

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

Raccolta di esercizi

Corsi di Laurea in
Ingegneria Civile e Ambientale
Ingegneria Industriale
Ingegneria Navale

Indice

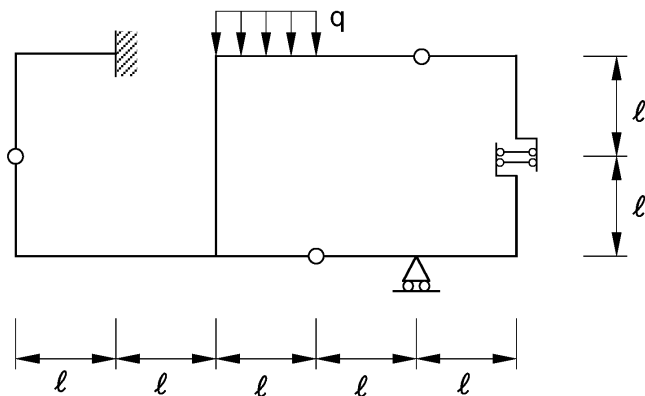
1 Esercizi su sistemi di travi isostatiche	1		
1.1 Esercizio 1	1		
1.2 Esercizio 2	2		
1.3 Esercizio 3	5		
1.4 Esercizio 4	7		
1.5 Esercizio 5	9		
1.6 Esercizio 6	10		
1.7 Esercizio 7	13		
1.8 Esercizi proposti	15		
2 Esercizi sulle sollecitazioni semplici	21		
2.1 Esercizio 8	21		
2.2 Esercizio 9	22		
2.3 Esercizio 10	23		
2.4 Esercizio 11	26		
2.5 Esercizio 12	29		
2.6 Esercizio 13	31		
2.7 Esercizio 14	33		
2.8 Esercizio 15	37		
2.9 Esercizi proposti	40		
3 Esercizi su sistemi di travi iperstatiche	43		
3.1 Esercizio 16	43		
3.2 Esercizio 17	44		
3.3 Esercizio 18	46		
3.4 Esercizio 19	48		
3.5 Esercizio 20	49		
3.6 Esercizio 21	51		
3.7 Esercizio 22	54		
3.8 Esercizio 23	57		
3.9 Esercizio 24	58		
		3.10 Esercizio 25	61
		3.11 Esercizio 26	62
		3.12 Esercizio 27	64
		3.13 Esercizio 28	67
		3.14 Esercizio 29	69
		3.15 Esercizio 30	72
		3.16 Esercizi proposti	74
		4 Esercizi sull'analisi della tensione e della deformazione	79
		4.1 Esercizio 31	79
		4.2 Esercizio 32	80
		4.3 Esercizio 33	85
		4.4 Esercizio 34	88
		4.5 Esercizi proposti	94
		4.5.1 Esercizio 1	94
		4.5.2 Esercizio 2	94
		4.5.3 Esercizio 3	95
		5 Esercizi sui centri assoluti e relativi	97
		5.1 Esercizio 35	97
		5.2 Esercizio 36	97
		5.3 Esercizio 37	98
		5.4 Esercizio 38	99
		5.5 Esercizio 39	100
		5.6 Esercizio 40	101
		6 Esercizi sul metodo degli spostamenti	103
		6.1 Esercizio 41	103
		6.2 Esercizio 42	104
		6.3 Esercizio 43	105
		6.4 Esercizio 44	107
		6.5 Esercizio 45	111
		6.6 Esercizio 46	115
		6.7 Esercizio 47	117
		6.8 Esercizi proposti	119
		7 Esercizi sul lavoro di deformazione	123
		7.1 Esercizio 48	123
		7.2 Esercizio 49	124
		7.3 Esercizio 50	126

7.4 Esercizi proposti	127
8 Esercizi di riepilogo	129
8.1 Esercizio 51	129
8.2 Esercizi proposti	134

Capitolo 1

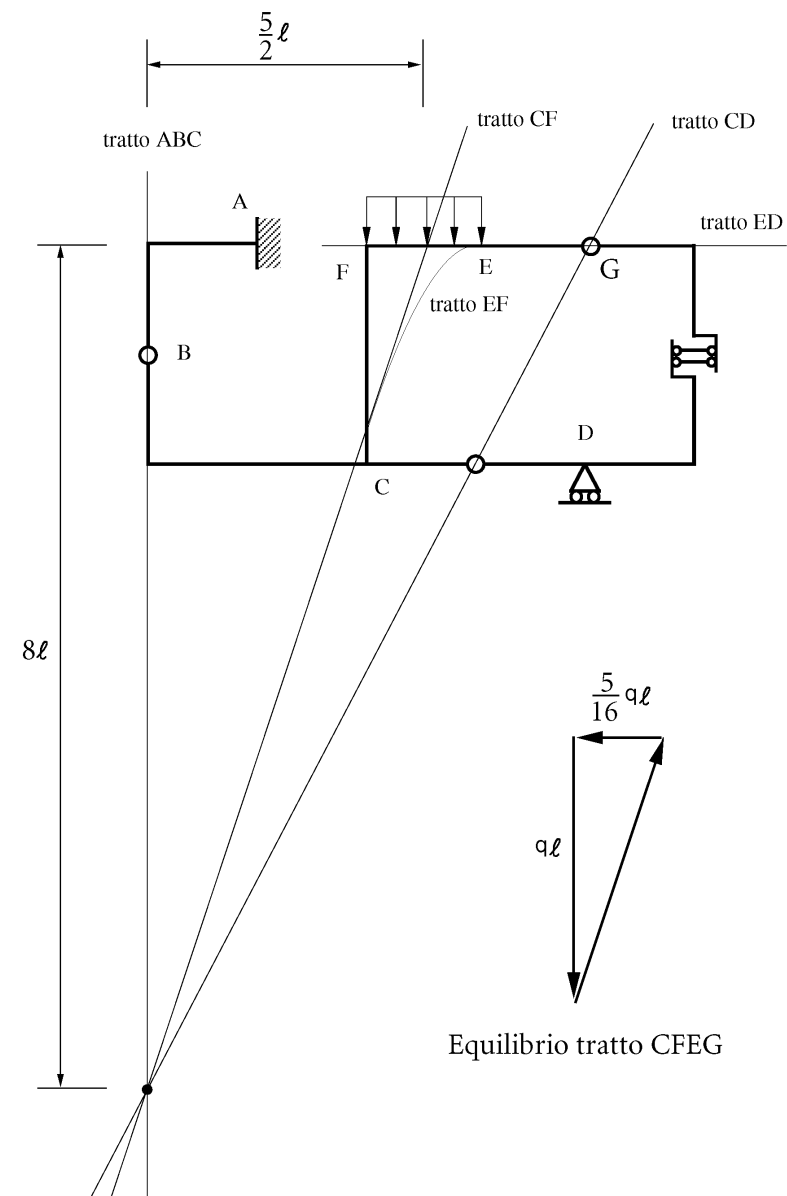
Esercizi su sistemi di travi isostatiche

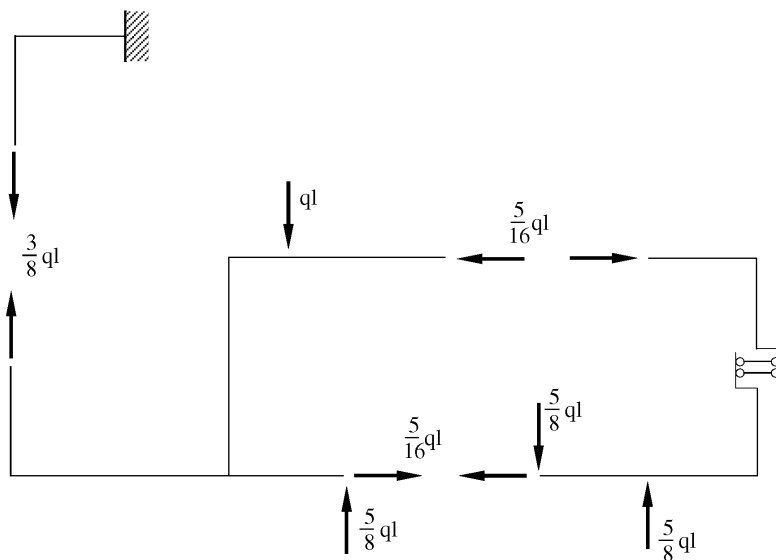
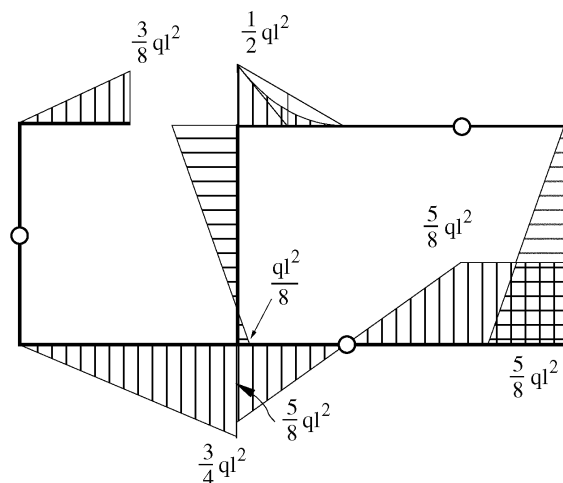
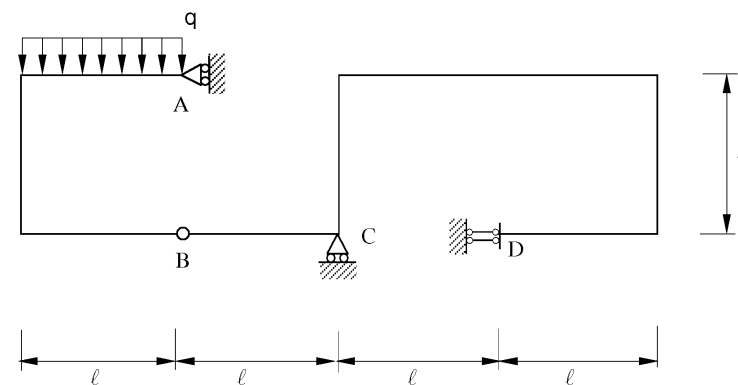
1.1 Esercizio 1



- Verificare l'isostaticità della struttura
- Definire la curva delle pressioni
- Determinare le reazioni interne ed esterne
- Tracciare il diagramma del momento flettente

curva delle pressioni



Reazioni interne ed esterneDiagramma del momento flettente**1.2 Esercizio 2**

- Verificare l'isostaticità della struttura;
- Definire la curva delle pressioni;
- Determinare le reazioni interne ed esterne;
- Impostare formalmente il calcolo della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera B utilizzando il principio dei lavori virtuali, e disegnare e quotare i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo.

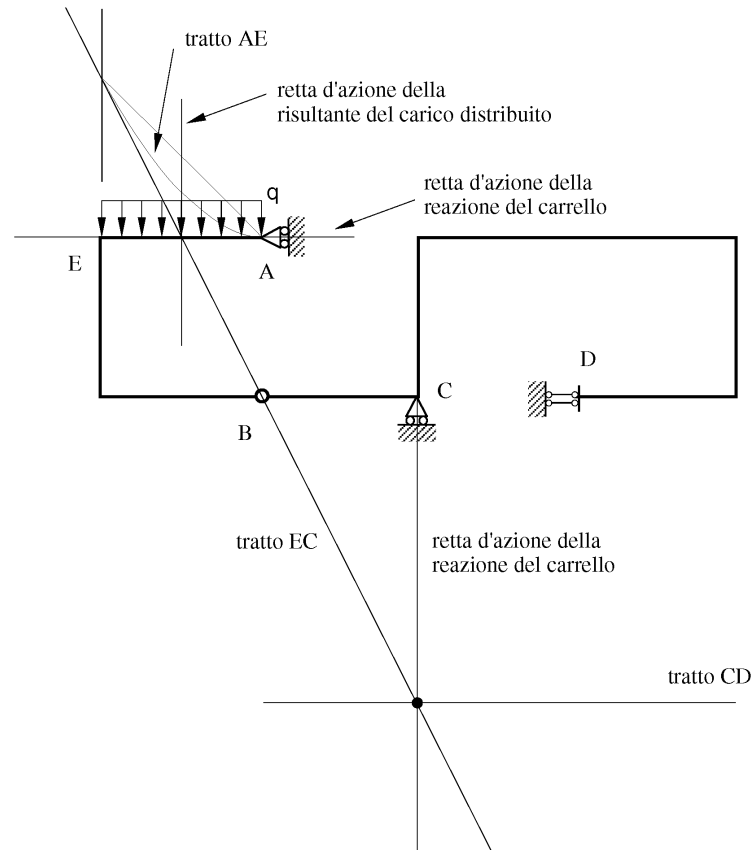
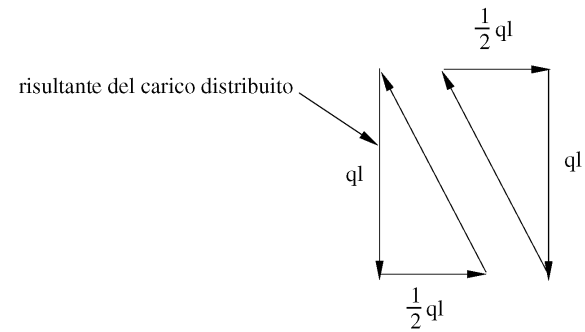
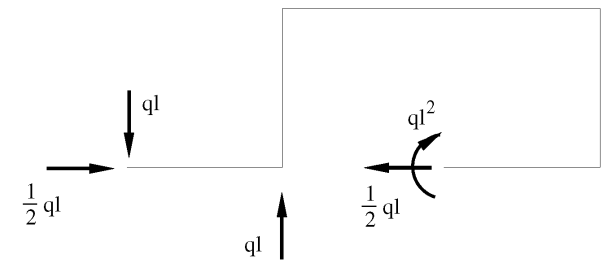
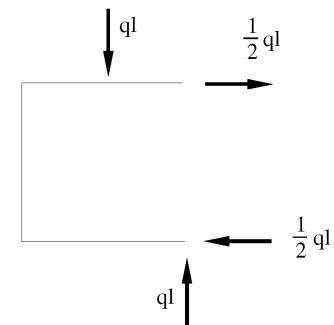
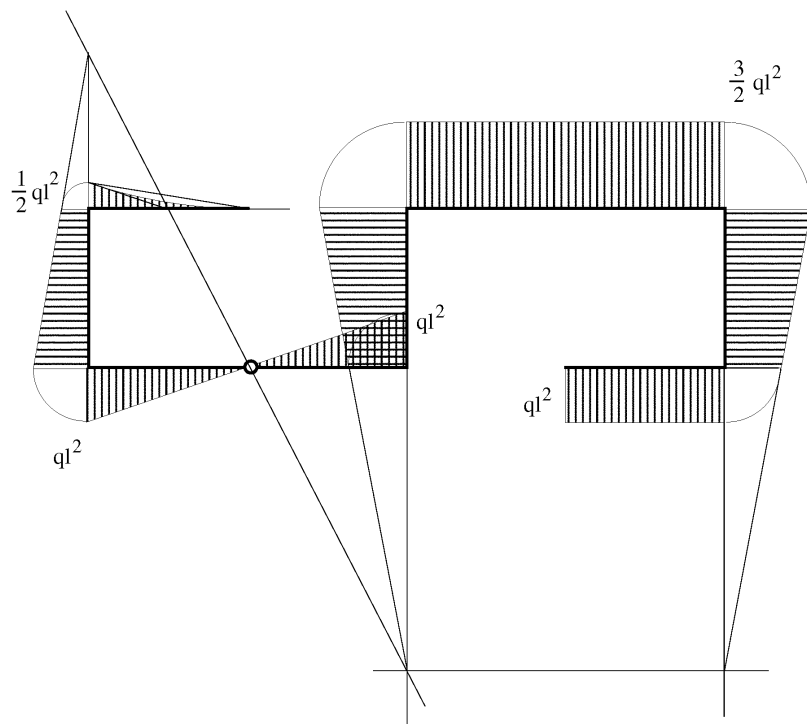
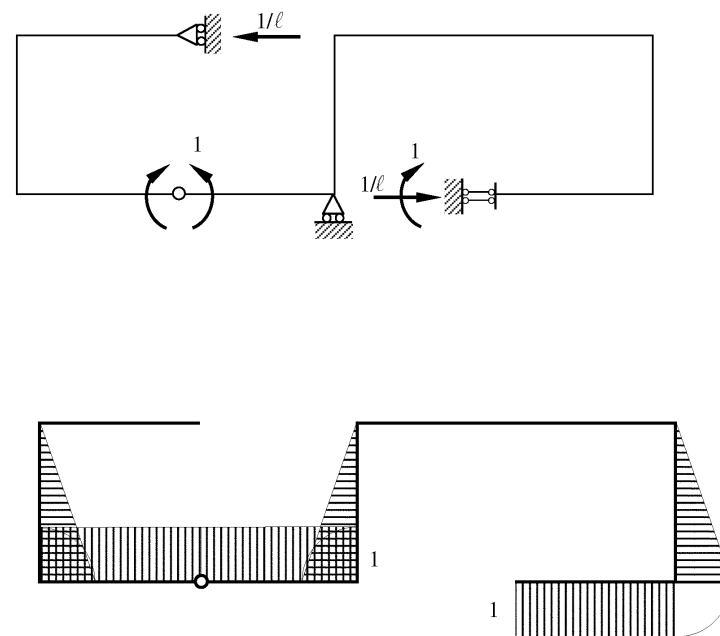
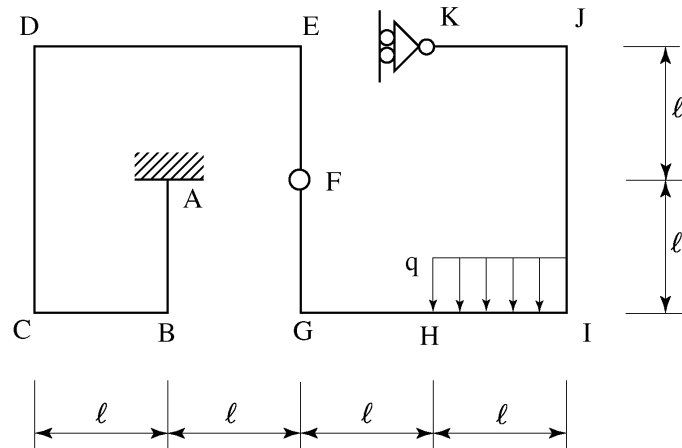
Curva delle pressioniPoligoni delle forzeReazioni esterne ed interne

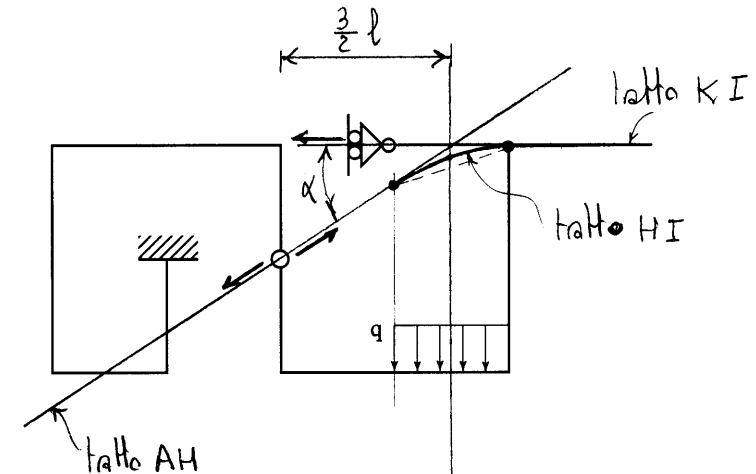
Diagramma del momentoSchema delle forze per il calcolo della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera B

1.3 Esercizio 3

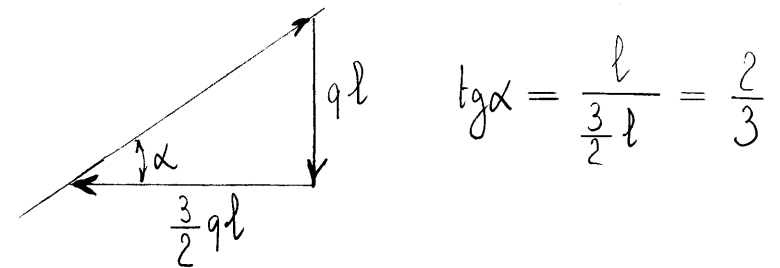


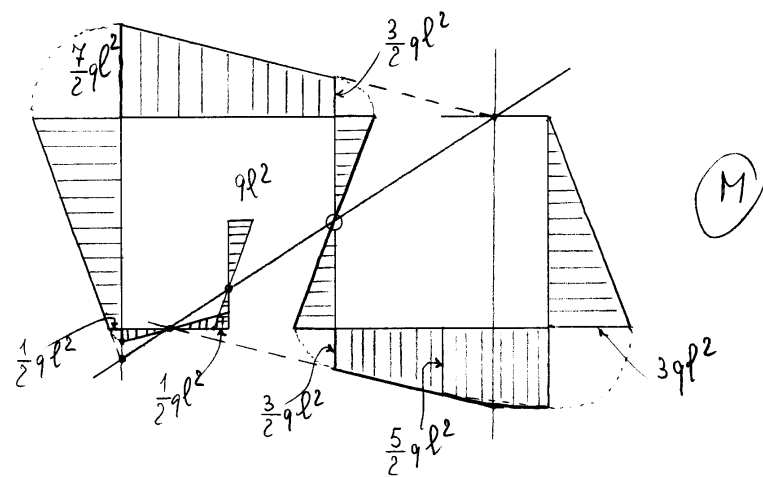
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare la curva delle pressioni;
- 3) Determinare graficamente le reazioni vincolari e quantificarle;
- 4) Tracciare il diagramma dei momenti facendo uso dei punti di nullo e quotarlo;
- 5) Tracciare i diagrammi quotati del taglio e della forza normale;
- 6) Impostare il calcolo dello spostamento del carrello facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo.

curva delle pressioni



Poligono delle forze





Sistema delle forze (sistema fittizio)

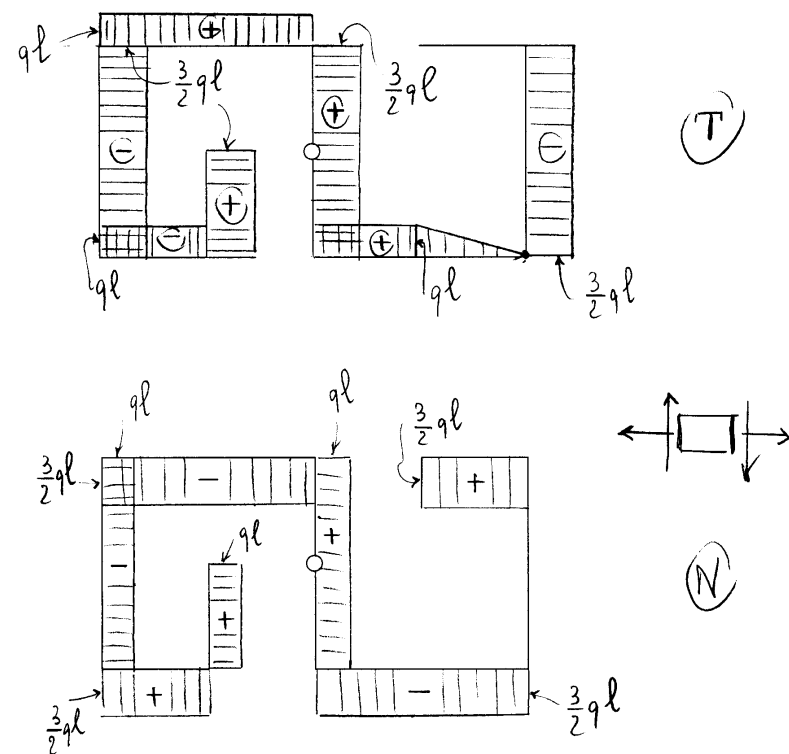
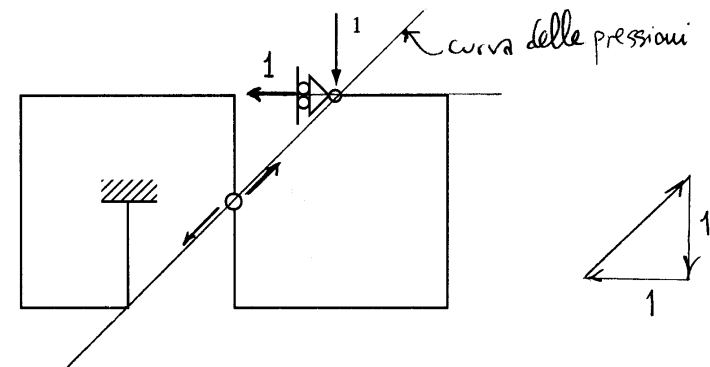
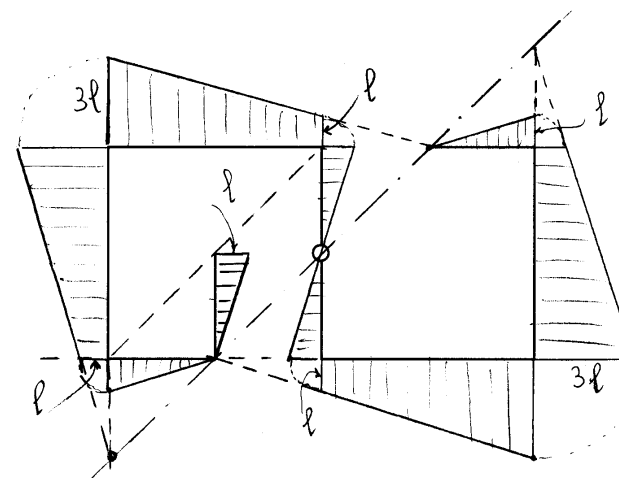
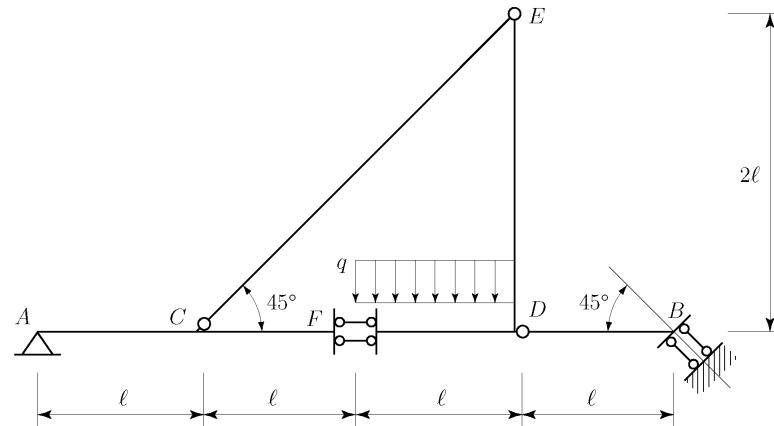


Diagramma del momento nel sistema delle forze

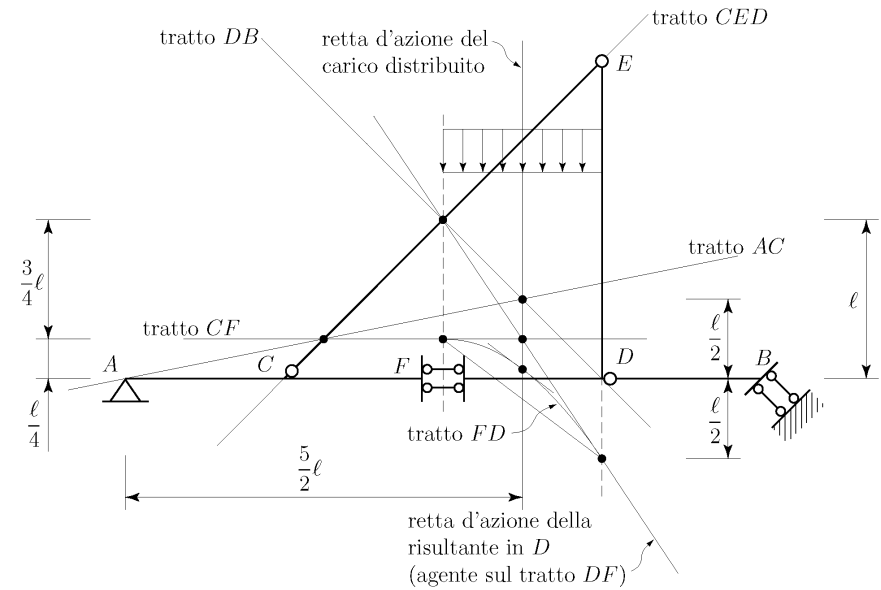


1.4 Esercizio 4

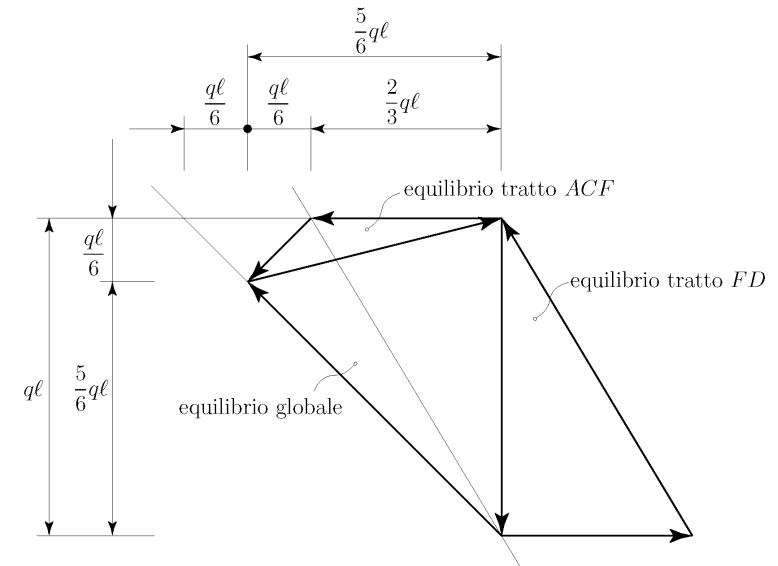


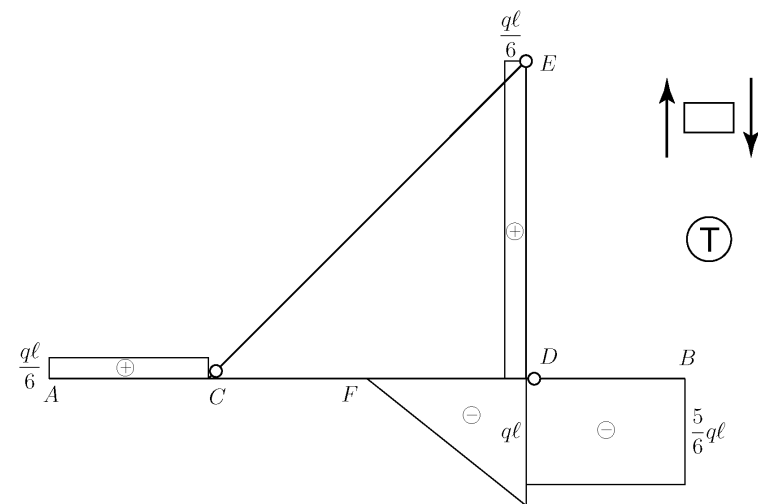
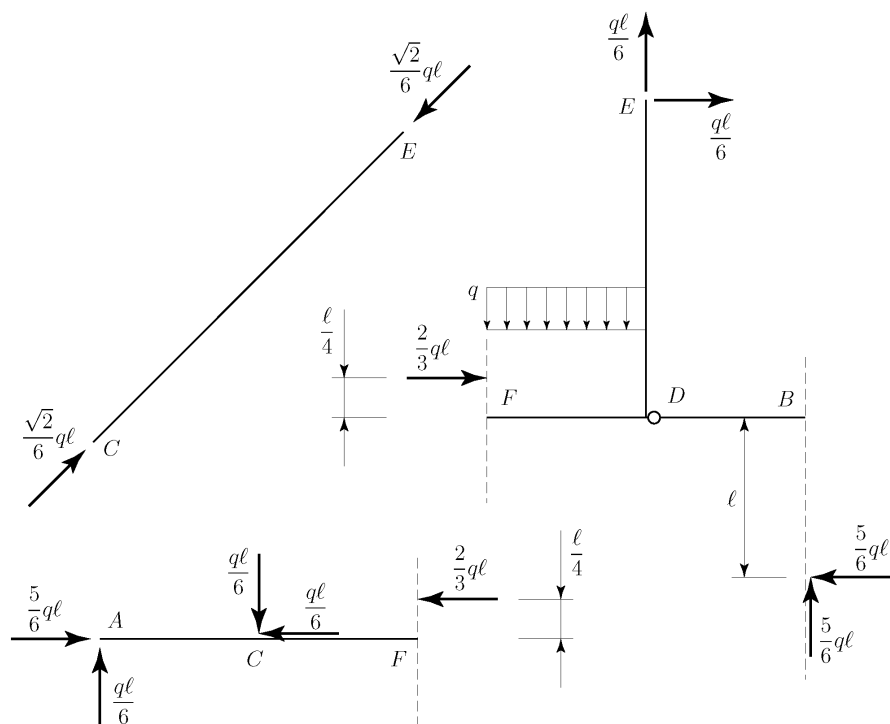
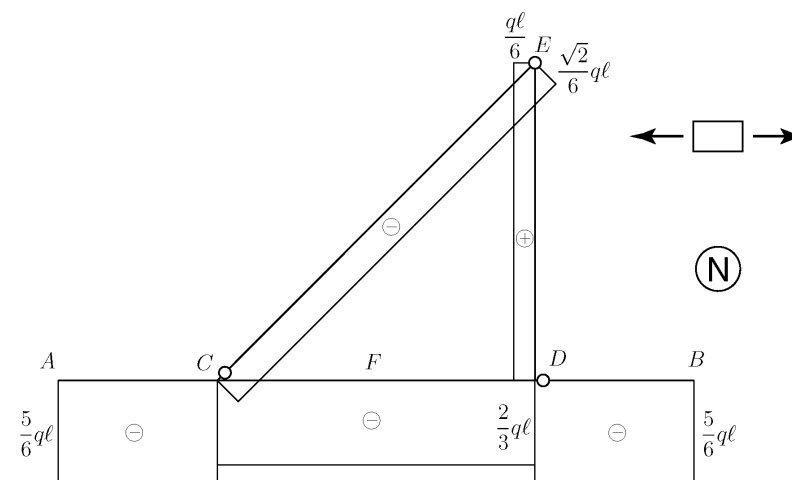
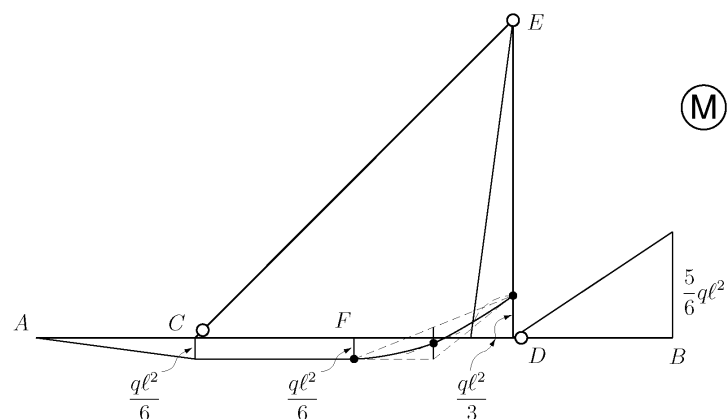
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 5) Determinare lo spostamento relativo (dovuto alla deformazione della struttura) in corrispondenza del doppio pendolo in F facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, nell'ipotesi che il pendolo CE sia indeformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioni

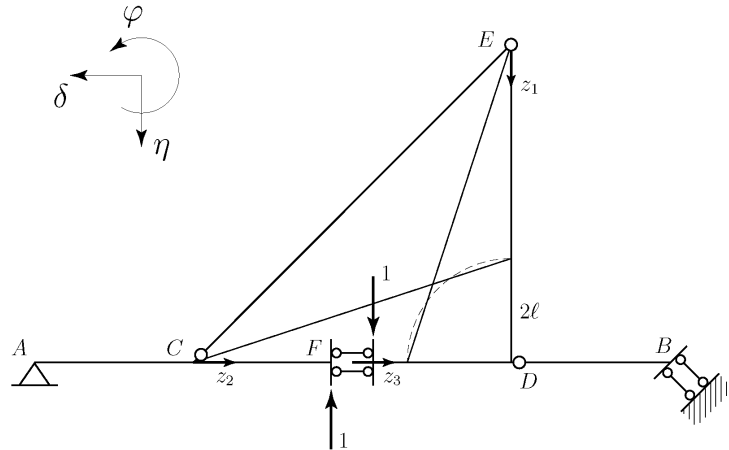


Poligoni delle forze



Reazioni esterne ed interneDiagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

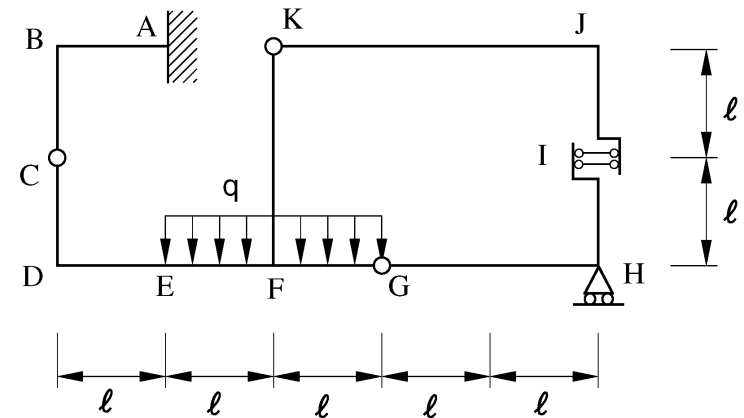
Calcolo dello spostamento relativo in F



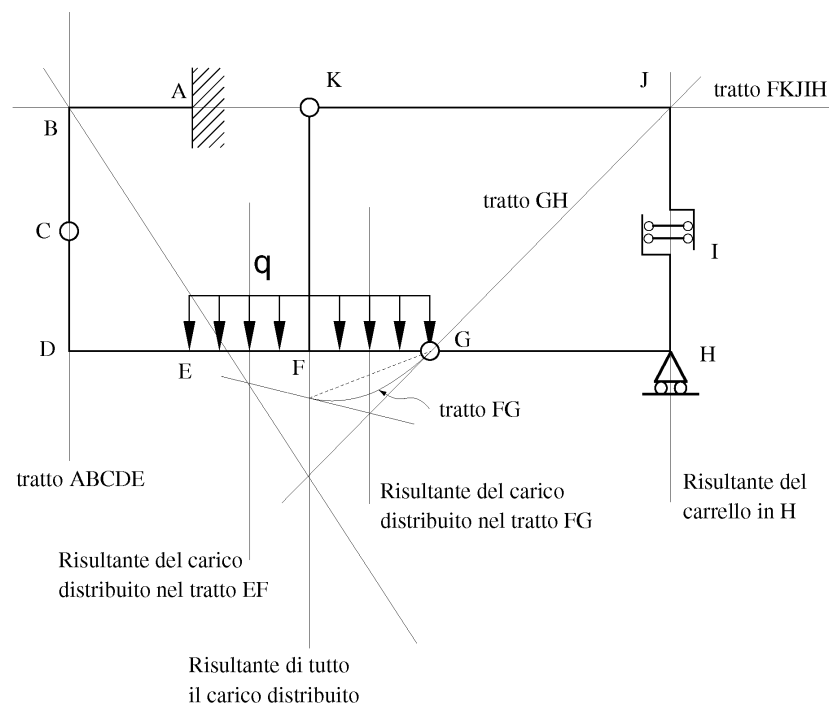
$$L_e = \eta_{FD} - \eta_{FC}$$

$$\begin{aligned} L_i &= \int_0^{2\ell} (z_1) \left(\frac{q\ell}{6} z_1 \right) \frac{dz_1}{EJ} - \int_0^\ell (z_2) \left(\frac{q\ell^2}{6} \right) \frac{dz_2}{EJ} \\ &\quad - \int_0^\ell (\ell + z_3) \left(\frac{q\ell^2}{6} - \frac{qz_3^2}{2} \right) \frac{dz_3}{EJ} \\ &= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \frac{q\ell^4}{EJ} = \frac{29}{72} \frac{q\ell^4}{EJ} \end{aligned}$$

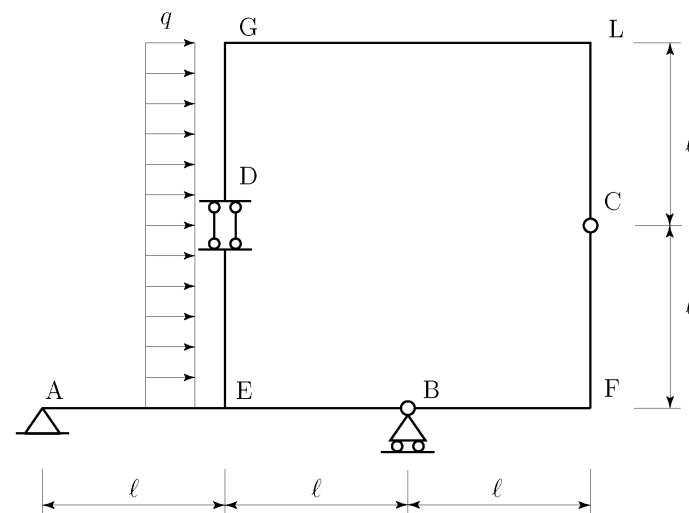
1.5 Esercizio 5



- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 4) Determinare lo spostamento relativo (dovuto alla deformazione della struttura) in corrispondenza del doppio pendolo in I facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

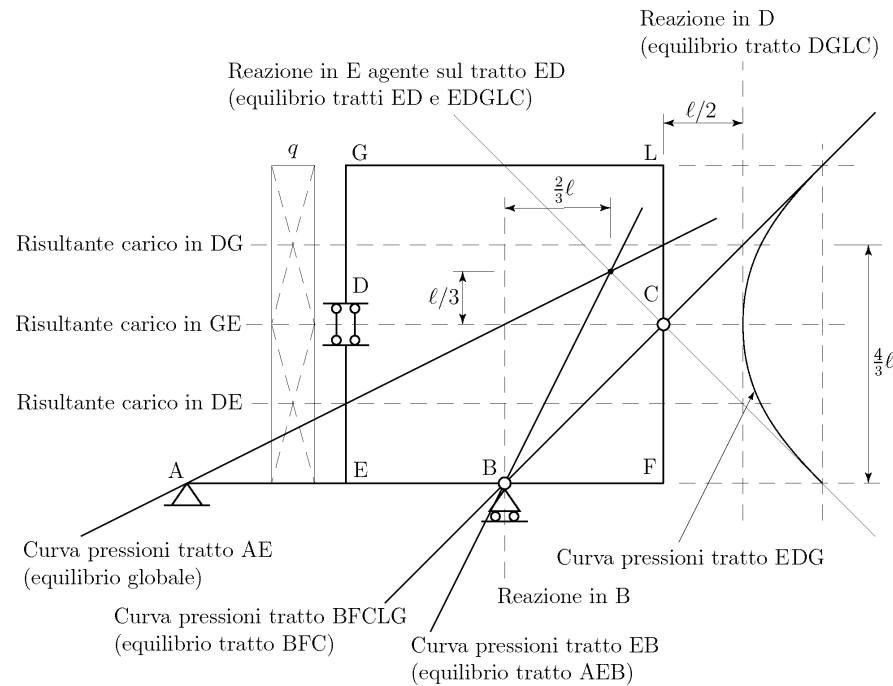
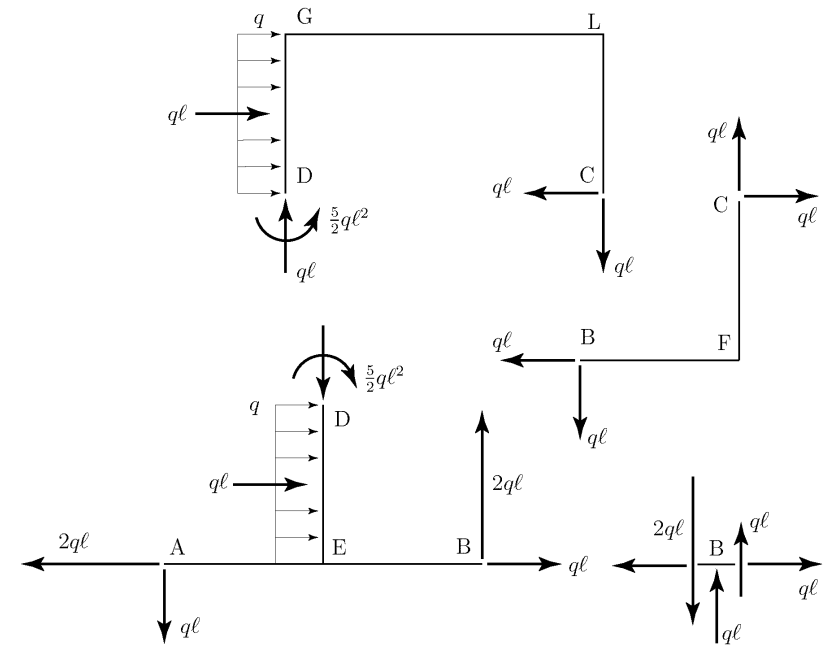
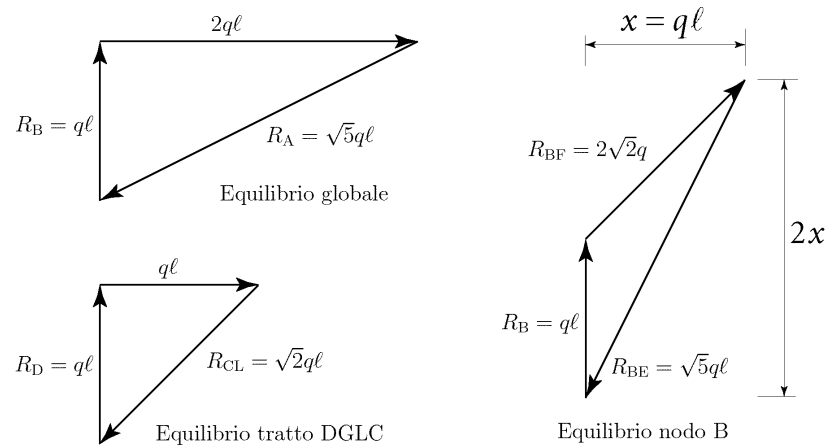
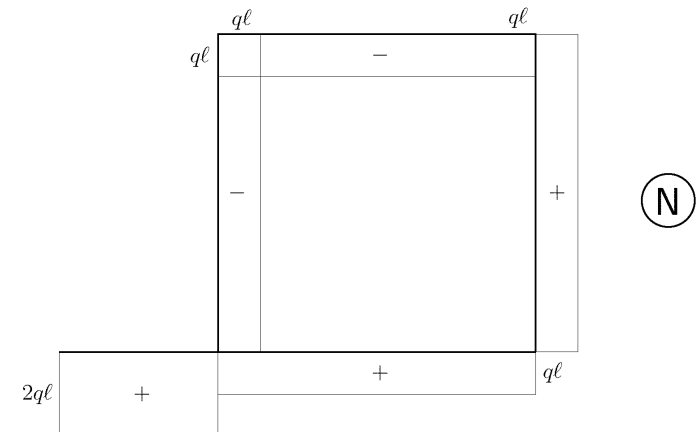
Curva delle pressioni

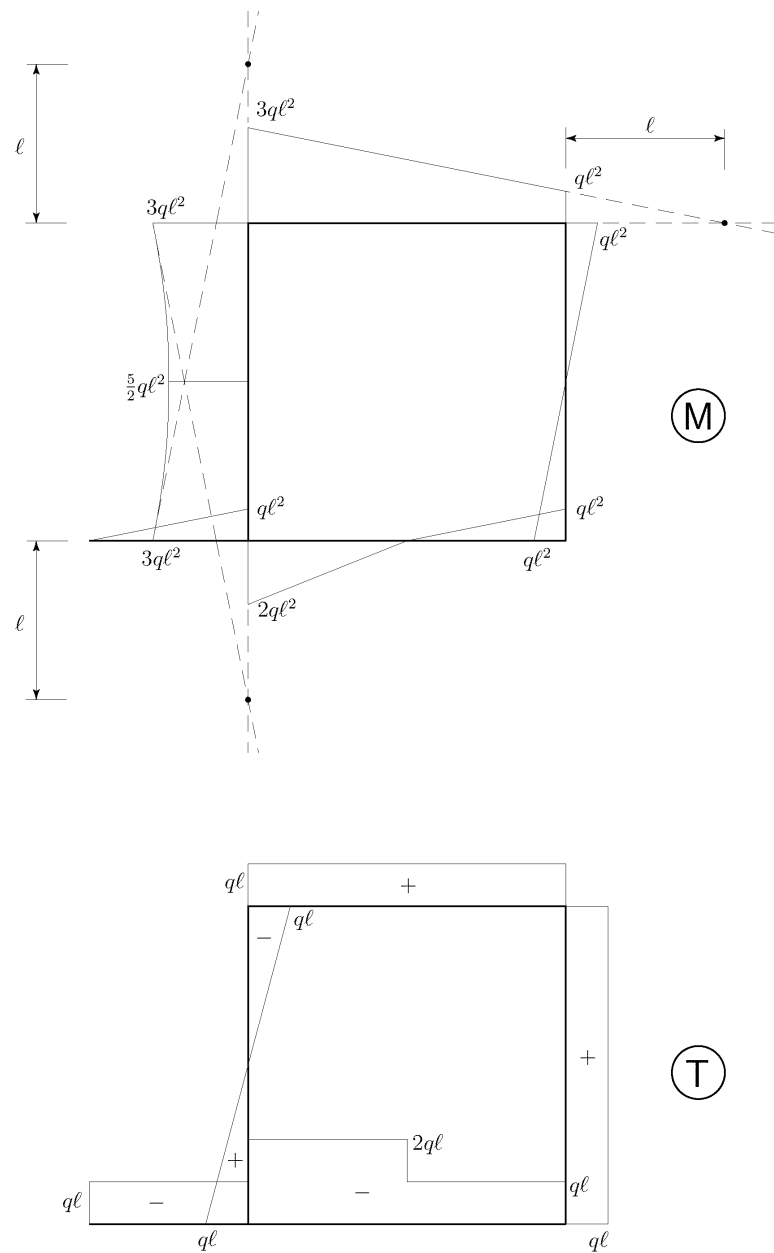
Nel tratto EF la curva delle pressioni degenera in un fascio di rette verticali

1.6 Esercizio 6

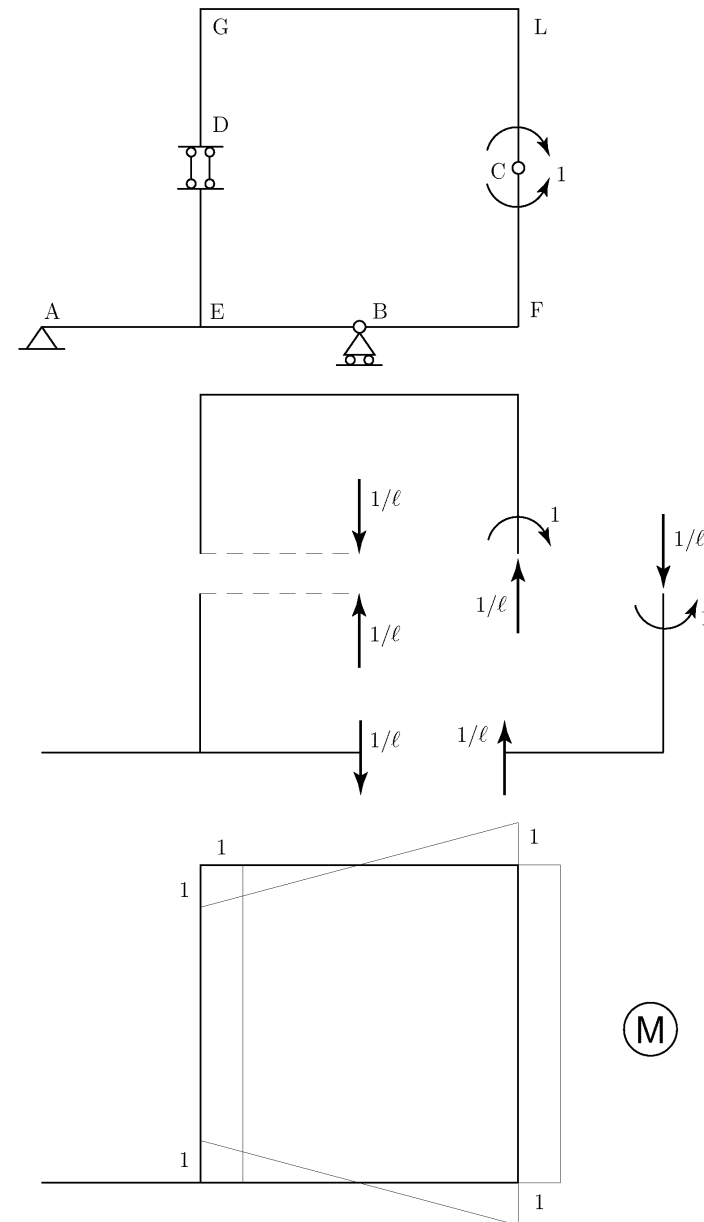
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico ripartito costante sul montante di sinistra:

- 1) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Disegnare la curva delle pressioni;
- 4) Impostare il calcolo della rotazione relativa in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando i diagrammi necessari a tal fine.

