

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE PRIMA

Premesse

Corsi di Laurea triennali in
Ingegneria Civile ed Ambientale curr. Ambientale, Civile, Edile
Ingegneria Industriale curr. Materiali, Meccanica
Ingegneria Navale

Trieste, 14 settembre 2007

Indice

1	Grandezze, vettori e tensori	3
1.1	Grandezze fisiche e unità di misura	3
1.1.1	Grandezze fisiche	3
1.1.2	Il Sistema Internazionale di Unità	3
1.2	Vettori	5
1.3	Trasformazioni lineari	6
1.3.1	Funzioni a valori scalari	6
	Gradiente di un campo scalare	6
1.3.2	Funzioni a valori vettoriali	7
	Gradiente di un campo vettoriale	8
1.4	Rappresentazione algebrica (in componenti)	9
1.4.1	Sistema di riferimento	9
1.4.2	Rappresentazione dei vettori	10
1.4.3	Rappresentazione dei tensori doppi	10
1.4.4	Rappresentazione dei gradienti di campi scalari e vettoriali	11
1.5	Rotazioni	12
1.5.1	Tensore rotazione e tensore ortogonale	12
1.5.2	Componenti di un tensore rotazione	13
1.6	Trasformazione delle componenti di un vettore e di un tensore doppio	14
2	Modelli meccanici delle strutture	17
2.1	Componenti elementari delle strutture	17
2.2	Modelli tridimensionali	18
2.2.1	Solidi	19
2.2.2	Fluidi	19
2.2.3	Terreno	19
2.3	Modelli monodimensionali	20
2.3.1	Fili	20
2.3.2	Travi	21
2.3.3	Travi di sezione sottile	21

2.3.4	Modello di Saint-Venant	22
2.4	Modelli bidimensionali	22
2.4.1	Membrane	23
2.4.2	Lastre	23
2.4.3	Travi di sezione sottile	24

3	Premesse di meccanica dei solidi	25
3.1	Cinematica	25
3.1.1	Deformazione e spostamento	25
3.1.2	Misure di deformazione	26
	Dilatazione lineare	26
	Dilatazione quadratica e dilatazione cubica	27
	Scorrimento tra due linee orientate	27
3.2	Dinamica	28
3.2.1	Equazioni di bilancio	28
	Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo	29
3.2.2	Forze e momenti delle forze	29
3.2.3	Forze e momenti specifici	30
	Forza esterna per unità di volume	31
	Forza esterna per unità di superficie	31
	Tensione	31
	Momenti specifici	32
3.2.4	Alcune proprietà delle tensioni interne	32
	Principio di azione e reazione	32
	Ipotesi di Cauchy	33
	Appendice (Dimostrazione dell'ipotesi di Cauchy)	33
	Componenti normale e tangenziale di tensione	34
	Sforzo nell'intorno di un punto	34
	Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali	35
4	Comportamento dei materiali	37
	Materiali omogenei	37
	Materiali isotropi	37
4.1	Prova di trazione (o compressione) monoassiale	38
	Appendice (Dilatazione vera)	39
4.2	Prova di torsione (o di taglio semplice)	40
4.3	Modelli ideali di comportamento	41
4.3.1	Elasticità lineare	42
4.3.2	Elasticità non lineare	43

4.3.3	Dominio di elasticità	44
4.3.4	Elastoplasticità	44
4.3.5	Viscoelasticità	45
4.4	Prove sui materiali	47
4.4.1	Materiali metallici	47
4.4.2	Calcestruzzo	48
4.5	Duttilità, fragilità e modelli di danneggiamento	49
4.6	Verifiche di sicurezza	50
4.6.1	Stati limite	50
4.6.2	Tensioni ammissibili	52
Riferimenti bibliografici		53
Indice analitico		55

Capitolo 1

Grandezze, vettori e tensori

1.1 Grandezze fisiche e unità di misura

1.1.1 Grandezze fisiche

Nel corso della presente trattazione si farà uso di diverse grandezze fisiche per cui non risulta fuori luogo richiamare brevemente i concetti correlati.¹ Si ricorda anzitutto che con il termine di *grandezza fisica*² si indica una proprietà fisica (di un corpo, di una sostanza, di un fenomeno o altro) che può essere quantificata.³

Quantificare una proprietà significa istituire delle regole che permettono di definire il rapporto numerico tra due particolari espressioni di tale proprietà. Per es., si istituisce la grandezza lunghezza indicando come si rapportano le une alle altre delle lunghezze particolari (lunghezza di un pezzo di stoffa, altezza di una persona, distanza tra la terra e la luna, ecc.). Il rapporto di due particolari espressioni di una grandezza

¹L'uso delle grandezze fisiche e la loro simbologia è stata oggetto di standardizzazione internazionale da parte dell'*International Organization for Standardization (ISO)* di Ginevra, che ha pubblicato 14 standard sull'argomento (ISO-31, 1992). Tredici di questi sono stati recepiti in altrettante norme dall'*UNI, Ente Nazionale Italiano di Unificazione*. Due di queste norme hanno carattere generale: la UNI CEI ISO 31-0 (1996) che fornisce informazioni generali sugli aspetti principali delle grandezze fisiche e dei sistemi coerenti di unità di misura, con particolare riguardo al Sistema Internazionale di Unità e la UNI CEI ISO 31-11 (1998) che fornisce informazioni generali riguardanti i segni e i simboli matematici. Le restanti norme riportano le denominazioni, i simboli e le definizioni delle grandezze e delle relative unità di misura dei vari settori della fisica. Di rilievo per la presente trattazione sono la UNI CEI ISO 31-03 (2002) per le grandezze della meccanica e la UNI CEI ISO 31-04 (2001) per le grandezze relative al calore.

²Nella letteratura inglese si usano i termini *quantity* per grandezza e *physical quantity* per grandezza fisica.

³Altre grandezze, oltre quelle fisiche, sono, per es., quelle economiche che esprimono proprietà correlate alla sovrastruttura creata dall'attività economica dell'uomo.

si esprime in generale tramite un numero reale. È consuetudine utilizzare il termine *grandezza particolare*⁴ per riferirsi ad una particolare espressione di una grandezza.

Data una grandezza, si può allora adottare convenzionalmente una grandezza particolare quale sua *unità di misura*⁵ per esprimere una qualunque grandezza particolare tramite il rapporto che questa ha con l'unità di misura, rapporto che rappresenta il *valore numerico*, altrimenti detto *misura*, della data grandezza particolare. Naturalmente il valore numerico di una grandezza particolare dipende dalla unità di misura in cui è espresso. Se G è una grandezza particolare e $\{G\} = G/[G]$ è il suo valore numerico rispetto all'unità di misura $[G]$, allora l'espressione $\{G\}[G]$ indica il *valore* della grandezza particolare G .

Per es., se la massa di un pezzo di roccia ha valore numerico 10 rispetto all'unità di misura chilogrammo allora:

$$\left(\begin{array}{c} \text{misura della} \\ \text{"massa del pezzo di roccia"} \end{array} \right) = \frac{\text{massa del pezzo di roccia}}{\text{chilogrammo}} = 10,$$
$$\left(\begin{array}{c} \text{valore della grandezza particolare} \\ \text{"massa del pezzo di roccia"} \end{array} \right) = 10 \times \text{chilogrammo}.$$

Inoltre, data una legge fisica, è possibile derivare l'unità di una grandezza da quelle di altre grandezze. Per es. l'unità di forza può essere derivata da quelle di massa e di accelerazione, sfruttando la proporzionalità tra la forza e il prodotto di massa e accelerazione ed assumendo un valore arbitrario del coefficiente di proporzionalità. Se le unità derivate sono definite da relazioni con coefficienti numerici uguali all'unità si dice che il sistema di unità è *coerente*.⁶

1.1.2 Il Sistema Internazionale di Unità

Il Sistema Internazionale di Unità,⁷ abbreviazione SI, è attualmente il più diffuso sistema di unità di misura. Attraverso una serie coerente di

⁴*Quantity in the particular sense* nella letteratura inglese.

⁵*Unit of measure* nella letteratura inglese.

⁶*Choerent system* nella letteratura inglese.

⁷Il testo ufficiale sul SI è pubblicato dal Bureau International des Poids et Mesures (BIPM, 1998) ed è noto come *SI Brochure*. Questa pubblicazione è liberamente disponibile in formato pdf all'indirizzo http://www.bipm.fr/en/si/si_brochure/. Due testi italiani che trattano estesamente dei problemi legati alla misura e quindi del SI sono Sartori (1979) e Arri e Sartori (1984).

definizioni e di regole permette di ottenere tutte le unità di misura necessarie nella fisica e nella tecnica a partire da sette *unità fondamentali*, considerate indipendenti tra loro.⁸ Di queste, nel seguito saranno utilizzate solo le tre unità di misura fondamentali della meccanica e l'unità di misura fondamentale della termologia, tutte riportate nella tabella 1.1.⁹

Grandezza di base	Unità SI		Dimensione
	Nome	Simbolo	
lunghezza	metro	m	L
massa	kilogrammo	kg	M
tempo	secondo	s	T
temperatura termodinamica	kelvin	K	Θ

Tabella 1.1: Unità SI di base utilizzate nella presente trattazione

Nella tabella 1.2 è poi riportato il prospetto di alcuni prefissi per la formazione dei multipli e dei sottomultipli decimali delle unità SI.

Nella tabella 1.3 sono invece riportate sia le principali unità di misura derivate che l'unica unità non SI impiegate nel seguito. Tutte queste unità hanno nomi e simboli speciali, riportati nella tabella assieme alle loro dimensioni. Data l'importanza della grandezza forza nella presente trattazione, viene anche introdotto un simbolo speciale per la sua dimensione allo scopo di semplificare l'analisi dimensionale quando questa sarà utilizzata.¹⁰ Inoltre l'unità di misura SI della grandezza pressione (pascal) è estremamente piccola rispetto alle pressioni e

⁸Le grandezze lunghezza e tempo, considerate indipendenti dal SI per ragioni di opportunità, non sono realmente indipendenti tra loro. Infatti risultano correlate in espressioni del tipo $\lambda = cT$, dove λ e T sono, rispettivamente, la lunghezza d'onda di una radiazione elettromagnetica e il suo periodo, mentre c è la velocità di propagazione della luce nel vuoto, che rappresenta una costante universale e alla quale potrebbe quindi essere assegnato un valore arbitrario. Questo fatto aiuta a capire che la scelta delle unità di misura fondamentali è in parte arbitrario e guidato da ragioni di opportunità, ragioni che possono essere sia di origine storica che di origine pratica.

⁹Le altre unità fondamentali sono: 1) l'*intensità di corrente elettrica* (*electric current* in inglese), unità *ampere*, simbolo A; 2) la *quantità di sostanza* (*amount of substance* in inglese), unità *mole*, simbolo mol; 3) l'*intensità luminosa* (*luminous intensity* in inglese), unità *candela*, simbolo cd. In inglese lunghezza, massa, tempo e temperatura termodinamica si rendono con *length*, *mass*, *time* e *thermodynamic temperature*, mentre metro, kilogrammo e secondo con *metre*, *kilogram*, *second*.

¹⁰Gli standard internazionali prima citati non contemplano questo uso.

