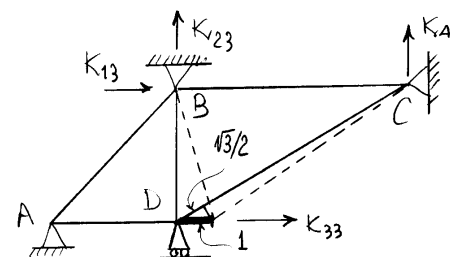
Equilibrio nodo B

$$\frac{EA}{2l} \uparrow + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{EA}{l} \downarrow - \frac{EA}{2\sqrt{2}l} \downarrow = 0$$

$$\begin{cases} K_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \\ K_{22} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{EA}{l} \\ K_{32} = K_{42} = 0 \end{cases}$$

Terza colonna della matrice di rigidezza

$$\delta_D = 1 \quad \delta_B = \eta_B = \eta_C = 0$$



$$N_{AD} = \frac{EA}{l}$$

Nodo D

$$\frac{\sqrt{3}EA}{8l} \leftarrow \frac{(1 + \frac{3}{8})EA}{l} \rightarrow \frac{\sqrt{3}EA}{4l}$$

$$N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}EA}{4l}$$

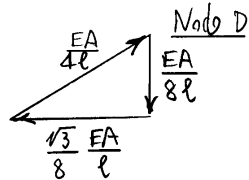
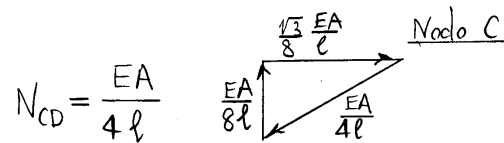
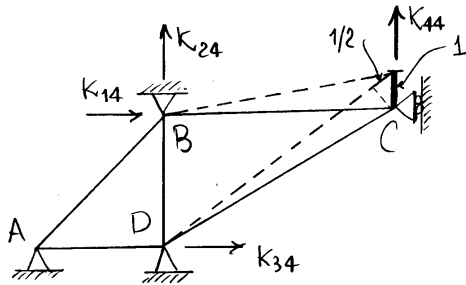
Nodo C

$$\frac{\sqrt{3}EA}{8l} \leftarrow \frac{3EA}{8l} \rightarrow \frac{\sqrt{3}EA}{4l}$$

$$\begin{cases} K_{13} = K_{23} = 0 \\ K_{33} = \frac{11}{8} \frac{EA}{l} \\ K_{43} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \end{cases}$$

Quarta colonna della matrice di rigidezza

$$\eta_c = 1 \quad \delta_B = \eta_B = \delta_D = 0$$



$$\begin{cases} K_{14} = K_{24} = 0 \\ K_{34} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \\ K_{44} = \frac{1}{8} \frac{EA}{l} \end{cases}$$

Risulta:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_B \\ \eta_B \\ \delta_D \\ \eta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \end{Bmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$\delta_B = \eta_B = 0,$$

$$\delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA},$$

$$\eta_c = -\frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}.$$

Le forze normali valgono infine:

$$N_{AD} = \frac{EA}{l} \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} F,$$

$$N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l} \delta_D + \frac{EA}{4l} \eta_c = -F.$$