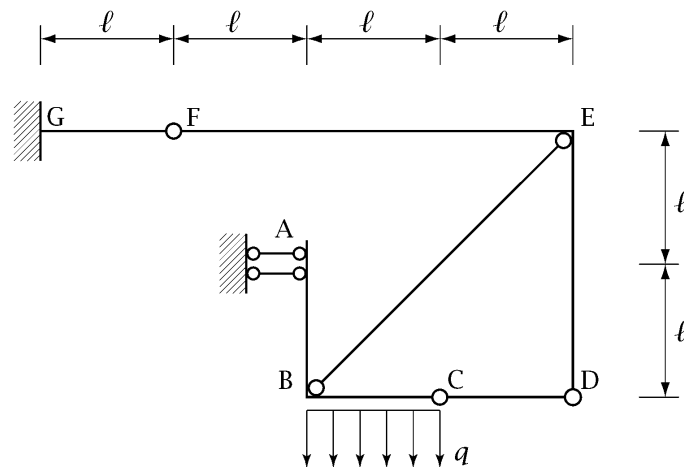
Curva delle pressioniReazioni esterne ed internePoligoni delle forzeDiagrammi delle caratteristiche della sollecitazione



Schema delle forze per il calcolo della rotazione relativa in C

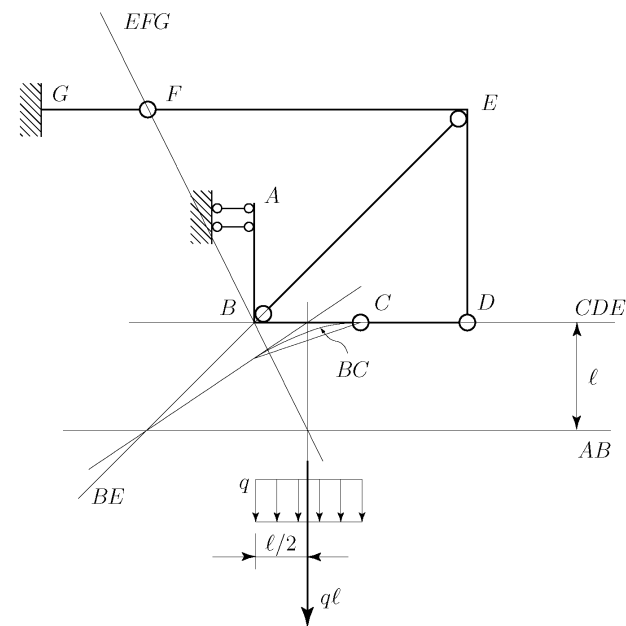
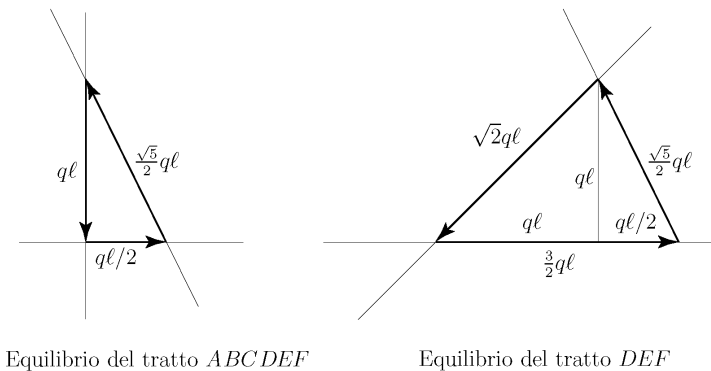


1.7 Esercizio 7

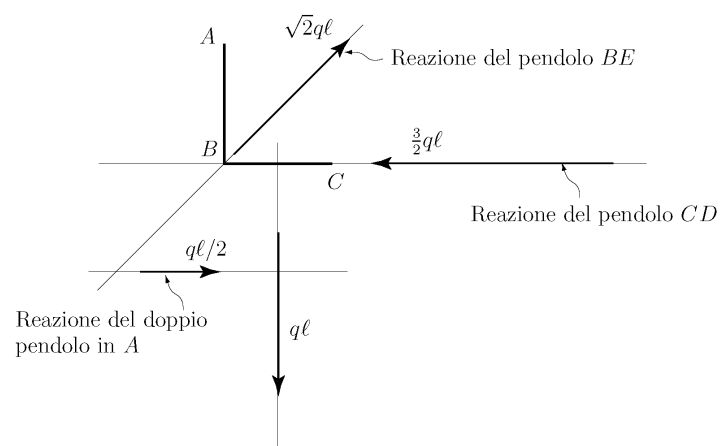
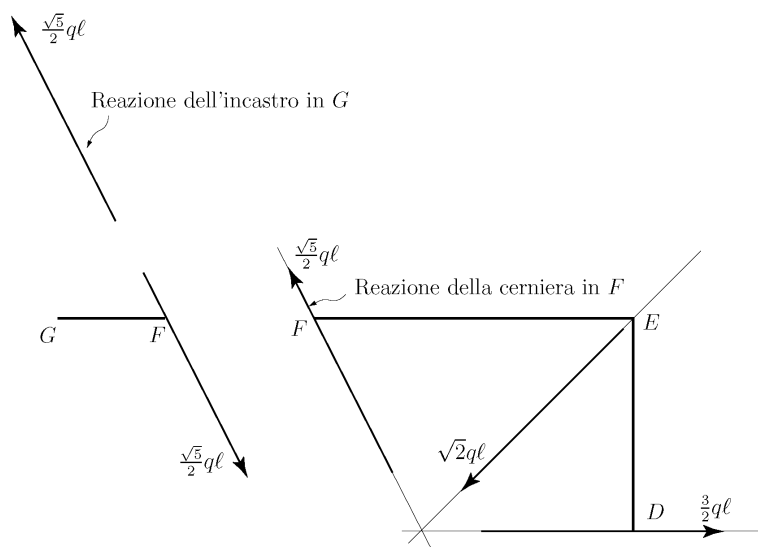


Data la struttura di figura, soggetta ad un carico ripartito uniformemente lungo il tratto BC:

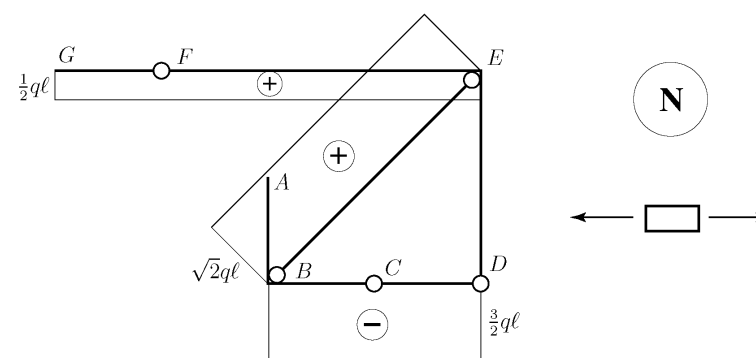
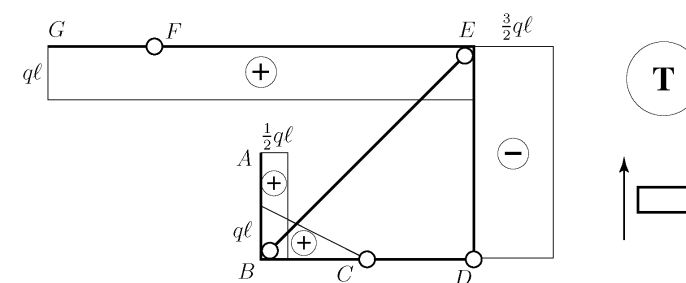
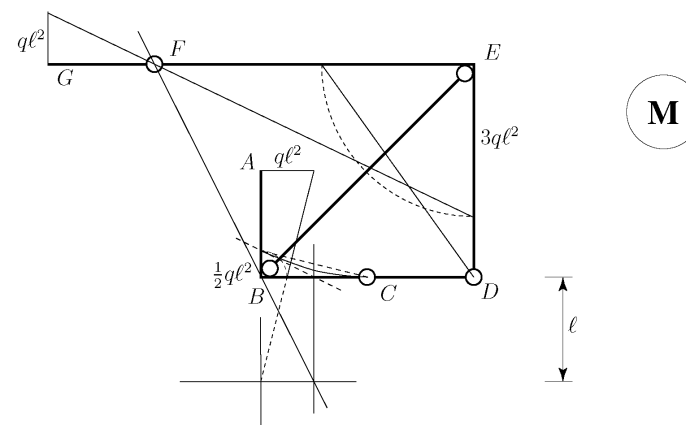
1. Verificare l'isostaticità della struttura
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Determinare la rotazione del pendolo BE (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili nell'ipotesi che il pendolo BE sia deformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.
5. Disegnare la curva delle pressioni.

Curva delle pressioniPoligoni delle forzeEquilibrio del tratto $ABCDEF$ Equilibrio del tratto DEF

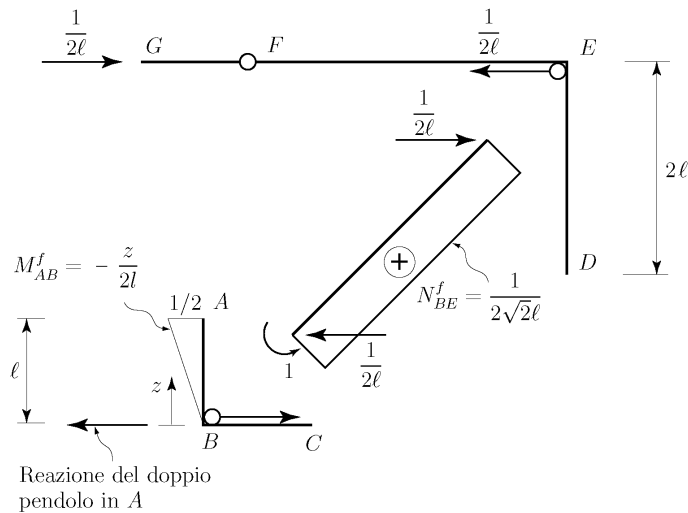
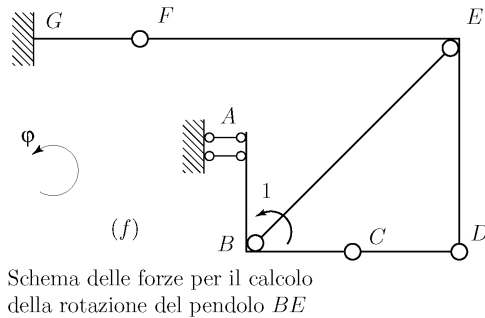
Reazioni esterne ed interne



Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

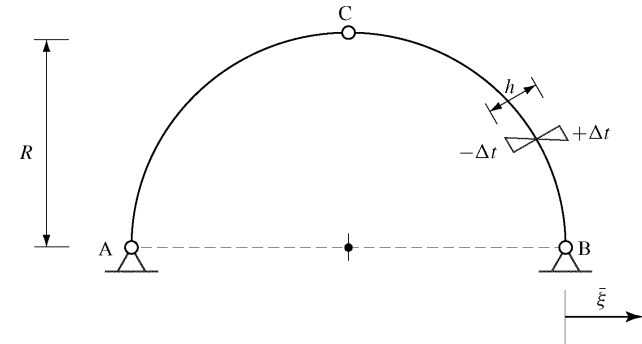


Calcolo della rotazione del pendolo BE



$$\varphi_{BE} = \frac{1}{EA} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\ell} \right) (\sqrt{2}q\ell)(2\sqrt{2}\ell) + \int_0^\ell \frac{1}{EJ} \left(-\frac{z}{2\ell} \right) \left[\frac{q\ell}{2} (z + \ell) \right] dz = \frac{\sqrt{2}q\ell}{EA} - \frac{5}{24} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

1.8 Esercizi proposti



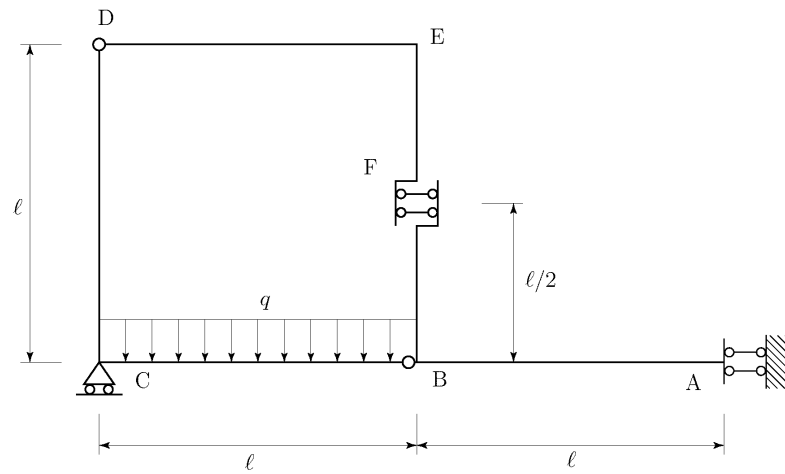
Dato l'arco circolare in figura, soggetto ad una distorsione termica nel tratto CB e ad un cedimento vincolare anelastico in B, calcolare la rotazione relativa in corrispondenza della cerniera C utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Nel seguito sono proposti dei sistemi di travi isostatiche senza che ne sia riportata la relativa soluzione.

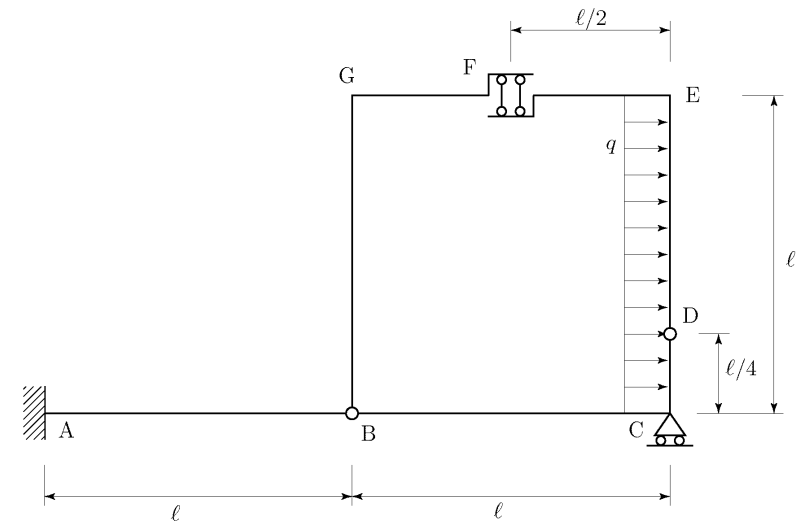
Le domande tipiche sono le seguenti:

- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale.

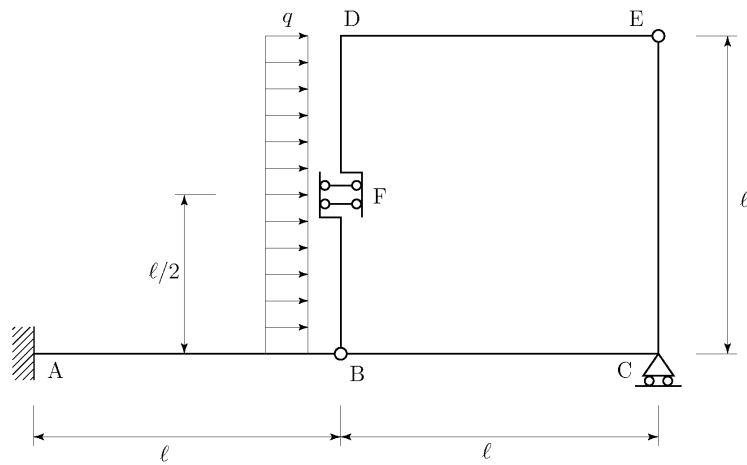
Inoltre a fianco di ogni schema è indicato lo spostamento, assoluto o relativo, di un nodo della struttura da calcolarsi utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



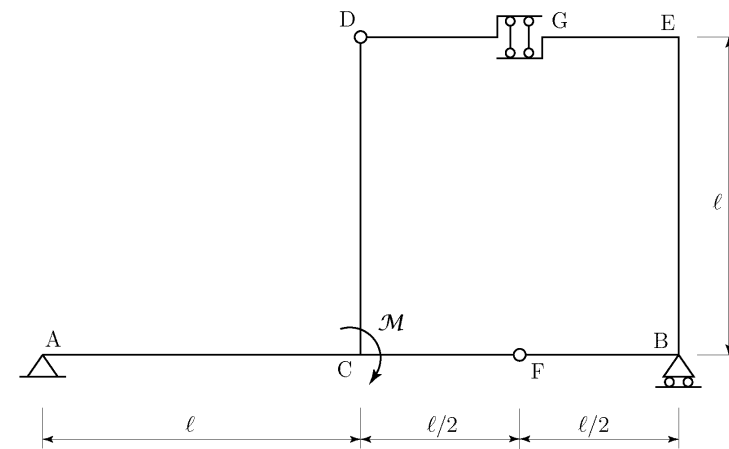
Calcolare lo spostamento del nodo A



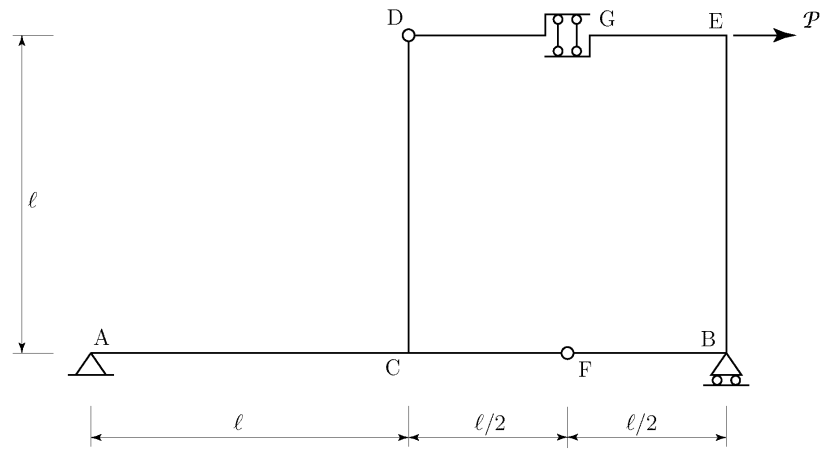
Calcolare la rotazione del nodo F



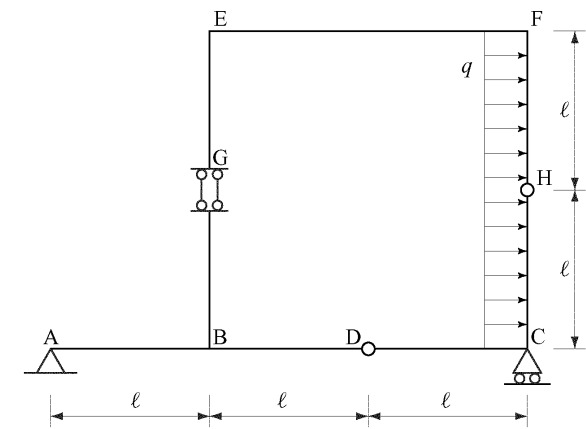
Calcolare la rotazione del nodo D



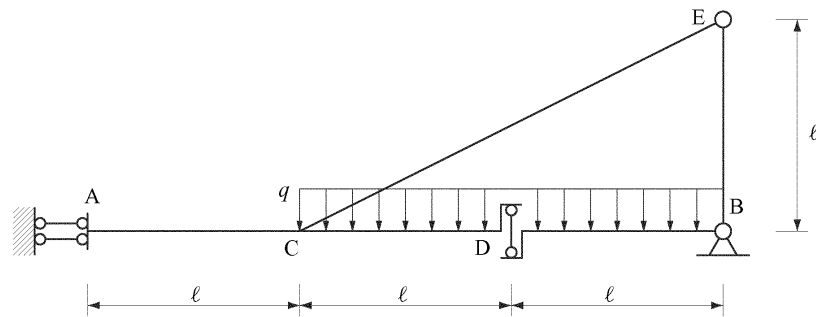
Calcolare lo spostamento orizzontale dei punti della travata GE



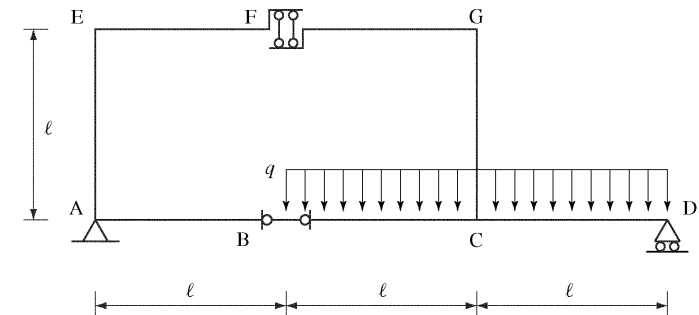
Calcolare la rotazione del nodo C



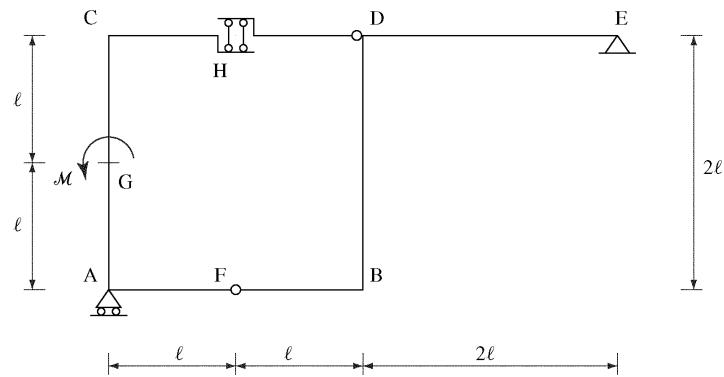
Determinare lo spostamento relativo in corrispondenza del doppio pendolo G



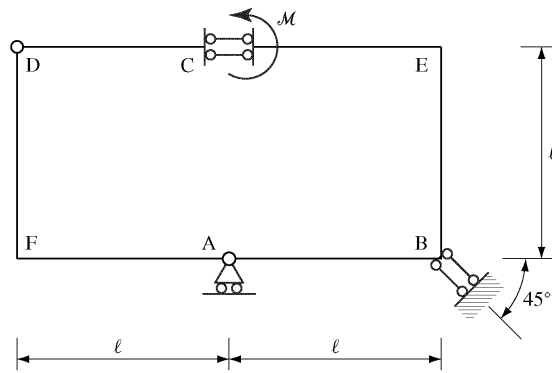
Determinare la rotazione del pendolo BE (dovuta alla deformazione della struttura) nell'ipotesi che il pendolo BE sia indeformabile assialmente.



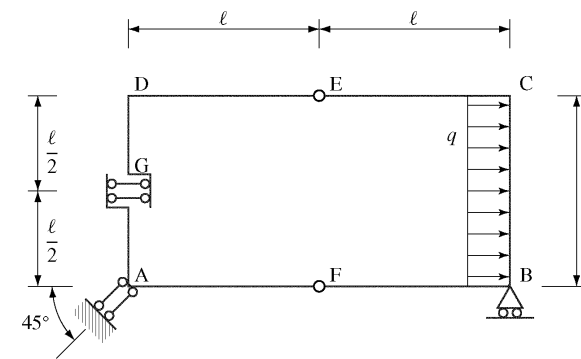
Determinare la rotazione relativa in B



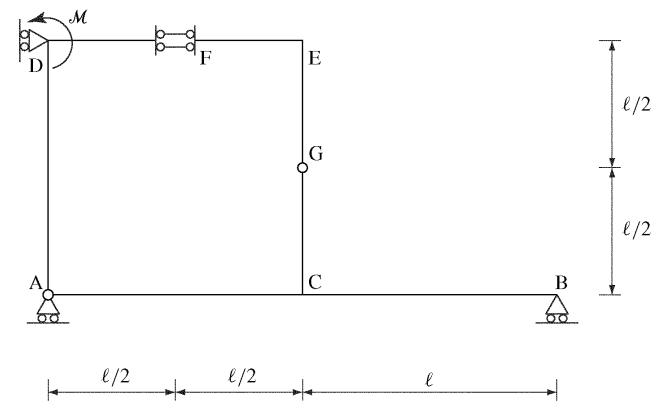
Calcolare lo spostamento orizzontale relativo
nella sezione H



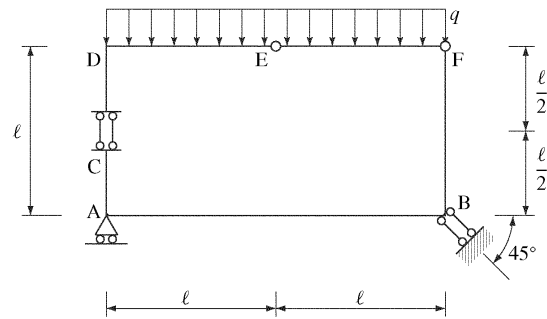
Calcolare lo spostamento verticale del punto D



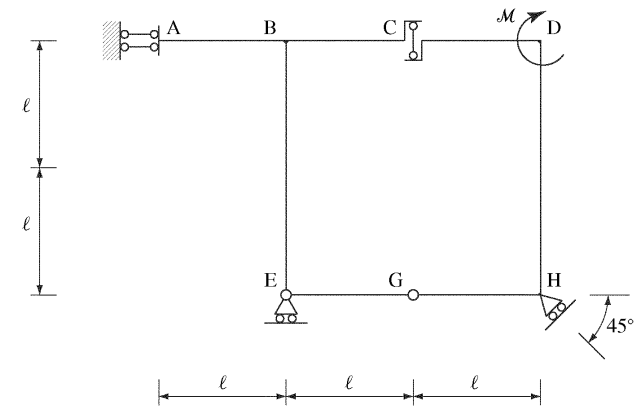
Calcolo lo spostamento del punto A



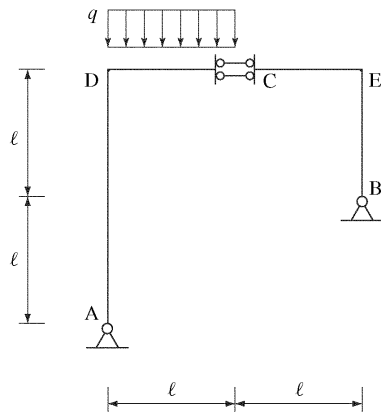
Calcolare lo spostamento verticale
relativo nella sezione F



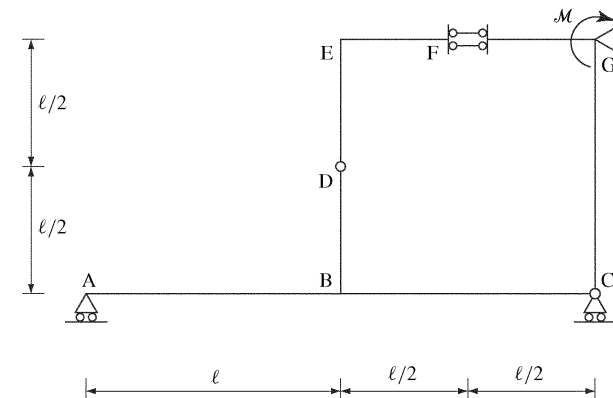
Calcolare lo spostamento orizzontale relativo
nella sezione C



Calcolare lo spostamento verticale nella sezione G



Calcolare lo spostamento verticale relativo
nella sezione C

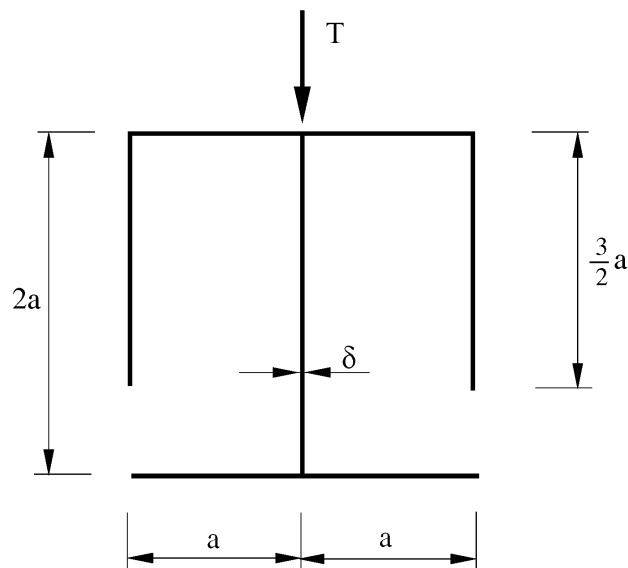


Calcolare lo spostamento verticale relativo
nella sezione F

Capitolo 2

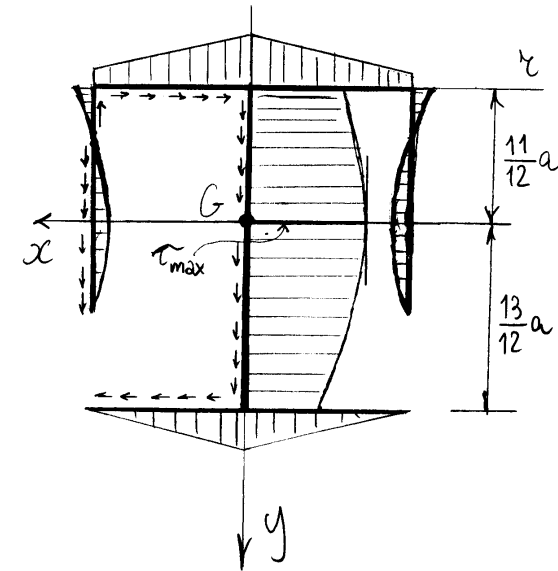
Esercizi sulle sollecitazioni semplici

2.1 Esercizio 8



Sezione sottile in acciaio
 $a=90 \text{ mm}$
 $\delta=6 \text{ mm}$
 $T=100 \text{ kN}$

- Disegnare il diagramma delle tensioni tangenziali;
- Determinare la tensione ideale massima.



$$A = 9\delta a$$

$$J_x = 5.3542\delta a^3$$

$$S_z = \frac{33}{4}\delta a^2$$

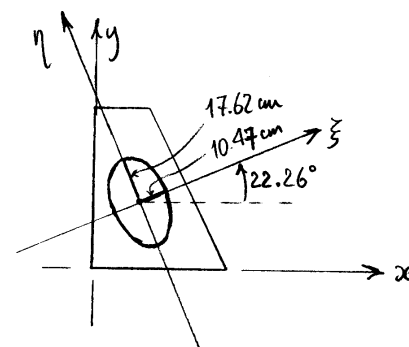
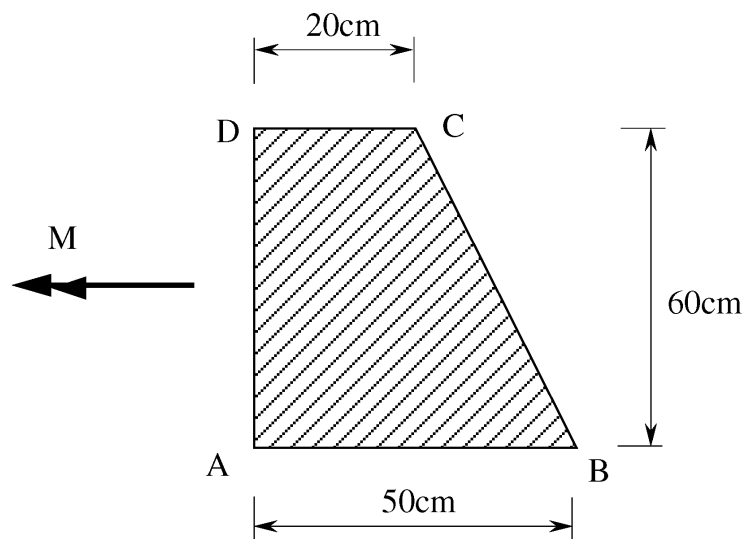
$$S_{x\max}^* = 2.7535\delta a^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{T S_{x\max}^*}{J_x \delta} = 0.5143 \frac{T}{\delta a} = 4.6284 \frac{T}{A}$$

$$\tau_{\max} = 0.5143 \frac{1 \times 10^5}{6 \times 90} = 95.24 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_{\max} = 165.95 \text{ N/mm}^2$$

2.2 Esercizio 9



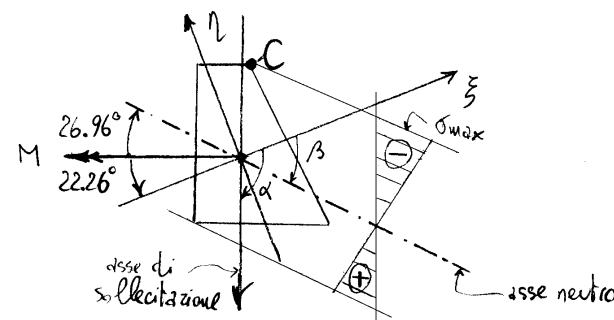
$$A = 2100 \text{ cm}^2$$

$$S_x = 54000 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 39000 \text{ cm}^3$$

$$\begin{cases} x_G = 18.57 \text{ cm} \\ y_G = 25.71 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{\xi} = 651948 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta} = 230194 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



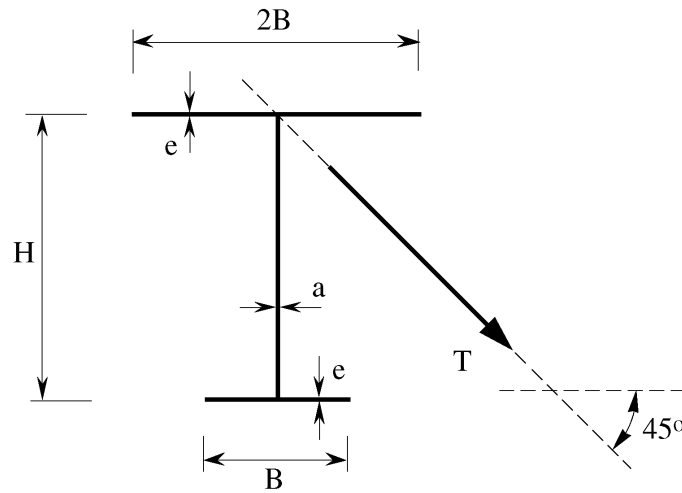
- 1) Determinare il riferimento principale baricentrico
- 2) Determinare l'asse neutro della flessione
- 3) Disegnare il diagramma delle tensioni normali, individuare il punto dove la tensione normale è massima in modulo ed infine scrivere la formula che determina la massima tensione normale

C è il punto più sollecitato (compressione):

$$\sigma_c = -\frac{M \cos(22.26^\circ)}{J_{\xi}} \eta_c - \frac{M \sin(22.26^\circ)}{J_{\eta}} \xi_c$$

$$\alpha = -112.26^\circ \implies \beta = \arctan\left\{-\frac{J_{\xi}}{J_{\eta} \tan \alpha}\right\} = -49.22^\circ$$

2.3 Esercizio 10



Sezione sottile in acciaio

$$T = 50 \text{ KN}$$

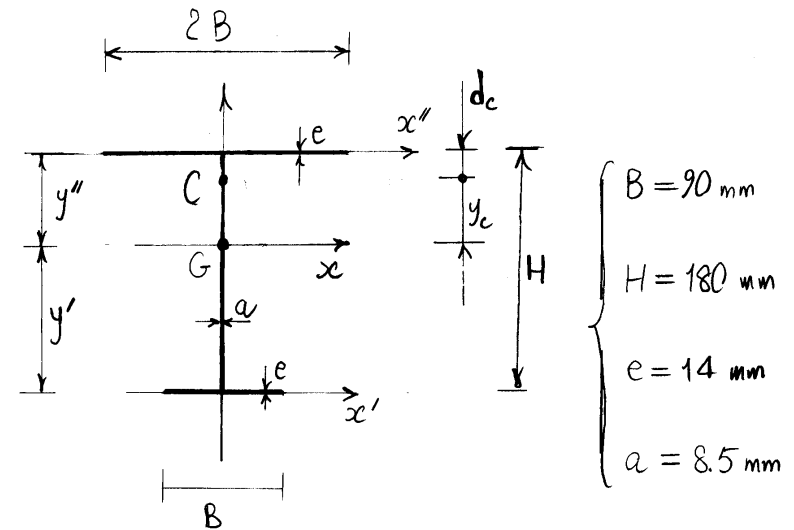
H = 180 mm

B = 90 mm

$$a = 8.5 \text{ mm}$$

$$e = 14 \text{ mm}$$

- 1) Determinare la posizione del centro di taglio, facendo uso della soluzione di Jourawski;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
- 3) Determinare la tensione ideale massima.



$$\int S_{x'} = 2eBH + a \frac{H^2}{2} = 591300 \text{ mm}^3$$

$$\{ A = 3eB + aH = 5310 \text{ mm}^3$$

$$| y' = 111.36 \text{ mm}, \quad y'' = H - y' = 68.64 \text{ mm}$$

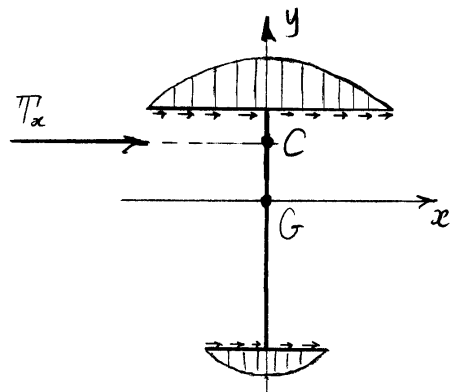
$$J_x = 2eBy'^2 + eBy'^2 + \frac{aH^3}{12} + aH\left(y' - \frac{H}{2}\right)^2 = 3.23272 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\left\{ \begin{aligned} J_y &= \frac{eB^3}{12} + \frac{8eB^3}{12} = \frac{3}{4} eB^3 = 7.6545 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned} \right.$$

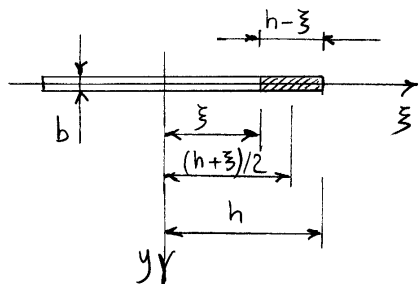
$$J_t = \frac{1}{3}(2Be^3 + Be^3 + Ha^3) = Be^3 + \frac{1}{3}Ha^3 = 2.838 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sull'asse y .



$$\tau = \frac{T_x S^*}{b J_y}$$



$$\begin{aligned} S_y(\xi) &= b(h-\xi) \frac{h+\xi}{2} \\ &= \frac{b}{2} (h^2 - \xi^2) \end{aligned}$$

$$\tau(\xi) = \frac{T_x S_y(\xi)}{b J_y} = \frac{T_x}{2 J_y} (h^2 - \xi^2)$$

$$2 \int_0^h \tau(\xi) b d\xi = \frac{T_x}{J_y} \left[h^2 \xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^h = \frac{2}{3} \frac{T_x b h^3}{J_y}$$

$$T_1 = \frac{2}{3} \frac{T_x e B^3}{J_y}$$

$$T_2 = \frac{2}{3} \frac{T_x e \left(\frac{B}{2}\right)^3}{J_y} = \frac{1}{12} \frac{T_x e B^3}{J_y}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{9}{12} e B^3 \frac{1}{J_y} T_x = T_x$$

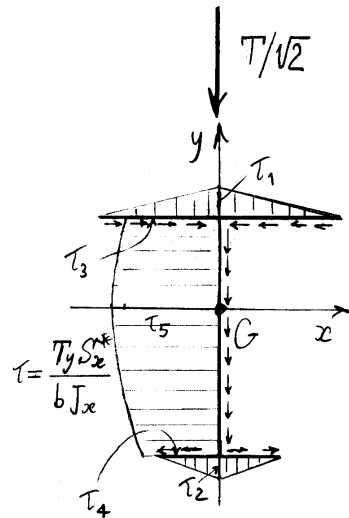
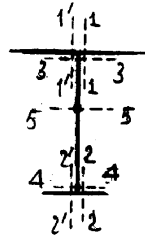
$$T_1 d_c = T_2 (H - d_c) \Rightarrow 8 d_c = H - d_c$$

$$\begin{cases} d_c = \frac{1}{9} H = 20 \text{ mm} \\ y_c = y'' - d_c = 48.64 \text{ mm} \end{cases}$$

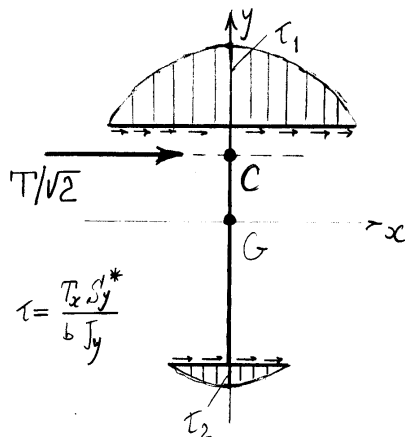
Le caratteristiche della sollecitazione relative al centro di taglio risultano dunque:

$$\begin{cases} T_x = T/\sqrt{2} = 35355 \text{ N}, & T_y = -T/\sqrt{2} = -35355 \text{ N} \\ M_c = -T d_c/\sqrt{2} = -707106 \text{ N mm} \end{cases}$$

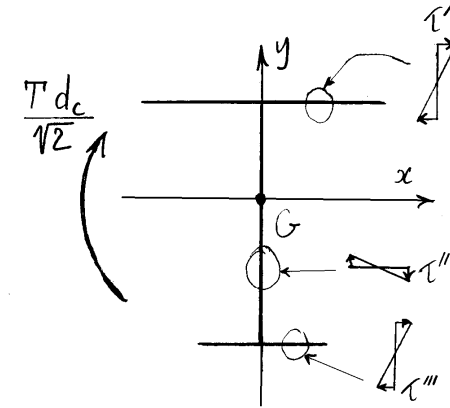
Coefficienti: 2
meno di 10^{-4} mm^{-2}



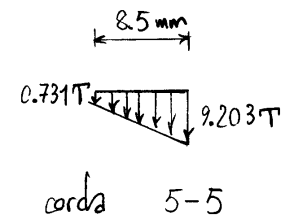
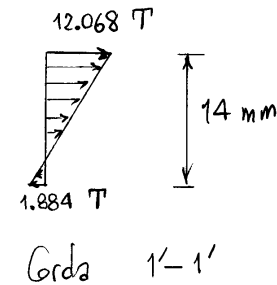
$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{T B (H - y')}{\sqrt{2} J_x} = 1.351 T \\ \tau_3 = \frac{2 e B (H - y')}{a J_x} \frac{T}{\sqrt{2}} = 4.451 T \\ \tau_2 = \frac{T B y'}{2 \sqrt{2} J_x} = 1.096 T \\ \tau_4 = \frac{e B y'}{a J_x} \frac{T}{\sqrt{2}} = 3.611 T \\ \tau_5 = \frac{T}{\sqrt{2} a J_x} \left(e B y' + \frac{a}{2} y'^2 \right) = 4.967 T \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{T B^2}{2 \sqrt{2} J_y} = 3.741 T \\ \tau_2 = \frac{T B^2}{8 \sqrt{2} J_y} = 0.935 T \\ \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0 \end{cases}$$



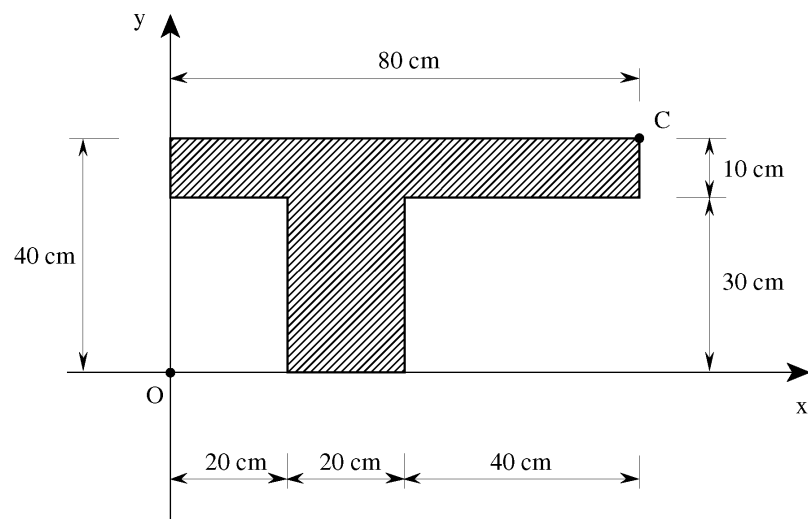
$$\tau = \frac{M_t}{J_t} b \quad \begin{cases} \tau' = \frac{T d_c}{\sqrt{2} J_t} e = 6.976 T \\ \tau'' = \frac{T d_c}{\sqrt{2} J_t} a = 4.236 T \\ \tau''' = \frac{T d_c}{\sqrt{2} J_t} e = 6.976 T \end{cases}$$



$$\tau_{\max} = 12.068 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^4 = 60.34 \text{ N/mm}^2$$

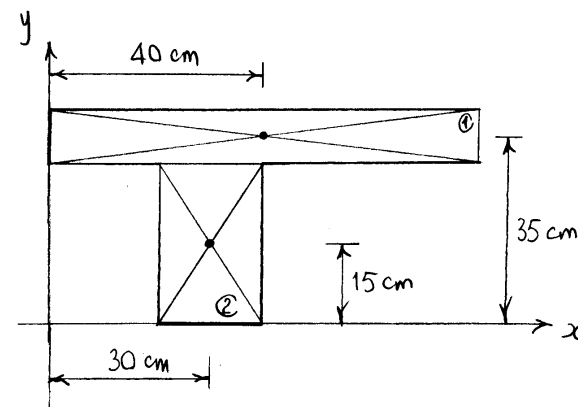
$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_{\max} = 105 \text{ N/mm}^2$$

2.4 Esercizio 11



La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 150 kN, applicato in corrispondenza del punto C.