Fattore	Prefisso		Fattore	Prefisso	
	Nome	Simbolo		Nome	Simbolo
10^9	giga	G	10^1	deca	da
10^6	mega	M	10^{-1}	deci	d
10^3	kilo	k	10^{-2}	centi	c
10^2	etto (hecto)	h	10^{-3}	milli	m

Tabella 1.2: Alcuni prefissi SI per la formazione di multipli e sottomultipli decimali delle unità

Grandezza derivata	Unità			Dimensione
	Nome speciale	Simbolo	Definizione	
forza	newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$	$F \equiv \text{MLT}^{-2}$
pressione, sforzo	pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$	FL^{-2}
	megapascal	MPa	$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N mm}^{-2}$	
energia, lavoro	joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$	FL
angolo piano	radiante	rad	$1 \text{ rad} = 1 \text{ m m}^{-1}$	$\text{LL}^{-1} \equiv 1$
	grado*	°	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$	
temperatura Celsius	grado Celsius†	°C	Intervallo di $1^\circ\text{C} \equiv$ $\equiv$ Intervallo di 1 K	Θ

*Unità non SI ma permessa dal SI, da suddividere preferibilmente in decimi invece che in minuti e secondi.

†Da usarsi quando si dichiarano valori di temperatura Celsius.

Tabella 1.3: Alcune unità derivate utilizzate nella presente trattazione

agli sforzi con cui si ha solitamente a che fare. Per tale motivo l'unità di misura comunemente impiegata è il megapascal che, come indicato nella tabella 1.3, risulta uguale a 1 N/mm^2 . Nel seguito il megapascal sarà indicato di preferenza con il simbolo N/mm^2 in luogo del simbolo MPa allo scopo di sottolineare l'origine della grandezza (una forza per

unità di superficie). Tutte le volte che nel seguito compariranno nuove grandezze, saranno sempre indicate le loro unità di misura derivate.

Nel caso delle grandezze il cui valore numerico è indipendente dalle unità di misura fondamentali, si assume quale unità di misura il numero 1. Tali grandezze sono dette *adimensionali*, *numeri puri* oppure *di dimensione uno*. Il numero 1 utilizzato quale unità di misura delle grandezze adimensionali può avere dei nomi speciali, nomi che però possono essere utilizzati solo per le grandezze per le quali tali nomi sono stati introdotti, come per es. il nome rad nel caso dell'angolo piano come indicato nella tabella 1.3. I multipli e i sottomultipli delle grandezze di dimensione uno sono espressi tramite le potenze del numero 10. È inoltre permesso l'uso del simbolo speciale % (per cento) per esprimere la potenza 10^{-2} :

$$\% = 10^{-2} = 0.01.$$

Si conclude ricordando che varie unità di misura non SI sono ancora utilizzate oppure sono state ampiamente utilizzate in passato nell'ambito dell'ingegneria e di altri campi della tecnica come, nel caso dell'Italia, il chilogrammo forza e le unità derivate. Esiste quindi un'ampia letteratura tecnica, soprattutto del passato, che riporta i dati in tali unità di misura. Da qui l'esigenza di trasformare tali unità non SI in unità SI. A tale scopo sono disponibili tabelle di conversione riportate in praticamente tutti i manuali tecnici. Una completa tabella di conversione è per es. riportata in Taylor (1995, pp. 41-68).¹¹

1.2 Vettori

Un *vettore ordinario*¹² $\mathbf{v}$, associato allo *spazio euclideo*¹³ $\mathcal{E}$ tridimensionale, è caratterizzato da un *modulo*¹⁴ $|\mathbf{v}|$ e, se il modulo è diverso dallo zero, da una *direzione orientata* dello spazio. Il vettore di modulo nullo è detto *vettore nullo*¹⁵ e sarà indicato con $\mathbf{0}$. L'*opposto*¹⁶ $-\mathbf{v}$ di un

¹¹Questa pubblicazione è liberamente disponibile in formato pdf nel sito del NIST (National Institute of Standards and Technology), all'indirizzo <http://www.physics.nist.gov/Pubs/pdf.html>.

¹²Seguendo le raccomandazioni UNI CEI ISO 31-11 (1998), i vettori saranno rappresentati nel seguito da caratteri in grassetto corsivo romano (in inglese *bold italic roman type*). Nella letteratura inglese vettore è reso da *vector*.

¹³*Euclidean space* nella letteratura inglese.

¹⁴*Magnitude* oppure *modulus* nella letteratura inglese.

¹⁵*Zero vector* nella letteratura inglese.

¹⁶*Inverse* oppure *negative* nella letteratura inglese.

vettore $\mathbf{v}$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione, ma verso opposto (fig. 1.1a). Se $|\mathbf{v}| = 1$ il vettore $\mathbf{v}$ è detto *versore* o *vettore unitario*.¹⁷ Il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *somma* dei due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è definito dalla regola del parallelogramma (fig. 1.1b). Il prodotto $\alpha\mathbf{v}$, di uno *scalare*¹⁸ α per il

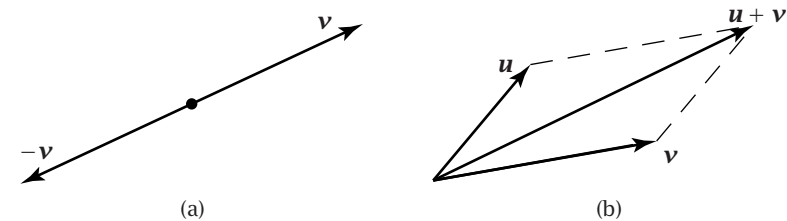


Figura 1.1: Vettore inverso e somma di due vettori

vettore $\mathbf{v}$, definisce un vettore di modulo $|\alpha||\mathbf{v}|$ e di direzione orientata pari a quella di $\mathbf{v}$ oppure opposta a seconda che α sia positivo oppure negativo. Il *prodotto scalare* o *prodotto interno*¹⁹ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ di due vettori definisce poi lo scalare:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha, \quad (1.1)$$

dove α indica un angolo tra le direzioni orientate di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$. Infine il *prodotto vettoriale* o *prodotto esterno*²⁰ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ definisce un vettore il cui modulo vale:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad (1.2)$$

con α angolo tra le direzioni (non orientate) di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$, la cui direzione è ortogonale al piano di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$, e il cui verso è definito in modo tale che i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ costituiscano, in quest'ordine, una terna destra di vettori (fig. 1.2).²¹

¹⁷*Unit vector* nella letteratura inglese.

¹⁸*Scalar* nella letteratura inglese.

¹⁹*Scalar product* nella letteratura inglese.

²⁰*Vector product* nella letteratura inglese.

²¹La definizione rende evidente la dipendenza del prodotto vettoriale dall'orientazione dello spazio, che nel nostro caso è una orientazione destra. Se invece l'orientazione dello spazio è sinistra, ai tre vettori si richiede di costituire, nello stesso ordine, una terna sinistra.

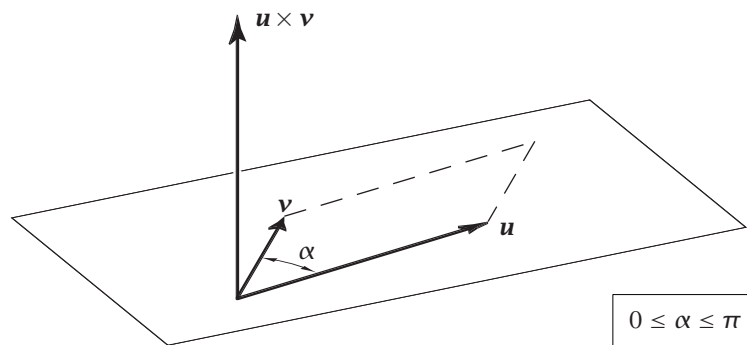


Figura 1.2: Prodotto vettoriale

1.3 Trasformazioni lineari

1.3.1 Funzioni a valori scalari

Si consideri una legge di trasformazione f (una funzione) che ad un vettore $\mathbf{v}$ associi uno scalare α . Detto $\mathcal{V}$ lo *spazio dei vettori* (dominio della funzione), si può indicare tale circostanza con la scrittura:

$$f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto \alpha = f(\mathbf{v}). \quad (1.3)$$

La trasformazione è detta *lineare* se vale la relazione:

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}), \quad (1.4)$$

dove α e β sono generici scalari e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono generici vettori. In altri termini (equivalenti) f deve essere omogenea di grado 1 ed additiva:

$$\begin{cases} f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) & \text{omogeneità di grado 1,} \\ f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) & \text{additività.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Una trasformazione lineare di tipo (1.3) viene detta *forma lineare* o *covettore*.²²

²²Nella letteratura inglese il termine trasformazione lineare è reso da *linear transformation* oppure *linear map*, mentre forma lineare e covettore sono resi rispettivamente da *linear form* e *covector*.

In algebra lineare si dimostra che se f è una forma lineare allora esiste uno e un solo vettore $\mathbf{f}$ tale che:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.6)$$

per ogni vettore $\mathbf{v}$. Viceversa ogni vettore $\mathbf{f}$ definisce, tramite la (1.6), una forma lineare, come si deduce immediatamente dalla linearità del prodotto scalare. Questa circostanza ha per conseguenza che i vettori possono essere identificati (formalmente ma non concettualmente) con le trasformazioni lineari $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$.

Gradiente di un campo scalare. Quale esempio si consideri la funzione lineare di tipo (1.3) rappresentata, tramite la (1.6), dal *gradiente*²³ di una funzione scalare del punto cioè di una funzione f definita nello spazio euclideo $\mathcal{E}$ a valori in $\mathbb{R}$:

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto f(P). \quad (1.7)$$

Nella fig. 1.3 è illustrato il caso di una funzione definita nello spazio euclideo a due dimensioni. Per definire il gradiente in un punto generico P_0 occorre considerare l'incremento Δf che la funzione f subisce al passare dal punto P_0 ad un'altro punto P nell'intorno di P_0 :

$$\Delta f = f(P) - f(P_0). \quad (1.8)$$

Tale incremento è una funzione dell'incremento $\Delta \mathbf{P}$ del punto a partire dal punto P_0 , ovvero della differenza dei due punti P e P_0 :

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0, \quad (1.9)$$

e ne risulta quindi una funzione definita nello spazio dei vettori e a valori scalari: $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta \mathbf{P} \mapsto \Delta f$. Il gradiente rappresenta, se esiste, la parte lineare di tale funzione incremento:

$$\Delta f = \text{grad } f \cdot \Delta \mathbf{P} + o(|\Delta \mathbf{P}|). \quad (1.10)$$

dove il simbolo “ o ”, detto *o piccolo*, indica una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto a quella posta tra parentesi.²⁴ In generale, se

²³*Gradient of scalar field* nella letteratura inglese.

²⁴Overossia la (1.10) va interpretata come se in luogo di $o(|\Delta \mathbf{P}|)$ vi fosse in realtà una funzione scalare infinitesima $g(\Delta \mathbf{P})$ della quale si sa soltanto essere di ordine superiore

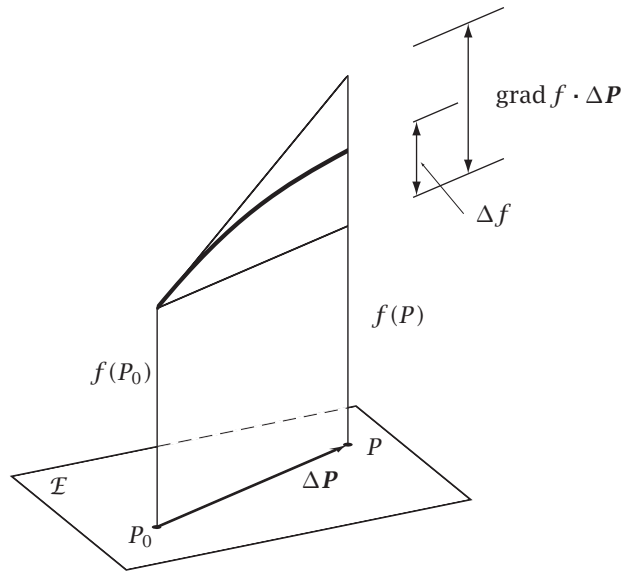


Figura 1.3: Gradiente di una funzione scalare

$d\mathbf{P}$ indica la parte lineare dell'incremento del punto,²⁵ la parte lineare df dell'incremento della funzione (il differenziale) vale:

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{P}. \quad (1.11)$$

1.3.2 Funzioni a valori vettoriali

Si considerino ora le trasformazioni nello spazio dei vettori, trasformazioni che ad un vettore $\mathbf{v}$ associano un altro vettore $\mathbf{u}$. Una trasformazione lineare di tale tipo verrà detta nel seguito *tensore doppio*²⁶ od

rispetto a quella definita dal modulo di un vettore, nel senso che:

$$\lim_{\Delta \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{g(\Delta \mathbf{P})}{|\Delta \mathbf{P}|} = 0.$$

Per maggiori informazioni si veda per es. Gilardi (1995, pp. 384-390). Nella letteratura inglese o piccolo si rende con *small o*.

²⁵Se P è la variabile indipendente allora $d\mathbf{P} = \Delta \mathbf{P}$.

²⁶In accordo con le raccomandazioni UNI CEI ISO 31-11 (1998), che richiedono caratteri in grassetto sia per i vettori che per i tensori, e allo scopo di differenziare visivamente i

anche, più semplicemente, *tensore*. Indicando con $\mathbf{A}$ una tale trasformazione, ed indicando con $\mathbf{A}\mathbf{v}$ il vettore corrispondente a $\mathbf{v}$ tramite $\mathbf{A}$ (fig. 1.4), la linearità richiede che sia soddisfatta, analogamente alla (1.4),

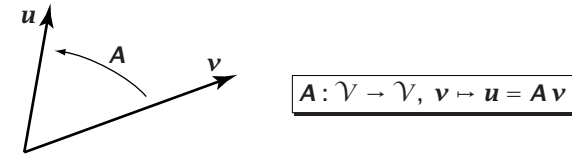


Figura 1.4: Tensore doppio

la seguente relazione:

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} + \beta \mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (1.12)$$

per ogni scalare α e β e per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Naturalmente, tale condizione è ancora equivalente alle due condizioni di omogeneità di grado 1 e di additività.

È intuitivo come si possano definire dei tensori doppi particolari e delle operazioni relative a tensori doppi:²⁷

$$\mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \text{ è il tensore nullo}, \quad (1.13a)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{I} \text{ è il tensore identità}, \quad (1.13b)$$

$$(-\mathbf{A})\mathbf{v} = -(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad -\mathbf{A} \text{ è il tensore opposto di } \mathbf{A}, \quad (1.13c)$$

$$(\alpha \mathbf{A})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad \alpha \mathbf{A} \text{ è il prodotto di uno scalare per un tensore}, \quad (1.13d)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ è la somma di due tensori}, \quad (1.13e)$$

tensori dai vettori, nel seguito i tensori verranno rappresentati da caratteri in grassetto corsivo a bastone (in inglese *slanted bold sans serif type*).

Come detto, nel seguito i tensori doppi saranno identificati con le trasformazioni lineari nello spazio dei vettori, e questo è più che sufficiente per gli scopi che ci si propone. Per una definizione più generale di tensore si veda, per es., Bowen e Wang (1976, Chapter 7: Tensor Algebra).

Nella letteratura inglese si impiega la dizione *second-order tensor* oppure più brevemente *tensor*.

²⁷Nella letteratura inglese si utilizzano rispettivamente i termini *zero tensor*, *identity tensor* e *negative of a tensor* per tensore nullo, tensore identità e tensore opposto di un altro.

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \text{ è il prodotto di due tensori,} \quad (1.13f)$$

Nelle (1.13) le uguaglianze si intendono valide per ogni vettore $\mathbf{v}$. Tali uguaglianze definiscono senz'altro delle trasformazioni nello spazio dei vettori. La dimostrazione che le trasformazioni definite dalle (1.13) siano anche lineari è lasciata al lettore.

Se $\mathbf{A}$ è un tensore del secondo ordine, il suo *trasposto*²⁸ $\mathbf{A}^T$ è poi definito ponendo:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{v}), \quad (1.14)$$

per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. In definitiva, l'operazione di trasposizione permette di spostare l'applicazione di un tensore a un vettore da una parte all'altra di un prodotto scalare. La definizione (1.14) di tensore trasposto di un'altro conduce poi alla definizione di *tensore simmetrico* e di *tensore emisimmetrico*.²⁹ Un tensore $\mathbf{A}$ si dice simmetrico se coincide con il suo trasposto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad (1.15)$$

mentre si dice emisimmetrico se coincide con l'opposto del suo trasposto:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T. \quad (1.16)$$

La trasformazione inversa di un tensore doppio $\mathbf{A}$, se esiste, è essa stessa un tensore doppio che viene detto *tensore inverso*³⁰ di $\mathbf{A}$ ed indicato con $\mathbf{A}^{-1}$. L'inverso di un tensore, se esiste, soddisfa dunque le seguenti condizioni:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (1.17)$$

È infine utile introdurre il *prodotto tensoriale*³¹ $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ di due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ quale tensore doppio definito dall'uguaglianza:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}, \quad (1.18)$$

ancora per ogni vettore $\mathbf{v}$. Dalla definizione (1.18) consegue immediatamente quella di *proiezione* $\mathbf{P}$ nella direzione orientata definita da un versore $\mathbf{e}$ (fig. 1.5):

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (1.19)$$

Inoltre, in tutti i casi in cui un vettore $\mathbf{v}$ compare quale membro di un

²⁸Nella letteratura inglese si utilizza il termine *transpose of a tensor* per tensore trasposto di un altro.

²⁹Rispettivamente *symmetric tensor* e *skew-symmetric tensor* nella letteratura inglese.

³⁰*Inverse tensor* nella letteratura inglese.

³¹*Tensor product* nella letteratura inglese.

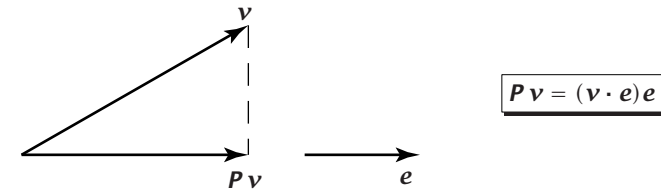


Figura 1.5: Operazione di proiezione

prodotto scalare in una espressione di tipo vettoriale, per es. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$, è possibile mettere in evidenza il vettore $\mathbf{v}$ utilizzando la definizione di prodotto tensoriale, nell'esempio in questione sostituendo l'espressione data con l'equivalente $(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v}$.

Gradiente di un campo vettoriale. Si consideri ora una funzione vettoriale del punto, cioè una funzione $\mathbf{f}$ definita nello spazio euclideo $\mathcal{E}$ e a valori nello spazio dei vettori $\mathcal{V}$:

$$\mathbf{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}, \quad P \mapsto \mathbf{f}(P). \quad (1.20)$$

Come già nel caso di un campo scalare (§1.3.1) si consideri un punto generico P_0 e l'incremento $\Delta \mathbf{f}$ che la funzione $\mathbf{f}$ subisce al passare dal punto P_0 ad un'altro punto P nell'intorno di P_0 :

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(P) - \mathbf{f}(P_0), \quad (1.21)$$

incremento che anche in questo caso è funzione dell'incremento $\Delta \mathbf{P}$ del punto a partire dal punto P_0 . Ne risulta una funzione definita nello spazio dei vettori e a valori vettoriali: $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $\Delta \mathbf{P} \mapsto \Delta \mathbf{f}$. La parte lineare della funzione incremento, se esiste, è di conseguenza un tensore doppio detto *gradiente* e indicato con $\text{grad } \mathbf{f}$:

$$\Delta \mathbf{f} = \text{grad } \mathbf{f} \Delta \mathbf{P} + \mathbf{o}(|\Delta \mathbf{P}|), \quad (1.22)$$

dove l' $\mathbf{o}$ piccolo in tal caso sostituisce una funzione vettoriale infinitesima. La parte lineare $d\mathbf{f}$ dell'incremento della funzione corrispondente alla parte lineare $d\mathbf{P}$ dell'incremento del punto vale quindi:

$$d\mathbf{f} = \text{grad } \mathbf{f} d\mathbf{P}. \quad (1.23)$$

È opportuno a questo punto preavvisare il lettore che la convenzione di chiamare gradiente il tensore doppio definito dalla (1.22) è tutt'altro

che universale essendosi diffusa solo negli ultimi decenni prevalentemente nell'ambito della meccanica del continuo, ambito nel quale è ormai velleitario rinunciare a tale denominazione. Tuttavia in altri ambiti, compresi quelli dell'analisi e della fisica matematica, il termine gradiente è strettamente riservato al vettore che rappresenta la forma lineare associata all'incremento di un campo scalare. In tali ambiti le denominazioni più comuni del tensore doppio definito dalla (1.22) sono quelle di *differenziale* oppure di *derivata*, simboli df e f' rispettivamente. Nel caso venga chiamato differenziale, tale termine finisce quindi per identificare sia il tensore doppio che il valore che il tensore fa corrispondere ad un particolare vettore, come indicato nella (1.23).

1.4 Rappresentazione algebrica (in componenti)

Vettori e tensori possono essere rappresentati con opportuni insiemi ordinati rettangolari di scalari, detti *matrici*,³² una volta che si sia prescelto un opportuno sistema di riferimento. In tale rappresentazione alle operazioni vettoriali e tensoriali vengono a corrispondere delle operazioni tra matrici.

1.4.1 Sistema di riferimento

Sia data una *terna destra di assi cartesiani ortogonali*³³ $Oxyz$ e siano $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ i versori degli assi, ovvero i vettori di modulo unitario e di direzione orientata individuata dagli assi coordinati (fig. 1.6). I versori $\mathbf{e}_i$ (è sottinteso che $i = x, y, z$) costituiscono una *base ortonormale destra*³⁴ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$, cioè una base soddisfacente le condizioni:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1.24a)$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad (1.24b)$$

dove δ_{ij} rappresenta il *delta di Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (1.25)$$

³²La definizione di matrice e le conseguenti operazioni e proprietà sono riportate in un qualunque testo di algebra lineare (si veda (si veda per es. Lipschutz, 1975, cap. 3)). In inglese il termine matrice si rende con *matrix*.

³³*Right-handed rectangular cartesian axes* nella letteratura inglese.

³⁴*Right-handed orthonormal base* nella letteratura inglese.