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_{ξ} e J_{η});
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η (per eseguire il calcolo, occorre determinare le coordinate del punto C nel sistema principale, utilizzando le formule di trasformazione tra le coordinate nel sistema Oxy e in quello $G\xi\eta$);
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione.



$$A^{(1)} = 10 \times 80 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A^{(2)} = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A = 1400 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{(1)} = A^{(1)} \times 35 = 28000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{(2)} = A^{(2)} \times 15 = 9000 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 37000 \text{ cm}^3$$

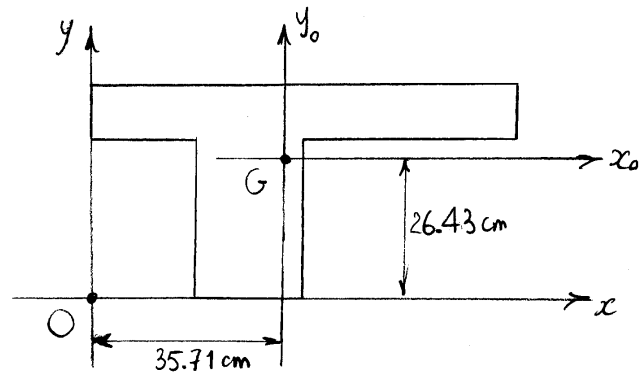
$$S_y^{(1)} = A^{(1)} \times 40 = 32000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{(2)} = A^{(2)} \times 30 = 18000 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 50000 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 26.43 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 35.71 \text{ cm}$$



$$J_{x_0}^{(1)} = \frac{80 \times 10^3}{12} + A^{(1)} (35 - y_G)^2 = 65442 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0}^{(2)} = \frac{20 \times 30^3}{12} + A^{(2)} (15 - y_G)^2 = 123367 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0} = 188810 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0}^{(1)} = \frac{10 \times 80^3}{12} + A^{(1)} (40 - x_G)^2 = 441361 \text{ cm}^4$$

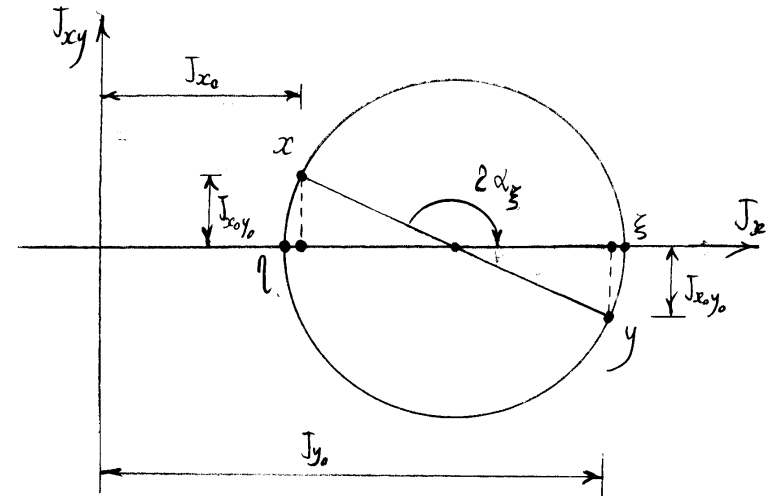
$$J_{y_0}^{(2)} = \frac{30 \times 20^3}{12} + A^{(2)} (30 - x_G)^2 = 39592 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0} = 480952 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{(1)} = A^{(1)} (35 - y_G)(40 - x_G) = 29388 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{(2)} = A^{(2)} (15 - y_G)(30 - x_G) = 39184 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0} = 68571 \text{ cm}^4$$

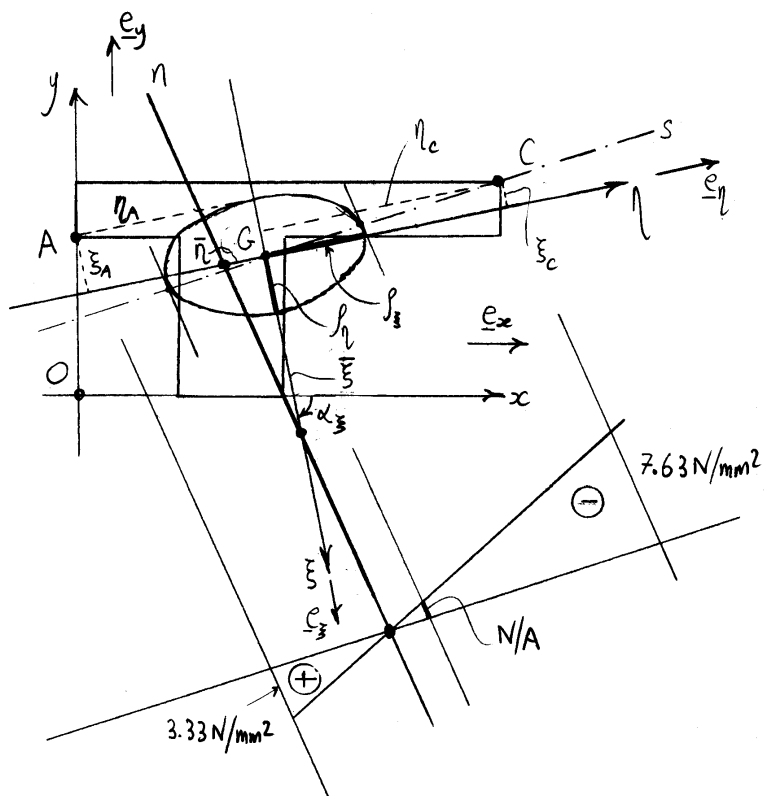


$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2}$$

$$= \begin{cases} 496247 \text{ cm}^4 \\ 173515 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{\xi} &= \sqrt{J_{\xi}/A} = 18.83 \text{ cm} \\ \rho_{\eta} &= \sqrt{J_{\eta}/A} = 11.13 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

$$\alpha_{\xi} = \arctan \left\{ \frac{J_{x_0} - J_{\xi}}{J_{x_0 y_0}} \right\} = -77.43^{\circ}$$



Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = -I_{\eta}^2 / \xi_c = 34.38 \text{ cm} \\ \bar{\eta} = -I_{\xi}^2 / \eta_c = -7.68 \text{ cm} \end{cases}$$

La massima tensione di compressione si ha nel punto C mentre quella di trazione nel punto A di coordinate:

$$\begin{cases} \xi_A = (x_A - x_G) \cos \alpha_{\xi} + (y_A - y_G) \sin \alpha_{\xi} = -11.26 \text{ cm} \\ \eta_A = -(x_A - x_G) \sin \alpha_{\xi} + (y_A - y_G) \cos \alpha_{\xi} = -34.08 \text{ cm} \end{cases}$$

Coordinate del punto C nel sistema $G\xi\eta$:

$$\begin{aligned} \xi_c &= (C - G) \cdot \underline{e}_{\xi} = \{(x_c - x_G) \underline{e}_x + (y_c - y_G) \underline{e}_y\} \cdot \underline{e}_{\xi} \\ &= (x_c - x_G) \cos \alpha_{\xi} + (y_c - y_G) \sin \alpha_{\xi} = -3.61 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_c &= (C - G) \cdot \underline{e}_{\eta} = \{(x_c - x_G) \underline{e}_x + (y_c - y_G) \underline{e}_y\} \cdot \underline{e}_{\eta} \\ &= -(x_c - x_G) \sin \alpha_{\xi} + (y_c - y_G) \cos \alpha_{\xi} = 46.18 \text{ cm} \end{aligned}$$

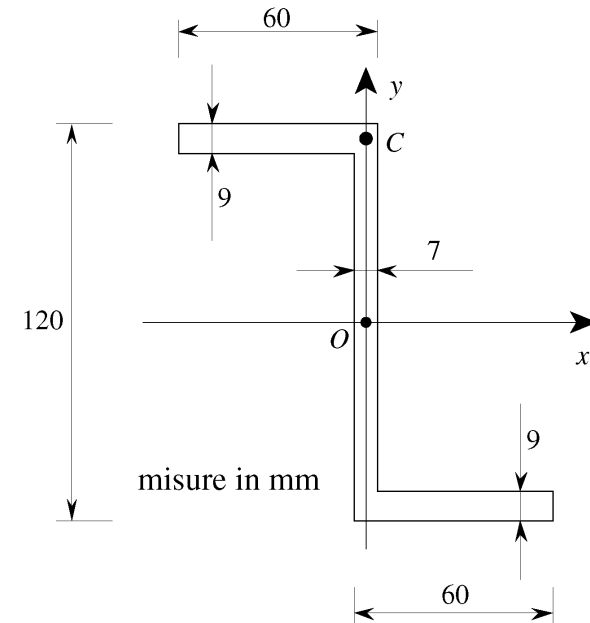
Poiché:

$$\begin{cases} N = -150 \text{ kN} \\ M_{\xi} = N \eta_c = -6926.7 \text{ kN cm} \\ M_{\eta} = -N \xi_c = -540.8 \text{ kN cm} \end{cases}$$

risulta:

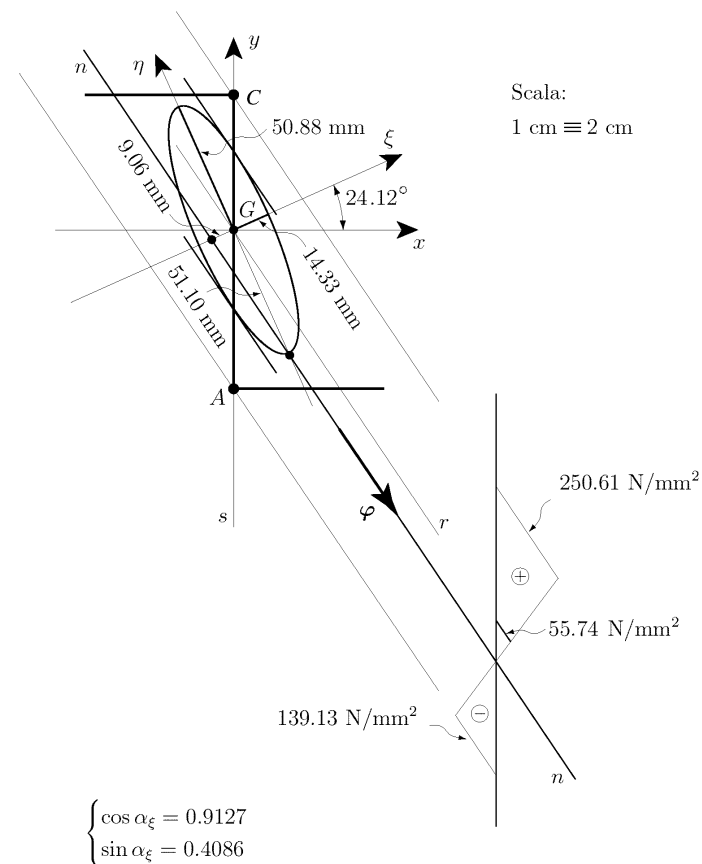
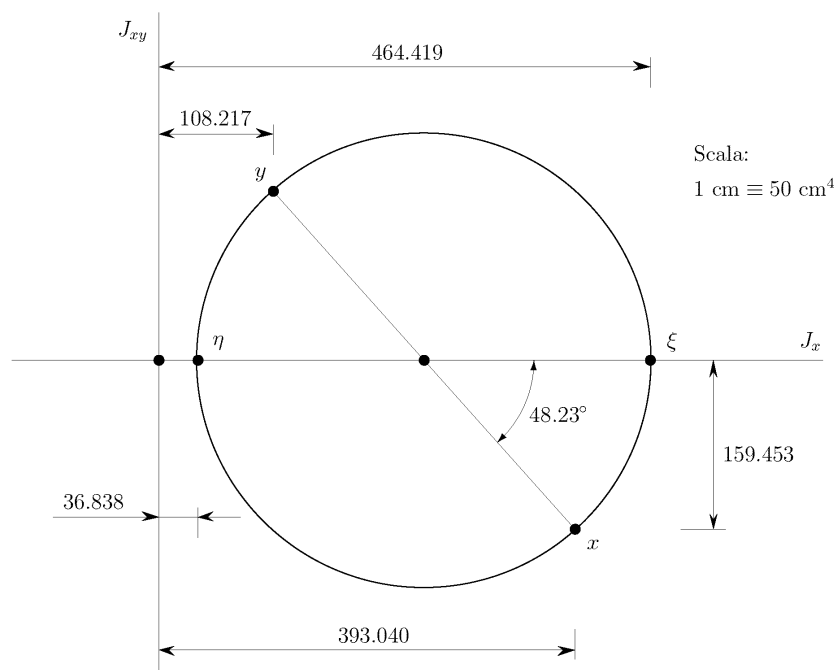
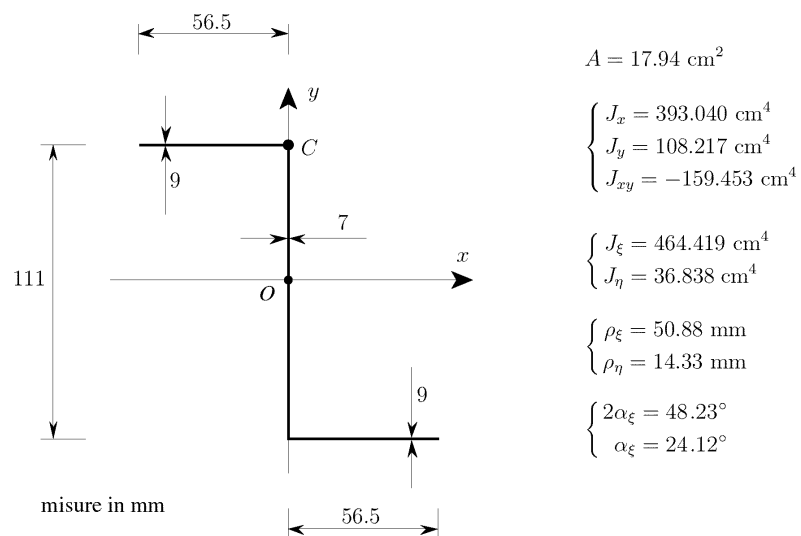
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_c - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_c = -0.763 \text{ kN/cm}^2 \\ &= -7.63 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A = 0.333 \text{ kN/cm}^2 \\ &= 3.33 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right.$$

2.5 Esercizio 12



La sezione sottile di figura è soggetta ad una forza normale di trazione di 100 kN, applicata in corrispondenza del punto C:

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
- 2) Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
- 3) Determinare la posizione dell'asse neutro, disegnare il diagramma delle tensioni normali e calcolare le tensioni massime a trazione e compressione.



$$\begin{cases} \cos \alpha_\xi = 0.9127 \\ \sin \alpha_\xi = 0.4086 \end{cases}$$

Coordinate del centro di trazione C:

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 55.5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_C = y_C \sin \alpha_\xi = 22.68 \text{ mm} \\ \eta_C = y_C \cos \alpha_\xi = 50.66 \text{ mm} \end{cases}$$

Coordinate del punto A:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = -55.5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_A = y_A \sin \alpha_\xi = -22.68 \text{ mm} \\ \eta_A = y_A \cos \alpha_\xi = -50.66 \text{ mm} \end{cases}$$

Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = -\rho_\eta^2 / \xi_C = -9.06 \text{ mm} \\ \bar{\eta} = -\rho_\xi^2 / \eta_C = -51.10 \text{ mm} \end{cases}$$

Inclinazione dell'asse neutro (angolo minore di 90°):

$$\widehat{\xi n} = \arctan \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} = 79.95^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x n} = 55.84^\circ \\ \widehat{y n} = 34.16^\circ \end{cases}$$

Momento di inerzia rispetto all'asse r baricentrico e parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione y):

$$J_r = \frac{J_\xi \cos^2 \widehat{\xi n} + J_\eta \sin^2 \widehat{\xi n}}{\sin^2 \widehat{y n}} = 158.094 \text{ cm}^4$$

Momento flettente:

$$\mathbf{M} = N y_C \mathbf{e}_x = (5550.0 \text{ Nm}) \mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} M_\xi = N \eta_C = 5065.6 \text{ Nm} \\ M_\eta = -N \xi_C = -2267.6 \text{ Nm} \end{cases}$$

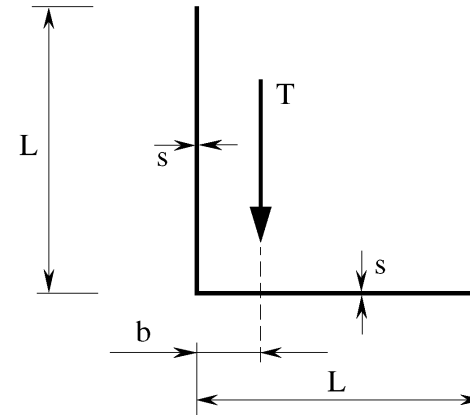
Massima tensione normale di trazione (punto C):

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{N}{A} + \frac{|\mathbf{M}|}{J_r} y_C = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_C - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_C \\ &= (55.74 + 55.26 + 139.61) \text{ N/mm}^2 = 250.61 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Massima tensione normale di compressione (punto A):

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{|\mathbf{M}|}{J_r} y_A = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A \\ &= (55.74 - 55.26 - 139.61) \text{ N/mm}^2 = -139.13 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

2.6 Esercizio 13



$$T = 40 \text{ kN}$$

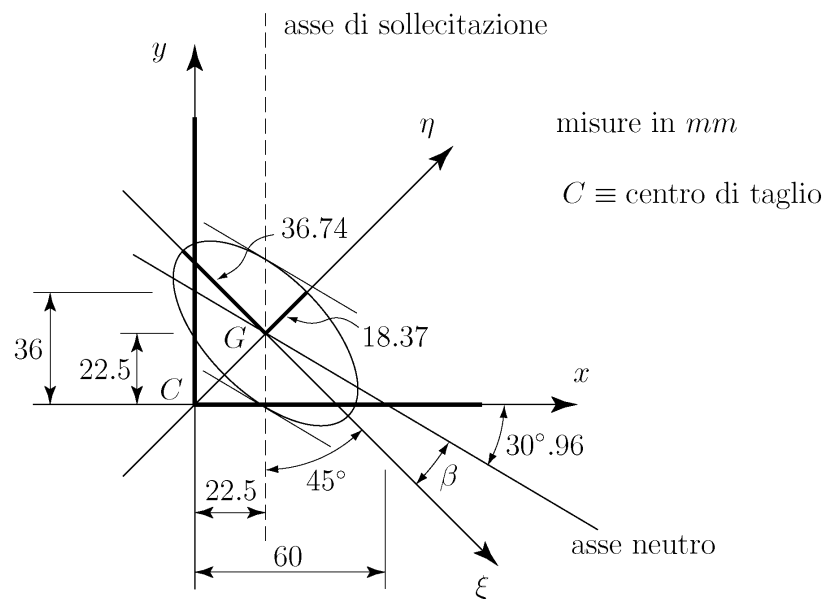
$$L = 90 \text{ mm}$$

$$s = 9 \text{ mm}$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

Data la sezione sottile a L, a lati uguali, di figura:

- 1) Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
- 2) Disegnare l'ellisse centrale di inerzia e determinare l'asse neutro della flessione associata a T;
- 3) Utilizzando l'asse neutro della flessione associata a T, disegnare il diagramma qualitativo complessivo delle tensioni tangenziali dovute al taglio passante per il centro di taglio.



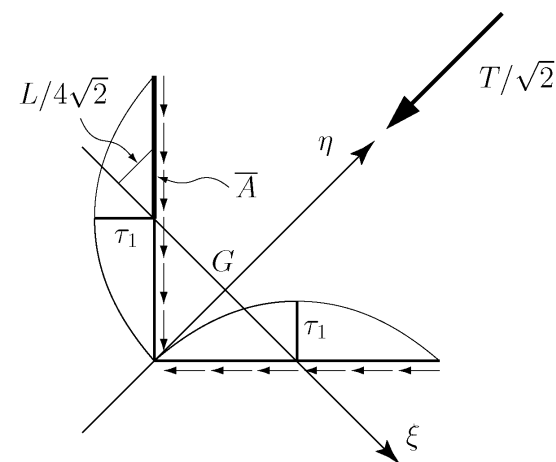
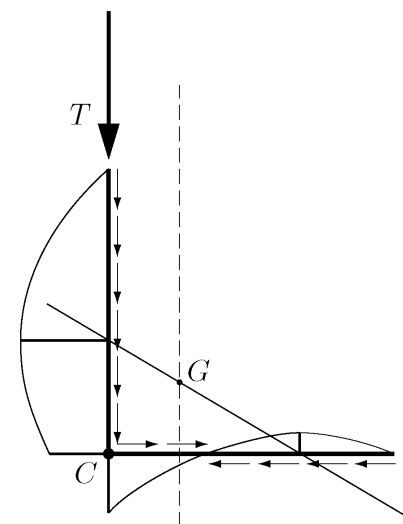
$$\begin{cases} x_G = 22.5 \text{ mm} \\ y_G = 22.5 \text{ mm} \end{cases} \quad \beta - 45^\circ = -30^\circ.96$$

$$\begin{cases} J_\xi = 2 \frac{(s\sqrt{2}) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^3}{12} = 546\,750 \text{ mm}^4 \\ J_\eta = 2 \frac{(s\sqrt{2}) \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)^3}{3} = 2\,187\,000 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

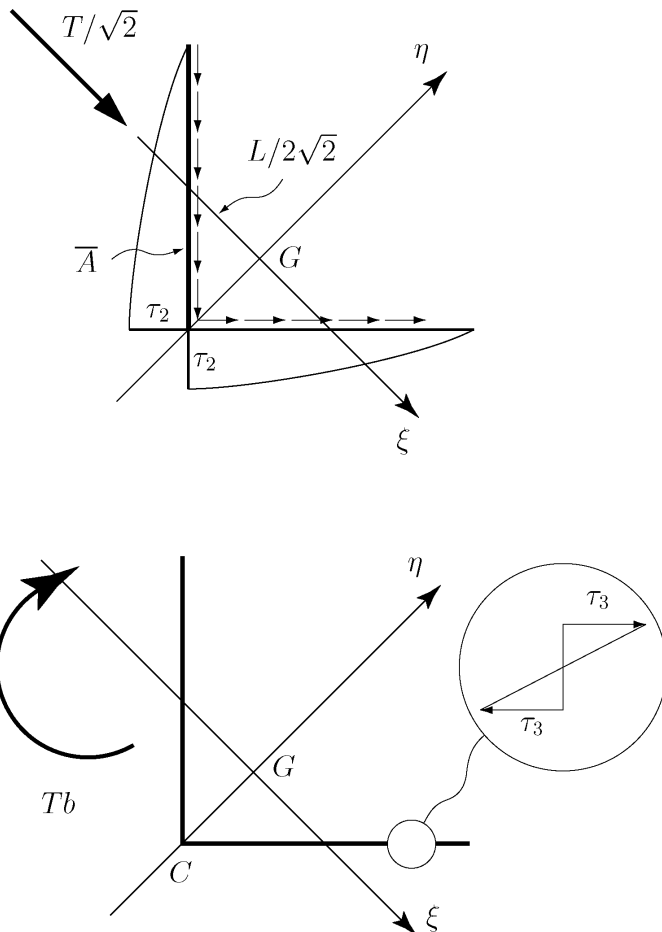
$$\tan(\beta) \tan(-\pi/4) = -J_\xi/J_\eta = -1/4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 14^\circ.04$$

Intersezioni dell'asse neutro con l'asse x e con l'asse y :

$$\begin{cases} \bar{x} = x_G + y_G \tan(\pi/4 + \beta) = 60 \text{ mm} \\ \bar{y} = y_G + x_G \tan(\pi/4 - \beta) = 36 \text{ mm} \end{cases}$$

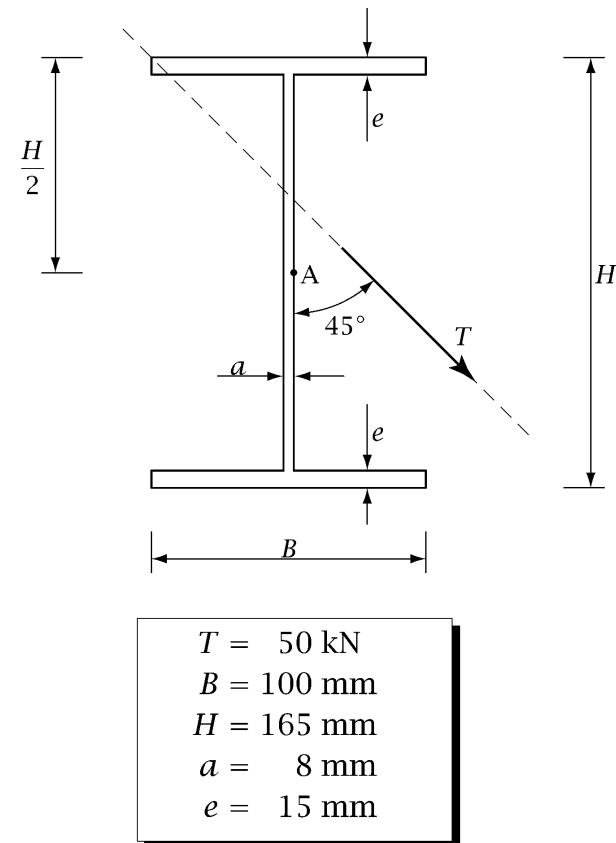


$$\begin{cases} \overline{S}_\xi^I = s \frac{L}{2} \frac{L}{4\sqrt{2}} = 6\,443.5 \text{ mm}^3 \\ \tau_1 = \frac{T \overline{S}_\xi^I}{\sqrt{2} J_\xi s} = 37.04 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overline{S_\eta^2} = sL \frac{L}{2\sqrt{2}} = 25\,774 \text{ mm}^3 \\ \tau_2 = \frac{T \overline{S_\eta^2}}{\sqrt{2} J_\eta s} = 37.04 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} J_t = \frac{2}{3} L s^3 = 43\,740 \text{ mm}^4 \\ \tau_3 = \frac{Tb}{J_t} s = 164.61 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

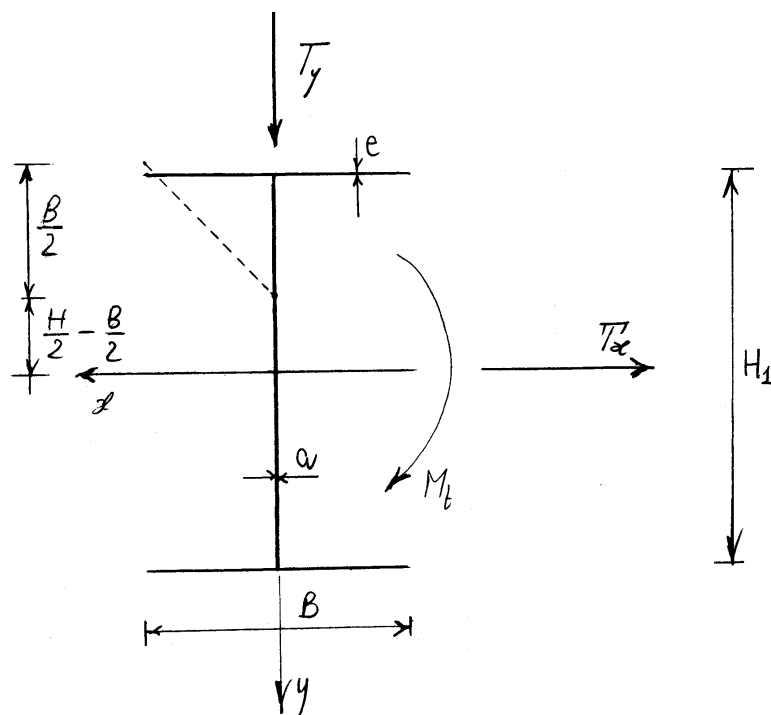
2.7 Esercizio 14



Data la sezione a I di figura, soggetta ad un taglio T :

1. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
2. Determinare l'asse neutro della flessione associata al taglio T ;
3. Disegnare il diagramma qualitativo complessivo delle tensioni tangenziali dovute al taglio utilizzando la formula di Jourawski monomia.

Caratteristiche della sollecitazione



Si procede calcolando i moduli delle forze e delle tensioni, dato che i versi sono automaticamente noti.

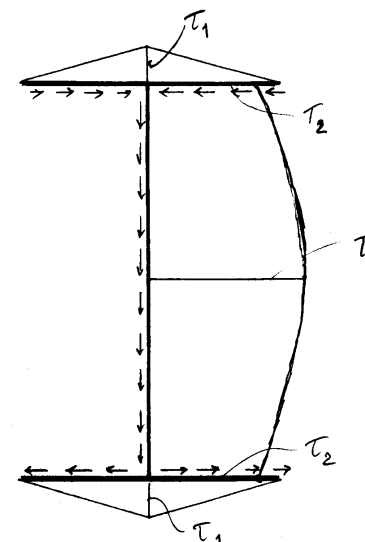
$$H_1 = H - e = 150 \text{ mm}$$

$$T_x = T/\sqrt{2} = 35.36 \text{ kN}$$

$$T_y = T/\sqrt{2} = 35.36 \text{ kN}$$

$$M_t = T_x \left(\frac{H}{2} - \frac{B}{2} \right) = 1149 \text{ kN mm}$$

Taglia T_y



$$T_y = 35.36 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{b J_x}$$

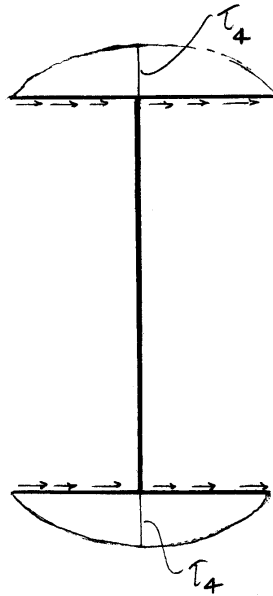
$$J_x = \frac{a H_1^3}{12} + 2 e B \left(\frac{H_1}{2} \right)^2 = 1912.5 \text{ cm}^4$$

$$S_{x1}^* = e \frac{B}{2} \frac{H}{2} = 56.25 \text{ cm}^3, \quad S_{x2}^* = e B \frac{H}{2} = 112.5 \text{ cm}^3$$

$$S_{x3}^* = e B \frac{H}{2} + a \frac{H}{2} \frac{H}{4} = 135 \text{ cm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{T_y S_{x1}^*}{e J_x} = 6.93 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_2 = \frac{T_y S_{x2}^*}{a J_x} = 26 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_3 = \frac{T_y S_{x3}^*}{a J_x} = 31.20 \text{ N/mm}^2$$

Taglio T_x 

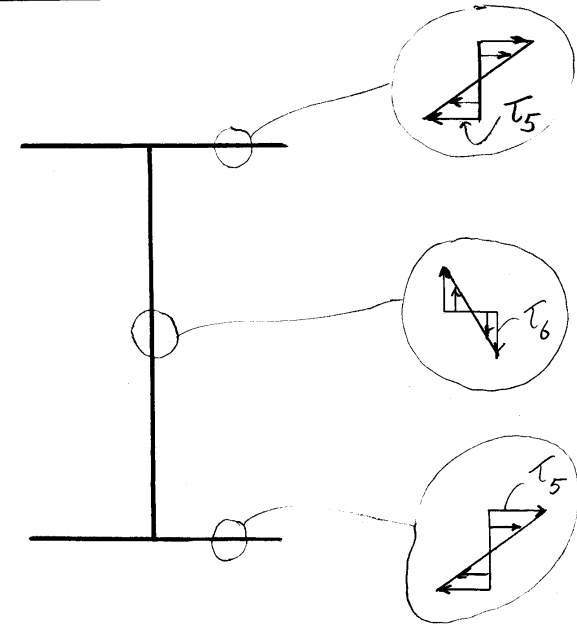
$$T_x = 35.36 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{T_x S_y^*}{b J_y}$$

$$J_y = 2 \frac{e B^3}{12} = 250 \text{ cm}^4$$

$$S_{y4}^* = e \left(\frac{B}{2} \right) \left(\frac{B}{4} \right) = 18.75 \text{ cm}^3$$

$$\tau_4 = \frac{T_x S_{y4}^*}{e J_y} = 17.68 \text{ N/mm}^2$$

Momento torcente M_t 

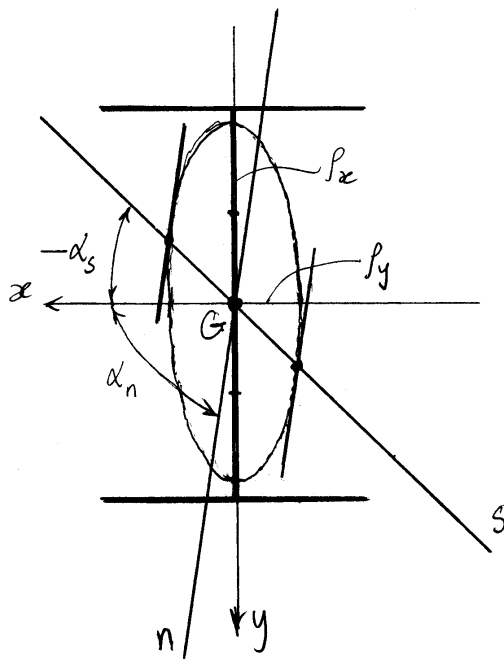
$$M_t = 1149 \text{ kN mm}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (2 B e^3 + H_1 a^3) = 25.06 \text{ cm}^4$$

$$\tau_5 = \frac{M_t}{J_t} e = 68.78 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} b$$

$$\tau_6 = \frac{M_t}{J_t} a = 36.68 \text{ N/mm}^2$$

Asse neutro

$$A = 2eB + aH_1 = 4200 \text{ mm}^2$$

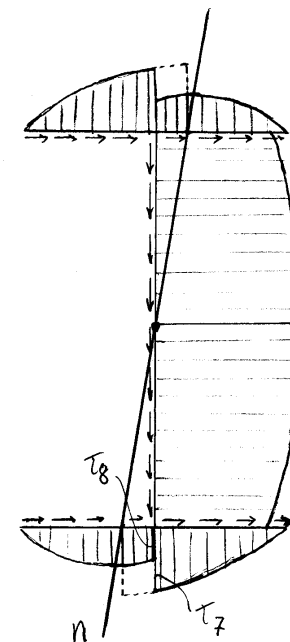
$$I_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = 67.48 \text{ mm}$$

$$I_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = 24.40 \text{ mm}$$

$$\alpha_s = -\frac{\pi}{4}$$

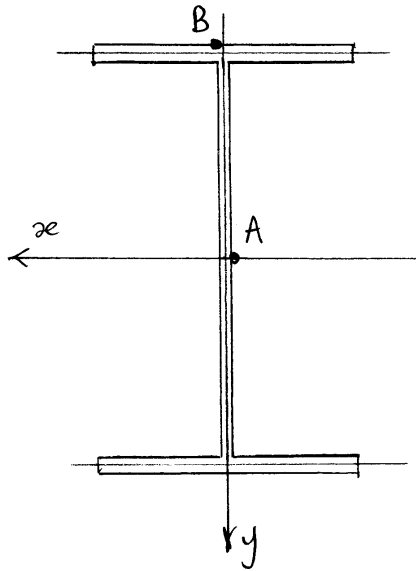
$$\tan \alpha_s \tan \alpha_n = -\frac{J_x}{J_y} \Rightarrow \alpha_s = \arctan\left(-\frac{J_x}{J_y \tan \alpha_s}\right)$$

$$\alpha_s = 82.55^\circ$$

Taglia T

$$\tau_7 = \tau_4 + \tau_1 = 24.61 \text{ N/mm}^2$$

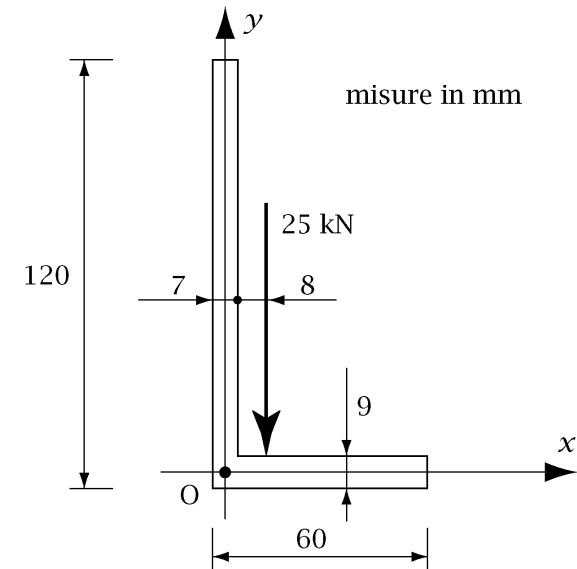
$$\tau_8 = \tau_4 - \tau_1 = 10.75 \text{ N/mm}^2$$

Tensione ideale massima

$$\tau_A = \tau_3 + \tau_6 = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

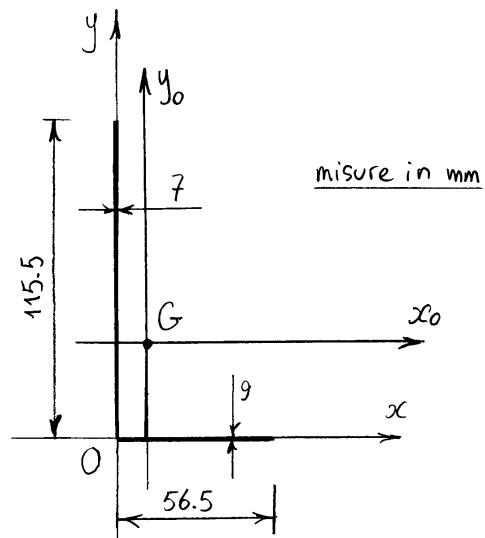
$$\tau_B = \tau_1 + \tau_4 + \tau_5 = 93.39 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_B = 161.76 \text{ N/mm}^2$$

2.8 Esercizio 15

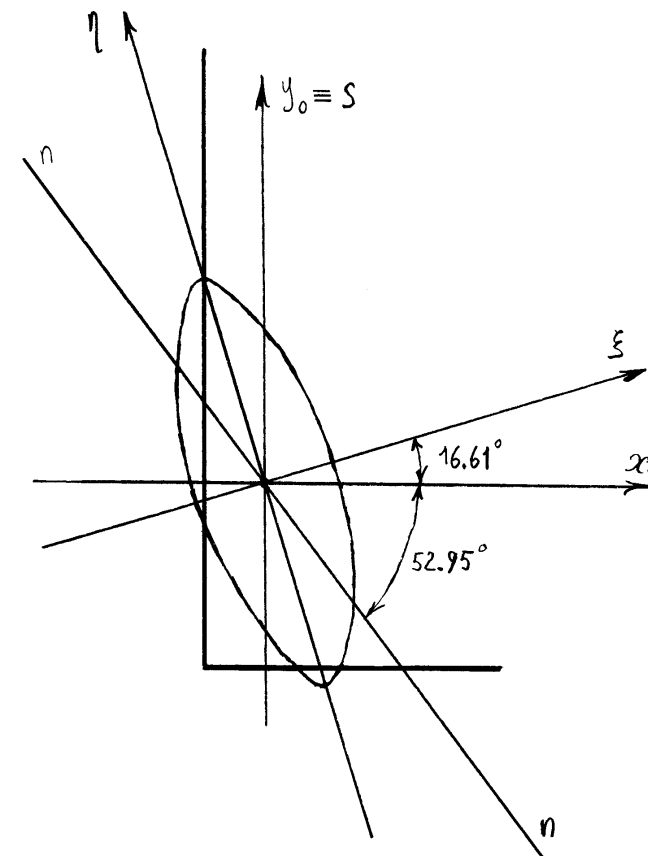
Data la sezione sottile a L di figura:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, concentrando lo spessore sulla linea media (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente;
4. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali dovute alle componenti del taglio rispetto agli assi principali di inerzia;
5. Utilizzando l'asse neutro della flessione associata al taglio, tracciare il diagramma qualitativo delle tensioni tangenziali dovute al taglio complessivo.



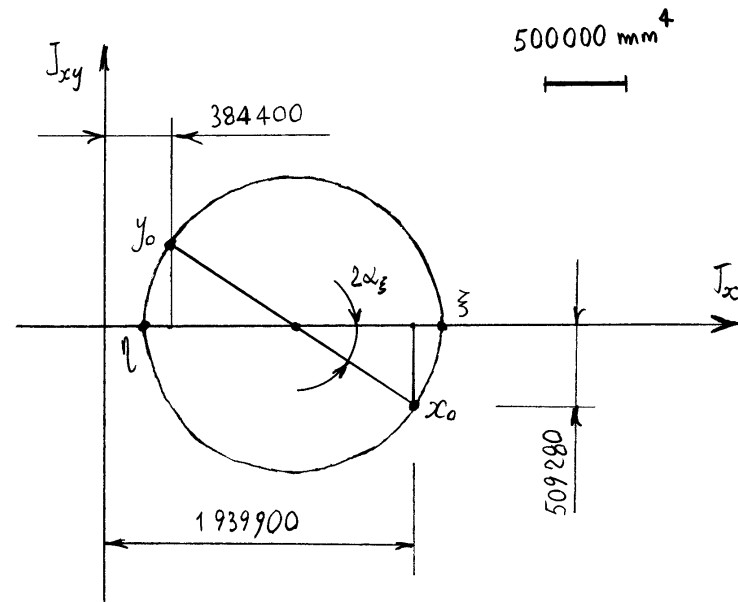
$$\begin{cases} x_G = 10.91 \text{ mm} \\ y_G = 35.45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{x_0} = 1\,939\,900 \text{ mm}^4 \\ J_{y_0} = 384\,400 \text{ mm}^4 \\ J_{x_0 y_0} = -509\,280 \text{ mm}^4 \end{cases}$$



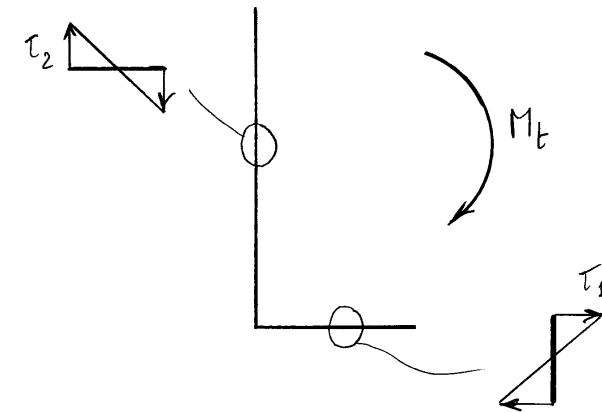
$$\begin{cases} J_\xi = 2\,091\,800 \text{ mm}^4 \\ J_\eta = 232\,490 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_\xi = 39.85 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 13.29 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\tan 2\alpha_{\xi} = \frac{509280 \times 2}{1939900 - 384400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\xi} = 16.61^{\circ}$$



$$M_t = 25 \times 11.5 \text{ kN} \cdot \text{mm} = 287500 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

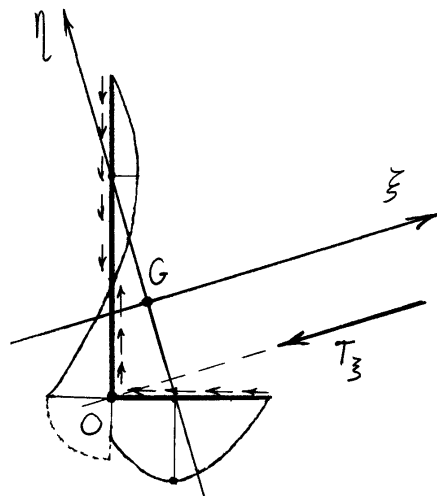
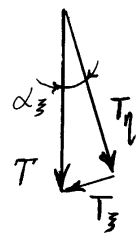
$$J_t = \frac{1}{3} (56.5 \times 9^3 + 115.5 \times 7^3) = 26935 \text{ mm}^4$$

$$\tau_1 = \frac{287500}{26935} \times 9 = 96.06 \text{ N/mm}^2$$

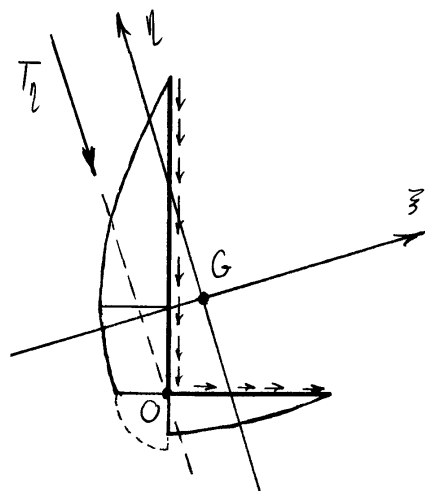
$$\tau_2 = \frac{287500}{26935} \times 7 = 74.72 \text{ N/mm}^2$$

$$T_{\xi} = T \sin \alpha_{\xi} = 7 \text{ kN}$$

$$T_{\eta} = T \cos \alpha_{\xi} = 24 \text{ kN}$$

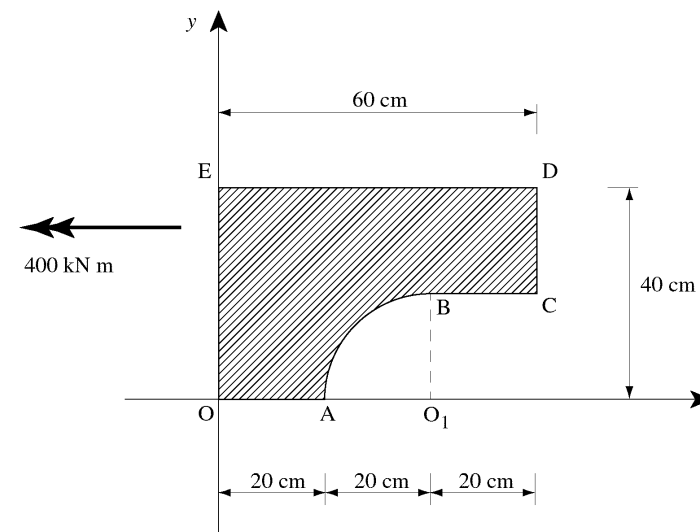


$$\tau = \frac{T_{\xi} S_{\eta}^*}{b J_{\eta}}$$



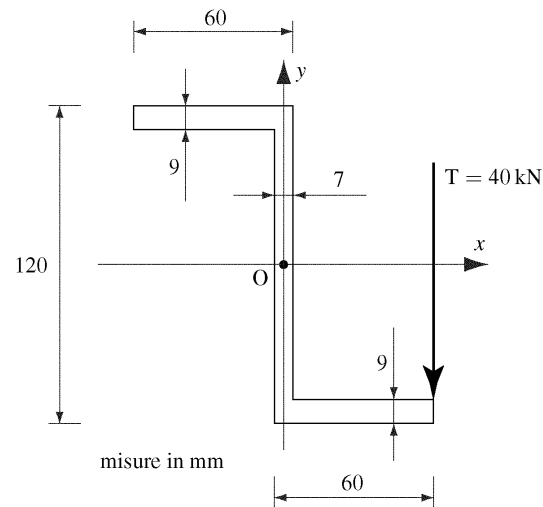
$$\tau = \frac{T_{\eta} S_{\xi}^*}{b J_{\xi}}$$

2.9 Esercizi proposti



Data la sezione riportata in figura, soggetta ad un momento flettente di 400 kN m, di asse momento orizzontale:

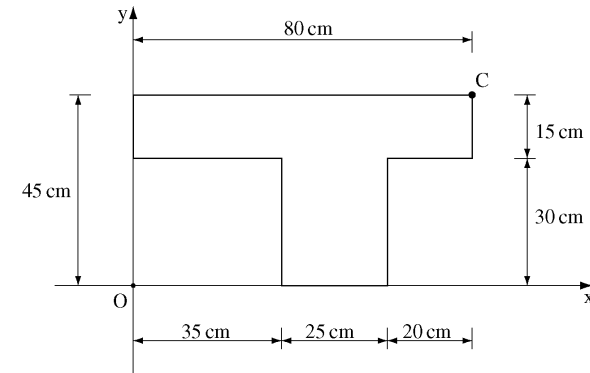
- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro, assi principali di inerzia e momenti principali di inerzia);
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia, e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al riferimento principale;
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula binomia;
- 6) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



misure in mm

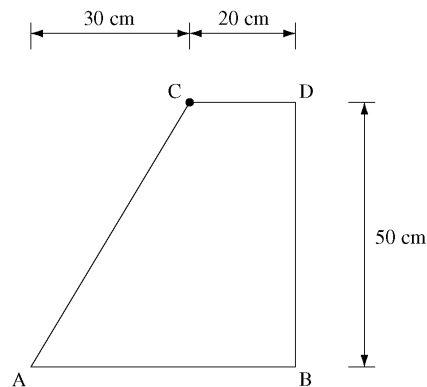
Data la sezione sottile a Z di figura:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, concentrando lo spessore sulla linea media (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente;
4. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali dovute alle componenti del taglio rispetto agli assi principali di inerzia;
5. Utilizzando l'asse neutro della flessione associata al taglio, tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al taglio complessivo.



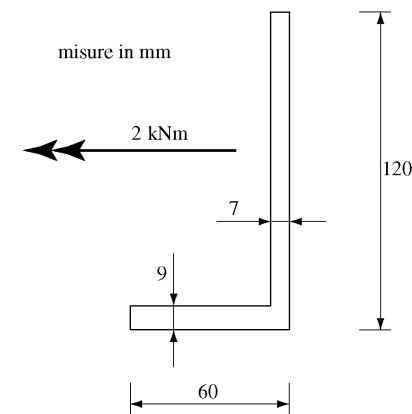
La sezione di figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 300 kN, applicata in corrispondenza del punto C:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Determinare la posizione dell'asse neutro, disegnare il diagramma delle tensioni normali e calcolare le tensioni massime a trazione e compressione.



La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 200 kN, applicata in corrispondenza del punto C.