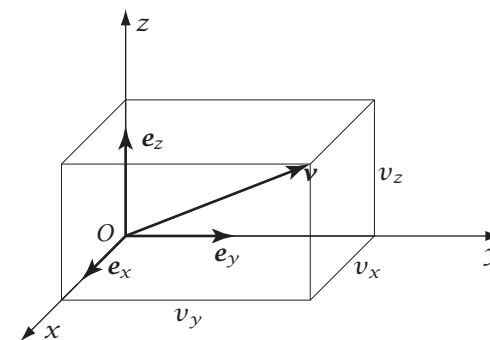


Figura 1.6: Decomposizione di un vettore

mentre ε_{ijk} rappresenta il *simbolo di permutazione*, detto anche *alternatore* oppure *tensore di Ricci*.³⁵

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione pari di } (x, y, z) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione dispari di } (x, y, z) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.26)$$

Si noti che il simbolo di permutazione è invariante per circolazione degli indici, non variando in tal modo il tipo di permutazione:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}. \quad (1.27)$$

Si noti anche che, se A è una generica matrice quadrata 3×3 , il simbolo di permutazione permette di scrivere il suo determinante nella forma

³⁵La (1.24b) è equivalente a scrivere:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0} & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0} & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \end{array}$$

La (1.24a) qualifica la data base quale base ortonormale, mentre la (1.24b) la qualifica quale base destra, supponendo una orientazione destra dello spazio contenitore.

Si noti che la (1.24b) vale sia per una base ortonormale destra in uno spazio con orientazione destra che per una base ortonormale sinistra in uno spazio con orientazione sinistra. Infatti, se si modifica l'orientazione dello spazio, nel nostro caso scegliendo una orientazione sinistra, si modifica anche il verso del prodotto vettoriale di due vettori.

Delta di Kronecker e simbolo di permutazione si rendono in inglese con *Kronecker delta* e *permutation symbol* rispettivamente.

seguito:³⁶

$$\det \mathbf{A} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{ix} A_{jy} A_{kz} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{xi} A_{yj} A_{zk}. \quad (1.28)$$

1.4.2 Rappresentazione dei vettori

Un qualunque vettore $\mathbf{v}$ può essere posto nella forma (fig. 1.6):

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \sum_i v_i \mathbf{e}_i, \quad (1.29)$$

dove la sommatoria $\sum_i$ è implicitamente estesa ai valori $i = x, y, z$. Le componenti di $\mathbf{v}$ risultano:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.30)$$

Il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{v}$:

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}, \quad (1.31)$$

matrice di dimensione 3×1 , fornisce una possibile *rappresentazione algebrica*³⁷ di $\mathbf{v}$ nella data base (associata al dato sistema di riferimento). Relativamente a tale rappresentazione le operazioni vettoriali di somma, di prodotto per uno scalare e di prodotto scalare diventano:

$$\{\mathbf{u} + \mathbf{v}\} = \{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{v}\}, \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = u_i + v_i, \quad (1.32a)$$

$$\{\alpha \mathbf{u}\} = \alpha \{\mathbf{u}\}, \quad (\alpha \mathbf{u})_i = \alpha u_i, \quad (1.32b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i, \quad (1.32c)$$

dove $\{\mathbf{u}\}^T$, trasposto del vettore colonna $\{\mathbf{u}\}$, non è altro che il vettore riga delle componenti di $\mathbf{u}$. Per quel che riguarda il prodotto vettoriale, se ne possono invece dedurre le componenti tenendo conto della distributività del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{ij} u_i v_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j). \quad (1.33)$$

³⁶La definizione e le proprietà del determinante di una matrice quadrata sono riportate in un qualunque testo di algebra lineare (si veda per es. Lipschutz, 1975, cap. 8).

³⁷*Algebraic representation* nella letteratura inglese.

Utilizzando la relazione (1.24b) si ottiene infine:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k, \quad (1.34)$$

da cui conseguono le seguenti componenti:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} u_i v_j, \quad (1.35)$$

e la rappresentazione matriciale:

$$\{\mathbf{u} \times \mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{Bmatrix}. \quad (1.36)$$

Confrontando la (1.34) con lo sviluppo (1.28) del determinante di una matrice quadrata 3×3 , se ne deduce che la (1.34) equivale allo sviluppo di un determinante simbolico:

$$\{\mathbf{u} \times \mathbf{v}\} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Dalla rappresentazione (1.35) del prodotto vettoriale e da quella (1.32c) del prodotto scalare discende infine la rappresentazione del prodotto misto:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k, \quad (1.38)$$

equivalente allo sviluppo di un determinante:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

1.4.3 Rappresentazione dei tensori doppi

Per quel che riguarda un tensore doppio $\mathbf{A}$, questi trasforma la base $\mathbf{e}_j$ nei tre vettori $\mathbf{A} \mathbf{e}_j$, che a loro volta si rappresentano nella forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_j = \sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i, \quad A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j. \quad (1.40)$$

Una possibile *rappresentazione algebrica di un tensore* $\mathbf{A}$, relativamente al dato sistema di coordinate, risulta quindi essere la matrice 3×3

composta dagli scalari A_{ij} , detti componenti di $\mathbf{A}$:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Lo spazio dei tensori doppi viene spesso indicato con Lin e costituisce uno spazio vettoriale di dimensione 9. Infatti i nove tensori doppi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ costituiscono una base di Lin , e i nove scalari A_{ij} rappresentano le componenti di $\mathbf{A}$ in tale base:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.42)$$

Dimostrazione. Infatti, poiché $\sum_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = \mathbf{I}$ e $(\mathbf{A} \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{A}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ (perché?), risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j &= \sum_j \left(\sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i \right) \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \sum_j (\mathbf{A} \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{A} \left(\sum_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \right) = \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

■

Per quel che riguarda la rappresentazione in componenti dell'applicazione di un tensore doppio ad un vettore, risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{v} &= \mathbf{A} \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_j v_j \mathbf{A} \mathbf{e}_j \\ &= \sum_j v_j \left(\sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i \right) = \sum_i \left(\sum_j A_{ij} v_j \right) \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

e dunque:

$$\{\mathbf{A} \mathbf{v}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{v}\}, \quad (\mathbf{A} \mathbf{v})_i = \sum_j A_{ij} v_j. \quad (1.43)$$

In modo analogo il tensore nullo $\mathbf{0}$, il tensore identità $\mathbf{I}$ e le operazioni tensoriali definite dalle (1.13) e (1.14) si rappresentano in componenti, rispettivamente:

$$[\mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.44)$$

e

$$[-\mathbf{A}] = -[\mathbf{A}], \quad (-\mathbf{A})_{ij} = -A_{ij}, \quad (1.45a)$$

$$[\alpha \mathbf{A}] = \alpha [\mathbf{A}], \quad (\alpha \mathbf{A})_{ij} = \alpha (A_{ij}), \quad (1.45b)$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}], \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad (1.45c)$$

$$[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}] [\mathbf{B}], \quad (\mathbf{AB})_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}, \quad (1.45d)$$

$$[\mathbf{A}^T] = [\mathbf{A}]^T, \quad (\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}. \quad (1.45e)$$

Se esiste il tensore inverso $\mathbf{A}^{-1}$ di $\mathbf{A}$, risulta poi:

$$[\mathbf{A}^{-1}] = [\mathbf{A}]^{-1}, \quad (1.46)$$

mentre per il prodotto tensoriale (1.18) la rappresentazione in componenti diventa:

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \{\mathbf{a}\} \{\mathbf{b}\}^T, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j. \quad (1.47)$$

Infine le condizioni di simmetria (1.15) e di emisimmetria (1.16) in componenti si scrivono rispettivamente:

$$[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}], \quad A_{ij} = A_{ji}. \quad (1.48a)$$

$$[\mathbf{A}]^T = -[\mathbf{A}], \quad A_{ij} = -A_{ji}. \quad (1.48b)$$

La dimostrazione delle relazioni (1.44)–(1.48) è lasciata per esercizio al lettore.

1.4.4 Rappresentazione dei gradienti di campi scalari e vettoriali

Nel caso di un campo scalare $f(x, y, z)$ si ha:

$$\text{grad } f \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\text{grad } f \cdot (dx_i \mathbf{e}_i)}{dx_i} = \lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f(dx_i \mathbf{e}_i)}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (1.49)$$

Ne risulta quindi:

$$(\text{grad } f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \{\text{grad } f\} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right]^T. \quad (1.50)$$

Nel caso del gradiente di un campo vettoriale $\mathbf{f}(x, y, z)$ si ha invece:

$$\text{grad } \mathbf{f} \mathbf{e}_j = \frac{\text{grad } \mathbf{f} (dx_j \mathbf{e}_j)}{dx_j} = \lim_{dx_j \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f} (dx_j \mathbf{e}_j)}{dx_j} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}. \quad (1.51)$$

Ne consegue:

$$(\text{Grad } \mathbf{f})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \text{grad } \mathbf{f} \mathbf{e}_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (1.52)$$

dove f_x , f_y e f_z sono le componenti del campo vettoriale rispetto alla base ortonormale indotta dagli assi x , y e z . La forma matriciale della (1.52) risulta infine:

$$[\text{Grad } \mathbf{f}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

1.5 Rotazioni

Una generica rotazione rigida attorno ad un asse rappresenta un importante esempio di tensore doppio, strumentale non solo per la descrizione del moto rigido ma anche per la deduzione delle formule di trasformazione delle componenti di un vettore e di un tensore doppio al variare del sistema di riferimento cartesiano ortogonale e quindi della relativa base ortonormale.

1.5.1 Tensore rotazione e tensore ortogonale

Si consideri allora una generica rotazione e siano O un punto sull'asse di rotazione, P un generico punto e P^* la posizione del punto P dopo la rotazione (fig. 1.7). Se ora si rappresenta tale rotazione con la funzione $\mathbf{R}$ che al vettore posizione $P - O$ associa il vettore ruotato $P^* - O$, ne risulta una funzione che a vettori associa vettori, cioè, se $\mathcal{V}$ è lo spazio dei vettori, una funzione del tipo $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Inoltre, come può essere facilmente dedotto osservando la fig. 1.8, la funzione $\mathbf{R}$ è omogenea di

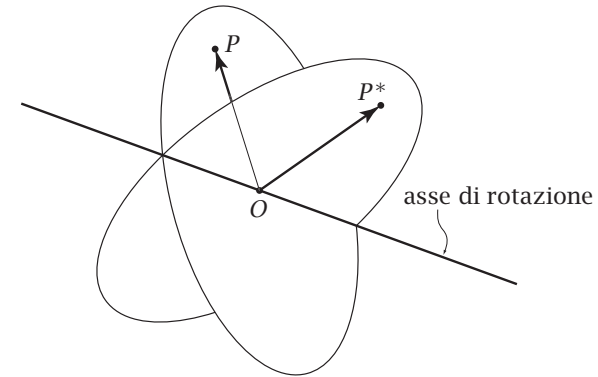


Figura 1.7: Rotazioni

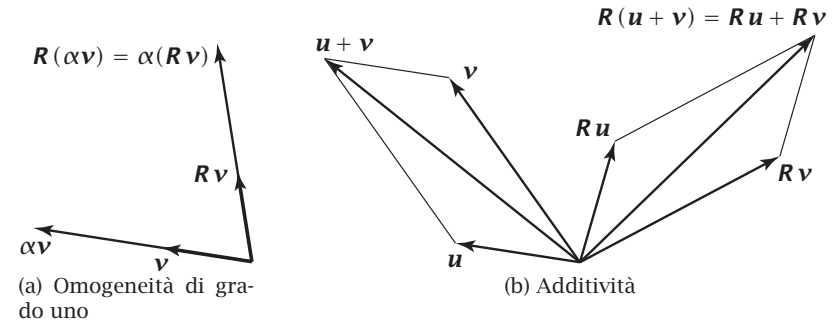


Figura 1.8: Le rotazioni sono trasformazioni lineari

grado uno ed additiva e rappresenta dunque un tensore doppio detto *tensore rotazione*.³⁸

Un tensore rotazione lascia invariati i moduli dei vettori e gli angoli tra vettori e quindi lascia invariato, necessariamente, il prodotto scalare di due generici vettori. Un tensore doppio $\mathbf{Q}$ che lascia invariato il prodotto scalare di due generici vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.54)$$

³⁸Rotation tensor nella letteratura inglese.

è detto *tensore ortogonale*.³⁹ Utilizzando le definizioni di tensore trasposto (1.14) e di tensore identità (1.13b) dalla (1.54) consegue che:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I} \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.55)$$

e quindi:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (1.56)$$

Poiché un tensore ortogonale $\mathbf{Q}$ è invertibile,⁴⁰ la relazione (1.56) afferma che il tensore $\mathbf{Q}^{-1}$ inverso di $\mathbf{Q}$ coincide con il tensore trasposto di questi:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T. \quad (1.57)$$

La rappresentazione in componenti della (1.56), che si ottiene utilizzando le (1.44), (1.45d) e (1.45e), assieme alle proprietà del determinante di una matrice quadrata⁴¹ permette di scrivere $(\det[\mathbf{Q}])^2 = 1$, e quindi:

$$\det[\mathbf{Q}] = \pm 1. \quad (1.58)$$

Una rotazione deve preservare, oltre al prodotto scalare, anche il prodotto vettoriale di due generici vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:⁴²

$$\mathbf{R}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v}. \quad (1.59)$$

Applicando tale proprietà si ottiene allora:

$$\det[\mathbf{R}] = 1. \quad (1.60)$$

Infatti:

$$\det[\mathbf{R}] = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} R_{ix} R_{jy} R_{kz} \quad \text{per la (1.28)}$$

³⁹Un esempio di tensore ortogonale che non sia una rotazione è quello associato ad una *riflessione* rispetto ad un piano. Se si sceglie un punto O sul piano di riflessione, il tensore associato alla riflessione trasforma il vettore posizione $P - O$ del generico punto nel vettore riflesso $P^* - O$ che fornisce la posizione del punto riflesso. Nella letteratura inglese tensore ortogonale si rende con *Orthogonal tensor*.

⁴⁰Un tensore ortogonale, per la proprietà (1.54), trasforma una base ortonormale $\mathbf{e}_i$ nella base $\mathbf{Q}\mathbf{e}_i$, pure ortonormale, rispetto alla quale si può quindi esprimere in modo univoco qualunque vettore tramite le sue componenti. Da ciò consegue l'invertibilità di $\mathbf{Q}$ poiché al generico vettore $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$ corrisponde in modo univoco il vettore $\mathbf{Q}\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$ e viceversa.

⁴¹In particolare, una matrice e la sua trasposta hanno identico determinante mentre il determinante del prodotto di due matrici uguaglia il prodotto dei determinanti delle singole matrici. Si veda per es. Lipschutz (1975, p. 173-174).

⁴²Si noti che una riflessione non preserva il prodotto vettoriale.

$$\begin{aligned} &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{R}\mathbf{e}_x)_i (\mathbf{R}\mathbf{e}_y)_j (\mathbf{R}\mathbf{e}_z)_k && \text{per la (1.40)} \\ &= (\mathbf{R}\mathbf{e}_x \times \mathbf{R}\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_z && \text{per la (1.38)} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_z && \text{per la (1.59)} \\ &= (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_z && \text{per la (1.54)} \\ &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1. \end{aligned}$$

1.5.2 Componenti di un tensore rotazione

Allo scopo di determinare il significato geometrico delle componenti di un generico tensore rotazione $\mathbf{R}$, si consideri un sistema di riferimento $Oxyz$ cartesiano ortogonale e siano $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ i versori della associata base ortonormale. Con riferimento alla fig. 1.9, si indichino

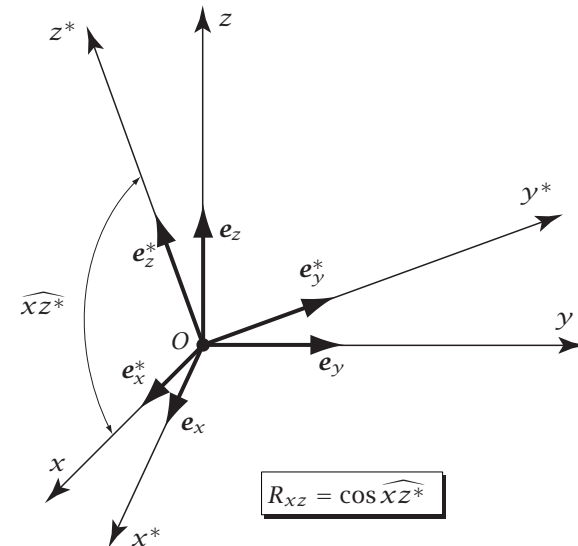


Figura 1.9: Componenti di una rotazione

poi con x^* , y^* e z^* gli assi ottenuti ruotando, attorno al centro O del sistema di riferimento, gli assi x , y e z rispettivamente. Analogamente siano $\mathbf{e}_x^*$, $\mathbf{e}_y^*$ e $\mathbf{e}_z^*$ i versori ottenuti dalla rotazione dei versori $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e

$\mathbf{e}_z$ rispettivamente:

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R} \mathbf{e}_i. \quad (1.61)$$

Si noti che $Ox^*y^*z^*$ è un sistema di riferimento ancora cartesiano ortogonale di cui i versori $\mathbf{e}_x^*$, $\mathbf{e}_y^*$ e $\mathbf{e}_z^*$ rappresentano l'associata base ortonormale.

Ciò premesso, la generica componente del dato tensore rotazione risulta:

$$R_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = \cos \widehat{x_i x_j^*}. \quad (1.62)$$

Le colonne della matrice delle componenti di $\mathbf{R}$ rappresentano dunque i coseni direttori degli assi ruotati x^* , y^* e z^* relativamente agli assi x , y e z del sistema di riferimento:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \widehat{xx^*} & \cos \widehat{xy^*} & \cos \widehat{xz^*} \\ \cos \widehat{yx^*} & \cos \widehat{yy^*} & \cos \widehat{yz^*} \\ \cos \widehat{zx^*} & \cos \widehat{zy^*} & \cos \widehat{zz^*} \end{bmatrix}. \quad (1.63)$$

Se l'asse z coincide con l'asse di rotazione e φ è l'angolo di ampiezza della rotazione, positiva se antioraria sulla faccia positiva del piano xy (fig. 1.10), risulta poi:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

1.6 Trasformazione delle componenti di un vettore e di un tensore doppio

Le componenti di un vettore oppure di un tensore doppio dipendono dalla scelta della base ortonormale di riferimento. Al variare della base variano quindi, in generale, le relative componenti vettoriali e tensoriali. Allo scopo di determinare le relazioni che legano le componenti rispetto a due diverse basi ortonormali di uno stesso vettore o tensore doppio, si nota innanzitutto che una delle due basi si ottiene dall'altra tramite un'opportuna rotazione.

Siano allora $Oxyz$ e $Ox^*y^*z^*$ due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali aventi l'origine O in comune, di cui il secondo si ottiene

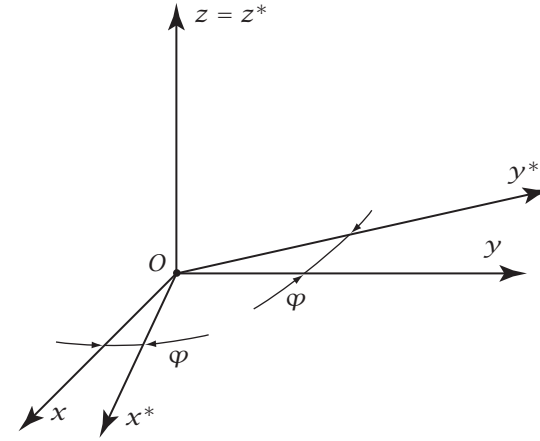


Figura 1.10: Componenti di una rotazione di asse z

dal primo tramite una rotazione di polo O individuata dal tensore rotazione $\mathbf{R}$ (fig. 1.9). Siano inoltre $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ e $\mathbf{e}_x^*$, $\mathbf{e}_y^*$, $\mathbf{e}_z^*$ le due basi ortonormali individuate dagli assi dei due sistemi di riferimento. In accordo con la relazione (1.61), la base $\mathbf{e}_i^*$ è individuata ruotando tramite $\mathbf{R}$ la base $\mathbf{e}_i$.

La definizione (1.30) delle componenti di un vettore, insieme alla relazione (1.61), permette di porre le componenti, nella base $\mathbf{e}_i^*$, di un generico vettore $\mathbf{v}$ nella forma:

$$v_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \mathbf{e}_i = (\mathbf{R}^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.65)$$

Ne consegue che tali componenti uguagliano le componenti del vettore $\mathbf{R}^T \mathbf{v}$ nella base $\mathbf{e}_i$:

$$\{v\}^* = [\mathbf{R}]^T \{v\}, \quad v_i^* = \sum_j R_{ji} v_j. \quad (1.66)$$

Analogamente, ricordando la definizione (1.40), le componenti di un generico tensore $\mathbf{A}$ nella base $\mathbf{e}_i^*$ risultano:

$$A_{ij}^* = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j^* = (\mathbf{R} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{A} (\mathbf{R} \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{e}_j), \quad (1.67)$$

e quindi rappresentano le componenti del tensore $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ nella base $\mathbf{e}_i$:

$$[\mathbf{A}]^* = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{R}], \quad A_{ij}^* = \sum_{hk} R_{hi} R_{kj} A_{hk}. \quad (1.68)$$

Le componenti di $\mathbf{R}$ che compaiono nelle formule di trasformazione (1.66) e (1.68) devono essere calcolate rispetto alla base $\mathbf{e}_i$ e sono fornite dalla (1.62). Le colonne della matrice $[\mathbf{R}]$ delle componenti di $\mathbf{R}$, e quindi le righe della sua trasposta $[\mathbf{R}]^T$, rappresentano di conseguenza i coseni direttori degli assi del secondo sistema di riferimento $Ox^*y^*z^*$ rispetto al primo sistema di riferimento $Oxyz$.

Capitolo 2

Modelli meccanici delle strutture

2.1 Componenti elementari delle strutture

La *Scienza delle Costruzioni*¹ si propone lo scopo di dare un fondamento comune allo studio del comportamento meccanico dei diversi tipi di *costruzioni*² eseguite dall'uomo, così come della loro interazione con i vari mezzi materiali con cui si trovano in contatto nel corso della loro esistenza. L'importanza di tale studio risulta immediato ove si pensi che nel suo ambito cade il problema di giudicare, nella fase progettuale di una costruzione:

1. la fattibilità, dal punto di vista meccanico, della stessa costruzione;
2. la resistenza alle sollecitazioni a cui si prevede la costruzione sarà assoggettata;
3. la rispondenza della costruzione alle necessità che ne giustificano la sua realizzazione.

Inoltre, per il già costruito, la Scienza delle Costruzioni fornisce gli strumenti per giudicare:

1. la resistenza di una costruzione nel suo effettivo stato, sotto l'azione delle sollecitazioni a cui la costruzione stessa è assoggettata;
2. la fattibilità di eventuali modifiche che si rendessero desiderabili;

¹ *Structural mechanics* nella letteratura inglese.