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
4. Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
5. Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η (per eseguire il calcolo, occorre determinare le coordinate del punto C nel sistema principale, utilizzando le formule di trasformazione tra le coordinate nel sistema Gxy e quelle nel sistema $G\xi\eta$);
6. Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



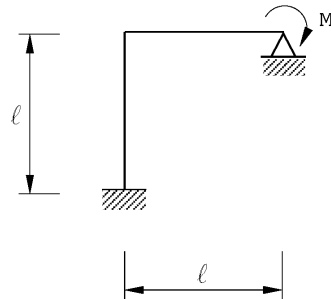
Data la sezione sottile riportata in figura, soggetta ad un momento flettente di 2 kNm, di asse momento orizzontale:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro, assi principali di inerzia e momenti principali di inerzia);
2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia, e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
4. Impostare il calcolo della tensione normale massima a compressione;
5. Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al riferimento principale;
6. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula binomia;
7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia;
8. Calcolare la curvatura flessionale (rotazione relativa per unità di linea) associata al momento flettente, supponendo che il modulo di Young valga $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

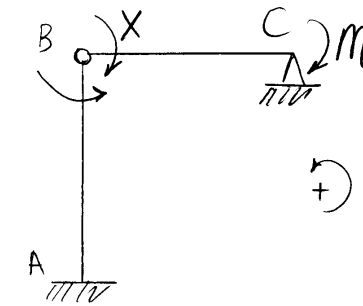
Capitolo 3

Esercizi su sistemi di travi iperstatiche

3.1 Esercizio 16



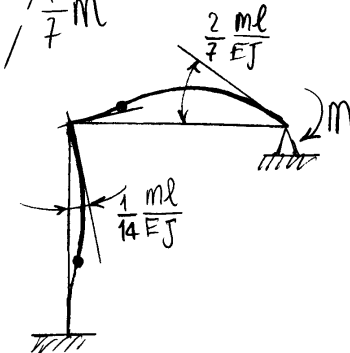
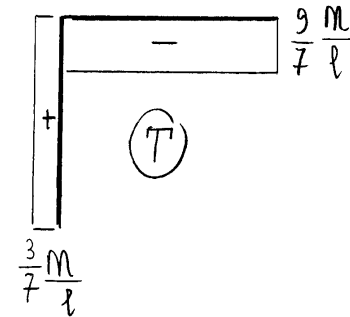
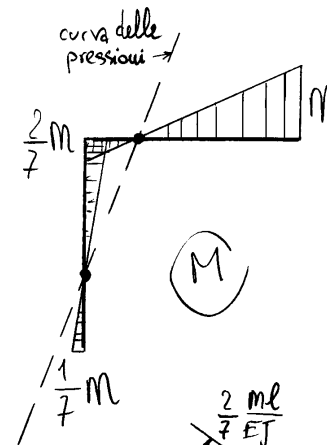
- Risolvere la struttura iperstatica con il metodo delle forze
- Tracciare il diagramma del momento flettente e del taglio
- Disegnare la deformata elastica della struttura
- Disegnare la curva delle pressioni



Metodo delle forze

$$\frac{Xl}{4EJ} = -\frac{Xl}{3EJ} + \frac{Ml}{6EJ}$$

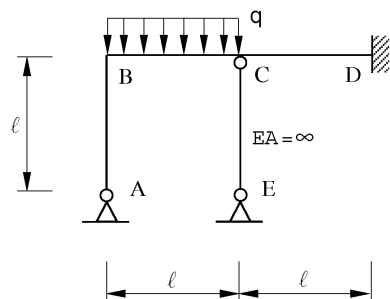
$$X = \frac{2}{7} M$$



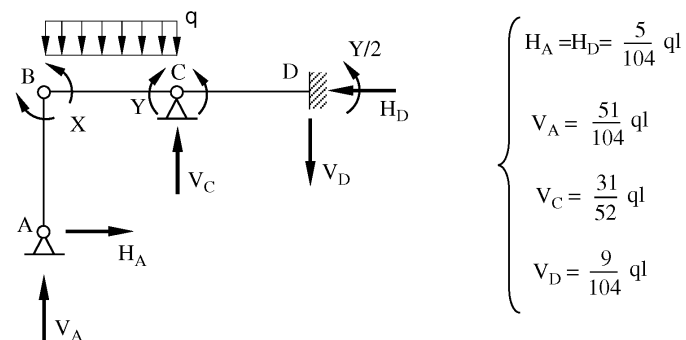
$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{Ml}{6EJ} - \frac{\left(\frac{2}{7}M\right)l}{3EJ} \\ &= \frac{1}{14} \frac{Ml}{EJ} \end{aligned}$$

$$\varphi_C = -\frac{Ml}{3EJ} + \frac{\left(\frac{2}{7}M\right)l}{6EJ} = -\frac{2}{7} \frac{Ml}{EJ}$$

3.2 Esercizio 17

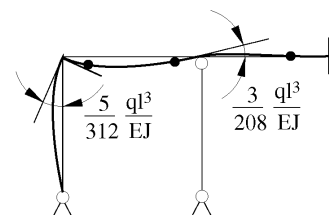


- Risolvere la struttura iperstatica
- Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale
- Disegnare la deformata elastica della struttura, quotando le rotazioni dei nodi B e C
- Disegnare la curva delle pressioni

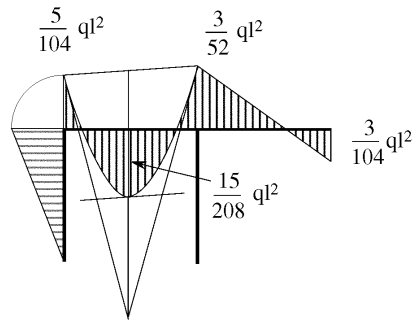


$$\begin{cases} \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \Rightarrow -\frac{Xl}{3EJ} = \frac{Xl}{3EJ} + \frac{Yl}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \Rightarrow -\frac{Yl}{3EJ} - \frac{Xl}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} = \frac{Yl}{4EJ} \end{cases}$$

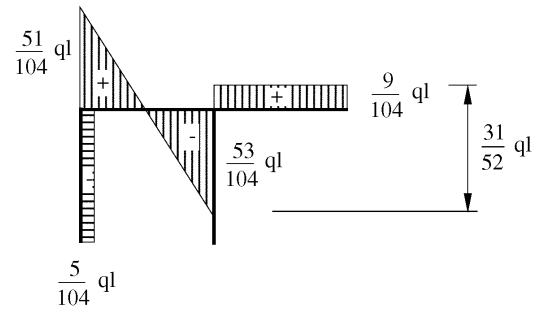
$$\begin{cases} 16X + 4Y = ql^2 \\ 4X + 14Y = ql^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{5}{104} ql^2 \\ Y = \frac{3}{52} ql^2 \end{cases} \begin{cases} \varphi_B = -\frac{5}{312} \frac{ql^3}{EJ} \\ \varphi_C = \frac{3}{208} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$



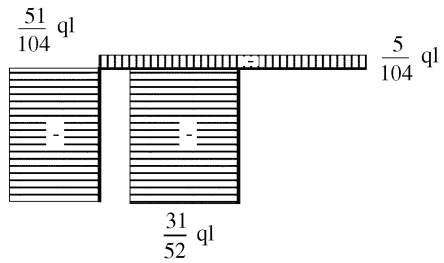
• $\equiv$ punti di flesso



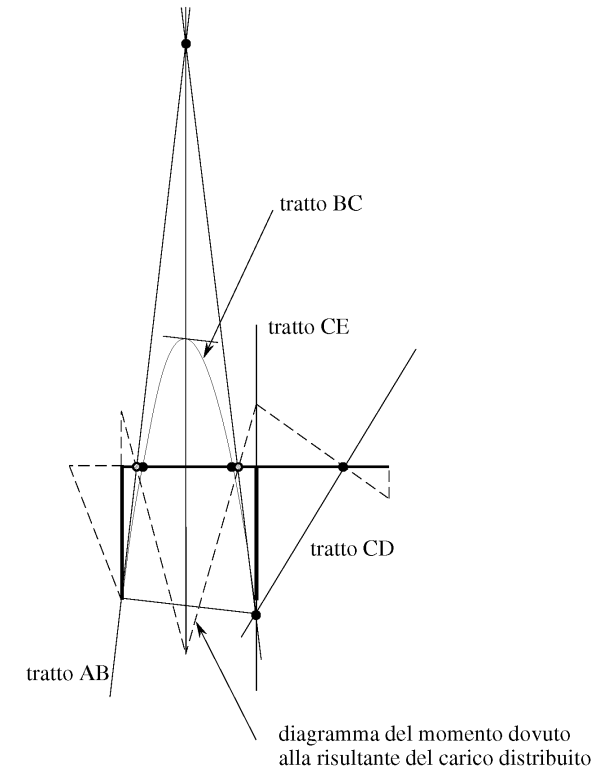
(M)



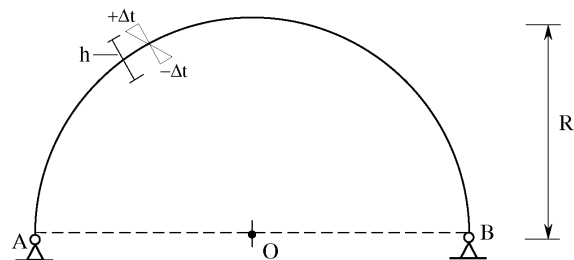
(T)



(N)

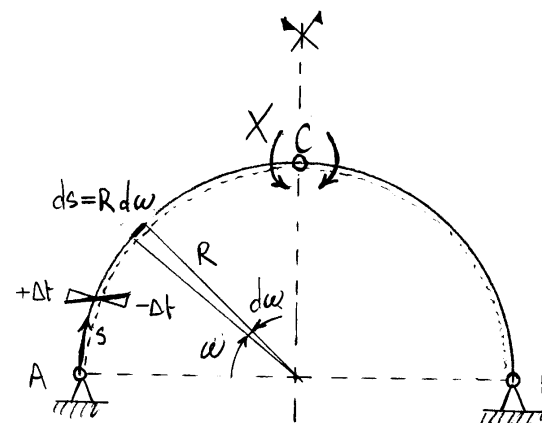


3.3 Esercizio 18



a) Risolvere la struttura iperstatica

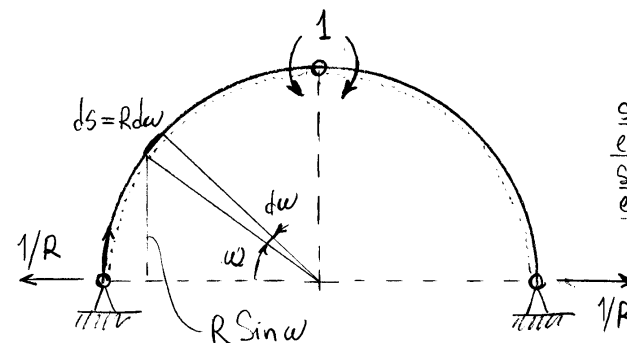
b) Scrivere le equazioni del momento flettente, del taglio e della forza normale e disegnare i relativi diagrammi, usando quale fondamentale la linea AB orizzontale



(r)
schema degli
spostamenti e
deformazioni
congruenti

Per simmetria $\varphi_{CA} = \varphi_{CB} = 0$

Calcolo di φ_{CA} con il principio dei lavori virtuali



(f)
schema delle forze
e caratteristiche della
solllecitazione
equilibrata

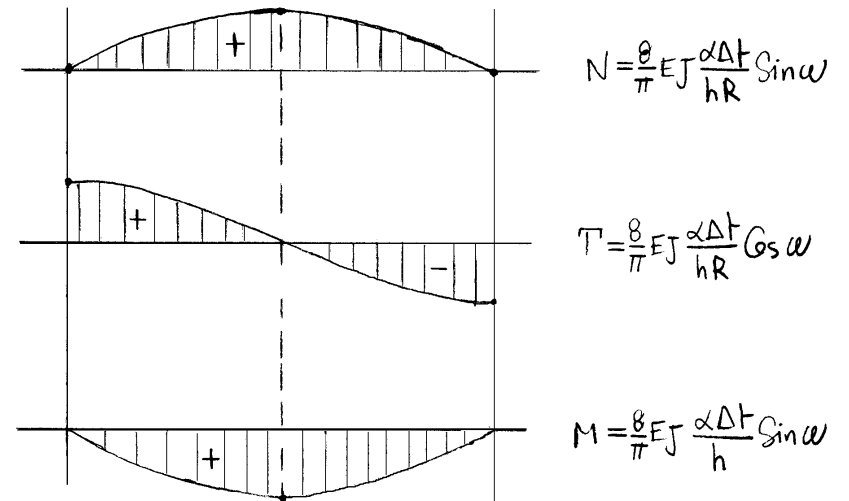
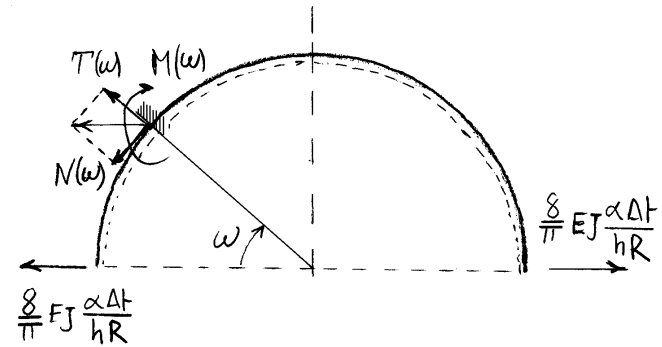
$$\begin{cases} M^{(f)} = \frac{1}{R} R \sin w = \sin w \\ K^{(r)} = X \frac{M^{(f)}}{EJ} - \frac{2\alpha \Delta t}{h} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} M^{(F)} \left\{ X \frac{M^{(F)}}{EJ} - \frac{2\alpha\Delta t}{h} \right\} R d\omega = 0$$

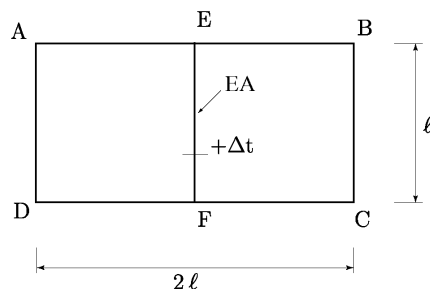
$$\frac{XR}{EJ} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega d\omega - 2\alpha\Delta t \frac{R}{h} = 0$$

$$\frac{XR}{EJ} \left[\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sin 2\omega \right]_0^{\pi/2} = 2\alpha\Delta t \frac{R}{h}$$

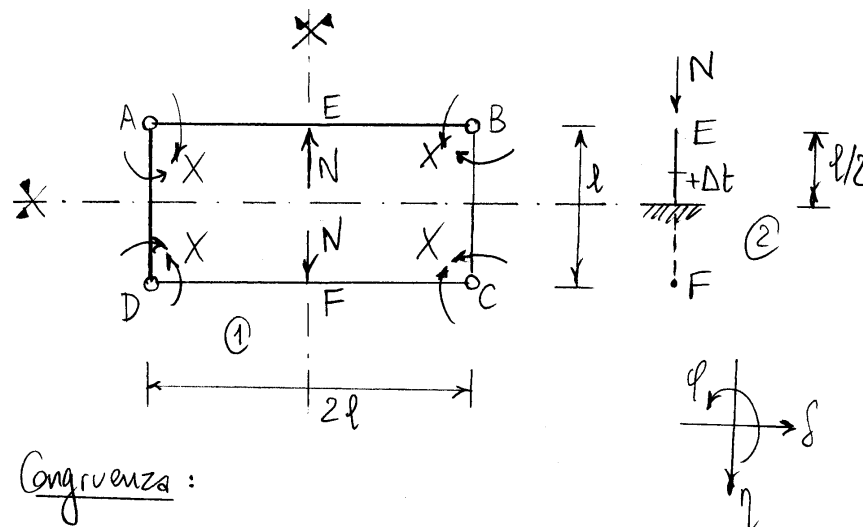
$$X = \frac{8}{\pi} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h}$$



3.4 Esercizio 19



Risolvere la struttura assegnata, soggetta ad una variazione termica uniforme sul ritto EF, tenendo conto della deformabilità assiale di tale ritto.
Disegnare i diagrammi del momento, del taglio e della forza normale.
Disegnare la deformata della struttura.



Congruenza:

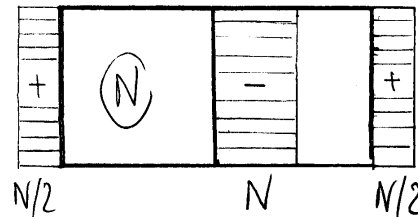
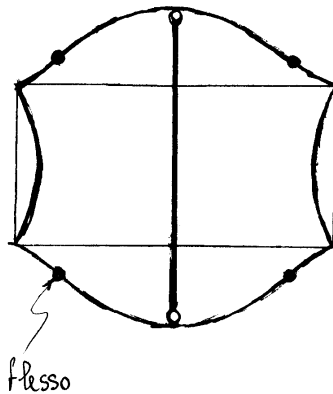
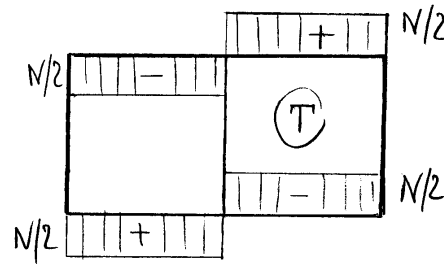
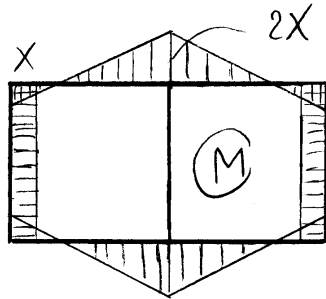
$$\varphi_{AD}^{(1)} = \varphi_{AB}^{(1)} \Rightarrow \frac{Xl}{2EJ} = -\frac{X(2l)}{2EJ} + \frac{N(2l)^2}{16EJ}$$

$$l_E^{(1)} = l_E^{(2)} \Rightarrow \frac{X(2l)^2}{8EJ} - \frac{N(2l)^3}{48EJ} = \frac{N(l/2)}{EA} - \alpha \Delta t \frac{l}{2}$$

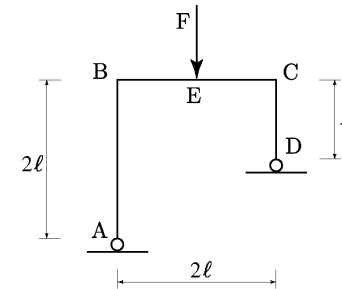
$$\begin{cases} X = Nl/6 \\ \frac{4Nl^3}{48EJ} - \frac{8Nl^3}{48EJ} = \frac{Nl}{2EA} - \alpha \Delta t \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\frac{Nl^3}{12EJ} + \frac{Nl}{2EA} = \alpha \Delta t \frac{l}{2}$$

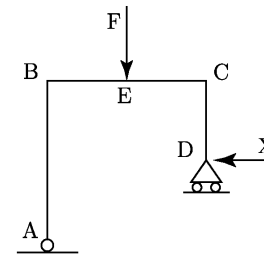
$$\left\{ \begin{aligned} N &= \frac{6EJ\alpha\Delta t}{\left(1 + \frac{6J}{Al^2}\right)l^2} \\ X &= \frac{EJ\alpha\Delta t}{\left(1 + \frac{6J}{Al^2}\right)l} \end{aligned} \right.$$



3.5 Esercizio 20

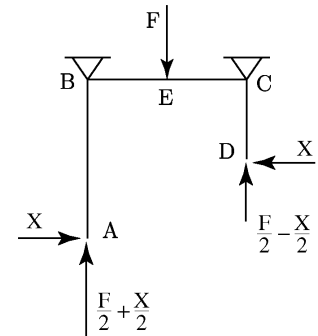


- 1) Risolvere la struttura iperstatica;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Calcolare le rotazioni dei nodi B e C, lo spostamento orizzontale della travata e lo spostamento verticale del punto di applicazione del carico concentrato;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) disegnare la curva delle pressioni.



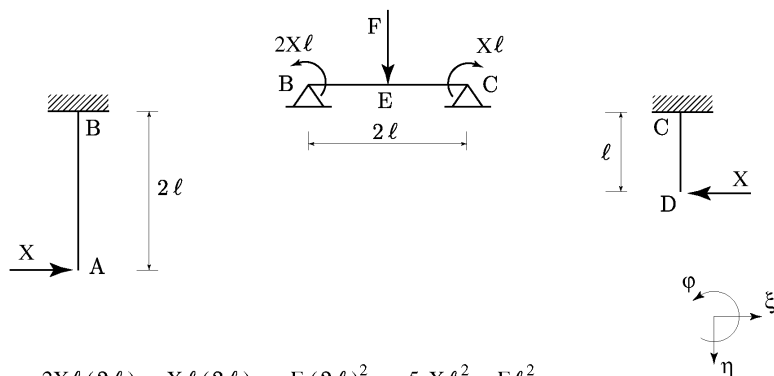
Struttura principale isostatica

Congruenza: $\xi_D = 0$



Struttura equivalente
(a meno di una traslazione orizzontale)

Congruenza: $\xi_D = \xi_A$



$$\varphi_B = \frac{2X\ell(2\ell)}{3EJ} + \frac{X\ell(2\ell)}{6EJ} - \frac{F(2\ell)^2}{16EJ} = \frac{5}{3} \frac{X\ell^2}{EJ} - \frac{F\ell^2}{4EJ}$$

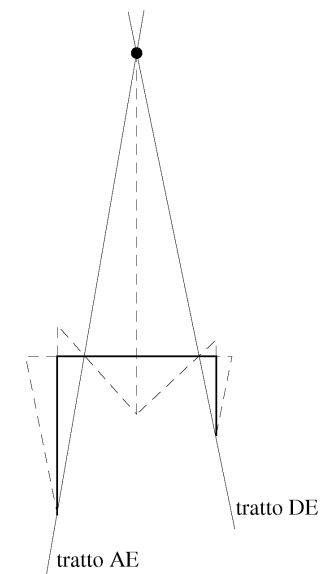
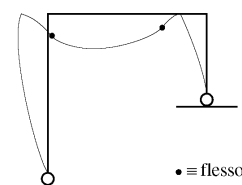
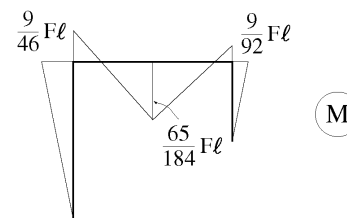
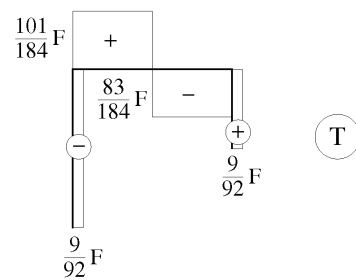
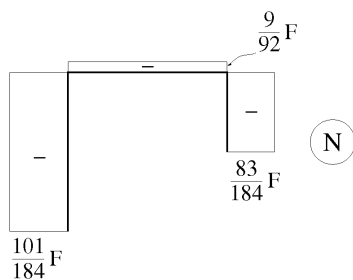
$$\varphi_C = -\frac{2X\ell(2\ell)}{6EJ} - \frac{X\ell(2\ell)}{3EJ} + \frac{F(2\ell)^2}{16EJ} = -\frac{4}{3} \frac{X\ell^2}{EJ} + \frac{F\ell^2}{4EJ}$$

$$\xi_A = \frac{X(2\ell)^3}{3EJ} + \varphi_B(2\ell) = 6 \frac{X\ell^3}{EJ} - \frac{F\ell^3}{2EJ}$$

$$\xi_D = -\frac{X\ell^3}{3EJ} + \varphi_C\ell = -\frac{5}{3} \frac{X\ell^3}{EJ} + \frac{F\ell^3}{4EJ}$$

$$\xi_A = \xi_D \implies 6 \frac{X\ell^3}{EJ} - \frac{F\ell^3}{2EJ} = -\frac{5}{3} \frac{X\ell^3}{EJ} + \frac{F\ell^3}{4EJ} \implies \frac{23}{3} \frac{X\ell^3}{EJ} = \frac{3}{4} \frac{F\ell^3}{EJ}$$

$$X = \frac{9}{92} F$$



curva delle pressioni

Spostamenti e rotazioni:

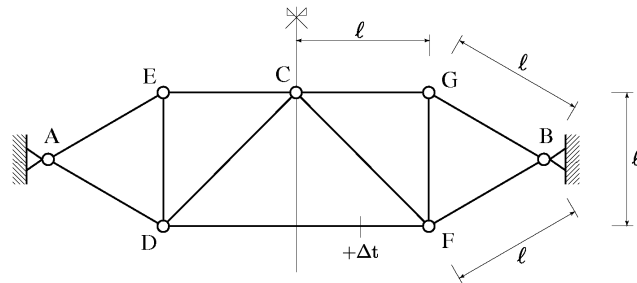
$$\varphi_B = -\frac{2}{23} \frac{F\ell^2}{EJ}$$

$$\varphi_C = \frac{11}{92} \frac{F\ell^2}{EJ}$$

$$\xi_B = \xi_C = -\frac{2}{23} \frac{F\ell^3}{EJ}$$

$$\eta_E = -\frac{2X\ell(2\ell)^2}{16EJ} - \frac{X\ell(2\ell)^2}{16EJ} + \frac{F(2\ell)^3}{48EJ} = \frac{103}{1104} \frac{F\ell^3}{EJ} = .093 \frac{F\ell^3}{EJ}$$

3.6 Esercizio 21



- 1) Risolvere la struttura iperstatica illustrata soggetta ad una variazione termica uniforme nell'asta DF, supponendo che tutte le aste abbiano area uguale;
- 2) Compilare una tabella riassuntiva che riporti la forza normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
- 3) Calcolare lo spostamento verticale del nodo C;
- 4) Valutare la variazione termica minima che rende instabile per flessione laterale l'asta DF, supponendo che le cerniere in corrispondenza dei nodi siano sferiche (i valori numerici necessari per il calcolo sono riportati di seguito).
- 5) Disegnare la deformata elastica della struttura;

Valori numerici (da utilizzare per il quesito no 4):

$$\ell = 2.00\text{m}$$

$$\alpha = 0.000012\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

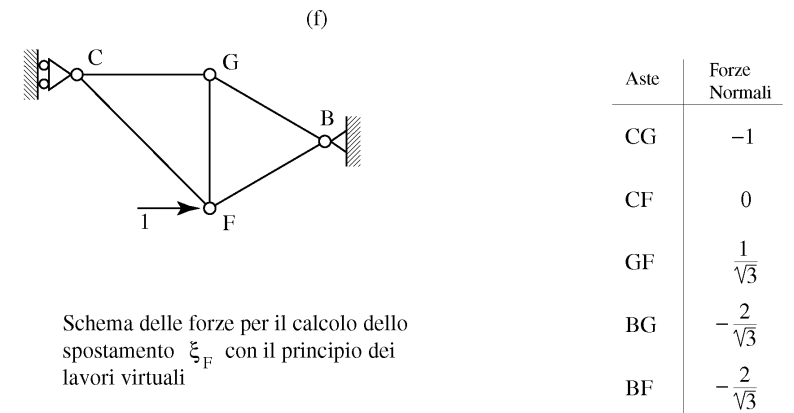
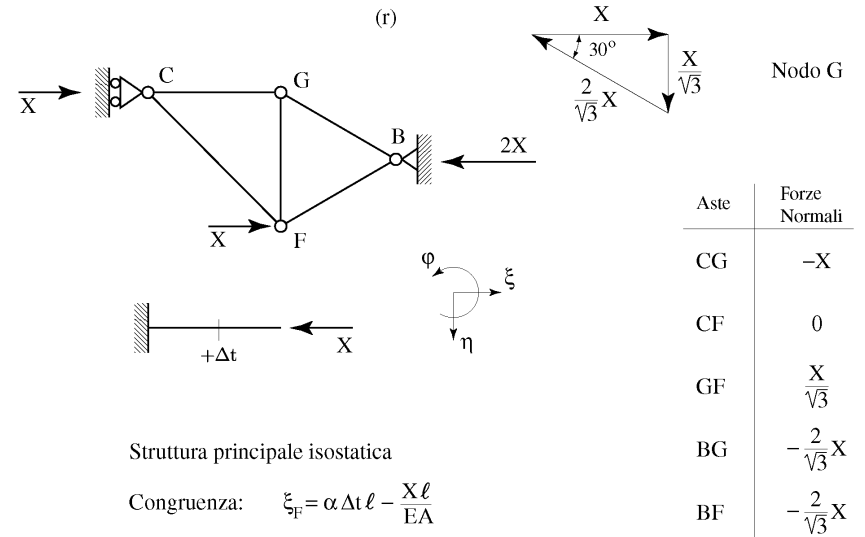
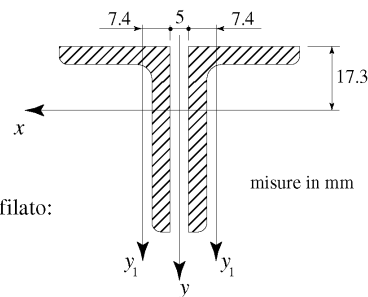
2 Profilati accoppiati
L UNI EU 57 - 50x30x5

Valori relativi al singolo profilato:

$$A = 3.78\text{ cm}^2$$

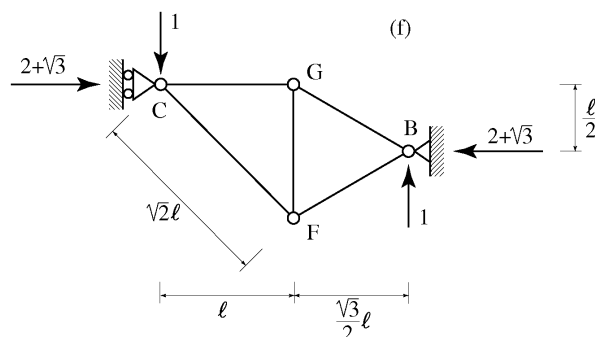
$$J_x = 9.36\text{ cm}^4$$

$$J_{y1} = 2.51\text{ cm}^4$$

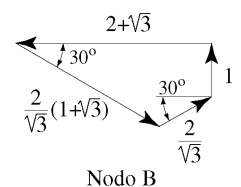


$$L_e = \xi_F, \quad L_i = \sum_h N_h^{(f)} \frac{N_h^{(r)} \ell_h}{EA} = \frac{X\ell}{EA} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = 4 \frac{X\ell}{EA}$$

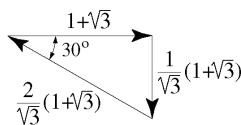
$$\text{Congruenza: } 4 \frac{X\ell}{EA} = \alpha \Delta t \ell - \frac{X\ell}{EA} \implies \boxed{X = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t}$$



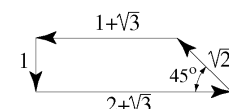
Schema delle forze per il calcolo dello spostamento η_C con il principio dei lavori virtuali



Nodo B



Nodo G



Nodo C

Aste	Forze Normali
CG	$-(1+\sqrt{3})$
CF	$-\sqrt{2}$
GF	$\frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$L_e = \eta_C$$

$$L_i = \sum_h N_h^{(f)} \frac{N_h^{(r)} \ell_h}{EA} = \frac{X\ell}{EA} \left\{ (1+\sqrt{3}) + \frac{1}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3} \right\}$$

$$= \frac{X\ell}{EA} \left\{ \frac{8}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3} \right\} = \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \frac{X\ell}{EA}$$

$$\eta_C = \frac{1}{5} \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \alpha \Delta t \ell$$

Aste	Tipo	Sforzi Normali (a meno di $E\alpha\Delta t$)
CG	Puntone	$\frac{1}{5}$
CF	=====	0
GF	Tirante	$\frac{1}{5\sqrt{3}}$
BG	Puntone	$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
BF	Puntone	$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
DF	Puntone	$\frac{1}{5}$

$$\ell = 2.00\text{m}$$

$$\alpha = 0.000012\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

2 Profilati accoppiati
L UNI EU 57 - 50x30x5

Valori relativi al singolo profilato:

$$A = 3.78\text{ cm}^2$$

$$J_x = 9.36\text{ cm}^4$$

$$J_{y1} = 2.51\text{ cm}^4$$

Valori relativi ai due profilati accoppiati:

$$A = 2 \times 3.78 = 7.56\text{ cm}^2$$

$$J_x = 2 \times 9.36 = 18.7\text{ cm}^4$$

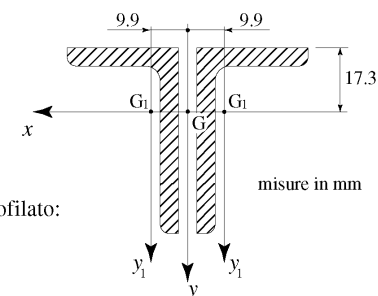
$$J_y = 2 \times (2.51 + 3.78 \times 0.99^2) = 12.4\text{ cm}^4$$

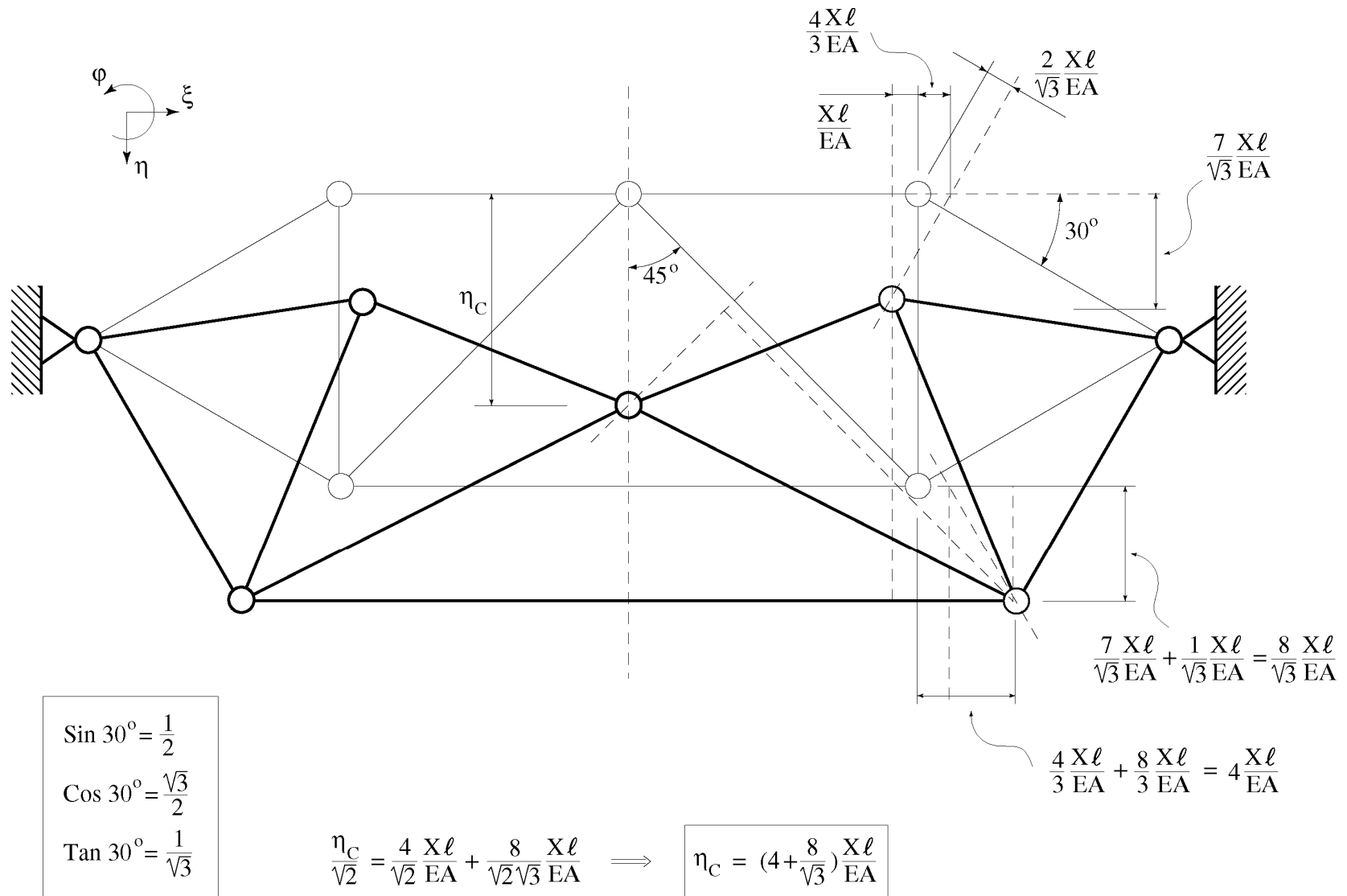
Equazione determinatrice della variazione critica di temperatura:

$$\pi^2 \frac{EJ_y}{(2\ell)^2} = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t_{cr}$$

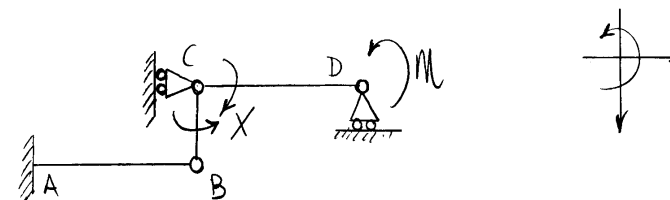
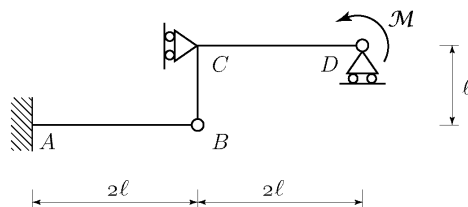
$$\Delta t_{cr} = \frac{5}{4} \frac{\pi^2 J_y}{\alpha \ell^2 A} = \frac{5 \times \pi^2 \times 12.4}{4 \times 0.000012 \times (200)^2 \times 7.56}$$

$$\Delta t_{cr} = 42\text{ }^\circ\text{C}$$





3.7 Esercizio 22



Struttura principale isostatica

Congruenza: $\varphi_{CD} = \varphi_{CB}$

1) Risolvere la struttura una volta iperstatica con il metodo delle forze, utilizzando il metodo cinematico per la scrittura dell'equazione di congruenza;

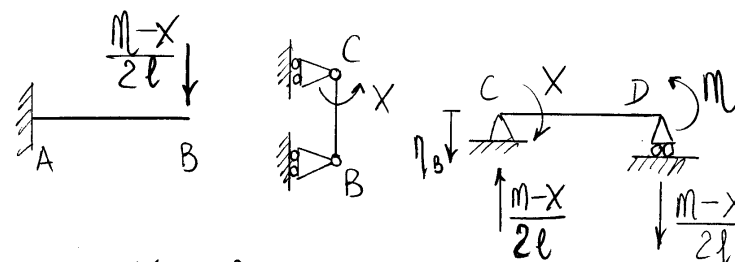
2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni e disegnare la curva delle pressioni;

3) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;

4) Disegnare la deformata elastica della struttura;

5) Calcolare la rotazione e lo spostamento verticale del nodo C;

6) Risolvere la struttura utilizzando il principio dei lavori virtuali per la scrittura dell'equazione di congruenza.

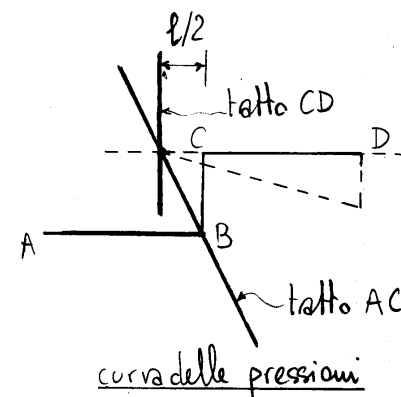
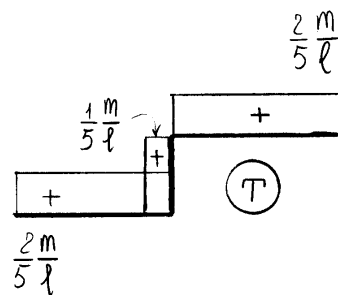
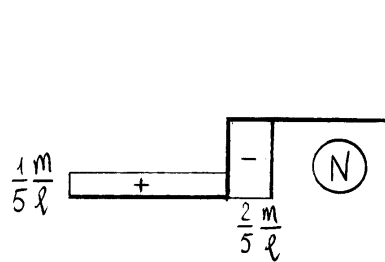
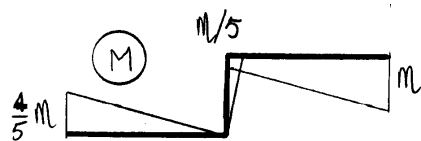
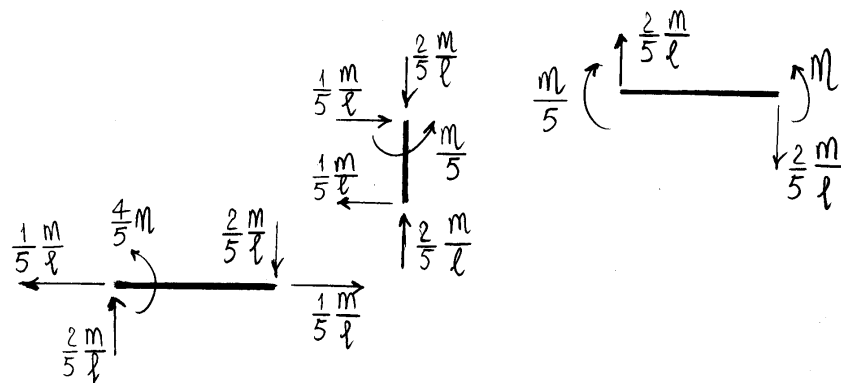


$$\begin{cases} \eta_B = \frac{(M-X)(2l)^3}{3EJ} \\ \varphi_{CB} = \frac{Xl}{3EJ} \\ \varphi_{CD} = -\frac{X(2l)}{3EJ} - \frac{M(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_B}{2l} \end{cases}$$

Equazione risolvente:

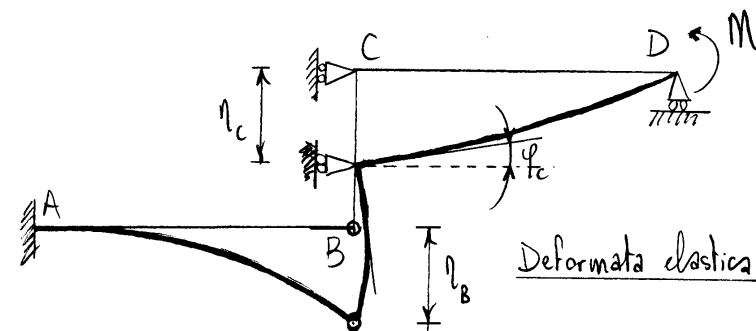
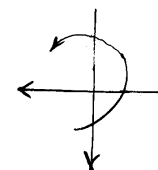
$$-\frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} - \frac{1}{3} \frac{ml}{EJ} + \frac{2}{3} \frac{ml}{EJ} - \frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{Xl}{EJ}$$

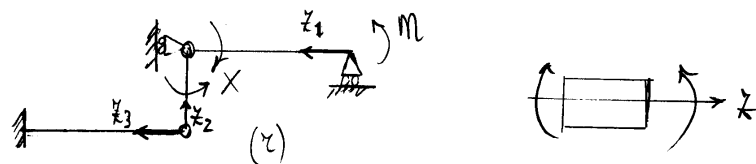
$$\frac{5}{3} X = \frac{1}{3} m \Rightarrow X = \frac{1}{5} m$$



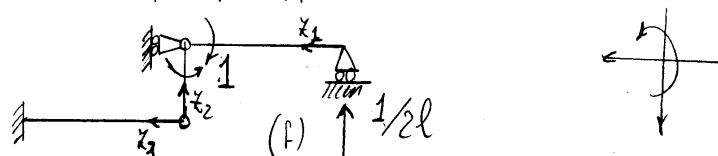
$$\eta_c = \eta_b = \frac{\frac{2}{5} \frac{m}{l} (2l)^3}{3EJ} = \frac{16}{15} \frac{ml^2}{EJ}$$

$$\varphi_c = \frac{(m/5)l}{3EJ} = \frac{1}{15} \frac{ml}{EJ}$$

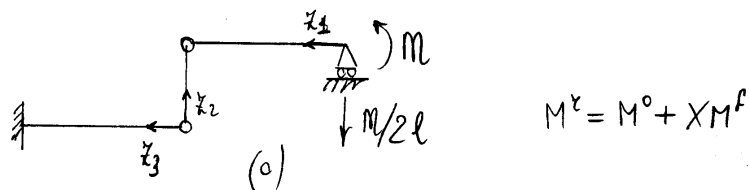


Principio dei lavori virtuali

struttura principale (spostamenti-deformazioni)



schema delle forze-caratteristiche della sollecitazione



schema dei carichi

$$\begin{cases} M^f(z_1) = -\frac{1}{2l} z_1 \\ M^o(z_1) = \frac{m}{2l} z_1 - m \\ M^r(z_1) = \frac{m-X}{2l} z_1 - m \end{cases} \begin{cases} M^f(z_2) = \frac{1}{l} z_2 \\ M^o(z_2) = 0 \\ M^r(z_2) = \frac{X}{l} z_2 \end{cases} \begin{cases} M^f(z_3) = -\frac{1}{2l} z_3 \\ M^o(z_3) = \frac{m}{2l} z_3 \\ M^r(z_3) = \frac{m-X}{2l} z_3 \end{cases}$$

$$L_{ve} = \varphi_{CB} - \varphi_{CD}$$

$$L_{vi} = \int_0^{2l} \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{m}{2l} z_1 - \frac{m-X}{4l^2} z_1^2 \right\} dz_1$$

$$+ \int_0^l \frac{X}{EJl^2} z_2^2 dz_2$$

$$- \int_0^{2l} \frac{m-X}{EJ 4l^2} z_3^2 dz_3$$

$$= \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{m}{4l} (2l)^2 - \frac{m-X}{12l^2} (2l)^3 \right.$$

$$+ \frac{X}{3l^2} l^3$$

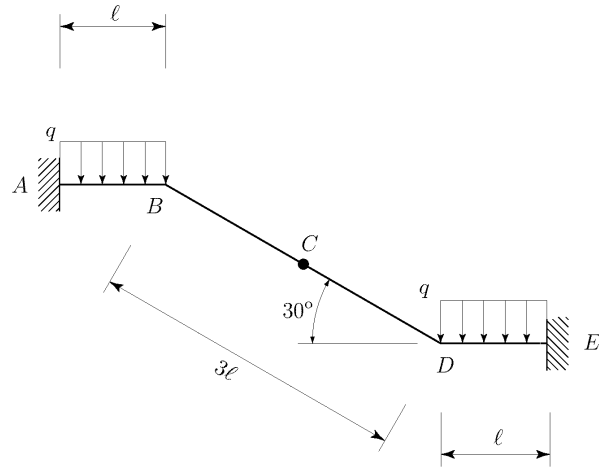
$$\left. - \frac{m-X}{12l^2} (2l)^3 \right\}$$

$$= \frac{l}{EJ} \left\{ m - \frac{4}{3} (m-X) + \frac{1}{3} X \right\}$$

$$= \frac{l}{EJ} \left\{ -\frac{1}{3} m + \frac{5}{3} X \right\}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \varphi_{CB} - \varphi_{CD} = \frac{l}{EJ} \left\{ -\frac{1}{3} m + \frac{5}{3} X \right\}$$

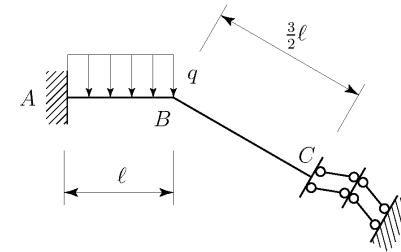
3.8 Esercizio 23



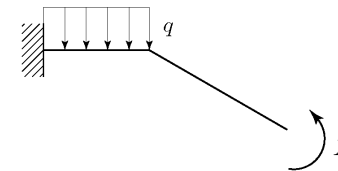
Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C, e in particolare:

- 1) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 2) Calcolare rotazione e spostamento verticale del nodo B e disegnare la deformata elastica;
- 3) Disegnare la curva delle pressioni.

Schema polar emisimmetrico



Schema equivalente



Struttura principale

Congruenza: $\varphi_C = 0$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{X\ell}{EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{X(\frac{3}{2}\ell)}{EJ} + \varphi_B = \frac{5}{2} \frac{X\ell}{EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} \end{cases}$$

$$\varphi_C = 0 \Rightarrow X = \frac{q\ell^2}{15}$$

Rotazione nodo B:

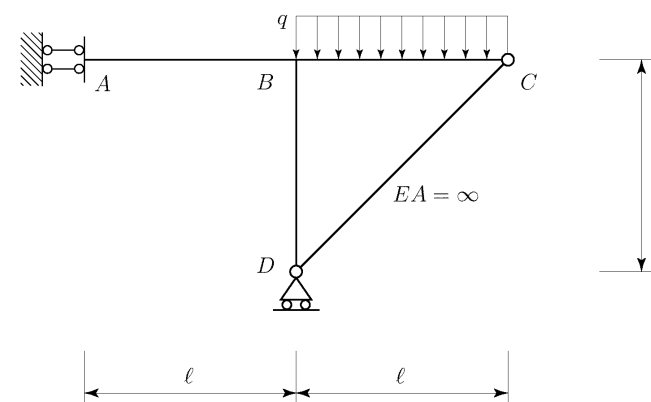
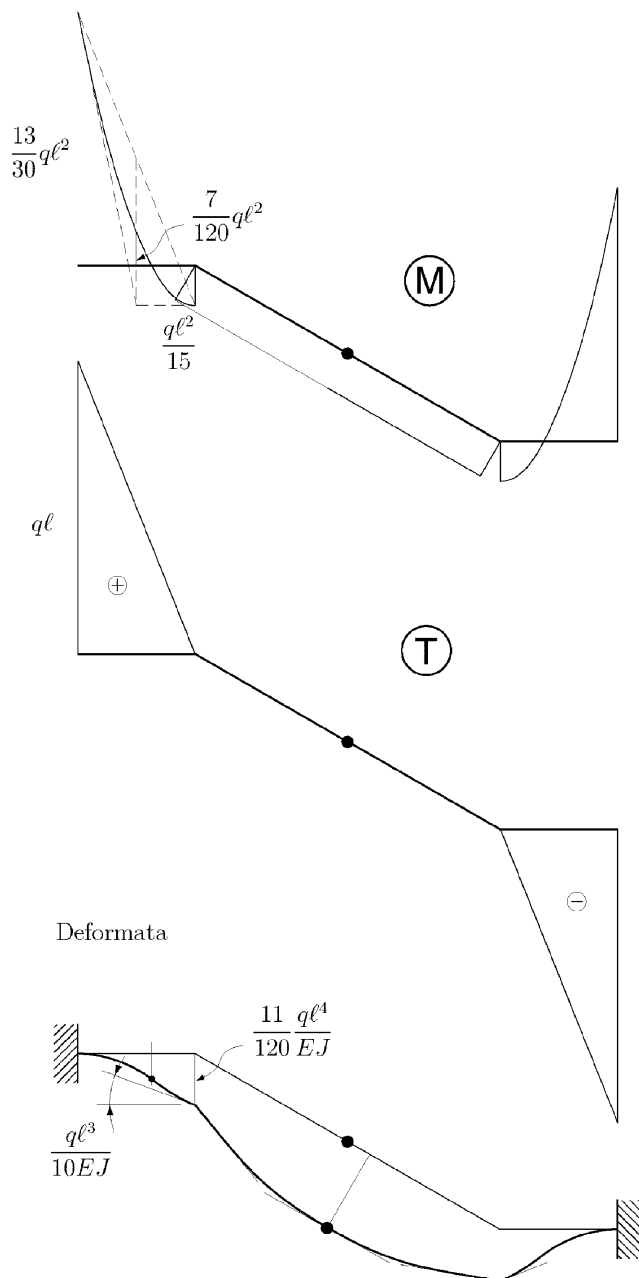
$$\varphi_B = \frac{q\ell^3}{15EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} = -\frac{q\ell^3}{10EJ}$$

Spostamento verticale nodo B:

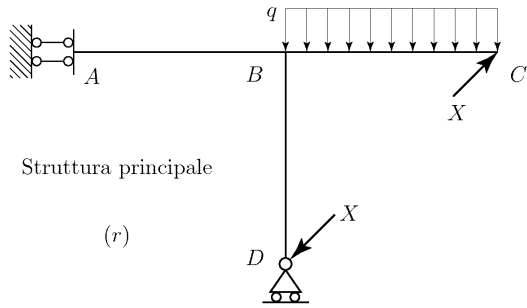
$$\eta_B = -\frac{X\ell^2}{2EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} = \frac{11}{120} \frac{q\ell^4}{EJ}$$

La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette parallele nel tratto AB e non esiste nel tratto BC

3.9 Esercizio 24



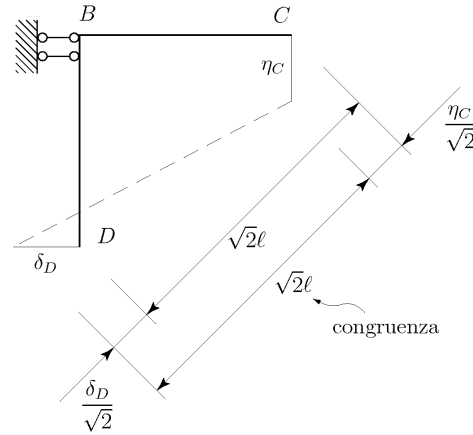
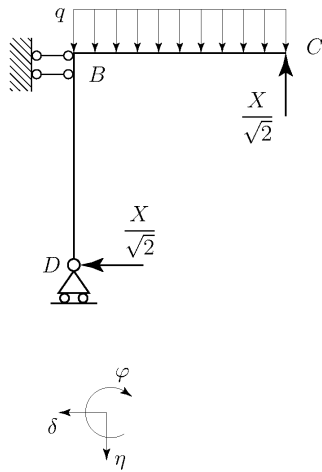
- 1) Risolvere la struttura con il metodo delle forze, utilizzando, per il calcolo degli spostamenti che rientrano nell'equazione di congruenza, sia il metodo cinematico che il principio dei lavori virtuali;
- 2) Calcolare le reazioni interne ed esterne e disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Individuare la curva delle pressioni;
- 5) Calcolare la rotazione del nodo B, gli spostamenti dei nodi C e D e la rotazione del pendolo CD.