² Nella letteratura inglese *buildings*, soprattutto per costruzione civile, oppure *construction*.

3. il tipo di interventi tesi a rimediare ad eventuali dissesti della costruzione o al suo non essere più adeguata all'uso previsto.

Per descrivere il comportamento meccanico di una costruzione occorre innanzitutto enucleare la *struttura*,³ ovvero occorre individuare le parti che la compongono e come queste interagiscono le une con le altre. L'individuazione della struttura sottostante ad una data costruzione permette di ridurre lo studio del suo comportamento meccanico, che può essere molto complesso, all'interazione di parti dal comportamento meccanico più semplice. Non solo, le parti in cui possono scomporsi costruzioni anche molto diverse fra loro possono presentare spesso notevoli somiglianze di forma e di comportamento. Inoltre, alcune parti possono essere relativamente ininfluenti nei riguardi della *capacità portante*⁴ della costruzione, cioè della capacità di portare carichi, e in tal caso ne viene enucleata una struttura semplificata, detta *struttura portante*.⁵

In secondo luogo occorre studiare l'interazione della costruzione con gli eventuali mezzi materiali con cui si trova in contatto. I mezzi principali sono essenzialmente:

1. il terreno, su cui poggiano o sono fondate le costruzioni o che spinge opere di contenimento come i muri di sostegno o che risulta veicolo delle onde sismiche;
2. l'aria, relativamente alla quale basta ricordare l'effetto del vento oppure la forza di sostentamento degli aerei in volo;
3. l'acqua, con gli effetti, tra l'altro, della pressione sui contenitori (comprese le dighe di ritenuta) oppure il sostentamento assicurato ai vari tipi di imbarcazioni od ancora l'effetto delle onde e delle correnti sulle costruzioni marittime.

Altri mezzi con cui interagiscono le costruzioni possono essere vari tipi di fluidi oppure di liquidi, ma anche ammassi di materiali sciolti di vario tipo, come per esempio i cereali con la loro azione di pressione sulle pareti dei silos di contenimento. È intuibile che lo studio delle interazioni con i vari tipi di mezzi è indispensabile al fine di una corretta analisi dei carichi agenti su una struttura.

Da quanto detto ne risulta che lo studio meccanico di una costruzione consiste essenzialmente delle seguenti fasi:

³ *Structure* nella letteratura inglese.

⁴ Nella letteratura inglese *capacity load*, con riferimento a costruzioni civili.

⁵ *Supporting structure* nella letteratura inglese.

1. individuazione della sua struttura portante;
2. individuazione dei carichi che agiscono su tale struttura portante;
3. studio della struttura portante tramite i modelli meccanici di comportamento delle singole parti.

Di queste fasi, quella che ci interessa prevalentemente in questo corso è l'ultima, ovvero l'implementazione e lo studio di alcuni modelli meccanici interpretanti il comportamento di parti semplici di strutture, e il susseguente studio del comportamento meccanico di strutture portanti complessive. Essendo tale studio essenzialmente unificante, non stupisce più di tanto il fatto che le costruzioni *reali* siano lasciate, con termine teatrale, dietro le quinte. È compito dei corsi a contenuto tecnologico fornire tutte quelle informazioni che riguardano la pratica realizzazione, a partire dalla fase progettuale per arrivare a quella esecutiva, di un particolare tipo di strutture.

Affinché non sorgano equivoci, è bene dire che quando una costruzione viene pensata deve essere già ben presente quella che sarà la sua struttura portante, almeno se si aspira ad una buona progettazione, e che quindi, a tale livello, deve essere ben chiaro il comportamento meccanico dei vari tipi di strutture.

Lo scopo che ci si propone ora è di studiare la forma, cioè la geometria, di alcuni modelli che si prestano allo studio di parti semplici di strutture, ma anche di strutture complessive e di vari mezzi materiali. Secondo la forma, esistono fondamentalmente tre categorie di modelli: modelli tridimensionali (cioè di forma generica o indefinita), modelli bidimensionali, in cui due dimensioni “prevalgono” sulla terza e infine modelli monodimensionali, in cui una dimensione “prevale” sulle altre due.

2.2 Modelli tridimensionali

Il modello tridimensionale per eccellenza è il modello di *corpo continuo*.⁶ In tal caso la forma del corpo può essere generica, e per tale motivo viene comunemente rappresentata una forma il più “infor-

⁶Un altro termine utilizzato è quello di *mezzo continuo*. Tale termine è più propriamente utilizzato nel caso in cui oggetto di studio sia uno dei mezzi materiali con i quali interagiscono le costruzioni e le macchine. Nella letteratura inglese si usa il termine *continuous body* per rendere corpo continuo e *continuous medium* oppure *continuum* per rendere mezzo continuo.

me” possibile, simile a quella di una patata (fig. 2.1). È evidente che

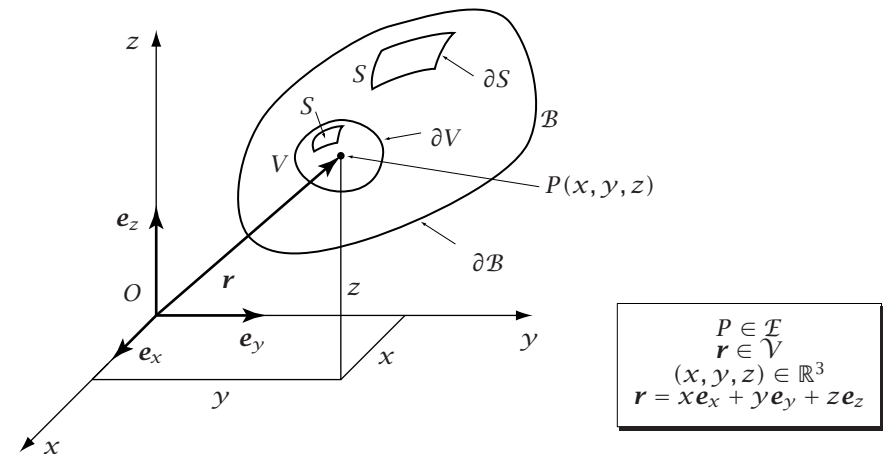


Figura 2.1: Corpo continuo

nell'ambito di un tale modello possono ricadere tutte le parti semplici di strutture, comprese quelle mono o bidimensionali, ma anche le strutture complessive stesse.

Con riferimento alla fig. 2.1, geometricamente un corpo continuo occupa una porzione B , di contorno ∂B , dello *spazio euclideo* T tridimensionale. Si suppone che il corpo possa essere indefinitamente decomposto in parti più piccole senza mai giungere al livello di punti: si prescinde quindi dai modelli atomici della materia.⁷ Ne consegue che da un corpo continuo si possono isolare dei volumi ma non dei punti. Con riferimento ad un generico punto P , potrà al più isolarsi un suo intorno V , di contorno ∂V .

Gli elementi geometrici da considerare sono:

1. I *punti* P , interni al corpo oppure posti sul suo contorno;
2. I *volumi* V estraibili dal corpo, con il loro contorno ∂V ;

⁷A volte si usano modelli micromeccanici, che quindi tengono conto della struttura della materia, al fine di ottenere, sempre nell'ambito del modello continuo, dei particolari legami costitutivi.

3. Le *superfici* S , con il loro contorno ∂S , poste sul contorno esterno ∂B del corpo oppure internamente al corpo, per esempio sul contorno ∂V di un volume V interno al corpo;
4. Le *linee* ℓ interne al corpo o poste sul suo contorno.

Con riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, i punti P possono essere individuati dal *vettore posizione*⁸ $\mathbf{r} = P - O$ oppure, numericamente, dalle coordinate (x, y, z) . Naturalmente, il vettore posizione appartiene allo spazio dei vettori ordinari $\mathcal{V}$ mentre la tripletta delle coordinate è un elemento dello spazio numerico a tre dimensioni $\mathbb{R}^3$.

2.2.1 Solidi

Nel corso del moto o della deformazione un *corpo solido*⁹ “conserva” la propria forma o, quanto meno, conserva un ordine tra le sue parti che permette di identificarle ad ogni istante. In tal caso è possibile assumere una *configurazione di riferimento*¹⁰ fissa, detta anche *configurazione materiale* o *lagrangiana*. I punti della configurazione di riferimento, detti *punti materiali*,¹¹ etichettano, con le loro coordinate, i punti del corpo solido che nel corso del tempo possono trovarsi in posizioni diverse dello spazio. La configurazione effettivamente assunta dal solido ad un dato istante è invece detta *configurazione deformata* (deformata relativamente alla configurazione di riferimento) oppure *configurazione spaziale* o *euleriana*,¹² e i suoi punti sono detti punti spaziali.

La descrizione del moto e della deformazione di un solido che consegue alla scelta di una configurazione di riferimento è detta *descrizione materiale* o *lagrangiana*.¹³

2.2.2 Fluidi

Un *fluido*¹⁴ nel corso del moto non conserva l'identità delle singole parti. In tal caso si assume una data regione dello spazio, che possiamo

indicare come *regione di controllo*, e si descrivono le proprietà che hanno le parti di fluido che nel corso del tempo occupano una stessa parte della regione di controllo. Per esempio, nel caso di un *liquido*,¹⁵ cioè di un fluido incompressibile, la regione di controllo potrebbe essere una condotta in pressione, come nel caso dello schema di fig. 2.2, caso in cui

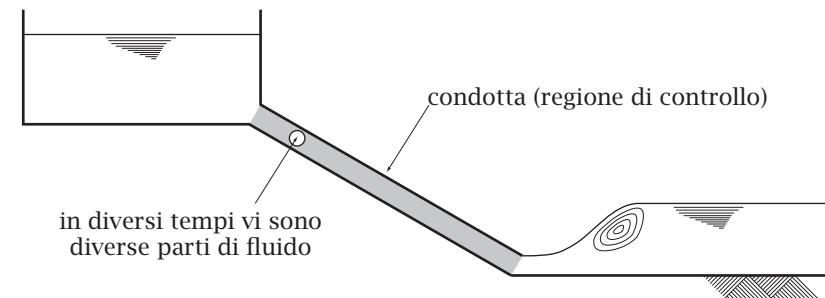


Figura 2.2: Liquido

tutta la regione di controllo è occupata dal liquido, oppure un canale, nel qual caso la regione di controllo è solo parzialmente occupata dal liquido e nasce il problema dell'individuazione del *pelo libero*,¹⁶ ossia della superficie che separa il liquido dalla soprastante atmosfera.

La descrizione dello stato di un fluido che consegue alla scelta di una regione di controllo dello spazio è detta *descrizione spaziale* o *euleriana*.¹⁷ Naturalmente la regione di controllo può anche essere infinita, per esempio nel caso della modellazione del moto di un corpo in un fluido. Se il fluido rappresenta l'atmosfera terrestre, e quindi il moto avviene internamente ad essa, la regione di controllo occuperà l'intero spazio, se invece il fluido rappresenta l'acqua del mare e il moto avviene alla sua superficie, la regione di controllo occuperà un semispazio.

2.2.3 Terreno

Il *terreno*¹⁸ si presenta come un solido molto esteso rispetto alle costruzioni che si fondano su di esso oppure alle interfacce che permet-

⁸ *Position vector* nella letteratura inglese.

⁹ *Solid* nella letteratura inglese.

¹⁰ *Reference configuration* nella letteratura inglese.

¹¹ *Material points* nella letteratura inglese.

¹² *Current configuration* oppure *deformed configuration* nella letteratura inglese.