Struttura principale

(r)

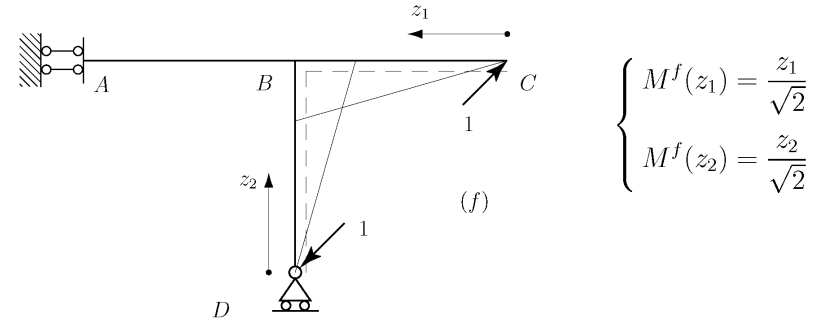
Tenuto conto dell'indeformabilità assiale del pendolo CD , la congruenza richiede che la distanza dei punti C e D resti pari a $\sqrt{2}\ell$ anche dopo la deformazione. Il punto B è un punto fisso e la sua rotazione non influisce sulla condizione di congruenza. Si può allora scrivere la condizione di congruenza facendo riferimento alla struttura con il nodo B vincolato a non ruotare.



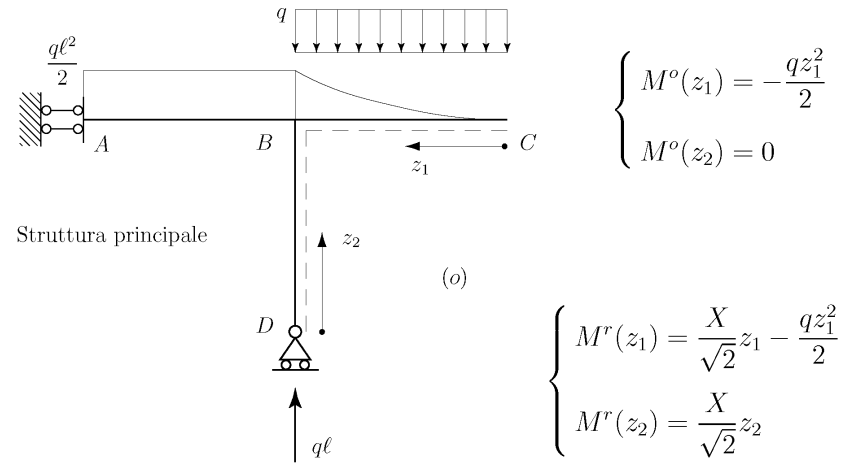
Congruenza: $\frac{\delta_D}{\sqrt{2}} = \frac{\eta_C}{\sqrt{2}}$ da cui: $\delta_D = \eta_C$

$$\begin{cases} \delta_D = \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} \\ \eta_C = -\frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} \end{cases} \Rightarrow 2 \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} = \frac{q\ell^4}{8EJ} \Rightarrow X = \frac{3\sqrt{2}}{16} q\ell$$

Principio dei lavori virtuali



$$\begin{cases} M^f(z_1) = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \\ M^f(z_2) = \frac{z_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



Struttura principale

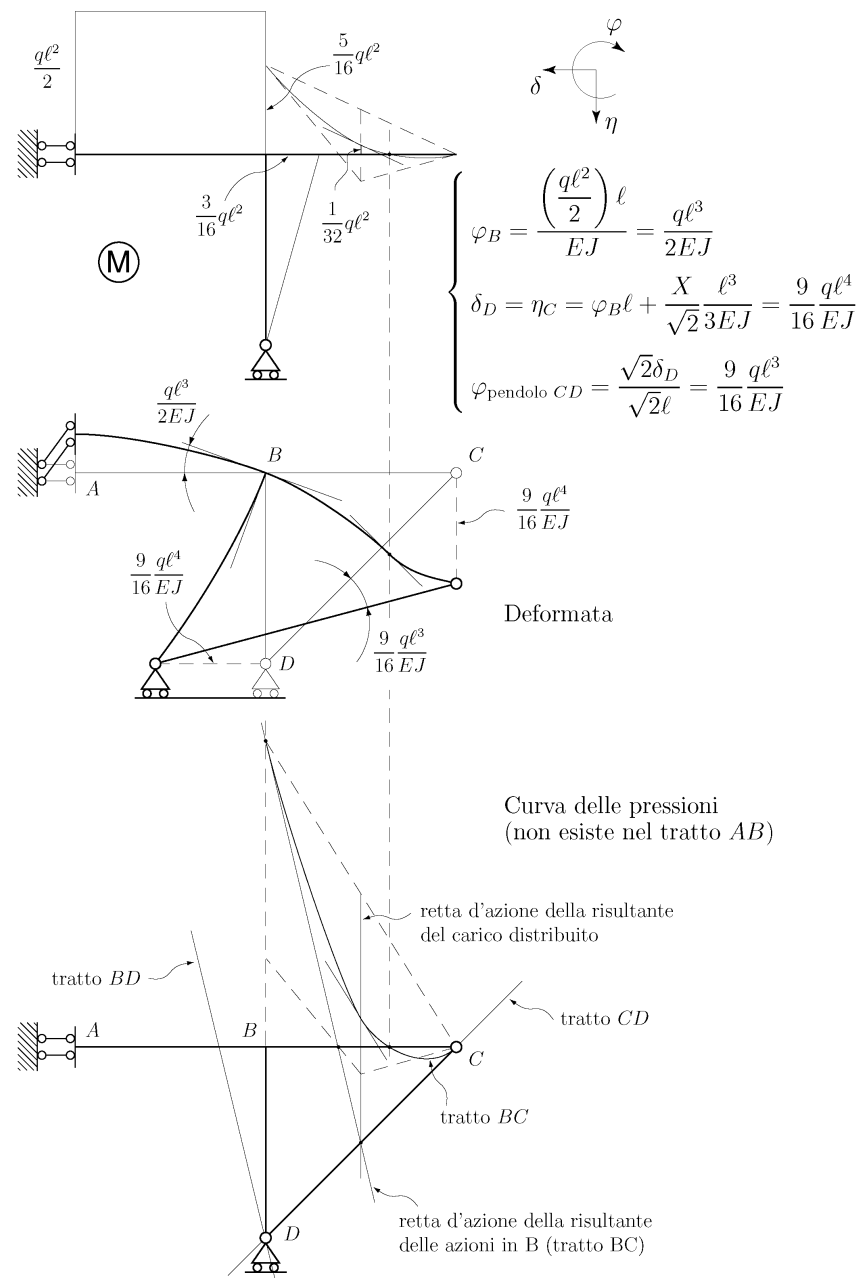
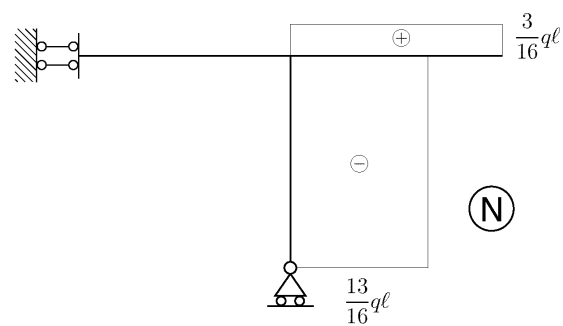
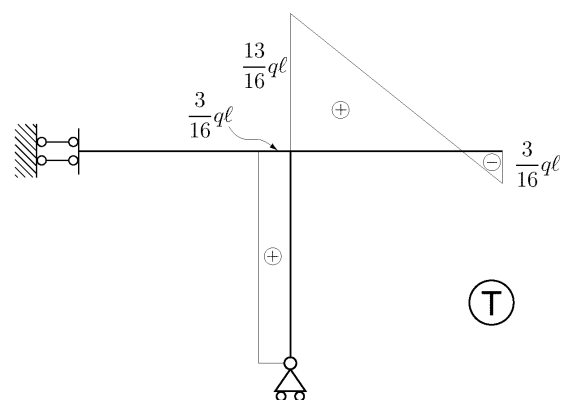
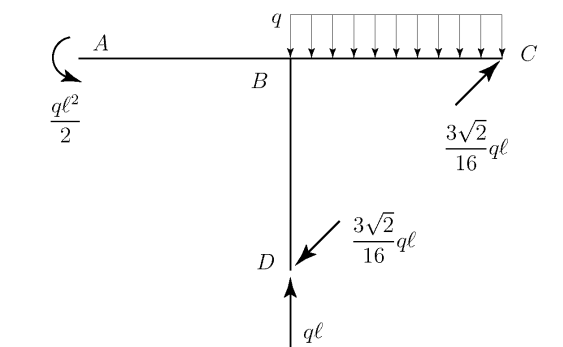
(o)

$$\begin{cases} M^o(z_1) = -\frac{qz_1^2}{2} \\ M^o(z_2) = 0 \end{cases}$$

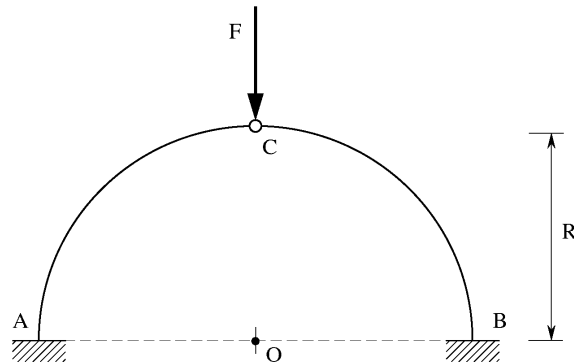
$$\begin{cases} M^r(z_1) = \frac{X}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{qz_1^2}{2} \\ M^r(z_2) = \frac{X}{\sqrt{2}} z_2 \end{cases}$$

Congruenza:

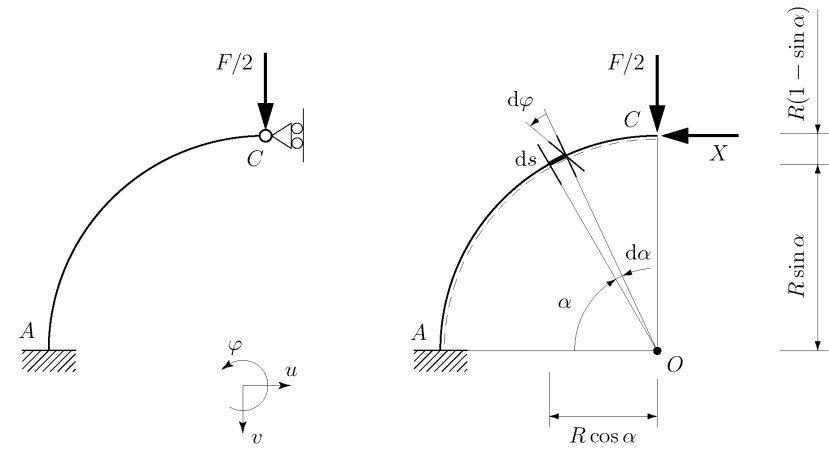
$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \frac{z_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{qz_1^2}{2} \right) \frac{1}{EJ} dz_1 + \int_0^\ell \frac{z_2}{\sqrt{2}} \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{1}{EJ} dz_2 = 0 \\ & \Rightarrow 2 \frac{X}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^\ell - \frac{q}{2\sqrt{2}} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^\ell = 0 \\ & \Rightarrow \frac{X\ell^3}{3} = \frac{q\ell^4}{8\sqrt{2}} \Rightarrow X = \frac{3}{8\sqrt{2}} q\ell \end{aligned}$$



3.10 Esercizio 25



Risolvere la struttura iperstatica



Congruenza: $u_C = 0$

$$ds = R d\alpha$$

$$d\varphi = \frac{M}{EJ} R d\alpha$$

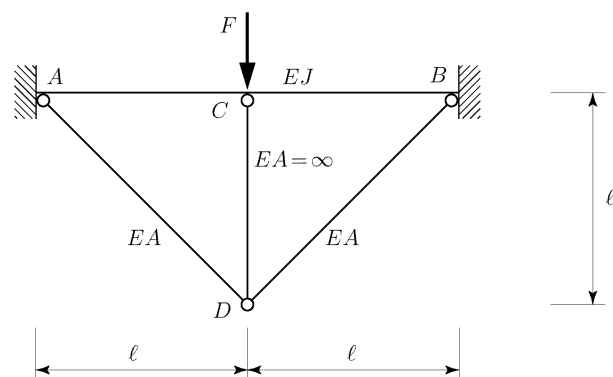
$$du_C = -d\varphi R(1 - \sin \alpha)$$

$$u_C = - \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EJ} R^2 (1 - \sin \alpha) d\alpha$$

$$M = -\frac{F}{2} R \cos \alpha + X R (1 - \sin \alpha)$$

Congruenza: $\frac{F}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha (1 - \sin \alpha) d\alpha - X \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \alpha)^2 d\alpha = 0$

3.11 Esercizio 26



- 1) Risolvere formalmente la struttura tenendo conto della deformabilità assiale dei pendoli AD e BD;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Individuare la curva delle pressioni.

Posto:

$F = 150 \text{ kN}$
 $\ell = 3 \text{ m}$
 $E = 200 \text{ kN/mm}^2$

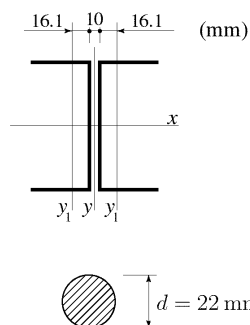
Asta AB (IPE 300):
 $J = 8356 \text{ cm}^4$
 $W = 557 \text{ cm}^3$

Pendolo CD (2 UPN 120):

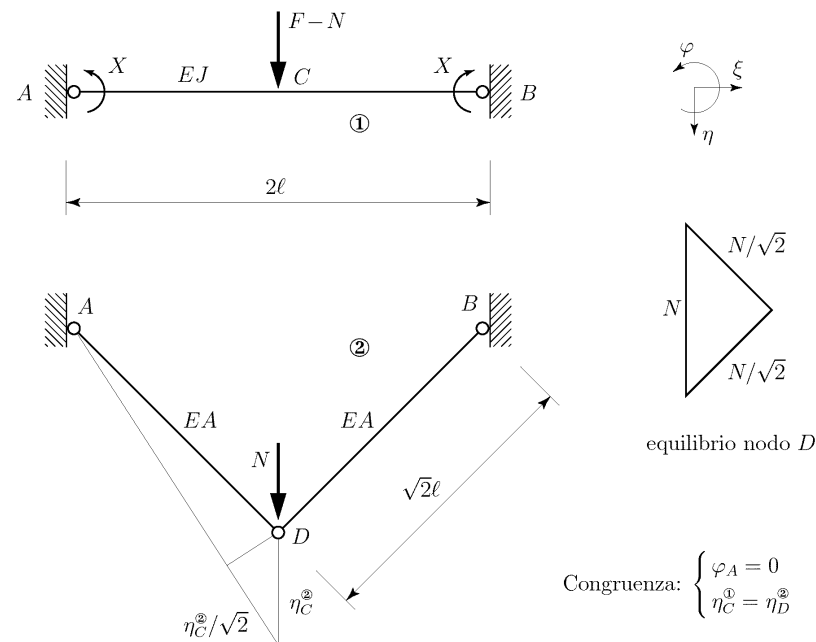
Caratteristiche del
singolo profilato:

$J_x = 364 \text{ cm}^4$
 $J_{y_1} = 43.1 \text{ cm}^4$
 $A = 17 \text{ cm}^2$

Pendoli AD e BD (tondi):



- 5) Calcolare la tensione normale massima nell'asta AB.



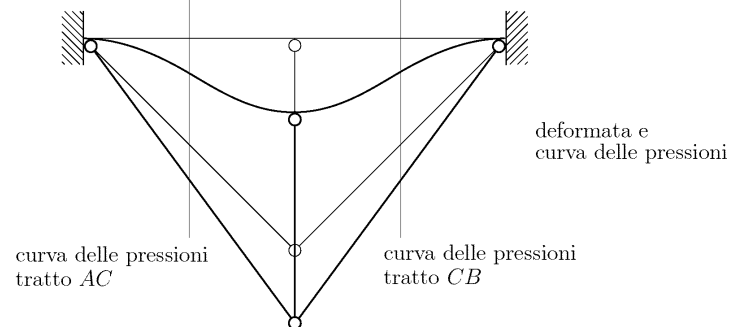
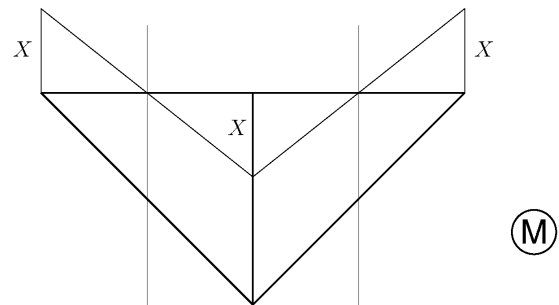
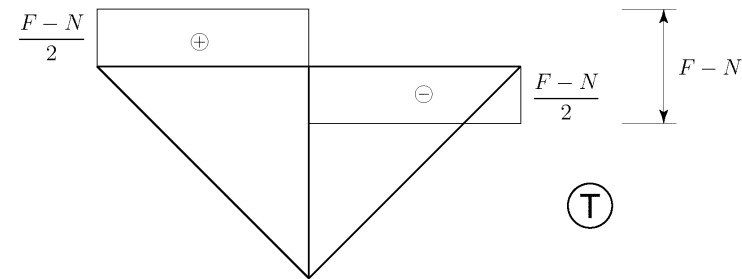
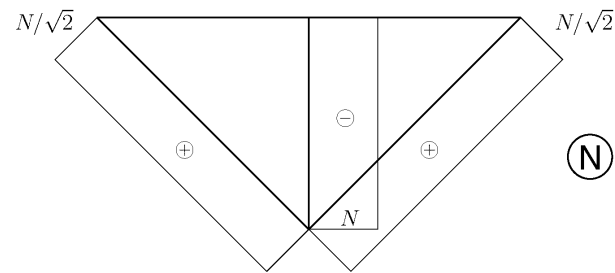
$$\text{Congruenza: } \begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \eta_C^{\text{I}} = \eta_D^{\text{II}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = \frac{X(2\ell)}{2EJ} - \frac{(F-N)(2\ell)^2}{16EJ} \\ \eta_C^{\text{I}} = \frac{(F-N)(2\ell)^3}{48EJ} - 2\frac{X(2\ell)^2}{16EJ} \\ \frac{\eta_D^{\text{II}}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{N}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{2}\ell}{EA} \Rightarrow \eta_D^{\text{II}} = \sqrt{2} \frac{N\ell}{EA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \Rightarrow X = (F-N) \frac{\ell}{4} \Rightarrow \eta_C^{\text{I}} = \frac{2}{3} \frac{X\ell^2}{EJ} - \frac{X\ell^2}{2EJ} = \frac{X\ell^2}{6EJ} \\ \eta_C^{\text{I}} = \eta_D^{\text{II}} \Rightarrow \frac{X\ell^2}{6EJ} = \sqrt{2} \frac{N\ell}{EA} \Rightarrow X = \beta N\ell \text{ dove } \beta = 6\sqrt{2} \frac{J}{A\ell^2} \end{cases}$$

Si ottiene infine:

$$\begin{cases} N = \frac{F}{1+4\beta} \\ X = \frac{\beta}{1+4\beta} F\ell \end{cases}$$



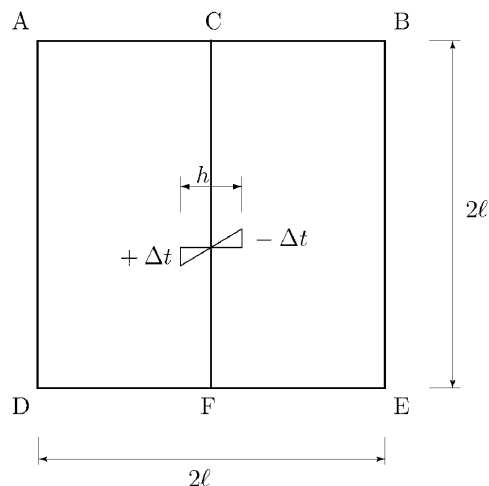
Nota l'area del tondo componente i pendoli AD e BD , restano determinati il coefficiente β e le reazioni N e X :

$$\beta = 6\sqrt{2} \frac{83\,560\,000}{380 \times 3\,000^2} = 0.207 \Rightarrow \begin{cases} N = 82 \text{ kN} \\ X = 51 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

tensione normale massima nell'asta AB

$$\sigma_{\max} = \frac{X}{W} = 92 \text{ N/mm}^2.$$

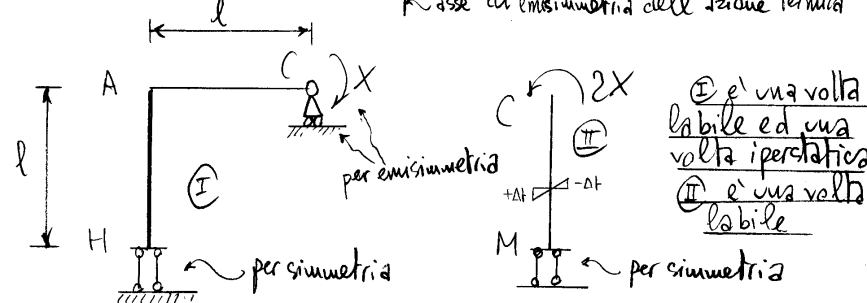
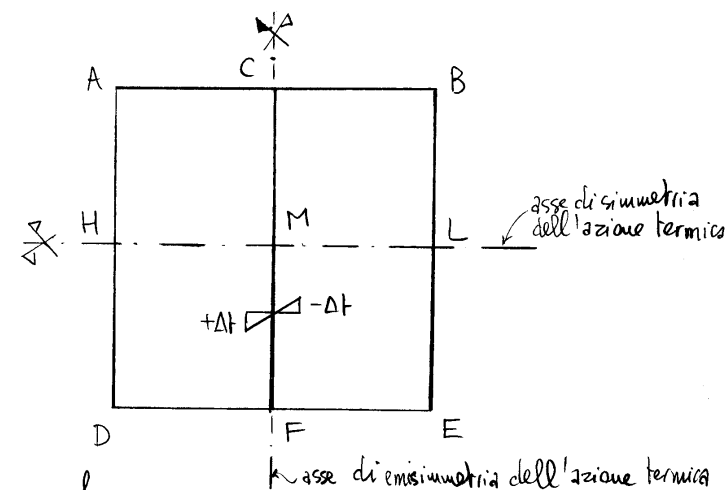
3.12 Esercizio 27



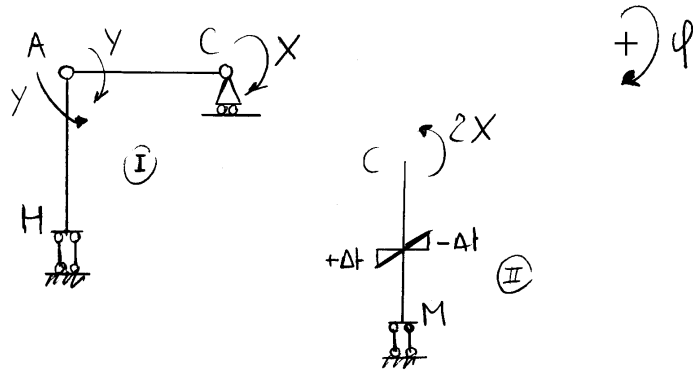
La struttura inflessa di figura è soggetta ad una distorsione termica a farfalla nel montante centrale:

- 1) Analizzare cinematicamente e staticamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura;
- 3) Disegnare i diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale per la struttura complessiva;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni per la struttura complessiva;
- 5) Calcolare la rotazione dei nodi A e C;
- 6) Disegnare la deformata della struttura complessiva.

La struttura risulta 3 volte labile e sei volte iperstatica. Presenta inoltre 2 assi di simmetria, 1 verticale rispetto al quale la distorsione termica è emisimmetrica, 1 orizzontale rispetto al quale la distorsione termica è simmetrica.



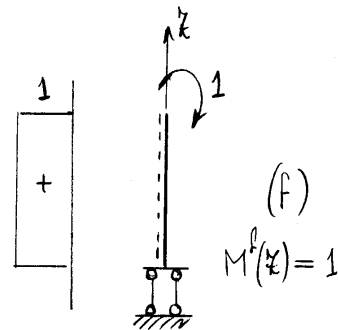
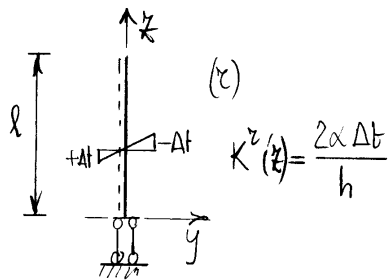
Per emisimmetria la forza normale in C di II è nulla
Per equilibrio alla traslazione orizzontale di II il taglio in C è nulla



Congruenza :

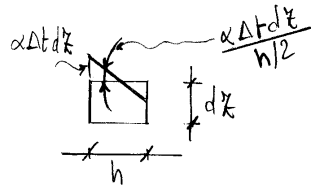
$$\begin{cases} \varphi_c^{(I)} = \varphi_c^{(II)} \\ \varphi_{AC} = \varphi_{AH} \end{cases}$$

$$\varphi_c^{(II)} = \varphi_c^{(II)}(\Delta t) + \varphi_c^{(II)}(X)$$



Principio dei lavori virtuali :

$$\varphi_c^{(II)}(\Delta t) = \int_0^l 1 \frac{2\alpha\Delta t}{h} dz = 2\alpha\Delta t \frac{l}{h}$$



$$\varphi_c^{(I)} = \frac{Xl}{3EJ} - \frac{Yl}{6EJ}$$

$$\varphi_c^{(II)} = 2\alpha\Delta t \frac{l}{h} - \frac{2Xl}{EJ}$$

$$\varphi_{AC} = -\frac{Xl}{6EJ} + \frac{Yl}{3EJ}$$

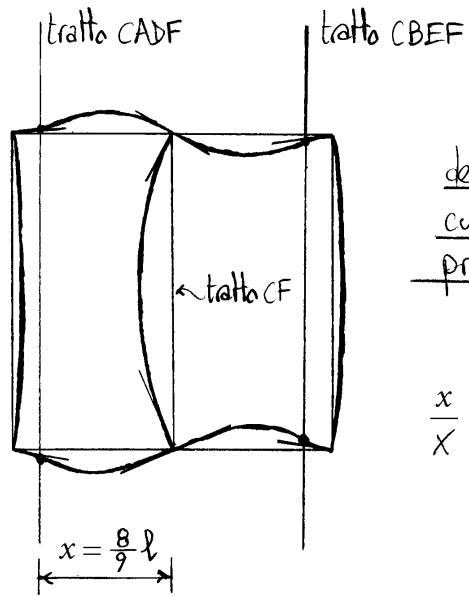
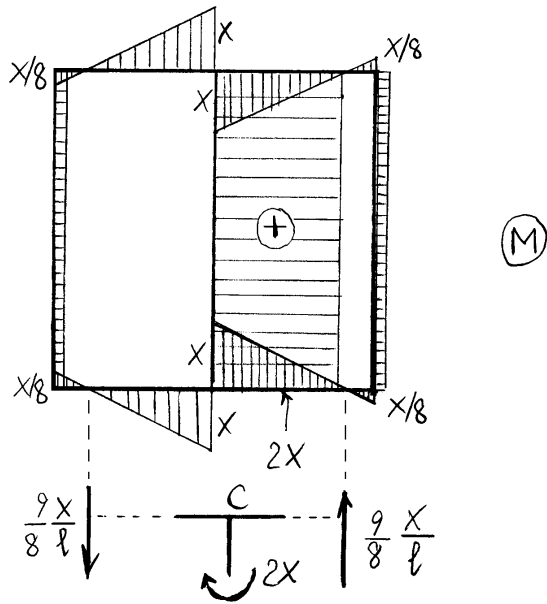
$$\varphi_{AH} = -\frac{Yl}{EJ}$$

Congruenza (moltiplicando per $6EJ/l$):

$$\begin{cases} 2X - Y = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} - 12X \\ -X + 2Y = -6Y \end{cases} \Rightarrow$$

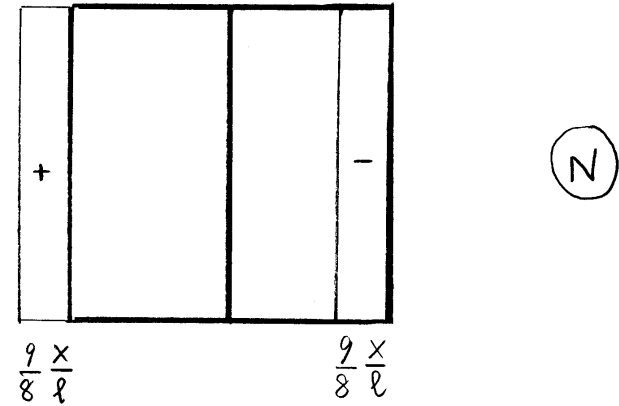
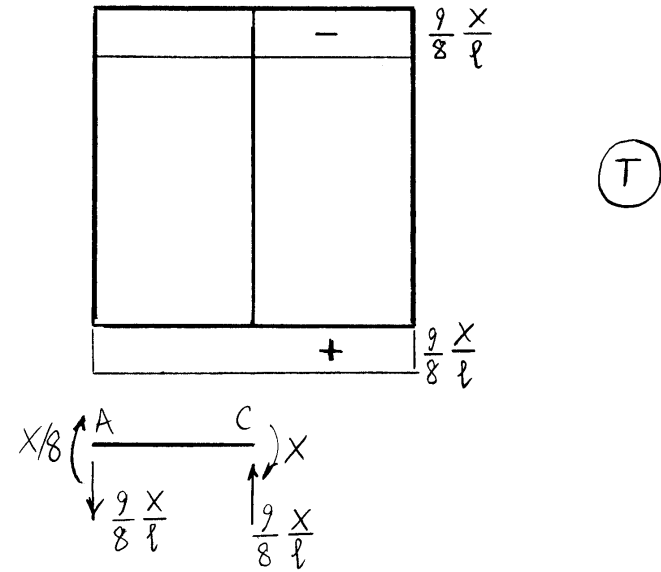
$$\Rightarrow \begin{cases} 14X - Y = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ Y = \frac{X}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{111}{8}X = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{32}{37}EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ Y = \frac{4}{37}EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \end{cases}$$



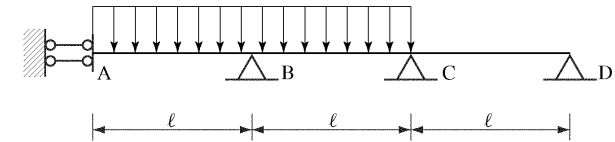
deformata e
curva delle
pressioni

$$\frac{x}{X} = \frac{l}{\frac{9}{8}X}$$



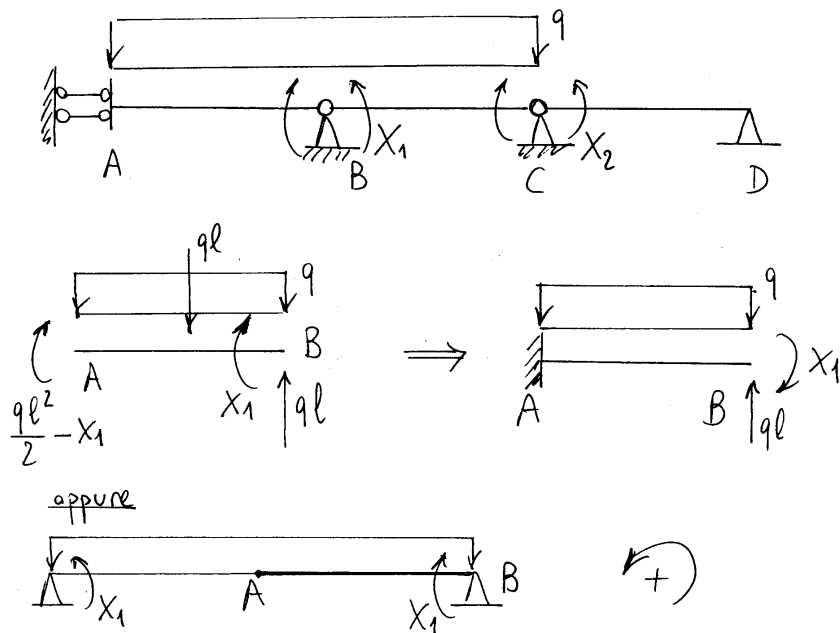
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= -\frac{\gamma l}{EJ} = -\frac{4}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \\ \varphi_C &= 2 \alpha \Delta t \frac{l}{h} - \frac{2 \times l}{EJ} = \frac{10}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \end{aligned} \right.$$

3.13 Esercizio 28



Data la trave continua di figura:

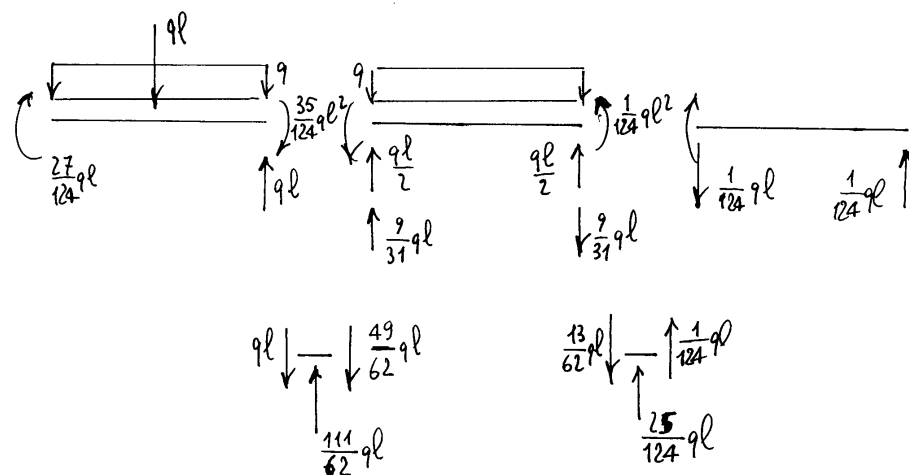
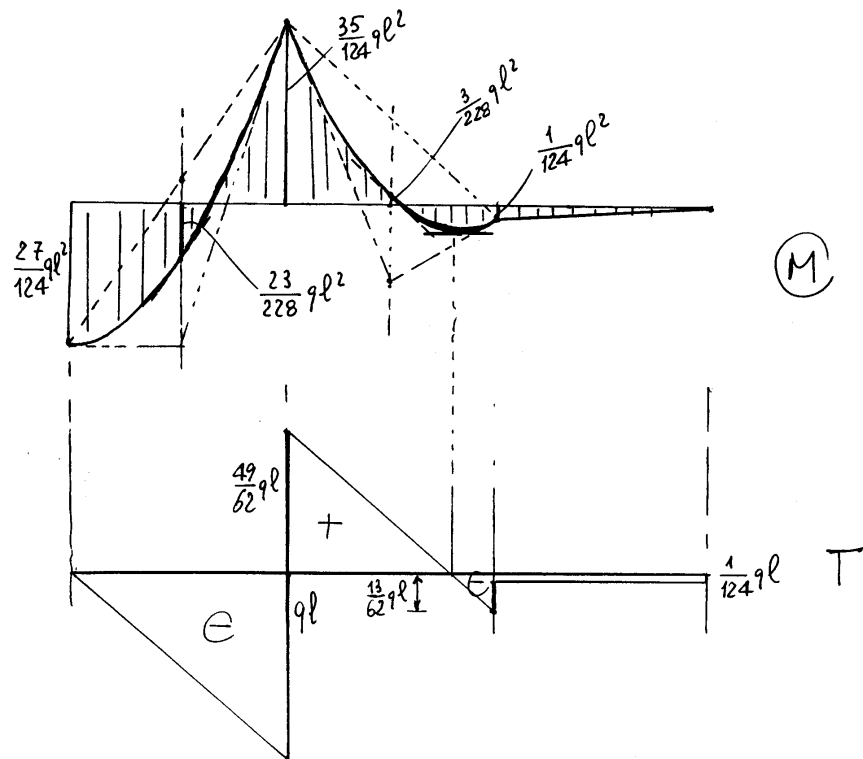
1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Risolvere la struttura;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
4. Calcolare le rotazioni delle sezioni B e C;
5. Disegnare la deformata elastica della struttura.



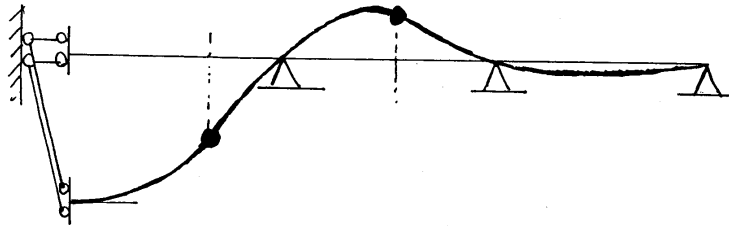
$$\begin{cases} \varphi_{BA} = -\frac{X_1 l}{EJ} + \frac{ql^3}{3EJ} \\ \varphi_{BC} = \frac{X_1 l}{3EJ} + \frac{X_2 l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{CB} = -\frac{X_1 l}{6EJ} - \frac{X_2 l}{3EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{CD} = \frac{X_2 l}{3EJ} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{BA} = \varphi_{BC} &\Rightarrow 32X_1 + 4X_2 = 9ql^2 \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} &\Rightarrow 4X_1 + 16X_2 = ql^2 \end{aligned} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{35}{124}ql^2 \\ X_2 = -\frac{1}{124}ql^2 \end{cases}$$

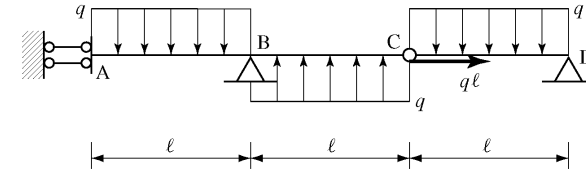


Deformata



$$\begin{cases} \varphi_B = \left(-\frac{35}{124} + \frac{1}{3} \right) \frac{q\ell^3}{EJ} = \frac{19}{372} \frac{q\ell^3}{EJ} \\ \varphi_C = -\frac{1}{372} \frac{q\ell^3}{EJ} \end{cases}$$

3.14 Esercizio 29

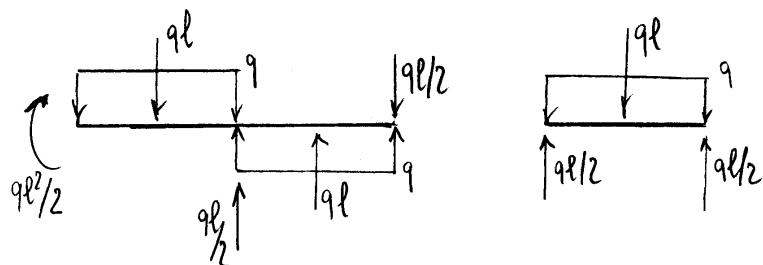


Data la trave di figura:

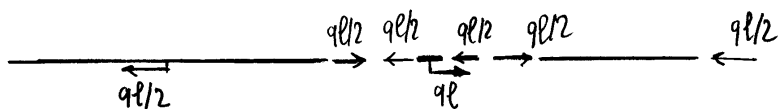
1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Calcolare lo spostamento verticale del nodo C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
5. Determinare il momento flettente in A utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
6. Disegnare la curva delle pressioni;
7. Calcolare la rotazione in B utilizzando il metodo cinematico;
8. Disegnare la deformata elastica della struttura.

Struttura 2 volte iperstatica (assialmente)

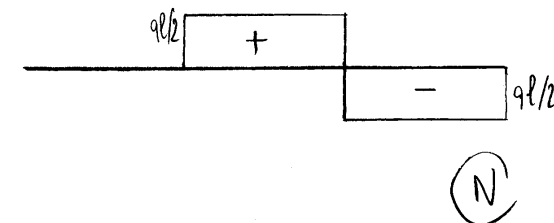
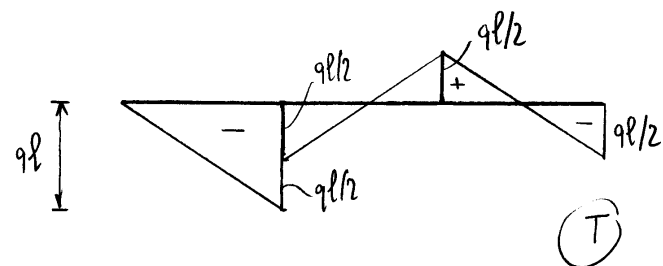
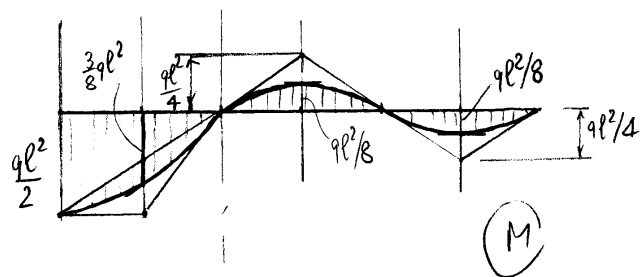
Soluzione flessionale



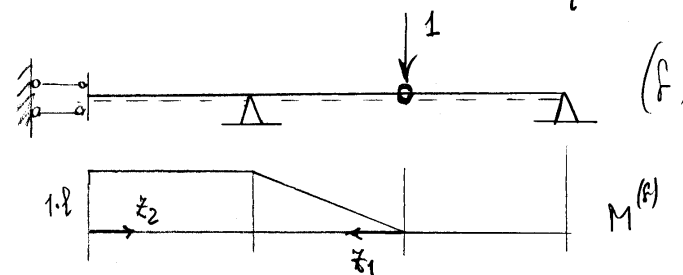
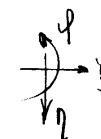
Soluzione assiale



Diagrammi



Spostamento verticale di C



$$\begin{cases} M^{(f)}(x_1) = -x_1 \\ M^{(f)}(x_2) = -l \end{cases} \quad \begin{cases} M^{(v)}(x_1) = \frac{qx_1^2}{2} - \frac{ql}{2}x_1 \\ M^{(v)}(x_2) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qx_2^2}{2} \end{cases}$$

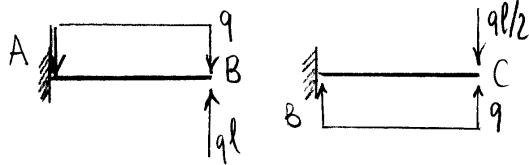
$$L_{ve} = 1 \cdot \eta_c$$

$$L_{vi} = \int_l M^{(A)} \left(\frac{M^{(v)}}{EJ} \right) ds$$

$$= \frac{q}{2EJ} \int_0^l (l z_1^2 - z_1^3) dz_1 + \int_0^l (l z_2^2 - l^3) dz_2$$

$$= \frac{q l^4}{2EJ} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{7}{24} q l^4$$

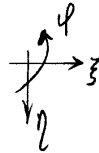
Verifica col metodo cinematico



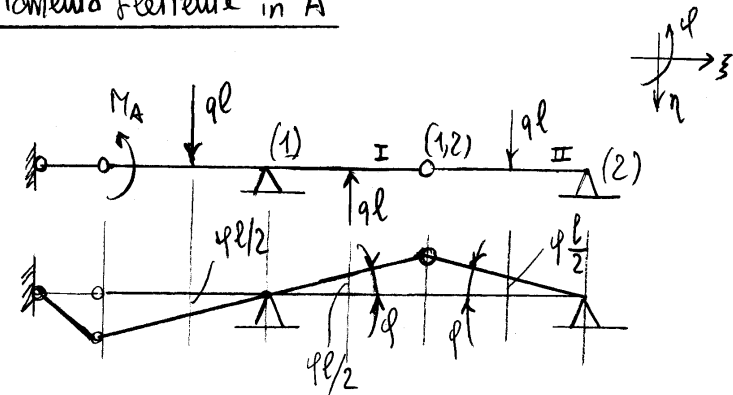
$$\eta_c = \frac{(q l/2) l^3}{3EJ} - \frac{q l^4}{8EJ} - \eta_B l$$

$$\eta_B = \frac{(q l) l^2}{2EJ} - \frac{q l^3}{6EJ} = \frac{q l^3}{3EJ}$$

$$\eta_c = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) \frac{q l^4}{EJ} = -\frac{7}{24} \frac{q l^4}{EJ}$$



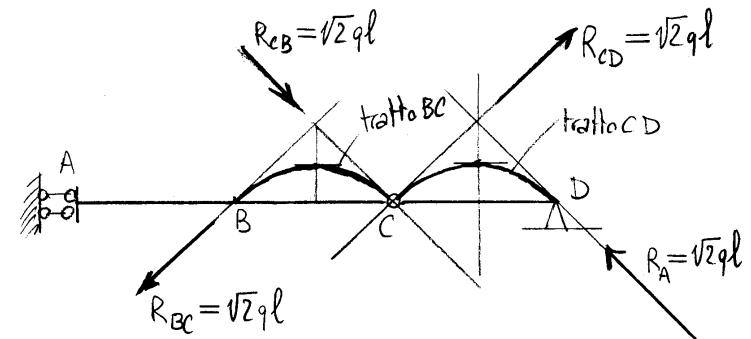
Momento flettente in A



$$M_A \varphi + (q l) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) + (q l) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) - (q l) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) = 0$$

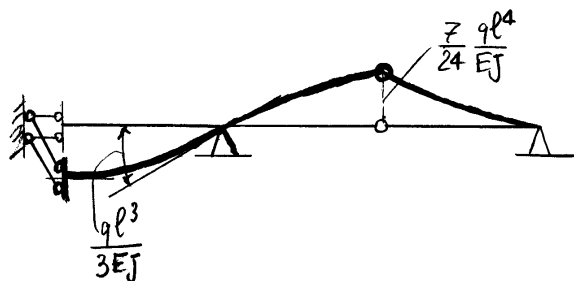
$$M_A \varphi = -\frac{q l^2}{2} \varphi \Rightarrow M_A = -\frac{q l^2}{2}$$

Curva delle pressioni

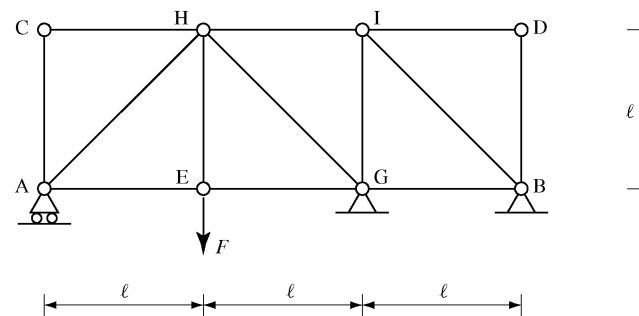


Nel tratto AB degenera in un fascio di rette verticali

Deformata



3.15 Esercizio 30



Con riferimento alla figura e supponendo che le aste abbiano area A uguale:

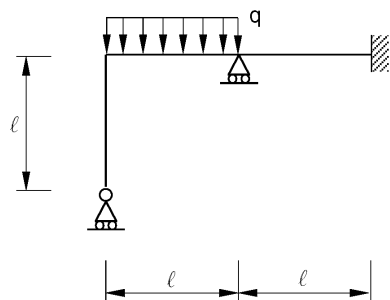
1. Risolvere la struttura reticolare iperstatica utilizzando il metodo delle forze e scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali;
2. Compilare una tabella riassuntiva che riporti la forza normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;

Posto che le aste siano realizzate in acciaio Fe360, di modulo di Young $E = 200$ GPa, e che inoltre sia $F = 150$ kN, $\ell = 2$ m, $A = 20$ cm² e che infine i momenti di inerzia massimo e minimo delle aste siano $J_{\max} = 140$ cm⁴ e $J_{\min} = 100$ cm⁴:

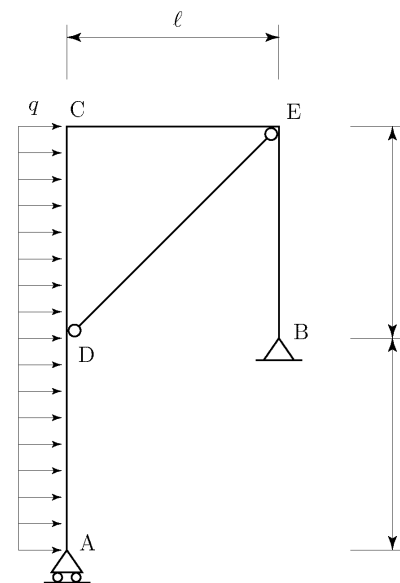
3. Valutare il livello critico della forza F relativamente all'instabilità per flessione laterale delle aste compresse.