¹³ *Material description* oppure *lagrangian description* nella letteratura inglese.

¹⁴ *Fluid* nella letteratura inglese.

¹⁵ *Liquid* nella letteratura inglese.

¹⁶ *Free surface* nella letteratura inglese.

¹⁷ *Spatial description* oppure *eulerian description* nella letteratura inglese.

¹⁸ *Soil* nella letteratura inglese.

tono la movimentazione dei vari tipi di veicoli (come strade, ferrovie e piste aeroportuali). Per questo motivo viene frequentemente modellato come un corpo solido infinito la cui configurazione di riferimento occupa un semispazio (fig. 2.3).

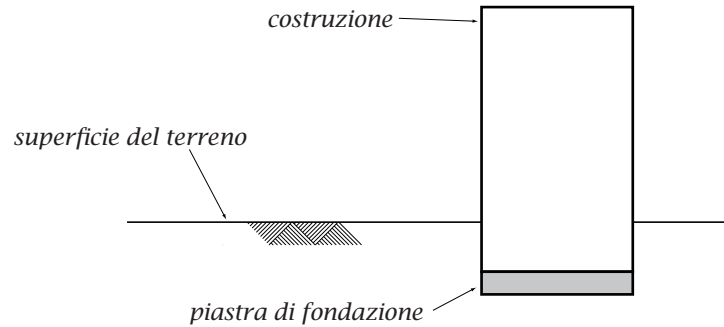


Figura 2.3: Terreno

2.3 Modelli monodimensionali

Un solido che si sviluppa prevalentemente in una direzione, ovvero sia che ha due dimensioni trascurabili rispetto alla terza, viene modellato geometricamente facendo riferimento ad una linea “media” ℓ (fig. 2.4). La linea può essere orientata scegliendo un verso di percorrenza su di essa. I punti della linea possono essere riferiti ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, ma possono anche essere individuati da un’ascissa curvilinea s che può, per esempio, rappresentare la distanza di un punto della linea da un punto fisso preso come riferimento, nella figura il punto iniziale P_0 . Se questo è il caso, l’asse dell’ascissa curvilinea s rappresenterà quindi i punti della linea d’asse nell’intervallo $[0, \ell]$, dove con ℓ si intende la lunghezza complessiva della linea media. Le coordinate dei punti della linea in funzione dell’ascissa curvilinea s rappresentano le equazioni parametriche della linea stessa:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}, \quad s \in [0, \ell]. \quad (2.1)$$

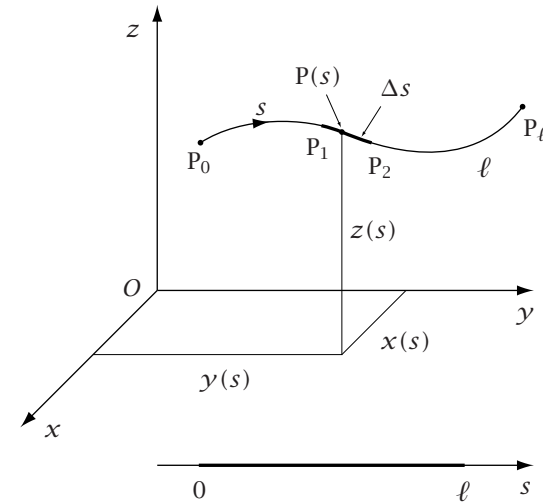


Figura 2.4: Modello monodimensionale

Gli elementi geometrici estraibili da un solido monodimensionale saranno rappresentati da parti di linea, Δs in figura, sempre per l’ipotesi di continuità che impedisce di scendere al livello del punto. Naturalmente, considerato quale solido tridimensionale, da un solido monodimensionale risulta possibile estrarre dei volumi che non corrispondono a parti di linea.

2.3.1 Fili

Il modello monodimensionale più semplice è quello di un *filo*,¹⁹ caratterizzato dalla scarsa resistenza alla variazione di forma. È cioè possibile atteggiare il filo secondo una linea geometrica qualsiasi. Naturalmente l’ordine delle parti che compongono il filo viene mantenuto, cosicché non è improprio catalogare i fili tra i corpi solidi.

¹⁹In tale contesto il termine filo è usato come termine generico per indicare un solido monodimensionale con scarsa resistenza alla variazione di forma. Le *funi*, le *corde*, i *cavi*, le *catene* e i *fili metallici* sono tutti esempi di sistemi materiali modellabili come fili. Nella letteratura inglese si usano prevalentemente i termini *string*, che corrisponde a corda sottile, oppure *cable*, che corrisponde a cavo, quali termini generali. Altri termini collegati sono *rope*, che corrisponde a corda, *wire*, che corrisponde a filo metallico e *chain*, che corrisponde a catena.

2.3.2 Travi

Una *trave*²⁰ è un solido monodimensionale che, a differenza dei fili, presenta una non trascurabile resistenza alla variazione di forma. Tale resistenza dipende, oltre che dal materiale di cui è composta la trave, anche dalla geometria tridimensionale della trave stessa. Viene allora associata ad ogni punto della linea media, che in tal caso è detta *asse della trave*, la corrispondente *sezione retta*,²¹ figura geometrica bidimensionale che si ottiene intersecando la trave con un piano perpendicolare alla linea d'asse in corrispondenza del punto considerato (fig. 2.5). Il modello di trave è quindi un modello *monodimensionale*

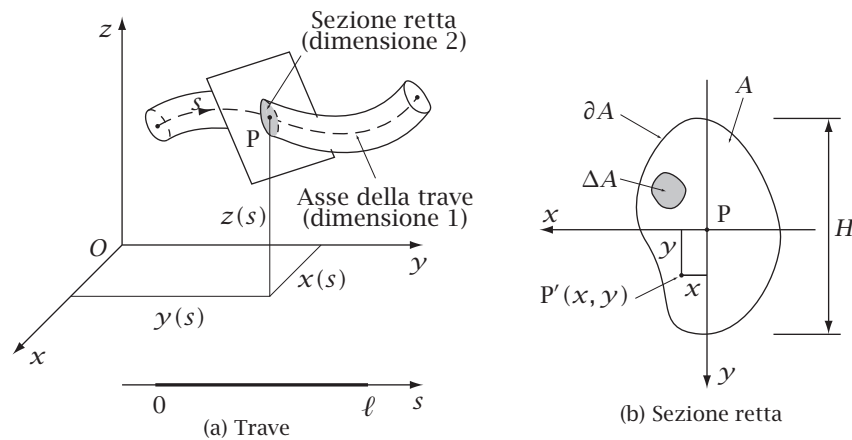


Figura 2.5: Trave (modello monodimensionale con struttura)

²⁰Il termine *trave*, che strettamente parlando indica un elemento monodimensionale rettilineo orizzontale, è usato come termine generico per indicare un qualsiasi solido monodimensionale che presenti una non trascurabile resistenza alla variazione di forma. Esempi particolari di travi sono gli *alberi*, elementi rettilinei a sezione circolare utilizzati nelle costruzioni navali e nelle costruzioni meccaniche, i *pilastr*, elementi verticali di costruzioni civili, le *colonne*, elementi verticali a sezione circolare, le *pile*, elementi verticali di appoggio dei ponti, gli *archi*, elementi curvi di costruzioni civili, gli *anelli*, elementi curvi chiusi e infine le *aste*, elementi rettilinei generici. Un altro termine per indicare una trave verticale è quello di *montante*. Nella letteratura inglese sono generalmente utilizzati i termini *rod* e *bar*, corrispondenti di asta, quali termini generici, mentre con *beam* si indica generalmente una trave orizzontale, con *mast* un albero di nave, con *shaft* un albero di macchina, con *column* un pilastro, con *arch* un arco e con *ring* un'anello.

²¹*Cross section* nella letteratura inglese.

con *struttura*, nel senso che alla geometria monodimensionale della linea d'asse occorre aggiungere la geometria bidimensionale delle sezioni rette associate ai punti della linea d'asse.

Geometricamente la sezione retta A è una figura piana avente quale contorno ∂A una linea chiusa, oppure più linee chiuse se la figura è pluriconnessa. All'interno della sezione retta saranno isolabili parti di area ΔA , il cui contorno sarà ancora una linea chiusa. Infine, nel piano della sezione retta sarà possibile scegliere un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Pxy , con origine P sulla linea d'asse.

Se con H si indica una dimensione significativa delle sezioni rette (fig. 2.5b), oppure una loro dimensione media, il rapporto H/ℓ fornisce un'indice della attendibilità del modello monodimensionale. Normalmente si indica questo fatto dicendo che il modello di trave è attendibile se $H/\ell \ll 1$. L'intervallo di valori di H/ℓ che soddisfano tale condizione dipende dal caso concreto in esame. Naturalmente è responsabilità di chi usa un modello decidere se nel caso concreto in esame esso è soddisfacente e quali sono i suoi limiti.

2.3.3 Travi di sezione sottile

Se la sezione della trave è composta di parti di spessore medio δ “piccolo” rispetto alla dimensione media globale H della sezione, la trave

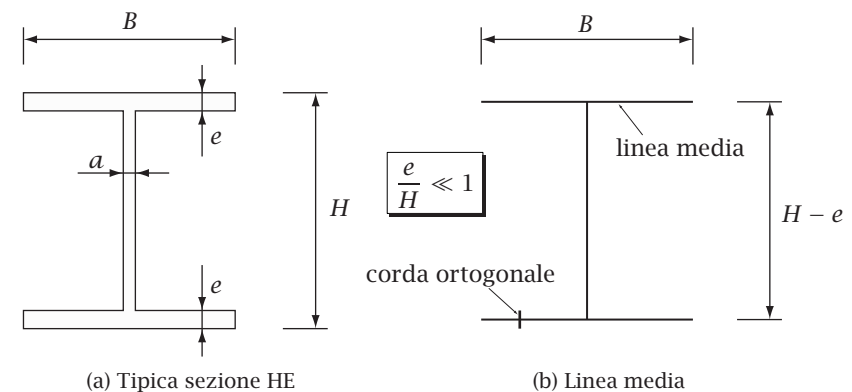


Figura 2.6: Sezione sottile aperta

viene detta *di sezione sottile* oppure *in parete sottile*.²² Se questo è il caso si dice che $\delta/H \ll 1$. Anche in questo caso è responsabilità di chi usa un modello semplificato basato su tale circostanza decidere se nel caso concreto in esame esso è soddisfacente e quali sono i suoi limiti.

Nella fig. 2.6a è illustrato il caso di una sezione sottile a doppio T. In tale tipo di profilo lo spessore e delle ali è sempre maggiore dello spessore a dell'anima. Nel caso delle travi commerciali a doppio T di tipo IPE l'altezza H è maggiore della base B , mentre per le travi commerciali tipo HE è all'incirca uguale. Come indice di spessore sottile si può allora assumere in tal caso il rapporto e/H .