Asta	Area A	Raggio di inerzia minimo $\sqrt{J_{\min}/A}$	Luce ℓ	Snellezza $\ell\sqrt{A/J_{\min}}$	N^f 1	N^o F	N^r $(N^o - XN^f)$	$ N $ F	Tipo
AC	1	1	1	1	=	=	=	0	=
CH	1	1	1	1	=	=	=	0	=
BD	1	1	1	1	=	=	=	0	=
ID	1	1	1	1	=	=	=	0	=
GB	1	1	1	1	=	=	=	0	=
IB	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	=	=	=	0.1049	tirante
HI	1	1	1	1	$-1/\sqrt{2}$	0	$X/\sqrt{2}$	0.0742	tirante
GI	1	1	1	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-X/\sqrt{2}$	0.0742	puntone
AE	1	1	1	1	$1/(2\sqrt{2})$	1/2	$F/2 - X/(2\sqrt{2})$	0.4629	tirante
EG	1	1	1	1	$1/(2\sqrt{2})$	1/2	$F/2 - X/(2\sqrt{2})$	0.4629	tirante
EH	1	1	1	1	0	1	F	1	tirante
AH	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-F/\sqrt{2} + X/2$	0.6547	puntone
HG	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1/2	$-1/\sqrt{2}$	$-F/\sqrt{2} - X/2$	0.7595	puntone

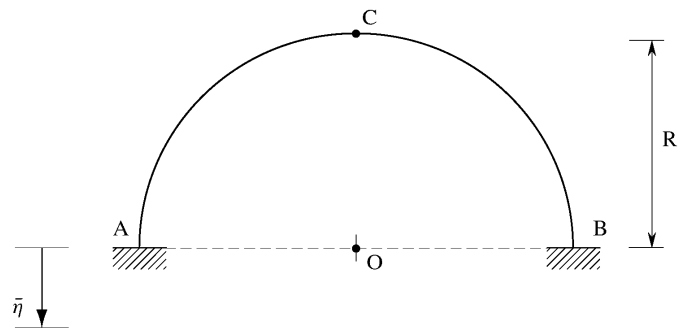
3.16 Esercizi proposti



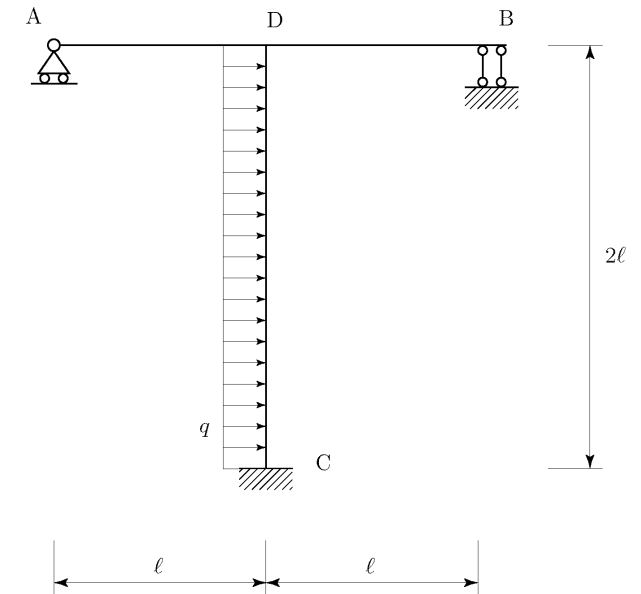
- Risolvere la struttura iperstatica
- Tracciare il diagramma del momento flettente e del taglio
- Disegnare la deformata elastica della struttura



- Risolvere la struttura supponendo il pendolo ED indeformabile assialmente;
- Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- Calcolare le rotazioni dei nodi E, C, D e lo spostamento della travata;
- Disegnare la curva delle pressioni;
- Disegnare la deformata elastica della struttura.

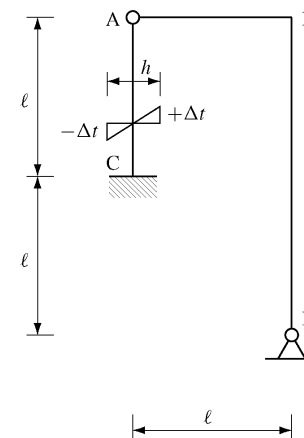
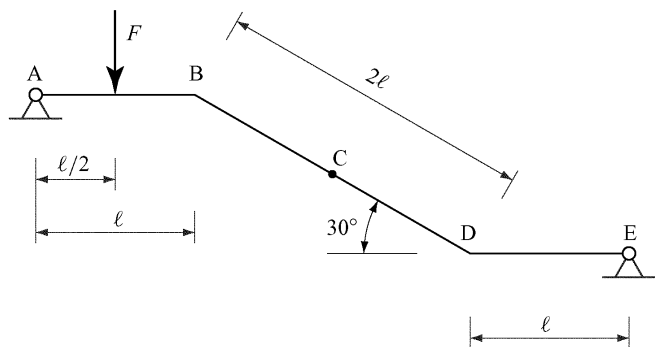


- 1) Risolvere la struttura, soggetta ad un cedimento verticale anelastico dell'incastro in A, tenendo conto della sua simmetria geometrica;
- 2) Scrivere le equazioni del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Disegnare i relativi diagrammi (per l'arco ABC completo), usando quale fondamentale la linea ACB dell'arco (momento flettente dalla parte delle fibre tese) e quotando i valori massimi;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) "Calcolare" lo spostamento verticale complessivo del punto C.



La struttura inflessa di figura è soggetta ad una forza distribuita lungo il montante centrale:

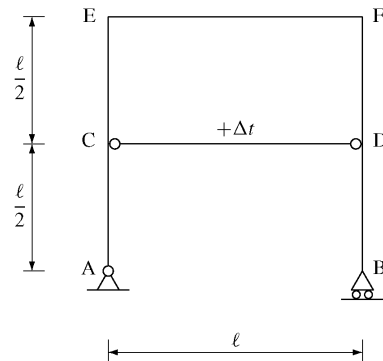
- 1) Analizzare cinematicamente e staticamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura;
- 3) Disegnare i diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 4) Calcolare la rotazione del nodo D e lo spostamento orizzontale della travata;
- 5) Individuare la curva delle pressioni;
- 6) Disegnare la deformata della struttura.



1. Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C.
2. Per i due schemi, polar simmetrico e polar emisimmetrico:
 - (a) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
 - (b) Disegnare il diagramma della forza normale;
 - (c) Disegnare la curva delle pressioni;
 - (d) Calcolare la rotazione del nodo B;
3. Disegnare la deformata elastica per il solo schema polar simmetrico

Dato il telaio ad un nodo spostabile di figura:

1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Risolvere la struttura;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Calcolare la rotazione in B e lo spostamento della travata AB;
5. Disegnare la deformata elastica della struttura;
6. Disegnare la curva delle pressioni.



Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad una distorsione termica uniforme lungo il pendolo CD:

1. Risolvere la struttura trascurando l'effetto della forza normale sulla deformazione del pendolo CD;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
3. Disegnare la curva delle pressioni;
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
5. Calcolare lo spostamento orizzontale del punto B utilizzando il metodo cinematico.

Capitolo 4

Esercizi sull'analisi della tensione e della deformazione

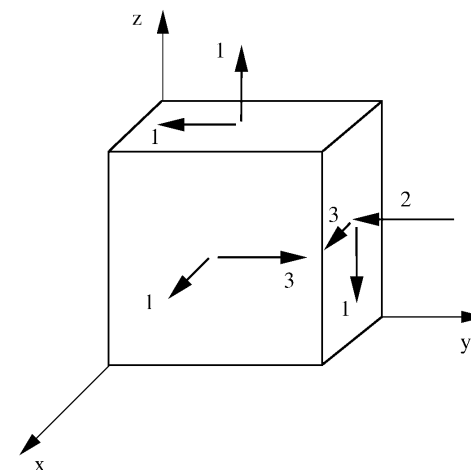
4.1 Esercizio 31

Nel sistema di riferimento $Oxyz$ il tensore degli sforzi agenti in un punto P di un corpo continuo ha le componenti (esprese in N/mm^2):

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Rappresentare lo stato tensionale sulle facce di un cubo posto nell'intorno del punto P e avente le facce stesse parallele ai piani coordinati;
2. Verificare che le tensioni principali valgono: 3 N/mm^2 , 1 N/mm^2 , -4 N/mm^2 ;
3. Determinare le direzioni principali di tensione.

Equazione caratteristica: $-\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0$



$$\sigma_{\xi} = 3 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow [\mathbf{e}_{\xi}] = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} \pm 3 \\ \pm 2 \\ \mp 1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{\eta} = 1 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow [\mathbf{e}_{\eta}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 3 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{\zeta} = -4 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow [\mathbf{e}_{\zeta}] = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{Bmatrix} \mp 3 \\ \pm 5 \\ \pm 1 \end{Bmatrix}$$

4.2 Esercizio 32

In un punto P di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi σ , scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono rappresentate dalla matrice:

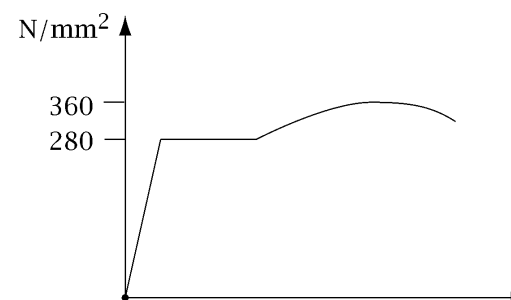
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 50 \text{ N mm}^2.$$

1. Determinare le direzioni ξ , η , ζ e i valori σ_ξ , σ_η , σ_ζ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima $\tau_{\max}$;
4. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
5. Calcolare l'energia elastica *distorcenza* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi σ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \sigma)^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

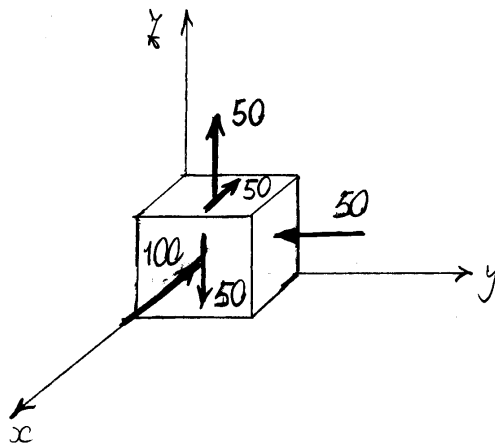
assumendo i valori $E = 20000 \text{ N mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

6. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il seguente diagramma rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale:



e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $s = 1.6$;

7. Calcolare la tensione t_r su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano zx , dando le componenti t_x , t_y , t_z della tensione nel sistema $Oxyz$, fornendo la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r ed infine individuandone la posizione nel piano di Mohr;
8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:
 - (a) Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico;
 - (b) Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
 - (c) Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .



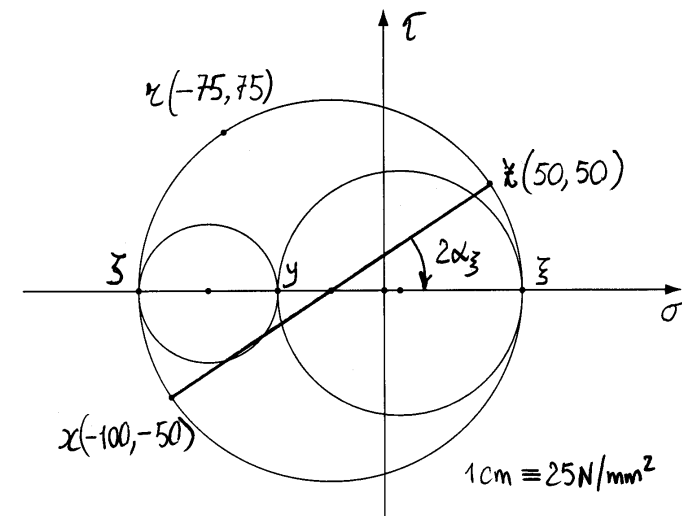
y è direzione principale di tensione

$\sigma_y = -50 \text{ N/mm}^2$ è un valore principale di tensione

Determinazione dei valori e delle direzioni principali nel piano $\xi\eta$ (ξ primo asse).

La faccia positiva del piano $\xi\eta$ è quella di normale uscente y positiva. Le tensioni tangenziali positive, nella convenzione di Mohr, sono quelle che provocano una rotazione oraria. Punti rappresentativi degli assi ξ e η :

$$\xi(50, 50), \quad \eta(-100, -50).$$

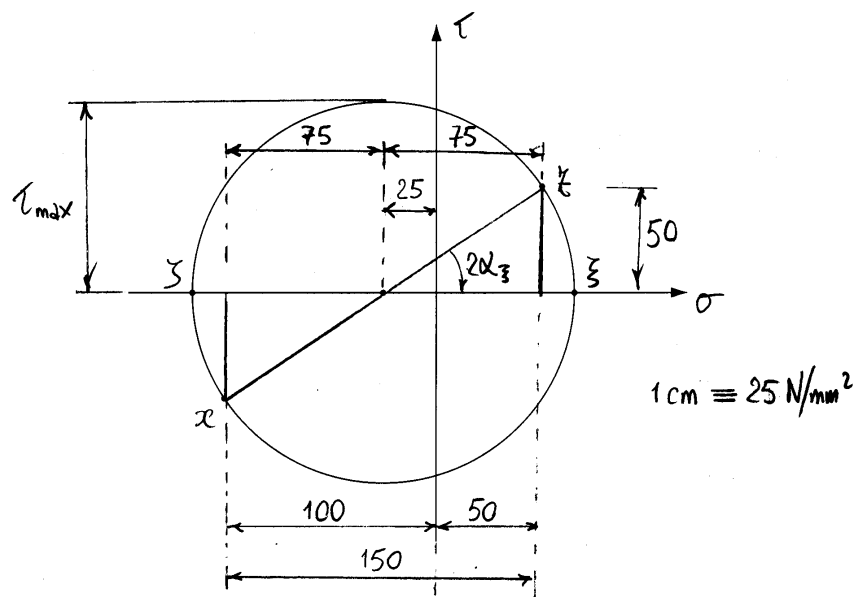


Equazione caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} -100 - \lambda & -50 \\ -50 & 50 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + 50\lambda - 7500 = 0,$$

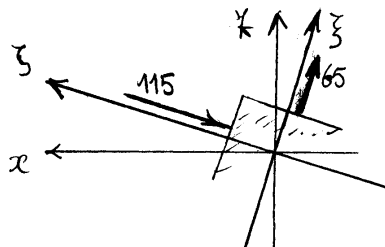
$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \end{matrix} \right\} = -25 \pm \sqrt{25^2 + 7500} = \begin{cases} 65.14 \text{ N/mm}^2 \\ -115.14 \text{ N/mm}^2 \end{cases}.$$



Dalla circonferenza di Mohr:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \end{matrix} \right\} = -25 \pm \sqrt{50^2 + 75^2} = \begin{cases} 65.14 \text{ N/mm}^2 \\ -115.14 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_3 = \frac{50}{75} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{cases} 0.2940 \text{ rad} \\ 16.85^\circ \end{cases}$$



Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}|}{2} = \frac{65.14 + 115.14}{2} = 90.14 \text{ N/mm}^2$$

Parte sferica di $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I}$$

$$\text{tr } \underline{\sigma} = -100 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \underline{\sigma}_s \equiv \begin{bmatrix} -33.33 & 0 & 0 \\ 0 & -33.33 & 0 \\ 0 & 0 & -33.33 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Parte deviatorica di $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s \Rightarrow \underline{\sigma}_d \equiv \begin{bmatrix} -66.67 & 0 & -50 \\ 0 & -16.67 & 0 \\ -50 & 0 & 83.33 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Energia elastica distortante per unità di volume

$$\text{tr } \underline{\sigma}_d = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{d\xi} = \sigma_{\xi} - \sigma_{s\xi} = 65.14 + 33.33 = 98.47 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{d\eta} = \sigma_{\eta} - \sigma_{s\eta} = -50 + 33.33 = -16.67 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{d\zeta} = \sigma_{\zeta} - \sigma_{s\zeta} = -115.14 + 33.33 = -81.81 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{dII} = \sigma_{d\xi} \sigma_{d\eta} + \sigma_{d\xi} \sigma_{d\zeta} + \sigma_{d\eta} \sigma_{d\zeta} = -8333 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$\psi_d = - \frac{1+0.3}{20000} \times (-8333) = 0.5417 \text{ N/mm}$$

Verifiche di resistenza

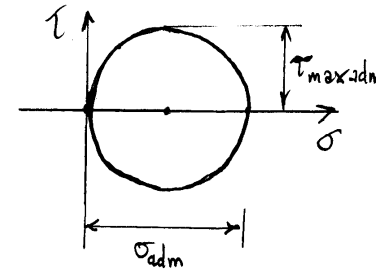
tensione di snervamento : $\sigma_s = 280 \text{ N/mm}^2$

tensione ammissibile : $\sigma_{adm} = \frac{280}{1.6} = 175 \text{ N/mm}^2$

stato di tensione monoassiale ammissibile:

$$\underline{\sigma}_{adm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

tensione tangenziale massima ammissibile:



$$\tau_{max adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2} = 87.5 \text{ N/mm}^2$$

Parte deviatorica dello stato di tensione monoassiale ammissibile:

$$\underline{\sigma}_{d adm} = \underline{\sigma}_{adm} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}_{adm}) \underline{I}$$

$$\text{tr } \underline{\sigma}_{adm} = 175 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \underline{\sigma}_{d adm} = \begin{bmatrix} -58.33 & 0 & 0 \\ 0 & -58.33 & 0 \\ 0 & 0 & 116.67 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{d adm II} = (-58.33)^2 + 2(116.67)(-58.33) = -10208 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

Energia elastica distorcente ammissibile:

$$\psi_{d adm} = - \frac{1+0.3}{20000} (-10208) = 0.6635$$

Criterio di Tresca :

$$\tau_{\max} > \tau_{\max \text{ adm}} \Rightarrow \text{Verifica negativa}$$

Criterio di Huber-von Mises :

$$\psi_d < \psi_{d \text{ adm}} \Rightarrow \text{Verifica positiva}$$

Tensione ideale di Tresca :

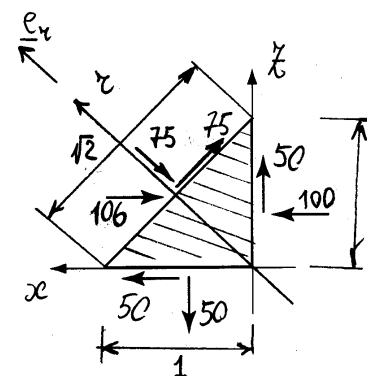
$$\sigma_{id} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\max \text{ adm}}} \sigma_{\text{adm}} = 2 \tau_{\max} = 180.28 \text{ N/mm}^2$$

Tensione ideale Huber-von Mises :

$$\psi_{d \text{ adm}} = K \sigma_{\text{adm}}^2 \text{ e si vuole che } \psi_d = K \sigma_{id}^2, \text{ quindi:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{id} &= \sqrt{\psi_d / K} = \sqrt{\frac{\psi_d}{\psi_{d \text{ adm}}} \sigma_{\text{adm}}^2} \\ &= \sqrt{\frac{0.5417}{0.6635} (175)^2} = 158.12 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Tensione $\underline{t}_z$



$$t_x = -\frac{150}{\sqrt{2}} = -106.06 \text{ N/mm}^2$$

$$t_y = t_z = 0$$

$$\sigma_z = -t_x / \sqrt{2} = -75 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_z = |t_x| / \sqrt{2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

$$\underline{e}_z \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{t}_z = \begin{bmatrix} -100 & 0 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \\ -50 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

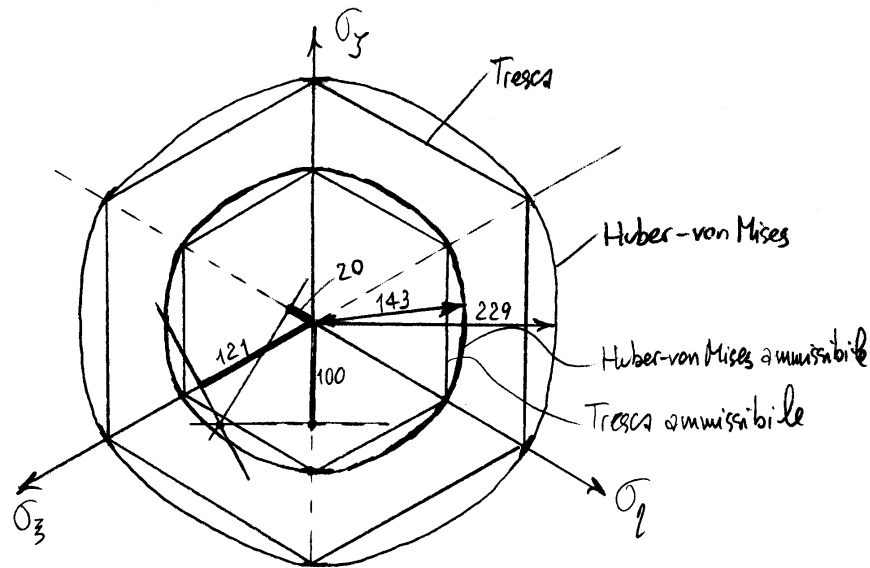
$$\text{Quindi } \underline{t}_z = \begin{Bmatrix} -106.06 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Componenti normali e tangenziali:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -106.06 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -75 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_z = \sqrt{(106.06)^2 - (75)^2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

Spazio delle tensioni principali



$$\text{Raggio circonferenza di Huber-von Mises} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s = 228.62 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Raggio circonferenza ammissibile} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{adm} = 142.89 \text{ N/mm}^2$$

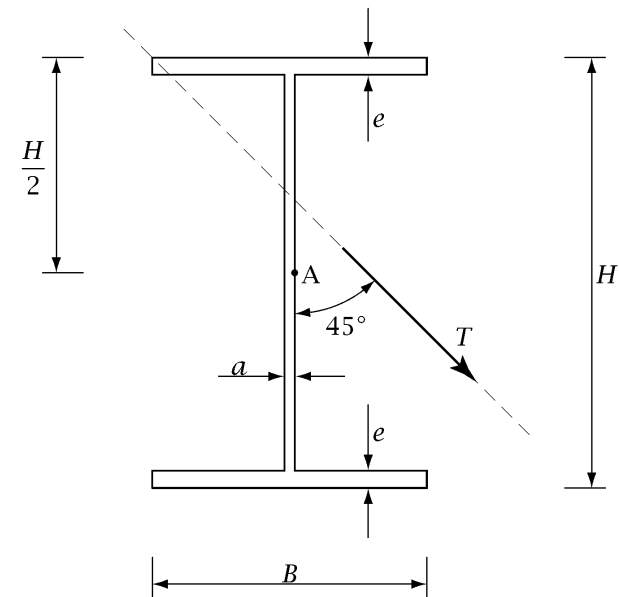
$$\text{Distanza su asse idrostatico} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \underline{\sigma} = -\frac{100}{\sqrt{3}} = -57.74 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Coordinata } \xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_z - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = 120.60 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Coordinata } \eta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_y - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = -20.41 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Coordinata } \zeta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_x - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = -100.19 \text{ N/mm}^2$$

4.3 Esercizio 33



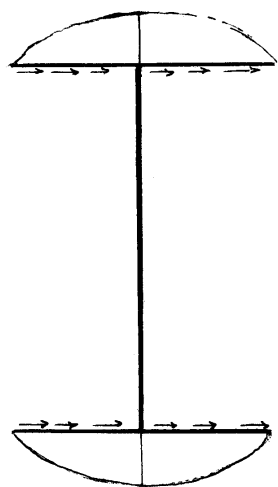
Data la sezione a I di figura, soggetta ad un taglio T :

1. Determinare, in corrispondenza del punto A, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi;
2. Rappresentare graficamente gli sforzi nel punto A tramite le circonferenze di Mohr e determinare le direzioni e le componenti principali di sforzo.

Dati del problema:

$$\begin{aligned} T &= 50 \text{ kN} \\ B &= 100 \text{ mm} \\ H &= 165 \text{ mm} \\ a &= 8 \text{ mm} \\ e &= 15 \text{ mm} \end{aligned}$$

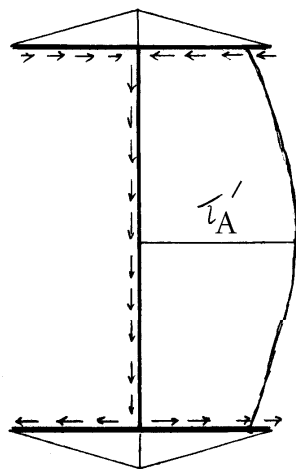
$$\begin{aligned} \text{acciaio Fe430:} \\ \sigma_{adm} &= 190 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



Toglio T_x

$$T_x = 35.36 \text{ kN}$$

$$\tau_A = 0$$



Toglio T_y

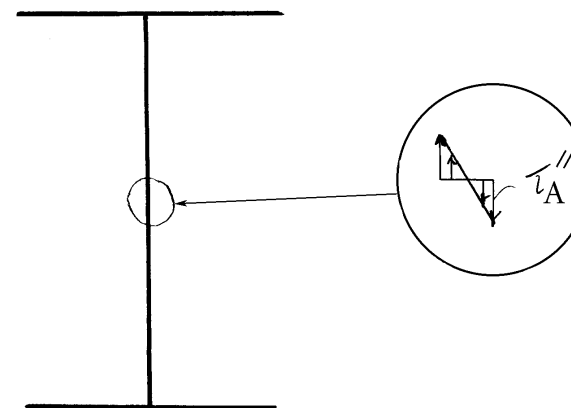
$$T_y = 28.28 \text{ kN}$$

τ'_A

$$S_x^* = e B \frac{H}{2} + a \frac{H}{2} \frac{H}{4} = 135 \text{ cm}^3$$

$$\tau'_A = \frac{T_y S_x^*}{a J_x} = 31.20 \text{ N/mm}^2$$

Momento torcente M_t



$$M_t = 1149 \text{ kN mm}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (2 B e^3 + H_1 a^3) = 25.06 \text{ cm}^4$$

$$\tau''_A = \frac{M_t}{J_t} a = 36.68 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_A = \tau'_A + \tau''_A = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

Sforzi nel punto A

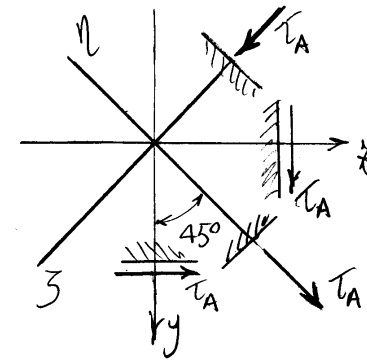
L'unica componente di tensione non nulla è la τ_{yz} .

Poichè: $\tau_{yz} = \tau_A$, si ha:

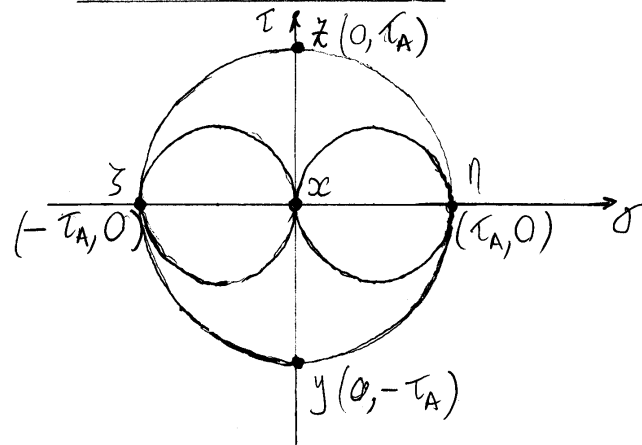
$$\sigma_A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_A \\ 0 & \tau_A & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_1 = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -67.88 \text{ N/mm}^2$$



Circonfereuze di Mohr



4.4 Esercizio 34

Dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = kxy - kz^2 \\ v = k(y^2 + z^2) \\ w = -2kyz \end{cases},$$

1. Determinare le componenti dei tensori ϵ di deformazione e ω di rotazione;
2. Specializzare ϵ e ω nel punto $(0, 1 \text{ m}, 1 \text{ m})$, assumendo $k = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$;
3. Determinare l'asse e l'entità della rotazione rigida locale.

Inoltre, nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa, tenendo conto che:

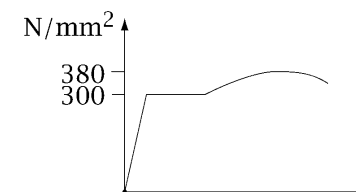
$$\sigma = 2G \left[\epsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \epsilon) \mathbf{I} \right], \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

ed assumendo :

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3,$$

1. Determinare le componenti del tensore degli sforzi;
2. Determinare le direzioni ξ , η , ζ e le tensioni σ_ξ , σ_η , σ_ζ principali;
3. Disegnare in scala le circonferenze di Mohr;
4. Indicare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;

5. Determinare la tensione tangenziale massima $\tau_{\max}$;
6. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
7. Eseguire la verifica di resistenza con il criterio di Tresca, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il diagramma riportato rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $s = 1.6$.



Si consideri poi la giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano individuato dall'asse y e dall'asse principale di minima tensione normale, orientato concordeamente all'asse z . Relativamente alla tensione t_r agente su tale giacitura:

1. Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di t_r ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;
2. Calcolare le componenti t_x^r , t_y^r , t_z^r di t_r nel sistema $Oxyz$.

Infine, relativamente allo spazio delle tensioni principali:

1. Disegnare e quotare l'intersezione della superficie di snervamento di Tresca con il piano deviatorico;
2. Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
3. Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .

Gradiente degli spostamenti

$$\text{grad } \underline{u} \equiv \begin{bmatrix} K_y & K_x & -2Kz \\ 0 & 2Ky & 2Kz \\ 0 & -2Kz & -2Ky \end{bmatrix}.$$

Tensore di deformazione infinitesimo

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} + \text{grad } \underline{u}^T) \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} K_y & \frac{1}{2}K_x & -Kz \\ \frac{1}{2}K_x & 2Ky & 0 \\ -Kz & 0 & -2Ky \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tensore di rotazione infinitesimo

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &\equiv \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} - \text{grad } \underline{u}^T) \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}K_x & -Kz \\ -\frac{1}{2}K_x & 0 & 2Kz \\ Kz & -2Kz & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Specializzazione di $\underline{\varepsilon}$ ed $\underline{\omega}$ per $K = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$
nel punto di coordinate $x=0$, $y=1 \text{ m}$, $z=1 \text{ m}$

$$\underline{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$\underline{\omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.50 \\ 0.25 & -0.50 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

Rotazione rigida locale

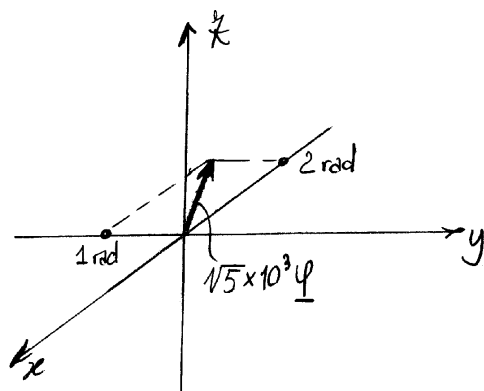
$$\underline{\varphi} \equiv -\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

$$|\underline{\varphi}| = \frac{\sqrt{5}}{4} \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.559 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.032^\circ$$

L'asse di rotazione è parallelo al piano xy , la sua inclinazione α rispetto all'asse x vale:

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2} = 0.4636 \text{ rad} = 26.57^\circ,$$

e la sua parte positiva si trova nel III quadrante del piano xy .



Tensore degli sforzi

$$2G = \frac{210}{1+0.3} \text{ GPa} = 161.53 \text{ GPa} = 161.53 \times 10^3 \text{ N/mm}^2,$$

$$\frac{\nu}{1-2\nu} = 0.75,$$

$$\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = (0.25 + 0.50 - 0.50) \times 10^{-3} = 0.25 \times 10^{-3},$$

$$2G \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = 30.29 \text{ N/mm}^2,$$

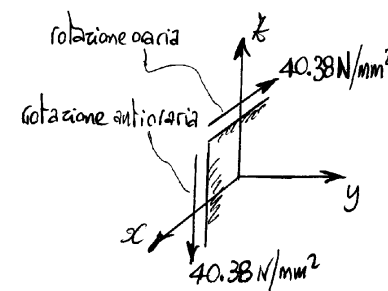
$$\underline{\underline{\sigma}} \equiv \begin{bmatrix} 70.67 & 0 & -40.38 \\ 0 & 111.06 & 0 \\ -40.38 & 0 & -50.48 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Direzioni e valori principali di tensione

L'asse y è principale e il valore principale risulta:

$$\sigma_y = 111.06 \text{ N/mm}^2.$$

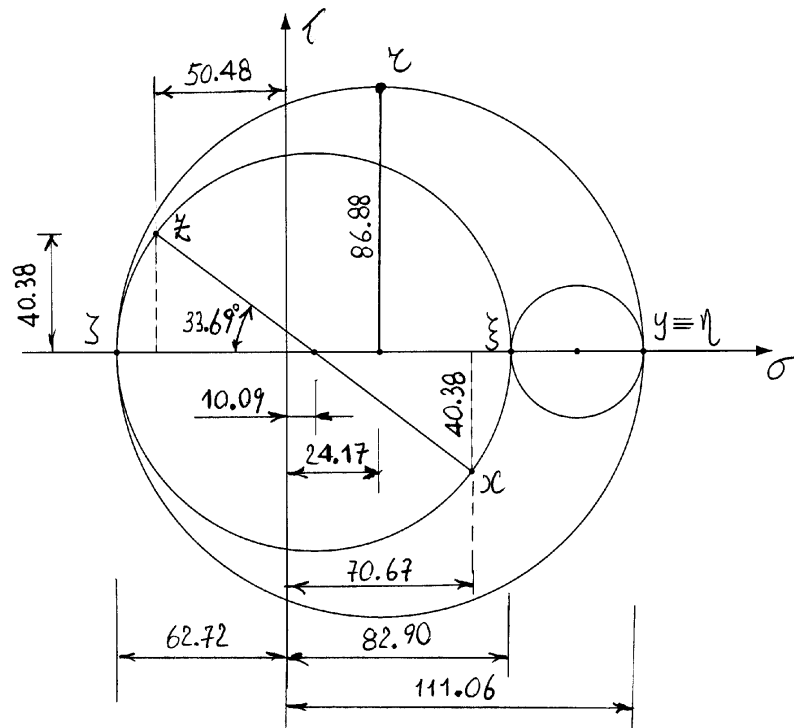
La circonferenza di Mohr relativa alla direzione principale y contiene i punti rappresentativi degli assi x e z . Considerando z quale primo asse tra i due assi x e z , la faccia positiva del piano zx



è individuata dalla parte positiva di y . Con tale scelta il punto rappresentativo di z ha coordinate $(-50.48 \text{ N/mm}^2, 40.38 \text{ N/mm}^2)$ mentre quello rappresentativo di x ha coordinate $(70.67 \text{ N/mm}^2, -50.48 \text{ N/mm}^2)$.

Centro σ_c e raggio R della circonferenza:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{70.67 - 50.48}{2} \text{ N/mm}^2 = 10.10 \text{ N/mm}^2;$$



$$R = \sqrt{(70.67 - 10.09)^2 + (40.38)^2} \text{ N/mm}^2 = 72.80 \text{ N/mm}^2.$$

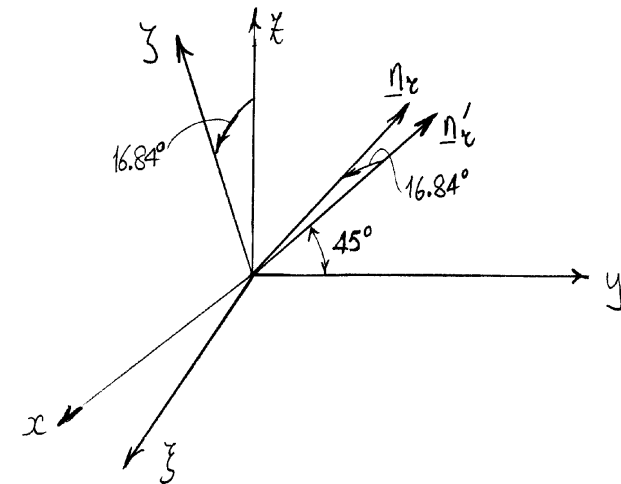
Valori principali di tensione:

$$\sigma_\xi = \sigma_c + R = 82.90 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_\zeta = \sigma_c - R = -62.71 \text{ N/mm}^2.$$

L'asse principale ξ è individuato ruotando z in senso antiorario di un angolo α tale che:

$$\sin 2\alpha = \frac{|\tau_{xz}|}{R} = \frac{40.38}{72.80},$$



e quindi:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{40.38}{72.80} \right) = 16.84^\circ.$$

Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{111.06 + 62.72}{2} \text{ N/mm}^2 = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Parti sferica e deviatorica del tensore degli sforzi

$$\text{tr } \underline{\sigma} = (70.67 + 111.06 - 50.48) \text{ N/mm}^2 = 131.25 \text{ N/mm}^2,$$

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} \equiv \begin{bmatrix} 43.75 & 0 & 0 \\ 0 & 43.75 & 0 \\ 0 & 0 & 43.75 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2,$$

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s \equiv \begin{bmatrix} 26.92 & 0 & -40.38 \\ 0 & 67.31 & 0 \\ -40.38 & 0 & -94.23 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Verifica di resistenza al criterio di Tresca

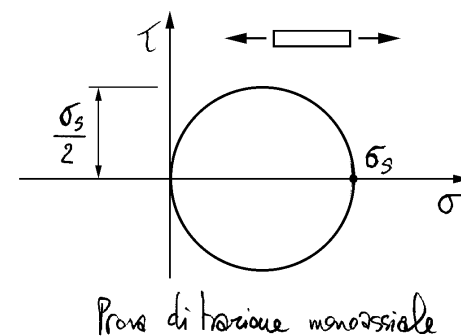
Tensioni di snervamento e ammissibile:

$$\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_a = \frac{300}{1.6} \text{ N/mm}^2 = 187.5 \text{ N/mm}^2.$$

Tensione tangenziale massima ammissibile:

$$\tau_a = \frac{187.5}{2} \text{ N/mm}^2 = 93.75 \text{ N/mm}^2.$$



Poiché:

$$\tau_{\max} < \tau_a,$$

la verifica è soddisfatta.

Tensione nella giacitura di normale z

Poiché la minima tensione principale è associata all'asse z , la retta z appartiene al piano $y-z$ e il suo punto rappresentativo sta sulla circonferenza esterna individuata da una rotazione antioraria di 90° .

Quindi:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = 24.17 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_z = \tau_{\max} = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Il versore $\underline{n}_z$ della direzione z si ottiene ruotando di 16.84° attorno all'asse y il versore $\underline{n}'_z$ della bisettrice del primo quadrante del piano $y-z$. Il tensore rotazionale vale:

$$\underline{R} \equiv \begin{bmatrix} \cos(16.84^\circ) & 0 & \sin(16.84^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(16.84^\circ) & 0 & \cos(16.84^\circ) \end{bmatrix},$$

ed inoltre:

$$\underline{n}'_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}.$$

Dunque:

$$\underline{n}_z = \underline{R} \underline{n}'_z = \begin{Bmatrix} 0.2049 \\ 0.7071 \\ 0.6768 \end{Bmatrix},$$

e quindi:

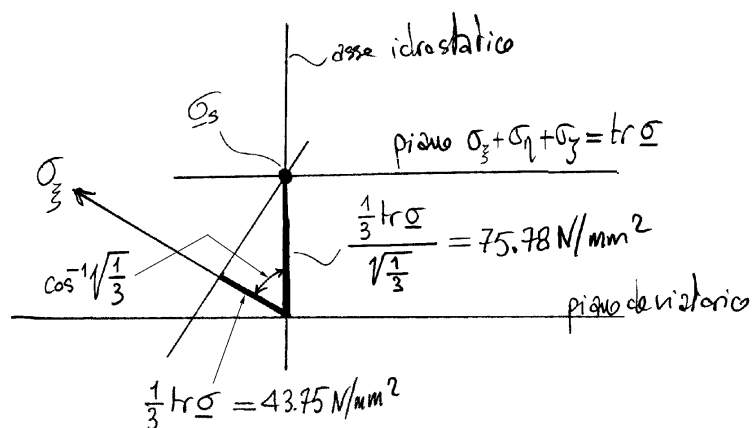
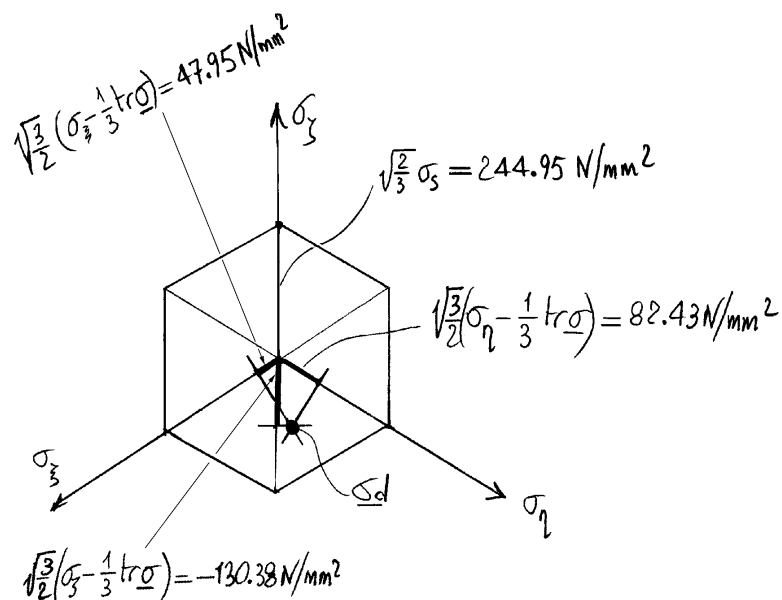
$$\underline{t}_z = \underline{\sigma} \underline{n}_z = \begin{Bmatrix} -12.85 \\ 78.53 \\ -42.44 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Verifichiamo i valori di σ_z e di τ_z :

$$\sigma_z = \underline{t}_z \cdot \underline{n}_z = 24.17 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_z = \sqrt{\underline{t}_z \cdot \underline{t}_z - \sigma_z^2} = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Spazio delle tensioni principali



4.5 Esercizi proposti

4.5.1 Esercizio 1

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema Oxyz cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = -1.5xy \times 10^{-6} \\ v = 2.5 \{-z^2 + 0.3 \times (x^2 - y^2)\} \times 10^{-6} \\ w = 5yz \times 10^{-6} \end{cases}$$

(coefficienti in mm^{-1}).

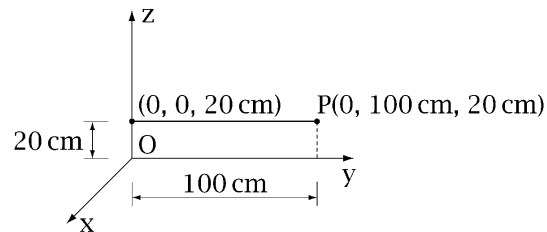
1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi e specializzarli nel punto P di coordinate $x=0$, $y=20$ cm, $z=100$ cm;
2. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
3. Determinare dilatazione e scorrimento massimi (in modulo), sempre nel punto P, e disegnare le circonferenze di Mohr.

4.5.2 Esercizio 2

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema Oxyz cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = 0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} xy \\ v = 2.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \{z^2 - 0.1 \times y^2\} \\ w = 1 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} yz \end{cases}.$$

1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi e specializzarli nel punto P di coordinate $x=0$, $y=100 \text{ cm}$, $z=20 \text{ cm}$;



2. Determinare, nel punto P, le dilatazioni principali e disegnare le circonferenze di Mohr;
3. Determinare, sempre nel punto P, la dilatazione e lo scorrimento massimi in modulo e dello scorrimento massimo darne il valore in gradi;
4. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
5. Determinare le direzioni principali nel punto P;
6. Calcolare l'allungamento del segmento, illustrato in figura, che unisce i punti di coordinate $(0, 0, 20 \text{ cm})$ e $(0, 100 \text{ cm}, 20 \text{ cm})$;

4.5.3 Esercizio 3

In un punto P_1 di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi σ , scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, siano rappresentate dalla matrice:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -80 \\ 0 & -80 & 160 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

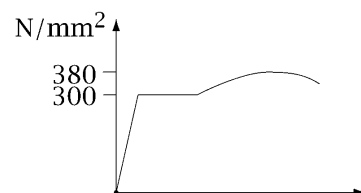
1. Determinare le direzioni ξ , η , ζ e i valori σ_ξ , σ_η , σ_ζ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima $\tau_{\max}$;
4. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
5. Relativamente alla tensione t_r agente su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano yz :
 - (a) Calcolare le componenti t_x^r , t_y^r , t_z^r di t_r nel sistema $Oxyz$;

- (b) Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di $\mathbf{t}_r$ ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;
6. Calcolare l'energia elastica *distorcente* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

assumendo i valori $E=21000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

7. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il diagramma riportato a fianco rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $s = 1.6$;



8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:

- (a) Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico:

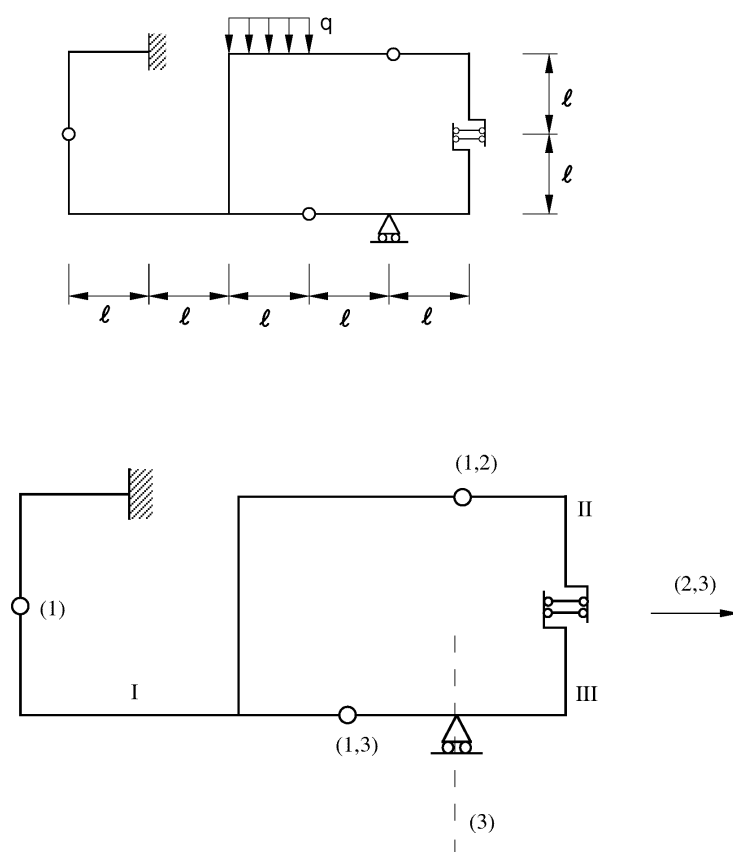
- (b) Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica $\boldsymbol{\sigma}_s$ di $\boldsymbol{\sigma}$;
- (c) Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ di $\boldsymbol{\sigma}$.

Capitolo 5

Esercizi sui centri assoluti e relativi

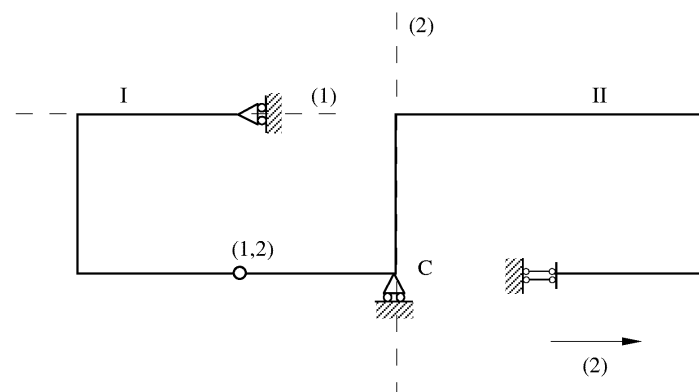
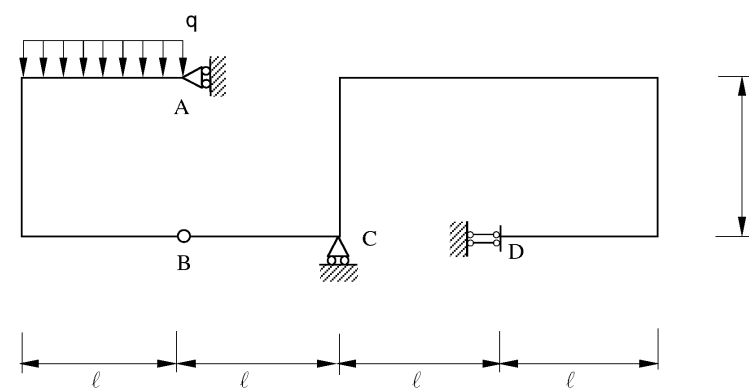
5.1 Esercizio 35

Verificare l'isostaticità della struttura



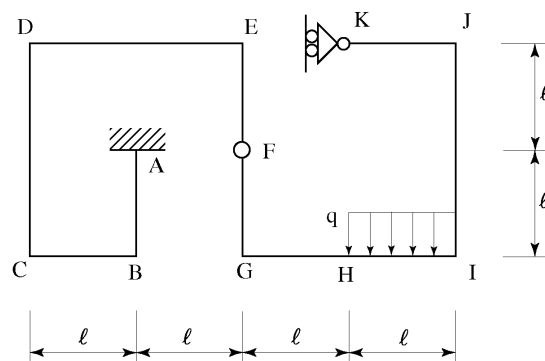
5.2 Esercizio 36

Verificare l'isostaticità della struttura

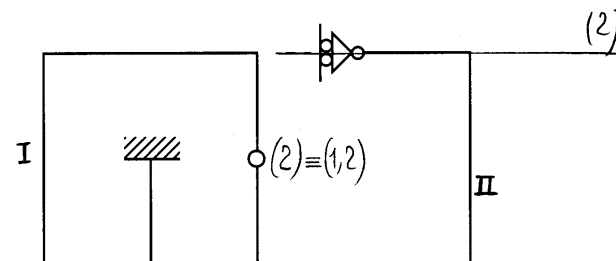


5.3 Esercizio 37

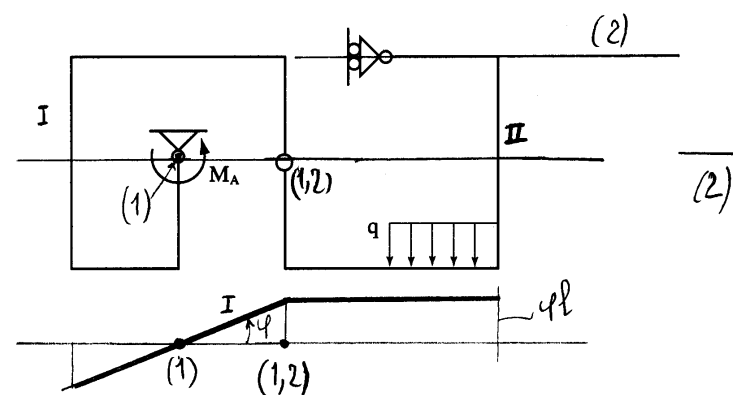
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare il momento in corrispondenza dell'incastro utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



Verifica dell'isostaticità della struttura



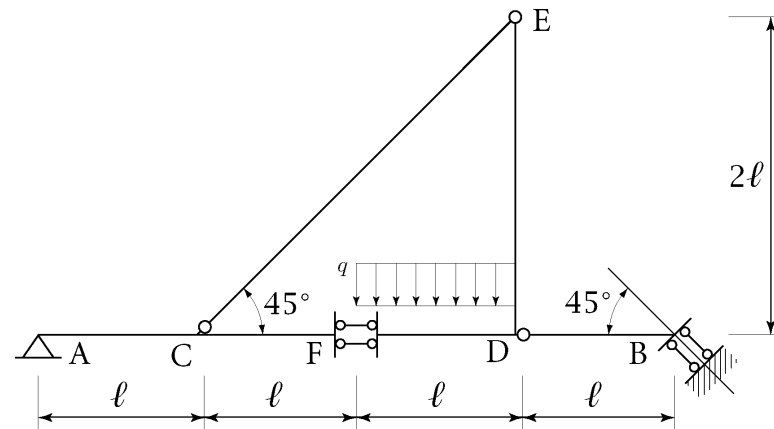
Calcolo del momento in corrispondenza dell'incastro



$$L_e = 0 \Rightarrow M_A \varphi - (q\ell)(\varphi\ell) = 0 \Rightarrow M_A = q\ell^2$$

5.4 Esercizio 38

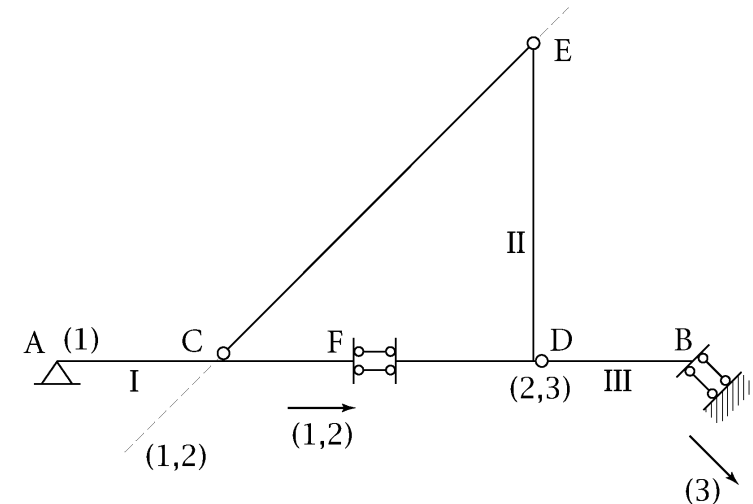
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare lo sforzo normale in F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



$$\left. \begin{aligned} \text{gradi di libertà} &= 3 \times 3 = 9 \\ \text{gradi di vincolo} &= \underbrace{(2 + 2)}_{\text{vincoli esterni}} + \underbrace{(1 + 2 + 2)}_{\text{vincoli interni}} = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{gradi di iperstaticità} = 0$$

Verifica dell'isostaticità della struttura



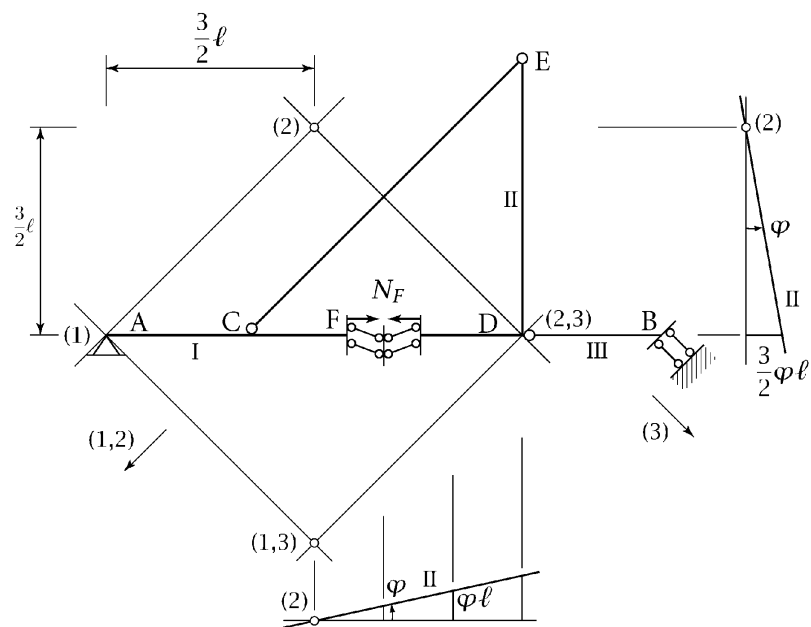
$$\left. \begin{aligned} (1,2) &\text{ appartiene alla retta } CE \\ (1,2) &\text{ coincide con il punto } \\ &\text{improprio della retta } AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ I e II non subiscono moti relativi

$$\Rightarrow (1,3) \equiv (2,3) \quad \text{e} \quad (1) \equiv (2)$$

$\Rightarrow (1), (1,3), (3)$ non sono allineati

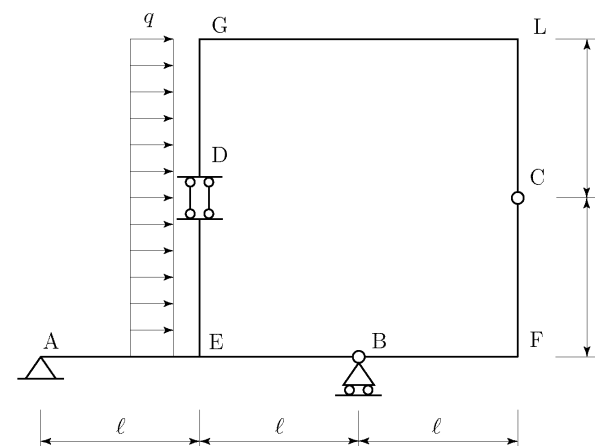
$\Rightarrow$ gradi di labilità = 0

Calcolo dello sforzo normale in F

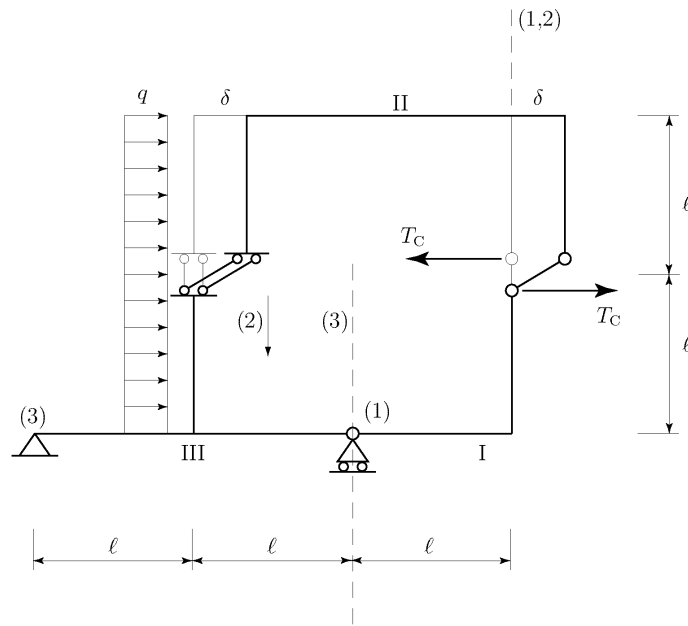
$$-(N_F)\left(\frac{3}{2}\varphi\ell\right) - (q\ell)(\varphi\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_F = -\frac{2}{3}q\ell$$

5.5 Esercizio 39

Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico ripartito costante sul montante di sinistra, determinare il taglio in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



Schema per il calcolo del taglio in C



$\left. \begin{array}{l} (3) \text{ deve coincidere con A} \\ (3) \text{ deve appartenere alla verticale per B} \end{array} \right\} \Rightarrow (3) \text{ non esiste}$

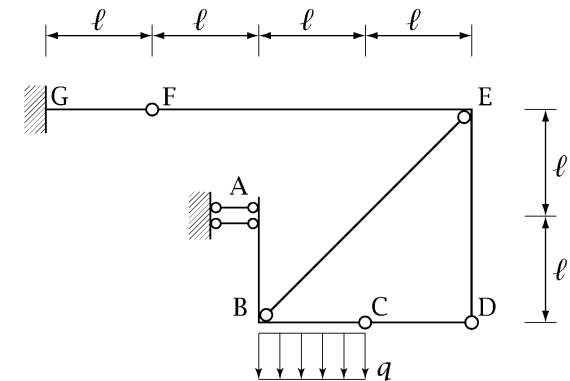
$(2) \equiv (1,2) \Rightarrow (1) \text{ non esiste}$

$$-T_C \delta + q \ell \delta = 0 \Rightarrow T_C = q \ell$$

5.6 Esercizio 40

Data la struttura di figura, soggetta ad un carico ripartito uniformemente lungo il tratto BC:

1. Verificare l'isostaticità della struttura
2. Determinare lo sforzo normale nel pendolo BE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.

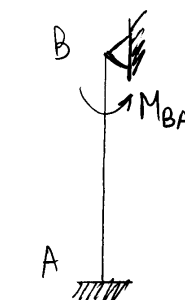
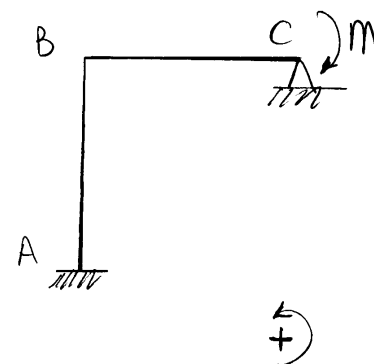
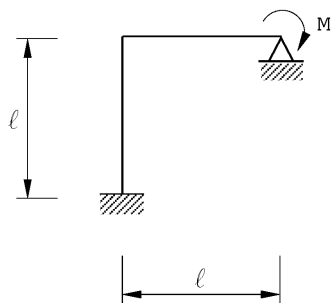


Capitolo 6

Esercizi sul metodo degli spostamenti

6.1 Esercizio 41

Risolvere la struttura iperstatica con il metodo delle deformazioni



$$\varphi_B = \frac{M_{BA} l}{4EJ}$$

$$\Downarrow$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi_B$$

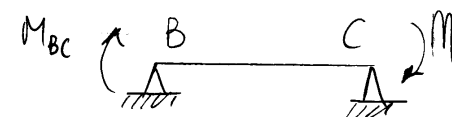
Equilibrio nodo B

$$M_{BA} = M_{BC} \Rightarrow \varphi_B = \frac{M l}{14EJ} \Rightarrow M_{BA} = \frac{2}{7} M$$

Metodo delle deformazioni

Incongnita la rotazione

φ_B del nodo B



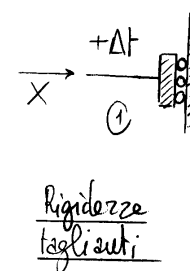
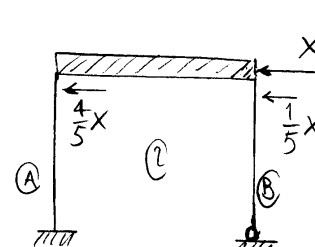
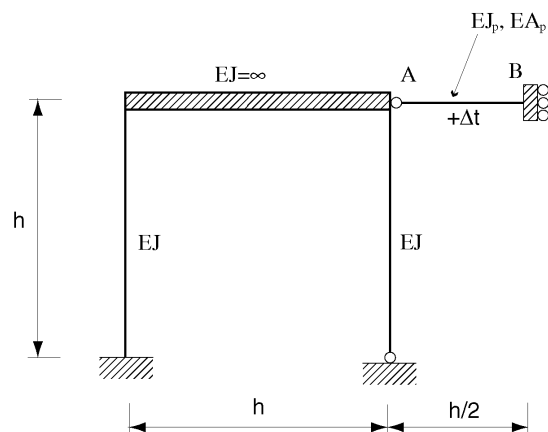
$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{M_{BC} l}{3EJ} + \frac{M l}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{M_{BC} l}{6EJ} - \frac{M l}{3EJ} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$M_{BC} = -\frac{3EJ}{l} \varphi_B + \frac{M}{2}$$

6.2 Esercizio 42

1. Risolvere la struttura iperstatica considerando l'asta AB deformabile assialmente;
2. Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
3. Determinare la variazione termica critica che provoca l'instabilità laterale dell'asta AB.



Rigidità
taglianti

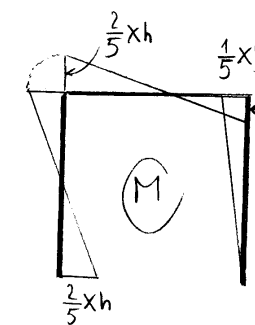
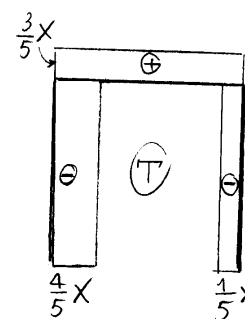
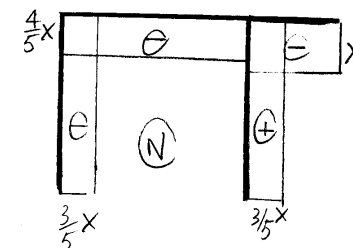
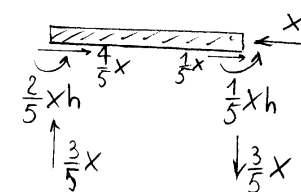
Ritorno A $12EJ/h^3$
Ritorno B $3EJ/h^3$

$$\delta_0 = \alpha \Delta t \frac{h}{2} - \frac{Xh}{2EA_p}$$

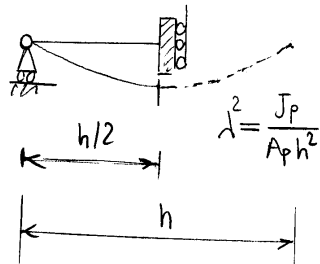
$$EA_p = \infty \Rightarrow X = \frac{15}{2} EJ \alpha \Delta t / h^2$$

$$\delta_c = \frac{Xh^3}{15EJ}$$

$$EA_p \neq \infty \Rightarrow X = \frac{EA_p \alpha \Delta t}{\frac{2Ah^2}{15J} + 1}$$



Luca libera di inflessione dell'asta $AB \equiv 2(h/2) = h$



$$X_{cr} = \frac{\pi^2 E J_P}{h^2} \Rightarrow$$

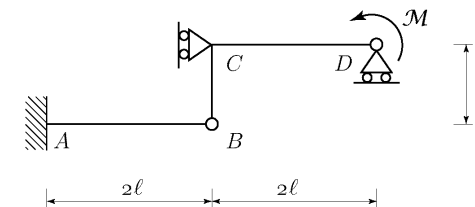
$$\Rightarrow \frac{E A_P \alpha \Delta t_{cr}}{\frac{2}{15} \frac{A_P h^2}{J} + 1} = \frac{\pi^2 E J_P}{h^2}$$

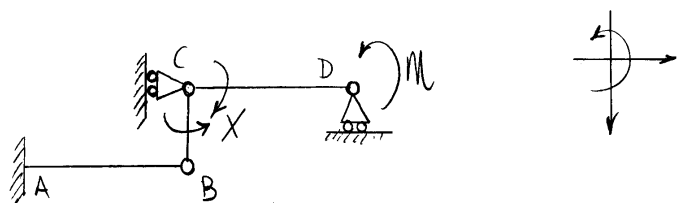
$$\Delta t_{cr} = \left(1 + \frac{2}{15} \frac{A_P h^2}{J} \right) \frac{\pi^2 J_P}{\alpha A_P h^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{15} \frac{A_P h^2}{J} \right) \frac{\pi^2 \lambda^2}{\alpha}$$

6.3 Esercizio 43

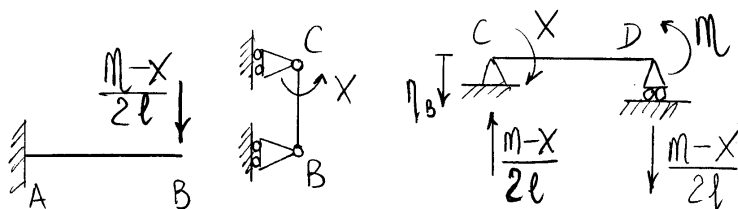
Calcolare la rigidezza alla rotazione del nodo D.





Struttura principale isostatica

Congruenza: $\varphi_{CD} = \varphi_{CB}$



$$\begin{cases} \eta_B = \frac{\frac{M-X}{2l} (2l)^3}{3EJ} \\ \varphi_{CB} = \frac{Xl}{3EJ} \\ \varphi_{CD} = -\frac{X(2l)}{3EJ} - \frac{M(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_B}{2l} \end{cases}$$

Equazione risolvente:

$$-\frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} - \frac{1}{3} \frac{Ml}{EJ} + \frac{2}{3} \frac{Ml}{EJ} - \frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{Xl}{EJ}$$

$$\frac{5}{3} X = \frac{1}{3} M \Rightarrow X = \frac{1}{5} M$$

La rigidezza alla rotazione K_D rappresenta la coppia che occorre applicare in D per ottenere la rotazione unitaria:

$$\varphi_D = \frac{M(2l)}{3EJ} + \frac{(M/5)(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_B}{2l} = \frac{19}{15} \frac{Ml}{EJ}$$

$$K_D = \frac{15}{19} \frac{EJ}{l}$$

6.4 Esercizio 44

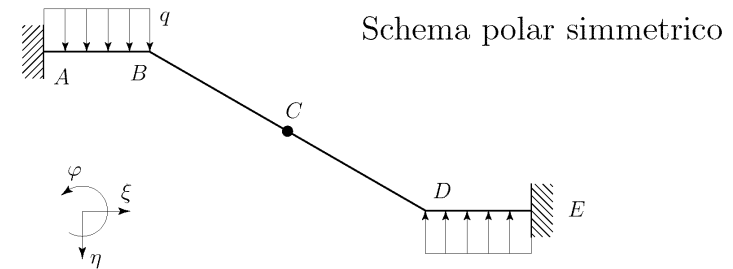
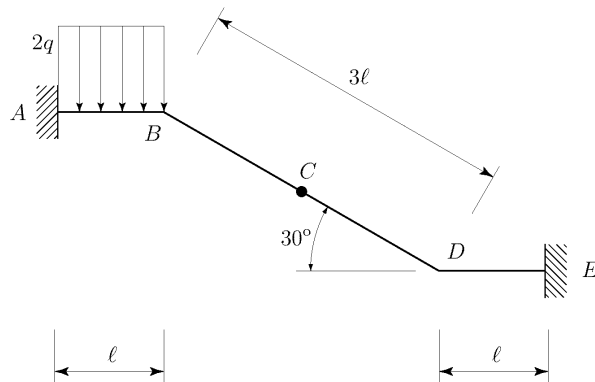
Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C, e in particolare:

1. Risolvere lo schema polar simmetrico con il metodo delle deformazioni;
2. Risolvere lo schema polar emisimmetrico con il metodo delle forze.

Per i due schemi polar simmetrico e polar emisimmetrico:

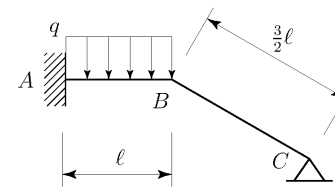
1. Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
2. Calcolare rotazione e spostamento verticale del nodo B e disegnare la deformata elastica;
3. Disegnare la curva delle pressioni.

Per lo schema complessivo, tracciare infine i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale.

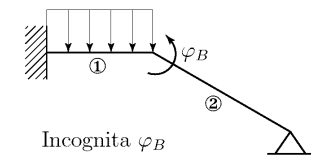


Schema polar simmetrico

Schema equivalente



Metodo delle deformazioni



Incognita φ_B

Rigidezze alla rotazione nodo B:

$$\begin{cases} K_B^{(1)} = \frac{4EJ}{l} \\ K_B^{(2)} = \frac{3EJ}{\frac{3}{2}l} = \frac{2EJ}{l} \end{cases}$$

$$K_B^{\text{tot}} = \frac{6EJ}{l}$$

Spostamento verticale nodo B:

$$\eta_B = 0$$

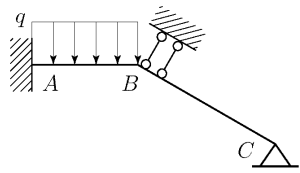
Rotazione nodo B:

$$\frac{6EJ}{l} \varphi_B = \frac{q\ell^2}{12} \Rightarrow \varphi_B = \frac{q\ell^3}{72EJ}$$

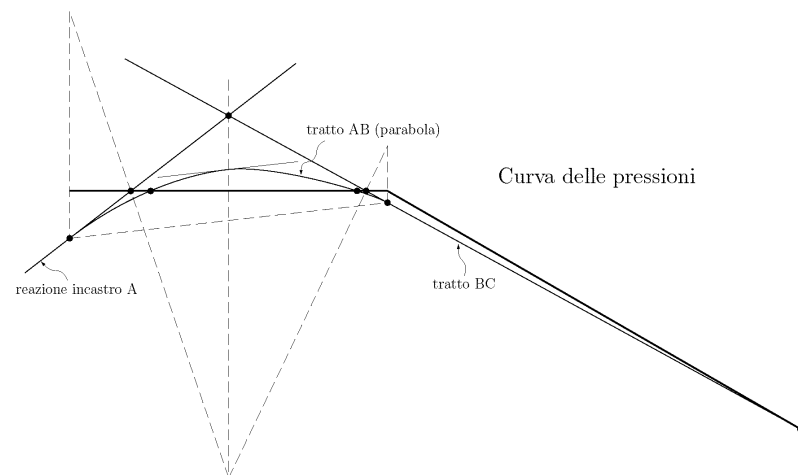
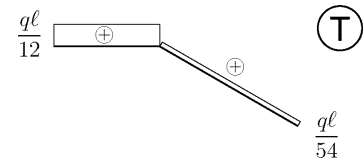
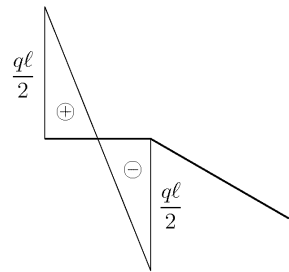
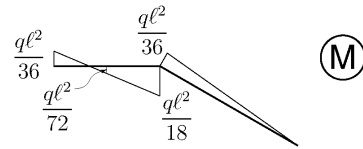
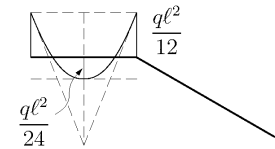
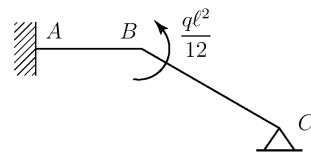
Coefficienti di ripartizione:

$$\begin{cases} \rho^{(1)} = \frac{2}{3} \\ \rho^{(2)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

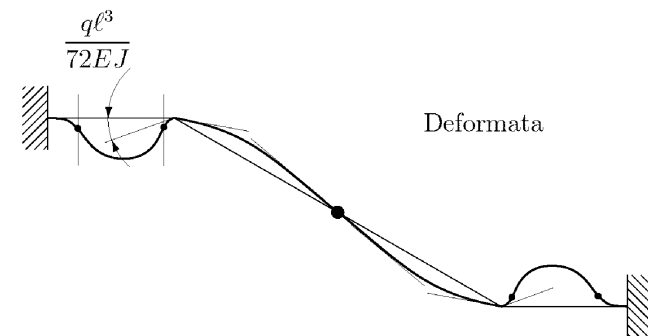
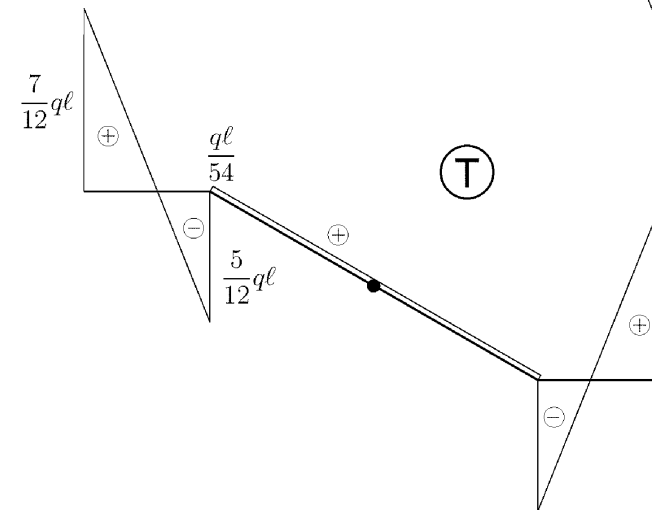
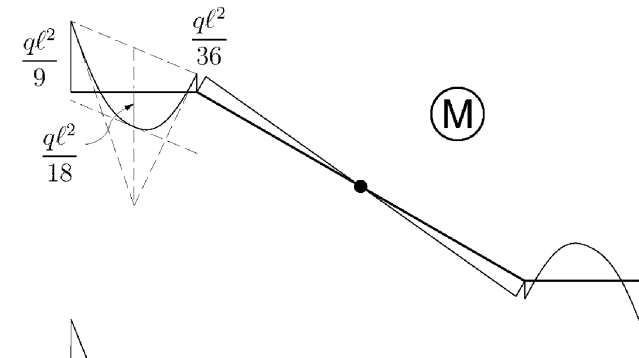
Incastro perfetto in B

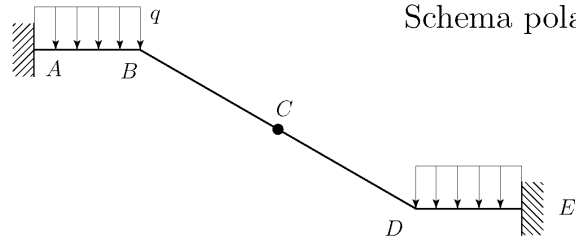


Reazione di incastro perfetto cambiata di segno

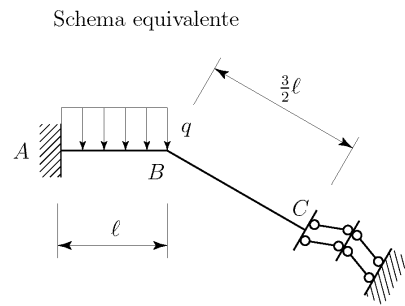


diagrammi totali





Schema polar emisimmetrico



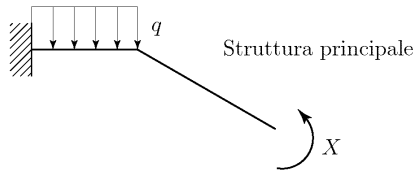
$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{Xl}{EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{X(\frac{3}{2}\ell)}{EJ} + \varphi_B = \frac{5Xl}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} \end{cases}$$

Rotazione nodo B:

$$\varphi_B = \frac{q\ell^3}{15EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} = -\frac{q\ell^3}{10EJ}$$

La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette parallele nel tratto AB e non esiste nel tratto BC

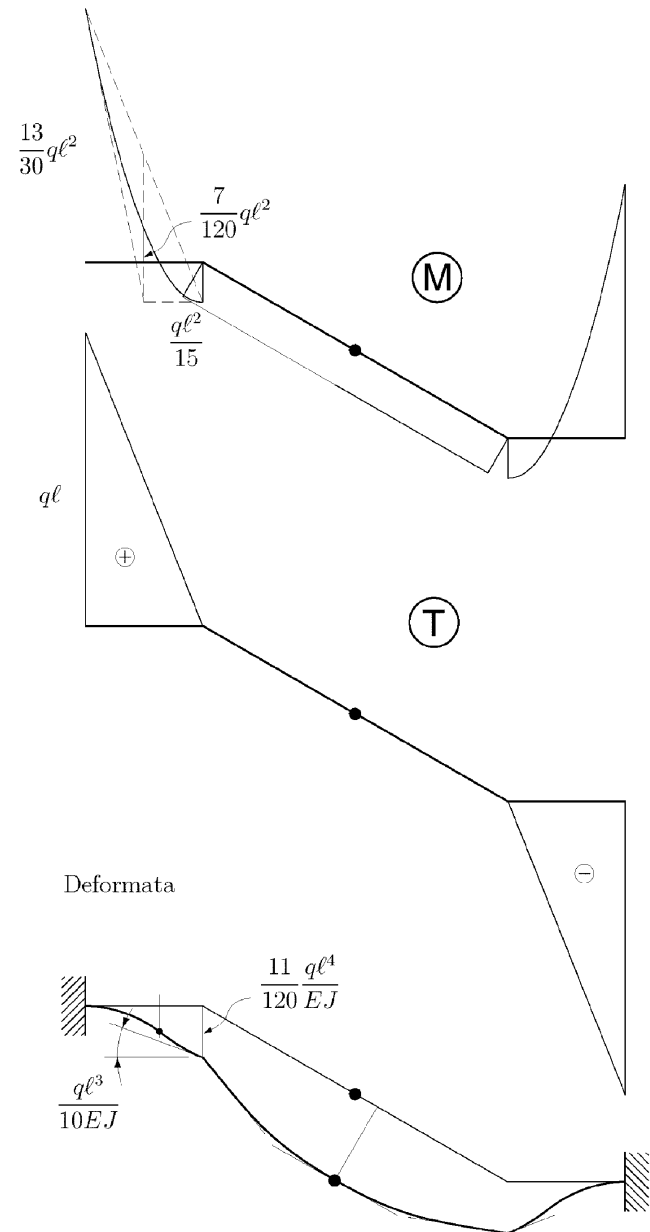
Metodo delle forze

Congruenza: $\varphi_C = 0$

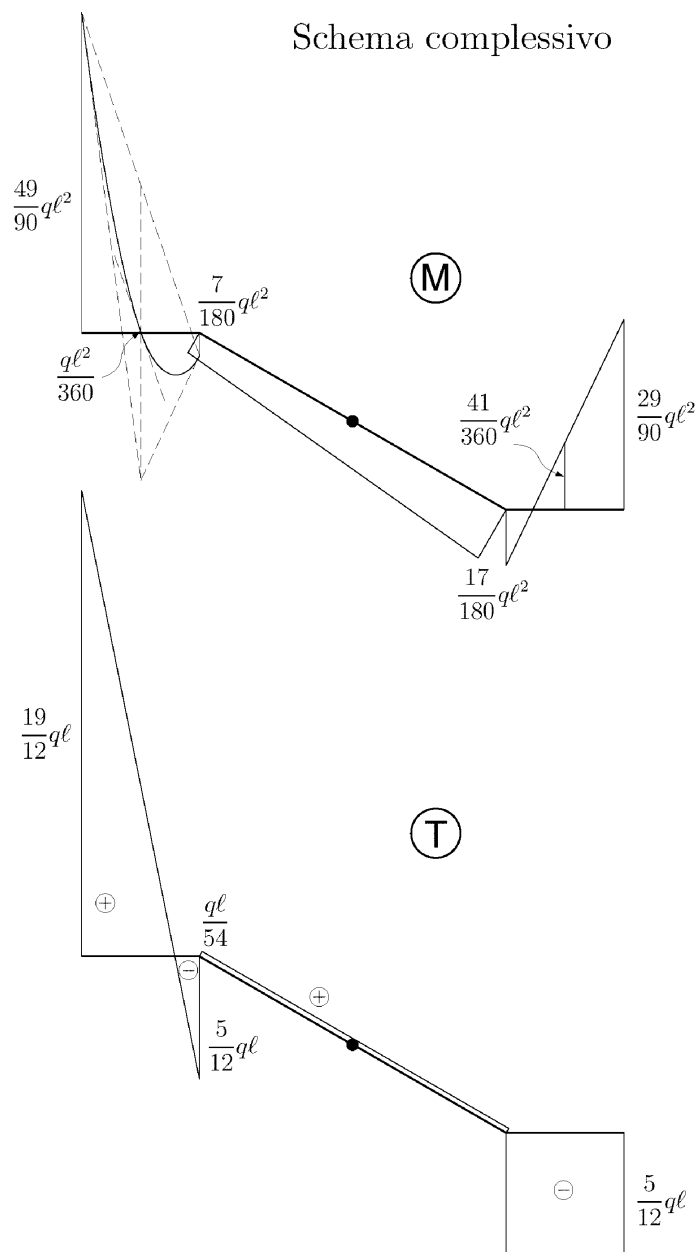
$$\varphi_C = 0 \Rightarrow X = \frac{q\ell^2}{15}$$

Spostamento verticale nodo B:

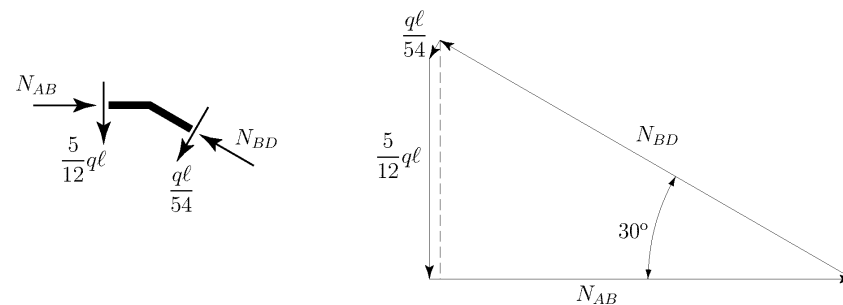
$$\eta_B = -\frac{X\ell^2}{2EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} = \frac{11}{120} \frac{q\ell^4}{EJ}$$



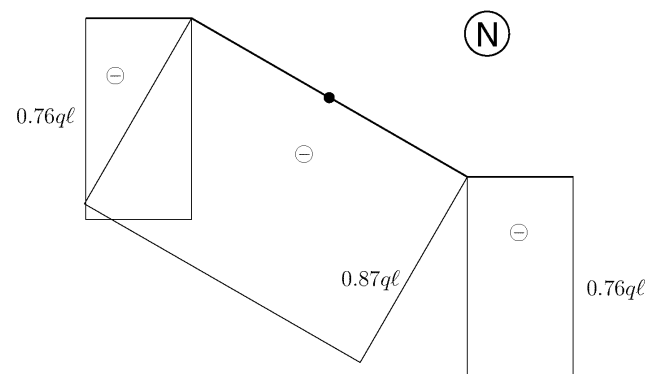
Schema complessivo



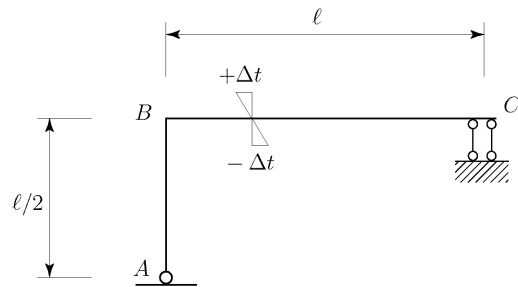
Equilibrio del nodo B per il calcolo dello sforzo normale



$$\begin{cases} N_{BD} = \frac{q\ell}{\sin 30^\circ} \left(\frac{5}{12} + \frac{\cos 30^\circ}{54} \right) = \frac{45 + \sqrt{3}}{54} q\ell = 0.87q\ell \\ N_{AB} = N_{BD} \cos 30^\circ + \frac{q\ell}{54} \sin 30^\circ = \frac{4 + 45\sqrt{3}}{108} q\ell = 0.76q\ell \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

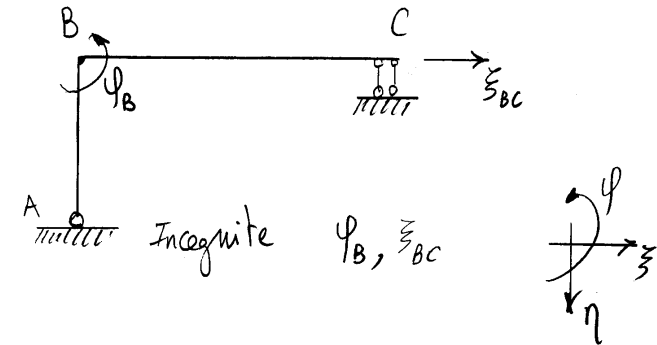


6.5 Esercizio 45

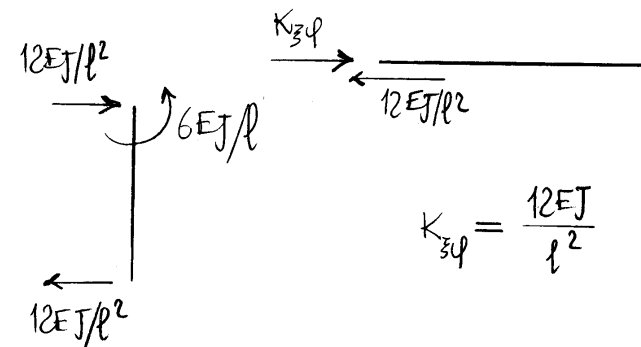
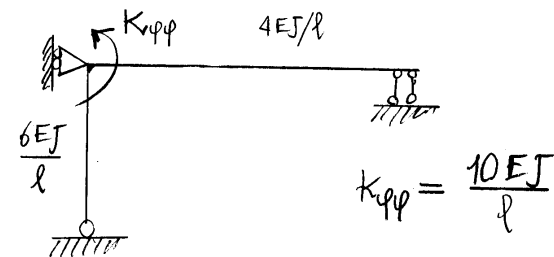


- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) Calcolare l'energia elastica di deformazione.

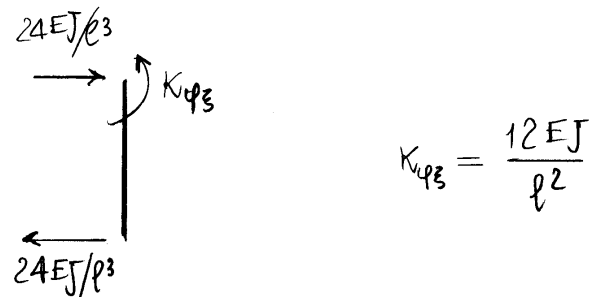
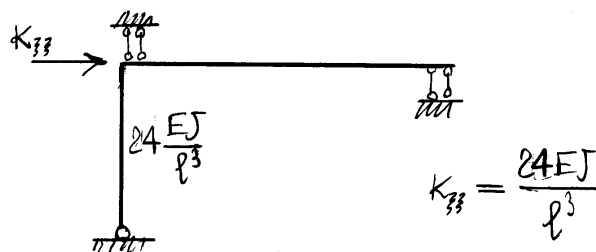
Matrice delle rigidezze



Prima colonna

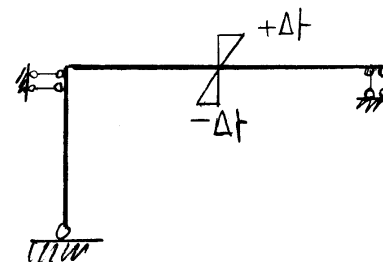


Seconda colonna



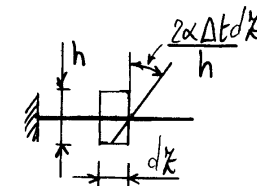
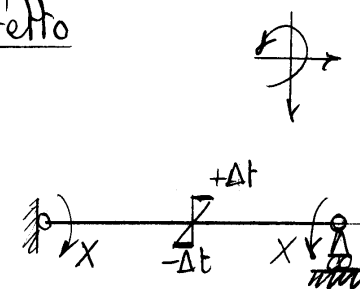
$$\underline{K} \equiv 2 \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 5l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix}$$

Reazioni di incastro perfetto



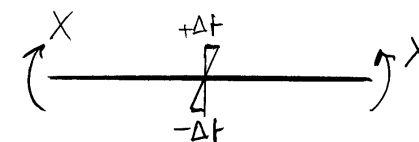
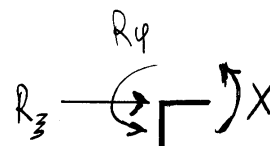
$$\frac{Xl}{2EJ} - \frac{\alpha \Delta t l}{h} = 0$$

$$X = \frac{2EJ\alpha\Delta t}{h}$$



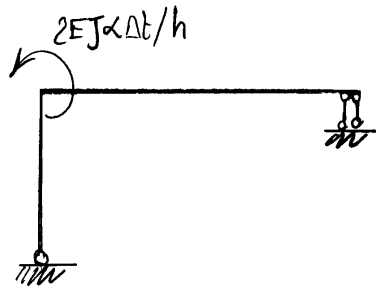
$$d\varphi = -2\alpha\Delta t dz/h$$

$$\varphi = \int_0^{l/2} d\varphi = -\frac{\alpha\Delta t l}{h}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\varphi} = -\frac{2EJ\alpha\Delta t}{h} \\ R_z = 0 \end{array} \right.$$

Reazioni di incastro perfetto combinate di segno



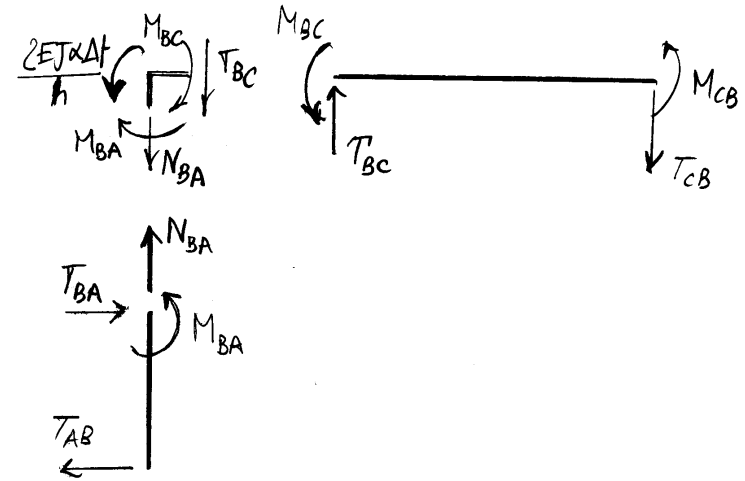
$$2 \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 5l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \xi_{BC} \end{Bmatrix} = 2 \frac{EJ}{l^3} \frac{\alpha\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} l^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5l \varphi_B + 6 \xi_{BC} = \frac{\alpha\Delta t}{h} l^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 6l \varphi_B + 12 \xi_{BC} = 0 \end{cases}$$

$$2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 4l \varphi_B = 2 \frac{\alpha\Delta t}{h} l^2 \Rightarrow \varphi_B = \frac{\alpha\Delta t}{2h} l$$

$$5 \times \textcircled{2} - 6 \times \textcircled{1} \Rightarrow 24 \xi_{BC} = -6 \frac{\alpha\Delta t}{h} l^2 \Rightarrow \xi_{BC} = -\frac{\alpha\Delta t}{4h} l^2$$



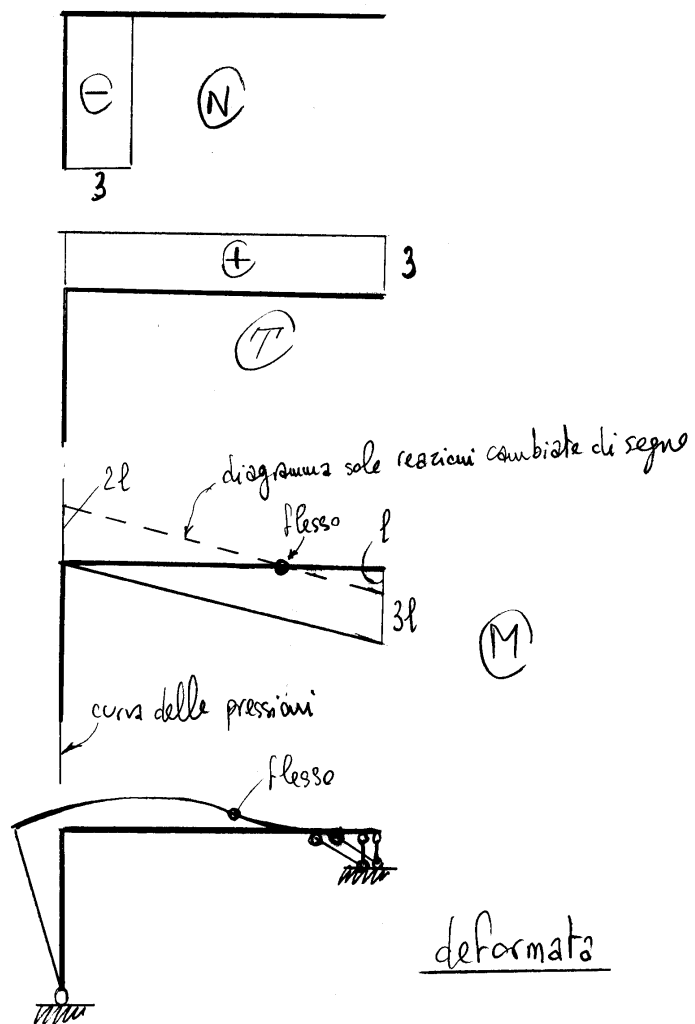
$$\begin{cases} M_{BA} = \frac{6EJ}{l} \varphi_B + \frac{12EJ}{l^2} \xi_{BC} = 0 \\ T_{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi_B = \frac{2EJ\alpha\Delta t}{h} \\ M_{CB} = M_{BC}/2 = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h} \end{cases}$$

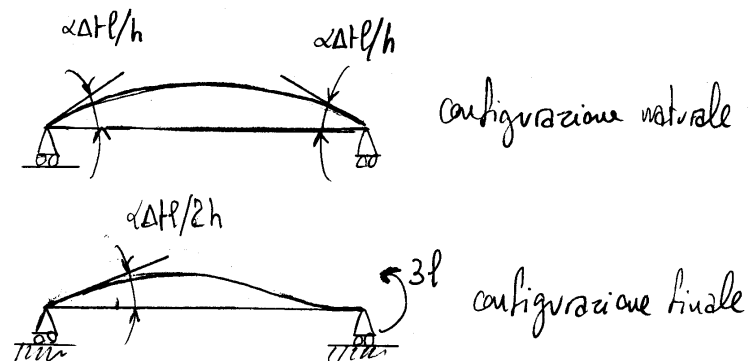
$$T_{BC} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{l} = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{lh}$$

$$N_{BA} = -\frac{3EJ\alpha\Delta t}{lh}$$

Diagrammi (a meno di $EJ\alpha\Delta t/hl$)



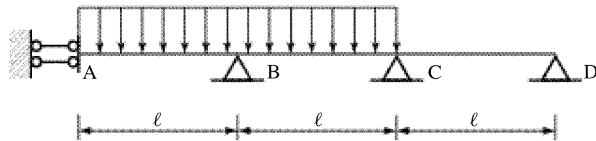
Energia elastica di deformazione



$$L_d = \frac{1}{2} \frac{EJ\alpha\Delta t}{hl} (3l) \frac{\alpha\Delta t l}{h}$$

$$= \frac{3}{2} EJ(\alpha\Delta t)^2 \frac{l}{h^2}$$

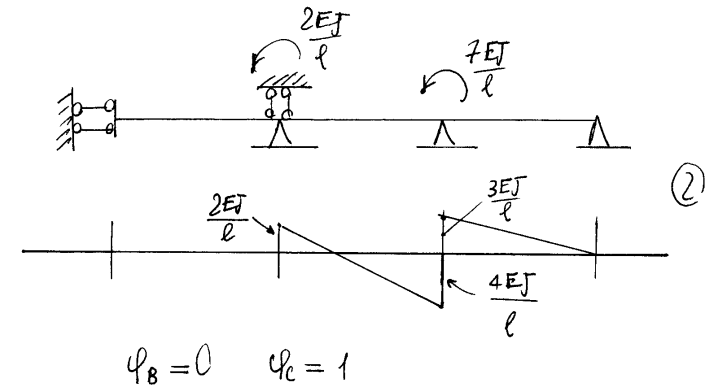
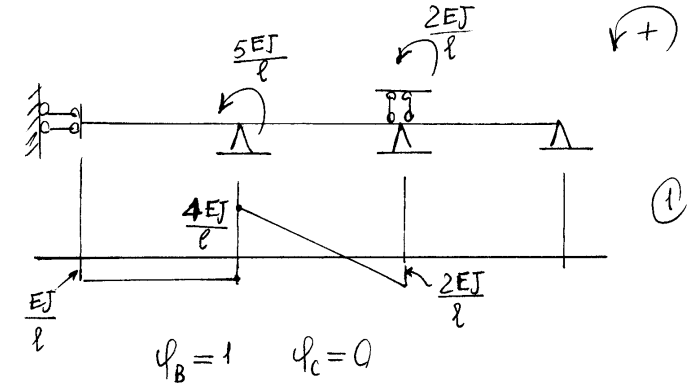
6.6 Esercizio 46



Data la trave continua di figura:

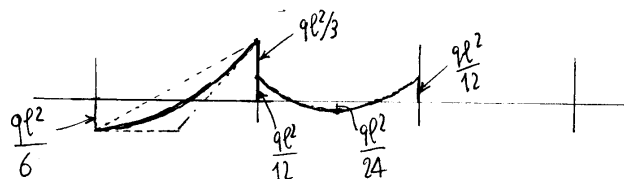
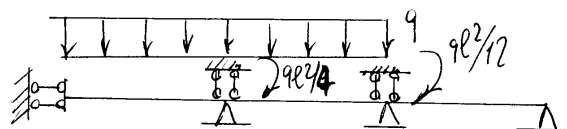
1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Calcolare le rotazioni delle sezioni B e C utilizzando la matrice delle rigidezze.

Rigidezze



$$K = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l}$$

Momenti di incastro perfetto



$$\begin{cases} M_A = -\frac{q l^2}{4} \\ M_B = -\frac{q l^2}{12} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{q l^3}{12 E J} \Rightarrow \begin{cases} 5 \varphi_B + 2 \varphi_C = 3 \\ 2 \varphi_B + 7 \varphi_C = 1 \end{cases}$$

A meno di $q l^3 / 12 E J$

$$\Rightarrow \begin{cases} 31 \varphi_C = -1 \\ 31 \varphi_B = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = \frac{19}{372} \frac{q l^3}{E J} \\ \varphi_C = -\frac{1}{372} \frac{q l^3}{E J} \end{cases}$$

$$M_A = \left(\frac{1}{6} + \frac{19}{372} \right) q l^2 = \frac{81}{372} q l^2 = \frac{27}{124} q l^2$$

$$M_{BA} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{19}{372} \right) q l^2 = -\frac{105}{372} q l^2 = -\frac{35}{124} q l^2$$

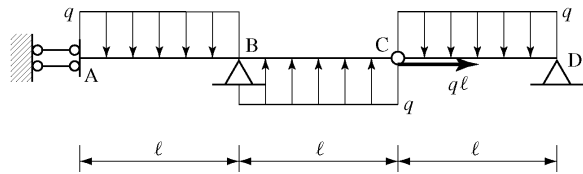
$$M_{BC} = \left(-\frac{1}{12} - \frac{4 \times 19}{372} + \frac{2}{372} \right) q l^2 = -\frac{105}{372} q l^2 = -\frac{35}{124} q l^2$$

$$M_{CB} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{2 \times 19}{372} - \frac{4}{372} \right) q l^2 = \frac{3}{372} q l^2 = \frac{1}{124} q l^2$$

$$M_{CD} = +\frac{3}{372} q l^2 = +\frac{1}{124} q l^2$$

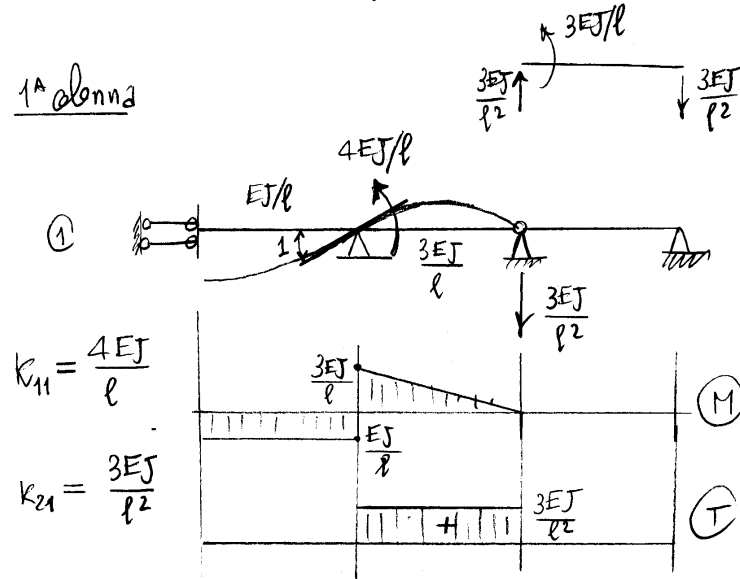
6.7 Esercizio 47

Risolvere la struttura col metodo delle rigidità.

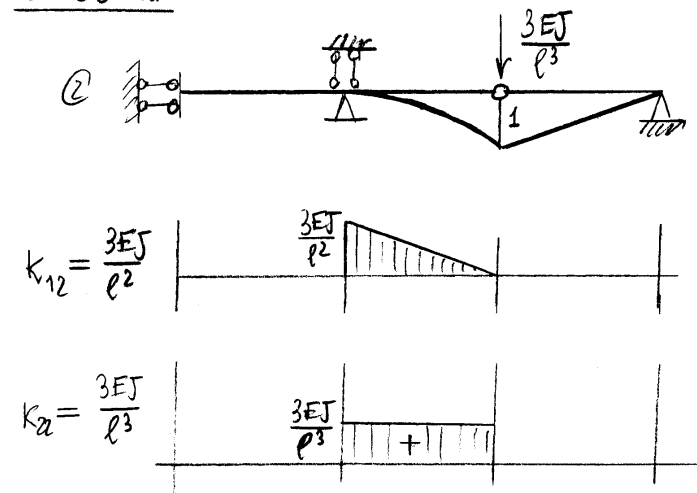


Spostamenti: $\underline{s} \equiv \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_C \end{Bmatrix}$

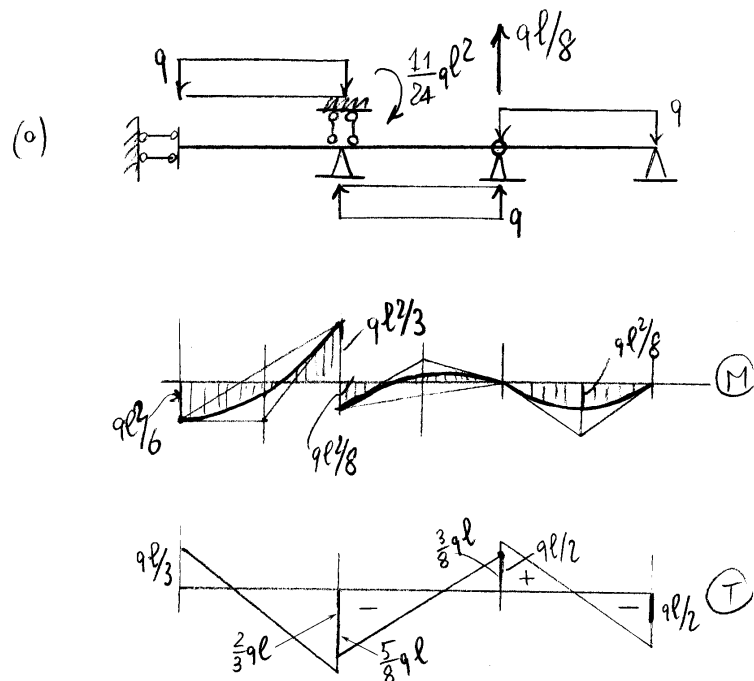
1ª colonna



2ª colonna



$$\underline{K} \equiv \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix}$$

Momenti di incastro perfettoSpostamenti di nodo

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_c \end{Bmatrix} = \frac{ql}{24} \begin{Bmatrix} 11l \\ 3 \end{Bmatrix}$$

A meno di $\frac{ql^4}{24EJ}$:

$$\begin{cases} 4l\varphi_B + 3\eta_c = 11 \\ 3l\varphi_B + 3\eta_c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = 8/l \\ \eta_c = -7 \end{cases}$$

e quindi:

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{3EJ}, \quad \eta_c = -\frac{7}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

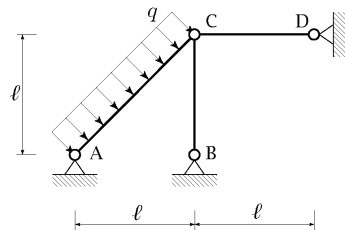
$$M_A = \frac{ql^2}{6} + \left(\frac{EJ}{l}\right) \frac{ql^3}{3EJ} = \frac{ql^2}{2}$$

$$M_{BA} = -\frac{ql^2}{3} + \left(\frac{EJ}{l}\right) \frac{ql^3}{3EJ} = 0$$

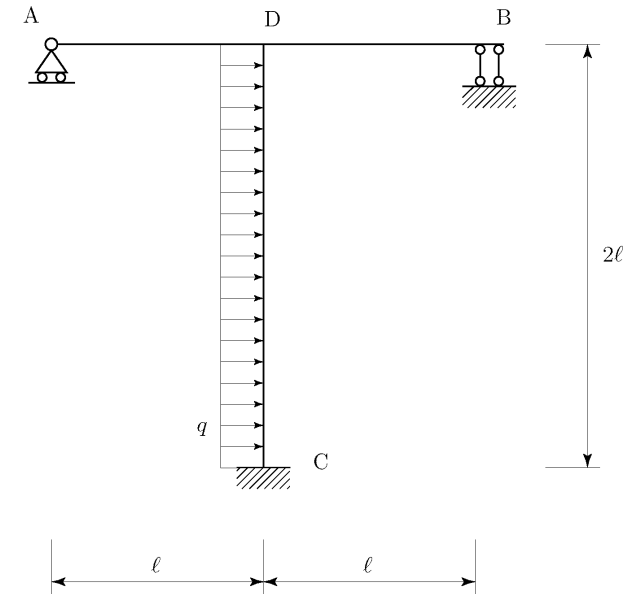
$$M_{BA} = \frac{ql^2}{8} - \left(\frac{3EJ}{l}\right) \frac{ql^3}{3EJ} - \left(\frac{3EJ}{l^2}\right) \left(-\frac{7}{24} \frac{ql^4}{EJ}\right) = 0$$

$$M_c = 0$$

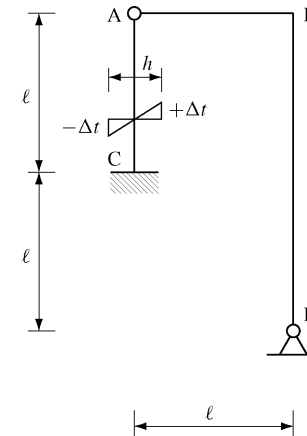
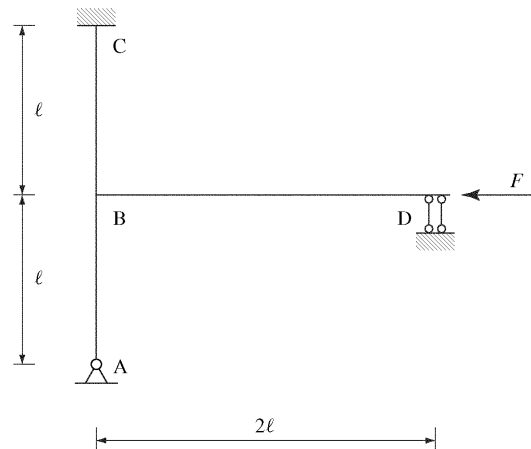
6.8 Esercizi proposti



- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze del sistema di pendoli sopra illustrato;
- 1) Risolvere la struttura utilizzando il metodo degli spostamenti;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Calcolare la rotazione dell'estremità C dell'asta AC;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) Determinare l'entità minima del carico distribuito q che provoca l'inflessione laterale per carico di punta in almeno uno dei pendoli del sistema.



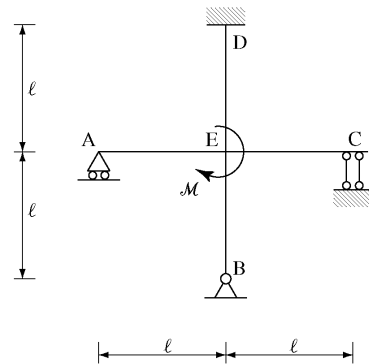
Risolvere la struttura utilizzando il metodo degli spostamenti;



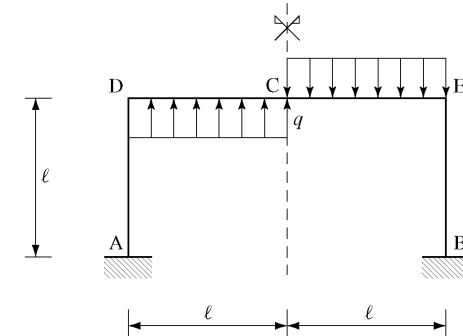
1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ai due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
3. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
5. Disegnare il diagramma quotato dello sforzo normale;
6. Disegnare la deformata elastica della struttura;
7. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

Dato il telaio ad un nodo spostabile di figura:

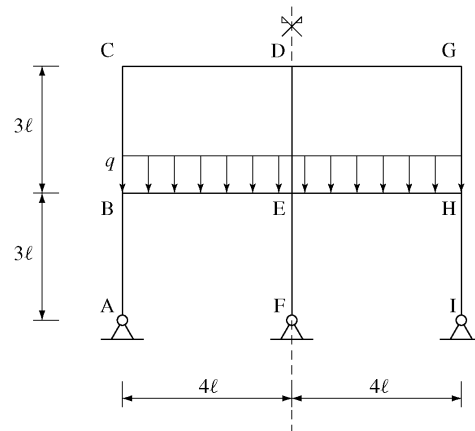
1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Risolvere la struttura col metodo delle rigidezze;
3. Calcolare l'energia elastica di deformazione.



1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ai due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
3. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
5. Disegnare il diagramma quotato dello sforzo normale;
6. Calcolare l'energia elastica di deformazione;
7. Impostare la soluzione con il metodo delle forze.

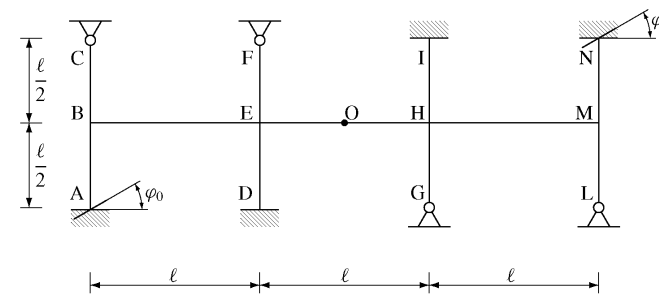


1. Impostare la soluzione con il metodo degli spostamenti;
2. Risolvere lo schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto, disegnare i relativi diagrammi quotati del momento flettente e del taglio e calcolare le reazioni di incastro perfetto;
3. Calcolare una colonna della matrice delle rigidezze, disegnando i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;
4. Completare il calcolo della matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo degli spostamenti;
5. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
6. Impostare la soluzione con il metodo delle forze.



Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sul tratto BEH:

1. Impostare la soluzione con il metodo degli spostamenti;
2. Risolvere lo schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto, disegnare i relativi diagrammi quotati del momento flettente e del taglio e calcolare le reazioni di incastro perfetto;
3. Calcolare una colonna della matrice delle rigidezze, disegnando i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;
4. Completare il calcolo della matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo degli spostamenti;
5. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
6. Disegnare la deformata elastica della struttura.



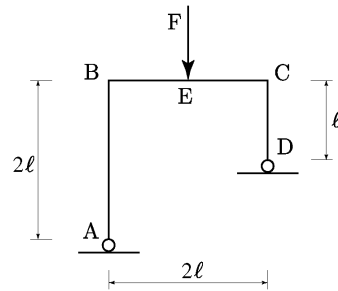
Sia data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un cedimento angolare nei due incastri A e N. Tenendo conto della sua polarsimmetria geometrica e materiale:

1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare il diagramma quotato del momento flettente e del taglio relativo ad uno dei due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
3. Calcolare le reazioni di incastro perfetto;
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
5. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
6. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
7. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

Capitolo 7

Esercizi sul lavoro di deformazione

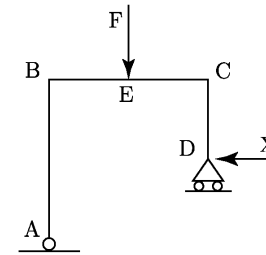
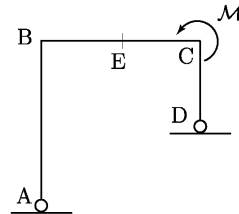
7.1 Esercizio 48



1) Calcolare il lavoro di deformazione in funzione della forza concentrata F ;

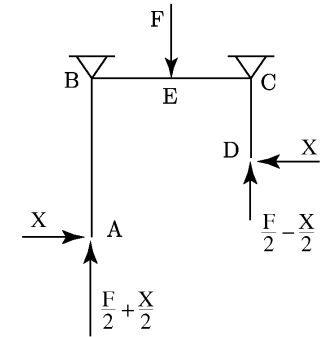
2) Assumendo quale zero dell'energia dei carichi esterni quella che si ha nella configurazione indeformata, calcolare il minimo dell'energia potenziale totale;

3) Utilizzando il teorema di Betti, calcolare lo spostamento verticale del punto E di mezzeria della travata nel caso la struttura sia soggetta ad una coppia concentrata nel punto C, come illustrato qui di fianco.



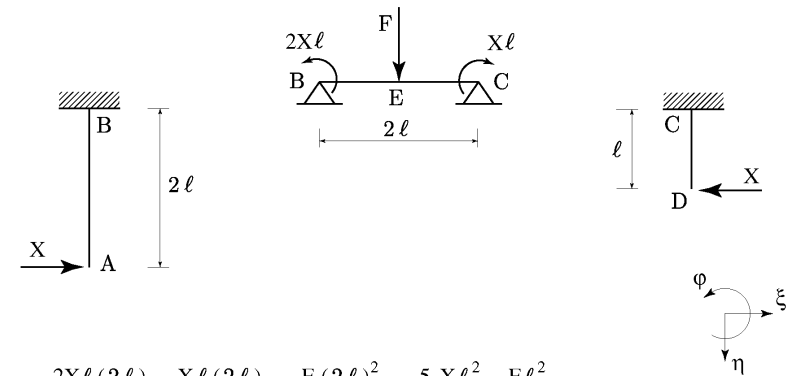
Struttura principale isostatica

Congruenza: $\xi_D = 0$



Struttura equivalente
(a meno di una traslazione orizzontale)

Congruenza: $\xi_D = \xi_A$



$$\varphi_B = \frac{2X\ell(2\ell)}{3EJ} + \frac{X\ell(2\ell)}{6EJ} - \frac{F(2\ell)^2}{16EJ} = \frac{5}{3} \frac{X\ell^2}{EJ} - \frac{F\ell^2}{4EJ}$$

$$\varphi_C = -\frac{2X\ell(2\ell)}{6EJ} - \frac{X\ell(2\ell)}{3EJ} + \frac{F(2\ell)^2}{16EJ} = -\frac{4}{3} \frac{X\ell^2}{EJ} + \frac{F\ell^2}{4EJ}$$

$$\xi_A = \frac{X(2\ell)^3}{3EJ} + \varphi_B(2\ell) = \frac{6}{EJ} X\ell^3 - \frac{F\ell^3}{2EJ}$$

$$\xi_D = -\frac{X\ell^3}{3EJ} + \varphi_C \ell = -\frac{5}{3} \frac{X\ell^3}{EJ} + \frac{F\ell^3}{4EJ}$$

$$\xi_A = \xi_D \implies \frac{6}{EJ} X\ell^3 - \frac{F\ell^3}{2EJ} = -\frac{5}{3} \frac{X\ell^3}{EJ} + \frac{F\ell^3}{4EJ} \implies \frac{23}{3} \frac{X\ell^3}{EJ} = \frac{3}{4} \frac{F\ell^3}{EJ}$$

$$X = \frac{9}{92} F$$

$$\varphi_C = \frac{11}{92} \frac{F \ell^2}{EJ}$$

$$\eta_E = -\frac{2X\ell(2\ell)^2}{16EJ} - \frac{X\ell(2\ell)^2}{16EJ} + \frac{F(2\ell)^3}{48EJ} = \frac{103}{1104} \frac{F\ell^3}{EJ} = .093 \frac{F\ell^3}{EJ}$$

Lavoro di deformazione (teorema di Clapeyron):

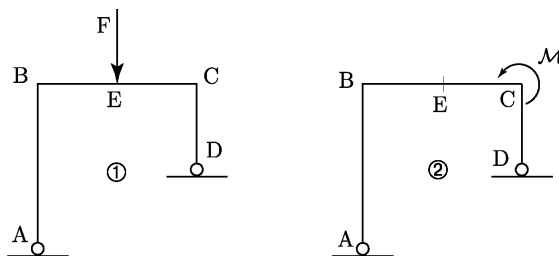
$$L_d = \frac{1}{2} F \eta_E = \frac{103}{2208} \frac{F^2 \ell^3}{EJ} = .047 \frac{F^2 \ell^3}{EJ}$$

Minimo dell'energia potenziale totale:

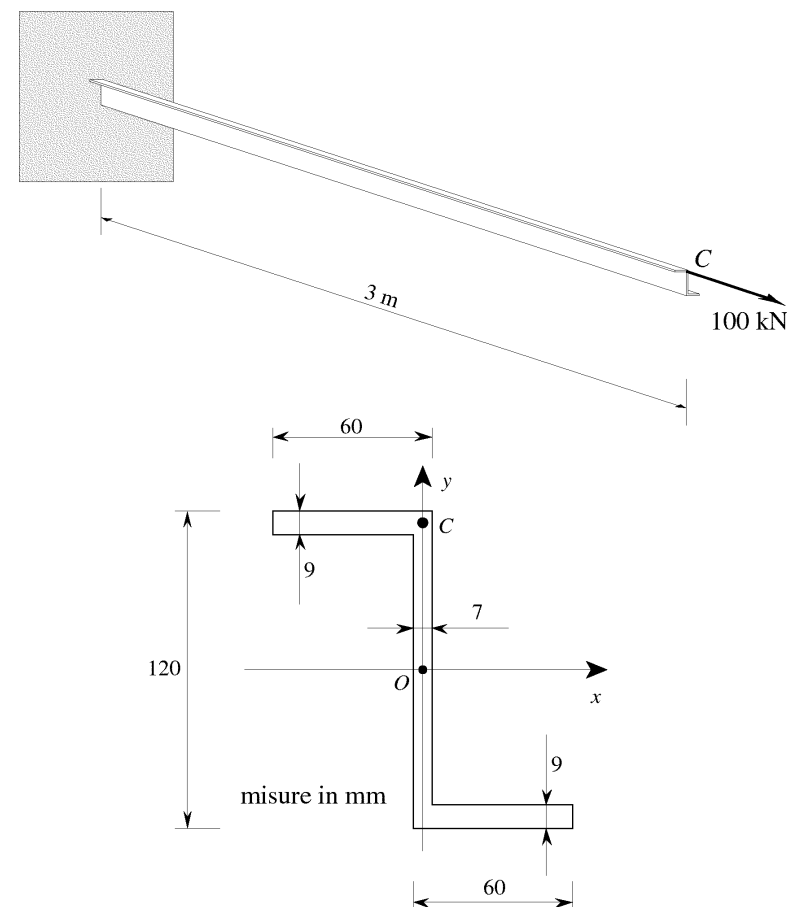
$$\Pi_{\min} = -F \eta_E + L_d = -\frac{1}{2} F \eta_E = -\frac{103}{2208} \frac{F^2 \ell^3}{EJ} = -.047 \frac{F^2 \ell^3}{EJ}$$

Spostamento verticale del punto E dovuto alla coppia $\mathcal{M}$ applicata in C (teorema di Betti):

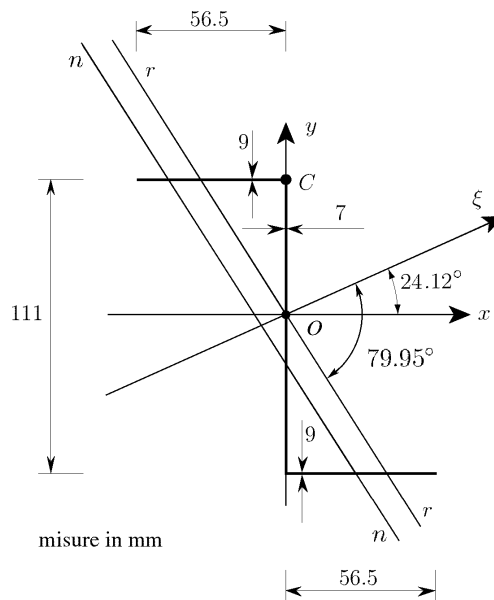
$$F \eta_E^{\textcircled{2}} = \mathcal{M} \varphi_C^{\textcircled{1}} \implies \eta_E^{\textcircled{2}} = \frac{11}{92} \frac{\mathcal{M} \ell^2}{EJ}$$



7.2 Esercizio 49



Data una mensola avente la sezione di figura e caricata all'estremità da una forza normale di trazione di 100 kN ed applicata nel punto C calcolare, mettendo in conto la deformabilità assiale della mensola, l'energia elastica di deformazione, lo spostamento orizzontale del punto C e la rotazione della sezione di estremità della mensola, assumendo il valore $E=210\,000\text{ N/mm}^2$ del modulo di Young.



$$A = 17.94 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_\xi = 48.23^\circ \\ \alpha_\xi = 24.12^\circ \end{cases}$$

Energia elastica di deformazione:

$$\begin{aligned} L_d &= \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{|\mathbf{M}|^2}{EJ_r} \right) \ell = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_\xi^2}{EJ_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EJ_\eta} \right) \ell \\ &= \frac{1}{2} (26.54 + 26.31 + 66.47) \text{ N} \times 3.00 \text{ m} = 178.98 \text{ J} \end{aligned}$$

Spostamento orizzontale w_C del punto C (teorema di Clapeyron):

$$L_d = \frac{1}{2} N w_C \quad \Rightarrow \quad w_C = 0.0036 \text{ m} = 3.6 \text{ mm}$$

Rotazione φ della sezione di estremità (attorno all'asse neutro):

$$\begin{aligned} |\varphi| &= \frac{|\mathbf{M}| \ell}{EJ_r \cos \widehat{x\hat{n}}} = \sqrt{\left(\frac{M_\xi \ell}{EJ_\xi} \right)^2 + \left(\frac{M_\eta \ell}{EJ_\eta} \right)^2} \\ &= \sqrt{(0.0156)^2 + (0.0879)^2} \text{ rad} = 0.089 \text{ rad} = 5.12^\circ \end{aligned}$$

Inclinazione dell'asse neutro (angolo minore di 90°):

$$\widehat{\xi n} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_\xi}{J_\eta \tan 65.88^\circ} \right\} = 79.95^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \widehat{x n} = 55.84^\circ \\ \widehat{y n} = 34.16^\circ \end{cases}$$

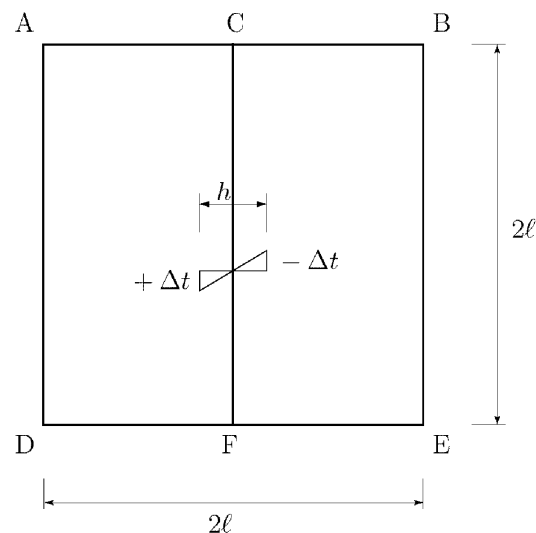
Momento di inerzia rispetto all'asse r baricentrico e parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione y):

$$J_r = \frac{J_\xi \cos^2 \widehat{\xi n} + J_\eta \sin^2 \widehat{\xi n}}{\sin^2 \widehat{y n}} = 158.094 \text{ cm}^4$$

Momento flettente:

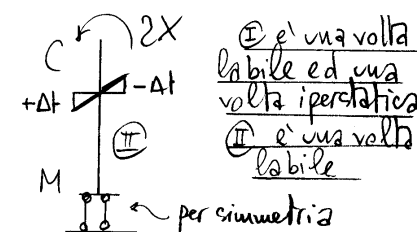
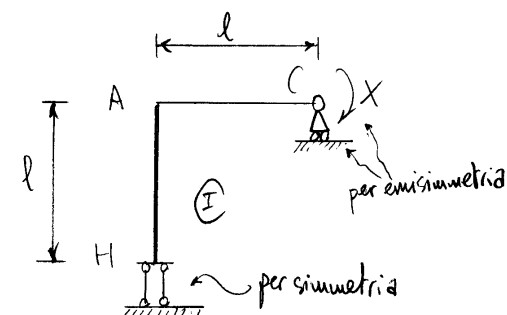
$$\mathbf{M} = N y_C \mathbf{e}_x = (5550.0 \text{ Nm}) \mathbf{e}_x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\xi = N \cos \alpha_\xi = 5065.6 \text{ Nm} \\ M_\eta = -N \sin \alpha_\xi = -2267.6 \text{ Nm} \end{cases}$$

7.3 Esercizio 50



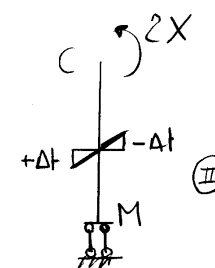
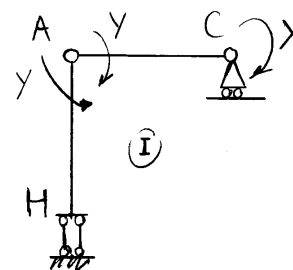
La struttura inflessa di figura è soggetta ad una distorsione termica a farfalla nel montante centrale:

- Calcolare l'energia elastica di deformazione della struttura complessiva.



Ⓘ è una volta
labile ed una
volta iperstatica
Ⓙ è una volta
labile

ϕ



$$X = \frac{32}{37} EJ \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

$$Y = \frac{4}{37} EJ \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = -\frac{\gamma l}{EJ} = -\frac{4}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \\ \varphi_C = 2 \alpha \Delta t \frac{l}{h} - \frac{2 \times l}{EJ} = \frac{10}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \end{cases}$$

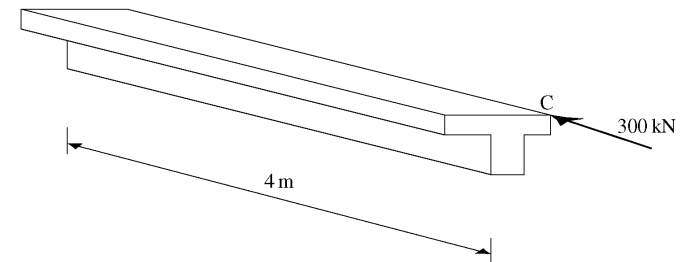
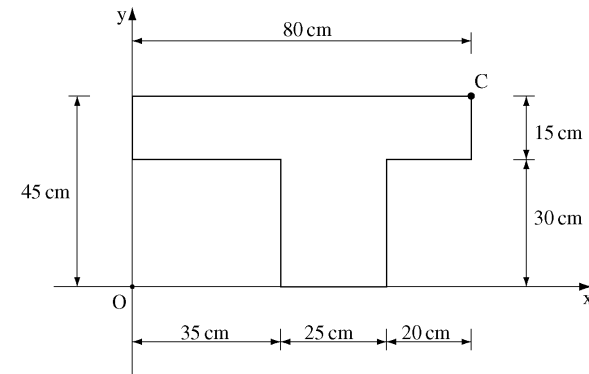
Energia elastica di deformazione

$$L_d = \left\{ 4 \times \left(\text{diagramma} \right) + 2 \times \left(\text{diagramma} \right) \right\}$$

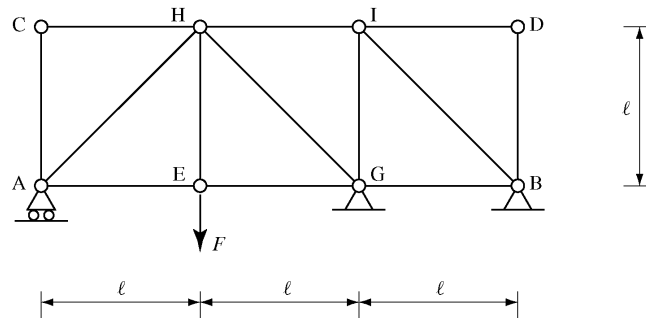
configurazione naturale
sotto la distorsione
termica

$$\begin{aligned} L_d &= 4 \left(\frac{1}{2} \times \varphi_C \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2 \times l}{EJ} \right) = \\ &= \left(2 \frac{32}{37} \frac{10}{37} + 4 \frac{32}{37} \frac{32}{37} \right) EJ l \left(\frac{\alpha \Delta t}{h} \right)^2 = \frac{128}{37} EJ l \left(\frac{\alpha \Delta t}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

7.4 Esercizi proposti



Data la mensola di figura, avente la sezione riportata più sopra e caricata da una forza normale di compressione di 300 kN ed applicata nel punto C calcolare, mettendo in conto la deformabilità assiale della trave, l'energia elastica di deformazione, lo spostamento orizzontale del punto C e la rotazione della sezione di estremità della mensola, assumendo il valore $E=20000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young.



Con riferimento alla figura, supponendo che le aste abbiano area A uguale e posto che le aste siano realizzate in acciaio Fe360, di modulo di Young $E = 200 \text{ GPa}$ e tensione ammissibile $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ N/mm}^2$, e che inoltre sia $F = 150 \text{ kN}$, $\ell = 2 \text{ m}$, $A = 20 \text{ cm}^2$ e che infine i momenti di inerzia massimo e minimo delle aste siano $J_{\text{max}} = 140 \text{ cm}^4$ e $J_{\text{min}} = 100 \text{ cm}^4$:

- Calcolare l'energia elastica di deformazione (in joule), lo spostamento orizzontale del nodo E (in millimetri) e l'energia potenziale totale corrispondente alla soluzione (in joule).

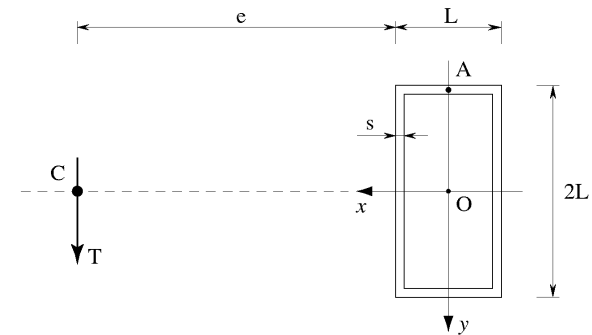
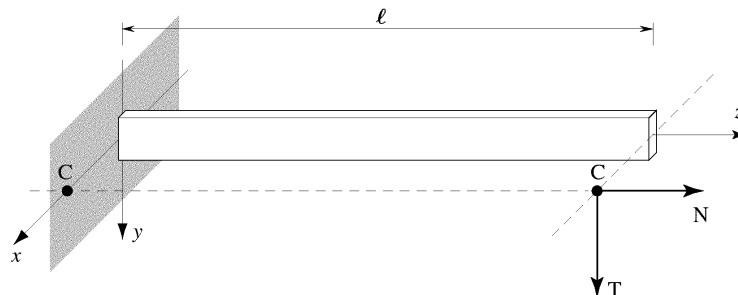
Capitolo 8

Esercizi di riepilogo

8.1 Esercizio 51

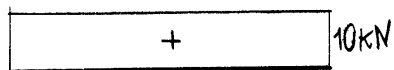
Una mensola di sezione rettangolare sottile chiusa è soggetta, nella sezione di estremità, ad un taglio T verticale e ad uno sforzo normale N di trazione applicati in corrispondenza del punto C :

1. Disegnare i diagrammi quotati delle caratteristiche della sollecitazione;
2. Disegnare i diagrammi quotati delle tensioni normali e tangenziali relativi alla sezione di incastro della mensola;
3. Eseguire la verifica di resistenza utilizzando il criterio di Huber-von Mises;
4. Determinare, nel punto A della sezione di incastro, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi, la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr e le direzioni e componenti principali di sforzo;

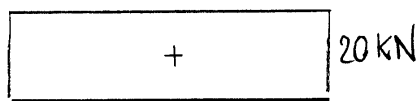
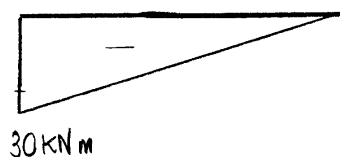
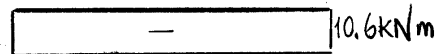
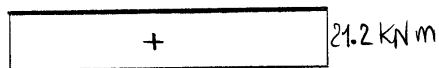


$L = 120 \text{ mm}$	$N = 10 \text{ kN}$
$s = 10 \text{ mm}$	$T = 20 \text{ kN}$
$e = 1 \text{ m}$	$E = 200 \text{ kN/mm}^2$
$\ell = 1.5 \text{ m}$	$\nu = 0.3$
	$\sigma_{adm} = 160 \text{ N/mm}^2$

5. Calcolare, trascurando la deformabilità assiale e tagliante della mensola, lo spostamento del baricentro e la rotazione della sezione di estremità della mensola;
6. Calcolare l'energia elastica di deformazione, sempre trascurando la deformabilità assiale e tagliante della mensola.

Caratteristiche della sollecitazione

N

 $T_y = T$  $M_x = -T(l-z)$  $M_y = -N(e + \frac{L}{2})$  $M_t = T(e + \frac{L}{2})$ Caratteristiche inerziali della sezione

$$s = 10 \text{ mm}$$

$$L - s = 110 \text{ mm}$$

$$2L - s = 230 \text{ mm}$$

$$A = 2 \left\{ (L-s) + (2L-s) \right\} s = 6800 \text{ mm}^2$$

$$J_x = 2 \left\{ \frac{s}{12} (2L-s)^3 + s(L-s) \left(\frac{2L-s}{2} \right)^2 \right\}$$

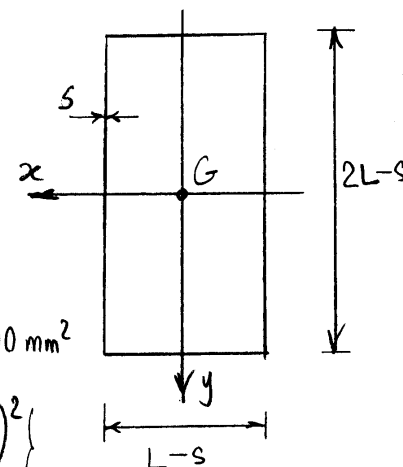
$$= 4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

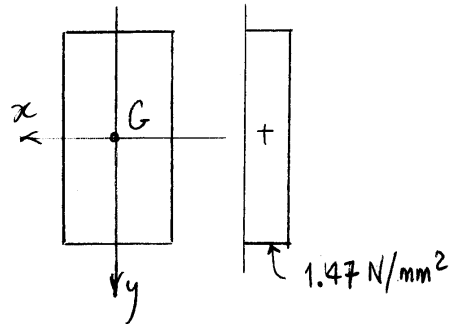
$$J_y = 2 \left\{ \frac{s}{12} (L-s)^3 + s(2L-s) \left(\frac{L-s}{2} \right)^2 \right\} = 1.6133 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\Omega = (L-s)(2L-s) = 25300 \text{ mm}^2$$

$$\oint \frac{ds}{b} = \frac{1}{s} \oint ds = \frac{2}{s} \left\{ (L-s) + (2L-s) \right\} = 68$$

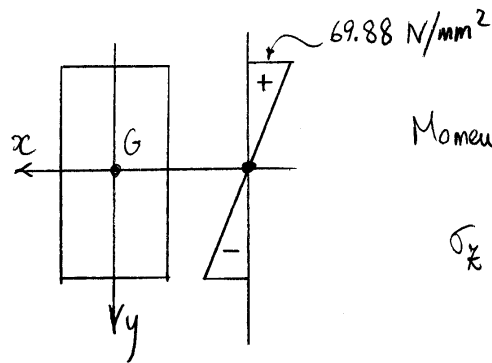
$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b}} = 3.7652 \times 10^7 \text{ mm}^4$$



Diagrammi delle tensioni

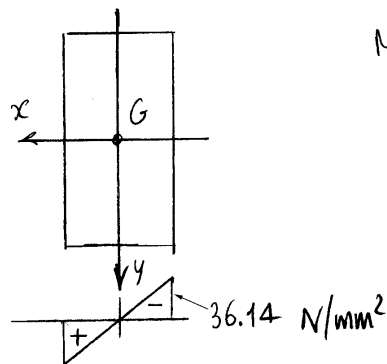
Sforzo normale:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$



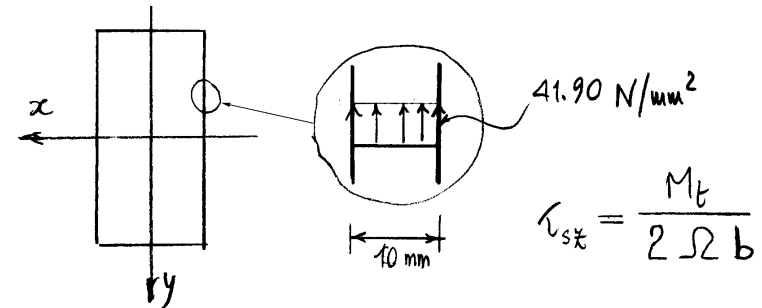
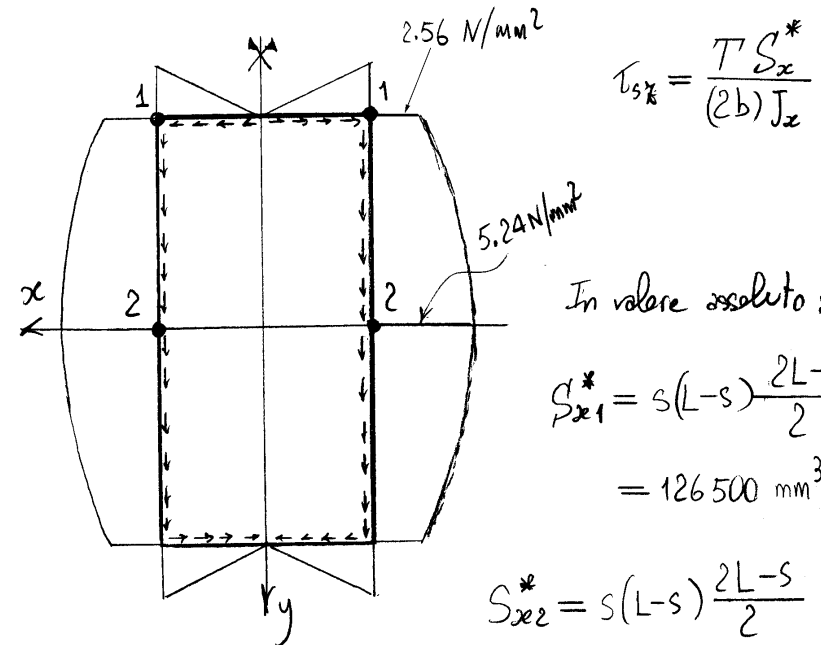
Momento flettente secondo x:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} y$$



Momento flettente secondo y

$$\sigma_x = - \frac{M_y}{J_y} x$$

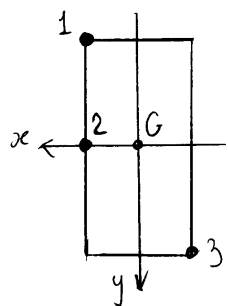
Momento torcenteTaglio secondo y

In valore assoluto:

$$S_{x1}^* = s(L-s) \frac{2L-s}{2} \\ = 126500 \text{ mm}^3$$

$$S_{x2}^* = s(L-s) \frac{2L-s}{2} \\ + 2s \frac{2L-s}{2} \frac{2L-s}{4} = 258750 \text{ mm}^3$$

Verifica di resistenza



Il punto più sollecitato è il punto 1 di coordinate $\left(\frac{L-s}{2}, -\frac{2L-s}{2}\right)$. Infatti

in corrispondenza di tale punto si ha la massima tensione normale di trazione, maggiore, in modulo, a quella massima di compressione che si ha nel punto 3. Inoltre, nel punto 1 le tensioni tangenziali dovute a taglio e momento torcente si sommano mentre nel punto 3 si sottraggono. Nel punto 2, dove si ha la massima tensione tangenziale (concorde con la tensione dovuta al momento torcente) è nulla la tensione normale dovuta a M_x , tensione nettamente prevalente rispetto a quella dovuta al taglio.

Tensioni nel punto 1 :

$$\sigma = 1.47 + 69.88 + 36.14 = 107.49 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = 41.90 + 2.56 = 44.46 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 132.23 \text{ N/mm}^2$$

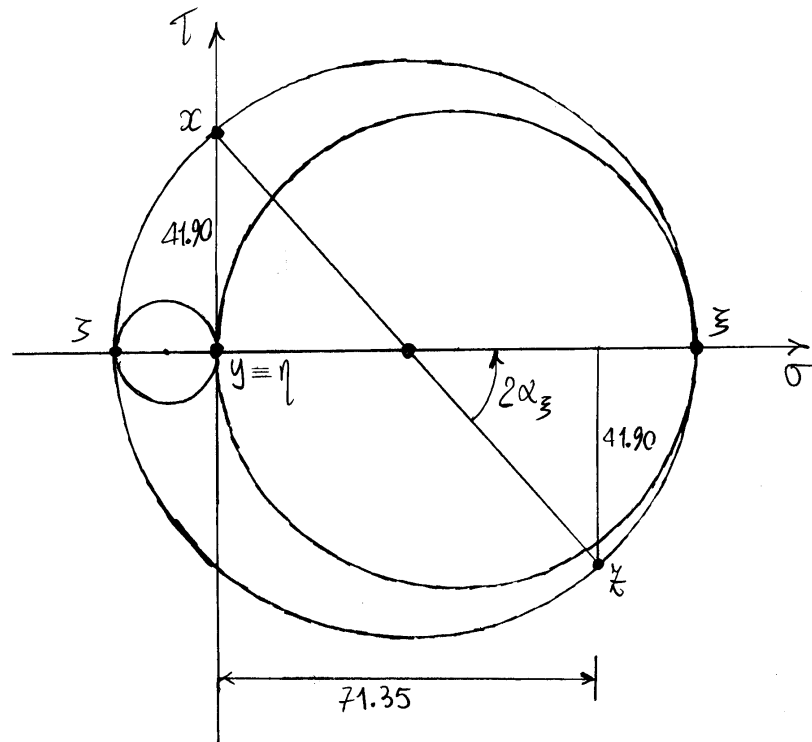
La verifica è soddisfatta

Tensore degli sforzi nel punto A

$$\begin{cases} \sigma_x = 1.47 + 69.88 = 71.35 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xz} = 41.90 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 41.90 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41.90 & 0 & 71.35 \end{bmatrix}$$

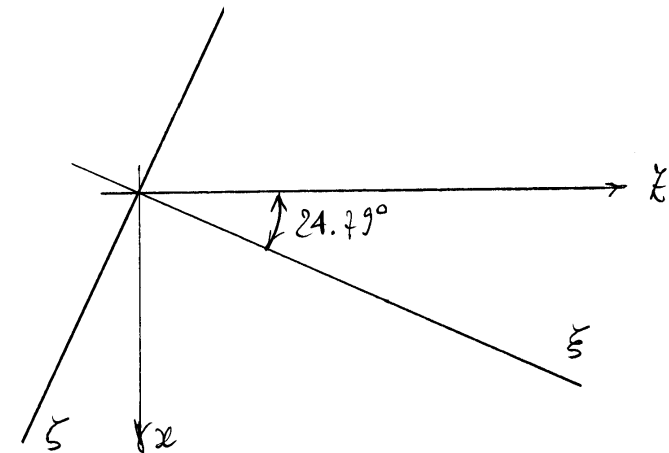
Circonferenze di Mohr



$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\zeta} \end{matrix} \right\} = \frac{71.35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{71.35}{2}\right)^2 + (41.90)^2} = \begin{cases} 90.70 \text{ N/mm}^2 \\ -19.35 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_{\xi} = \frac{41.90}{71.35/2} = 1.1745 \Rightarrow \alpha_{\xi} = 0.4327 = 24.79^\circ$$

L'asse ξ si ottiene ruotando l'asse x nel piano xz attorno all'asse y in senso antiorario nella pagina positiva del piano xz (oppure in senso positivo rispetto all'asse y) di un angolo di 24.79° .



Spostamenti e rotazioni

Spostamento in direzione x :

$$u_G = \frac{M_y l^2}{2 E J_y} = -7.39 \text{ mm}$$

Spostamento in direzione y :

$$v_G = \frac{T l^3}{3 E J_x} = 2.28 \text{ mm}$$

Rotazioni:

$$\varphi_x = -\frac{T l^2}{2 E J_x} = -0.0023 \text{ rad } (-0.13^\circ)$$

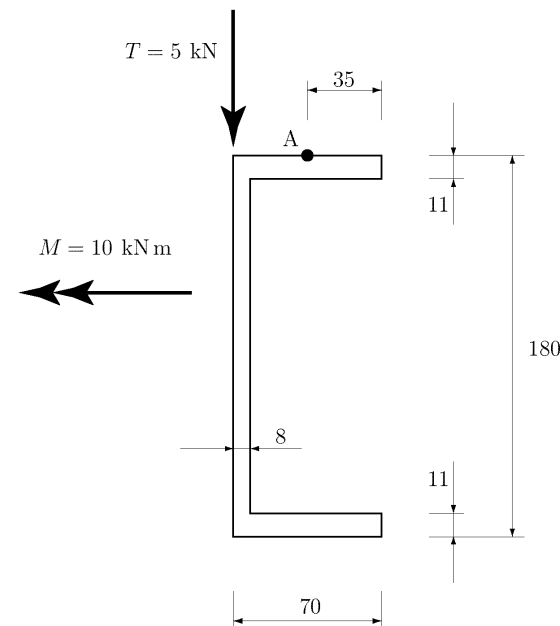
$$\varphi_y = \frac{M_y l}{E J_y} = -0.0049 \text{ rad } (-0.28^\circ)$$

$$\varphi_z = \frac{M_t l}{G J_t} = 0.0110 \text{ rad } (0.63^\circ)$$

Energia elastica di deformazione:

$$L_d = \frac{1}{2} (T v_G + M_y \varphi_y + M_t \varphi_z) = 165.28 \text{ Nm}$$

8.2 Esercizi proposti



La sezione in figura, le cui misure sono riportate in mm, è soggetta ad un momento flettente di 10 kNm, di asse momento orizzontale, e ad uno sforzo di taglio verticale di 5 kN, agente secondo l'estradosso dell'anima.

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, compresi i moduli di resistenza;
- 2) Determinare la posizione del centro di taglio;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati delle tensioni normali e tangenziali;
- 3) Determinare, in corrispondenza del punto A, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi, la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr, le direzioni e componenti principali di sforzo, ed infine il valore della tensione ideale.