Nel caso di una trave di sezione sottile, si può fare riferimento alla linea media della sezione, che naturalmente è una linea piana (fig. 2.6b). Ad ogni punto della linea è associata la corda ortogonale alla linea stessa. Se la linea media è aperta, come nel caso della fig. 2.6b, la trave si dice *di sezione sottile aperta* o *in parete sottile aperta*.²³ Se invece la linea media è una curva chiusa, come nel caso di fig. 2.7, la trave si dice

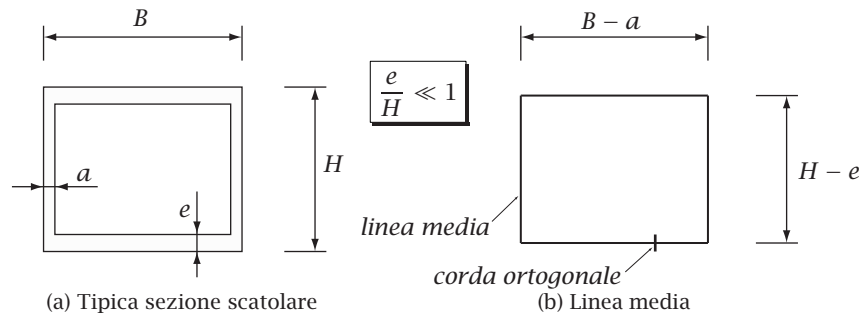


Figura 2.7: Sezione sottile chiusa

di sezione sottile chiusa o *in parete sottile chiusa*.²⁴

2.3.4 Modello di Saint-Venant

Si tratta del problema di un solido cilindrico (fig. 2.8) di materiale

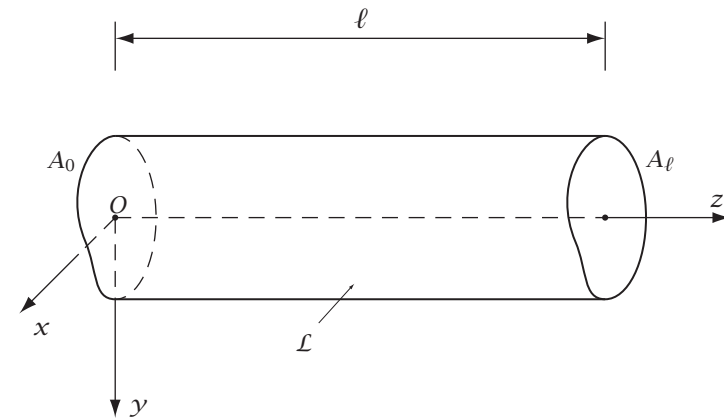


Figura 2.8: Solido di Saint-Venant

omogeneo e isotropo caricato solo in corrispondenza delle basi e risolto nell'ambito della meccanica dei solidi tridimensionali. Tale solido corrisponde ad una trave ad asse rettilineo ed a sezione retta costante. La forma della sezione retta è generica. Oltre che dalle basi A_0 e A_l la superficie di contorno del solido è costituita dalla superficie laterale $\mathcal{L}$.

I risultati che si ottengono dalla soluzione di tale problema, detto *problema di Saint-Venant*,²⁵ si estendono alla trave generica comunque caricata ottenendo così una meccanica della trave nota come *teoria tecnica delle travi*.

2.4 Modelli bidimensionali

Un solido che si sviluppa prevalentemente in due direzioni, ovverossia che ha una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, viene modellato geometricamente facendo riferimento ad una superficie “media” S (fig. 2.9). I punti della superficie possono essere riferiti ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, ma possono anche essere individuati da due ascisse curvilinee r e s che disegnano sulla superficie media un reticolo costituito da due famiglie di curve. Assumendo in un piano un sistema di riferimento Ors , l'insieme delle coppie (r, s)

²² *Thin walled cross section* nella letteratura inglese.

²³ *Open cross section* nella letteratura inglese.

²⁴ *Closed cross section* nella letteratura inglese.

²⁵ *Saint-Venant's problem* nella letteratura inglese.

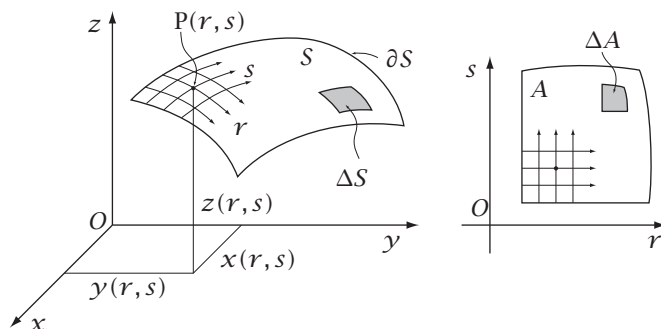


Figura 2.9: Modello bidimensionale

corrispondenti a punti della superficie S individuano nel piano l'area A (fig. 2.9).

Le equazioni parametriche della superficie S , ovvero le coordinate cartesiane x, y, z dei punti della superficie date in funzione delle ascisse curvilinee r e s , rappresentano una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'area A e i punti della superficie S :

$$\begin{cases} x = x(r, s) \\ y = y(r, s) \\ z = z(r, s) \end{cases}, \quad (r, s) \in A. \quad (2.2)$$

Gli elementi geometrici estraibili da un solido bidimensionale saranno rappresentati da elementi di superficie (ΔS in fig. 2.9). Via coordinate curvilinee, ad un elemento di superficie ΔS sulla superficie S corrisponde un elemento di area ΔA nell'area A che rappresenta la superficie nel piano rs . Naturalmente un solido bidimensionale è un caso particolare di solido tridimensionale e risulta quindi possibile estrarre dei volumi che non sono rappresentati da elementi di superficie.

2.4.1 Membrane

Il modello bidimensionale più semplice è quello di una *membrana*,²⁶ caratterizzato, come per i fili, da una scarsa resistenza alla variazione di forma. È cioè possibile deformare la membrana con relativa facilità.

²⁶Membrane nella letteratura inglese.

Comunque, a causa della doppia curvatura di una superficie, una membrana possiede una maggiore rigidità alla variazione di forma rispetto a quella di un filo. Ovverossia non sempre è possibile, senza sforzo, atteggiare una membrana secondo una generica superficie. Naturalmente, come per i fili, l'ordine delle parti che compongono la membrana viene mantenuto, cosicché non è improprio catalogare anche le membrane tra i corpi solidi.

2.4.2 Lastre

Una *lastra*²⁷ è un solido bidimensionale che presenta sempre una non trascurabile resistenza alla variazione di forma. Tale resistenza dipende, oltre che dal materiale di cui è composta la lastra, anche dalla geometria tridimensionale della lastra stessa. In tale caso viene associato ad ogni punto della superficie media il corrispondente *segmento ortogonale*, figura geometrica monodimensionale che si ottiene intersecando la lastra con una linea perpendicolare alla superficie media della lastra in corrispondenza del punto considerato (fig. 2.10). La lastra è dunque un modello *bidimensionale con struttura*, nel senso che alla geometria bidimensionale della superficie media occorre aggiungere la geometria monodimensionale dei segmenti ortogonali ai punti della superficie media.

Se con $b_{\max}$ si indica lo spessore massimo della lastra e con H si indica una dimensione significativa della superficie media della lastra, il rapporto $b_{\max}/H$ fornisce un'indice della attendibilità del modello bidimensionale. Normalmente si indica questo fatto dicendo che il modello di lastra è attendibile se $b_{\max}/H \ll 1$. Ancora, l'intervallo di valori di $b_{\max}/H$ che soddisfano tale condizione dipende dal caso concreto in esame ed è responsabilità di chi usa tale modello sapere quando è soddisfacente e quali sono i suoi limiti.

²⁷Il termine lastra è usato come termine generico per indicare un qualsiasi solido bidimensionale di tale tipo. Esempi particolari di lastre sono le *piastre*, ovvero le lastre piane, le *travi parete*, piastre verticali impiegate in costruzioni civili, i *gusci*, lastre con superficie media a semplice o doppia curvatura tipo i *tubi* e le *cupole*, e infine le *volte*, gusci impiegati quali coperture in costruzioni civili. Nella letteratura inglese sono generalmente utilizzati il termine *shell*, che significa guscio, per indicare le lastre curve e *plate* per indicare le lastre piane.

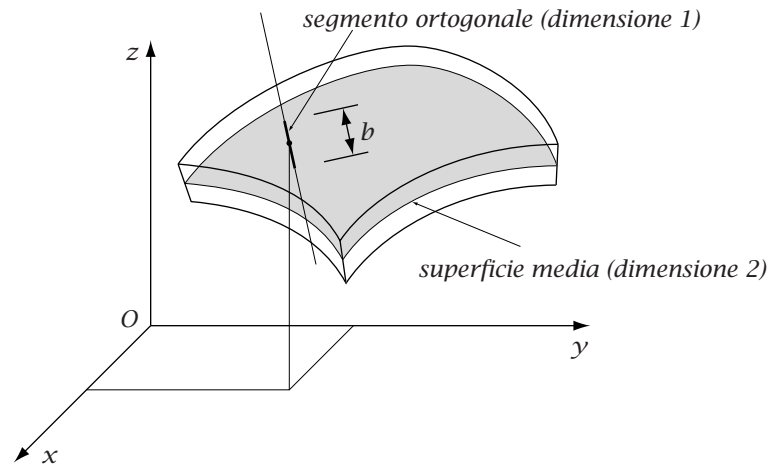


Figura 2.10: Lastra (modello bidimensionale con struttura)

2.4.3 Travi di sezione sottile

Le travi di sezione sottile di cui al §2.3.3, la sezione retta delle quali è composta di parti di spessore medio piccolo rispetto alla dimensione media globale della sezione, possono essere modellate anche come lastre, o come insiemi di lastre nel caso vi siano spigoli di raccordo.

In molte circostanze il modello di trave è sufficiente, ma esistono fenomeni anche molto pericolosi, che non possono essere colti da questo modello. Tra questi, i fenomeni di *instabilità locale*²⁸ con la formazione, per es., di rigonfiamenti localizzati (fenomeno dell'*imbozzamento*) oppure di vere e proprie onde aventi la direzione dell'asse della trave ed una lunghezza tipica delle onde comparabile con la dimensione media della sezione retta.

In questi casi diventa inevitabile l'uso del modello di lastra per interpretare il comportamento di una trave in parete sottile.

²⁸*Local instability* nella letteratura inglese. Il rigonfiamento localizzato viene reso con *buckles* mentre la deformazione ad onde con il termine di *ripple*.

Capitolo 3

Premesse di meccanica dei solidi

3.1 Cinematica

3.1.1 Deformazione e spostamento

Come detto al §2.2.1, nel caso di un solido è possibile assumere una configurazione di riferimento $\mathcal{B}_0$ per mappare i punti del solido il cui moto è oggetto di studio. Per es., nel caso della trave di fig. 3.1 è stata indicata quale configurazione di riferimento la configurazione rettilinea che idealmente la trave avrebbe se non fosse soggetta a forze.

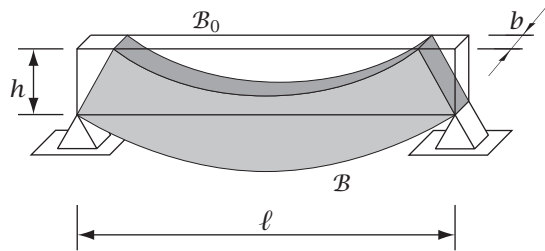


Figura 3.1: Deformazione di una trave

Per descrivere, da un punto di vista lagrangiano, la configurazione che un corpo solido assume ad un generico istante si può quindi utilizzare la funzione ϕ che mappa la configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento nella configurazione $\mathcal{B}$ deformata:

$$\phi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}, \quad X \mapsto \mathbf{x} = \phi(X), \quad (3.1)$$

dove la lettera X indica un generico punto materiale e $\mathbf{x}$ il corrispondente punto spaziale (fig. 3.2). Tale funzione è detta *funzione di*

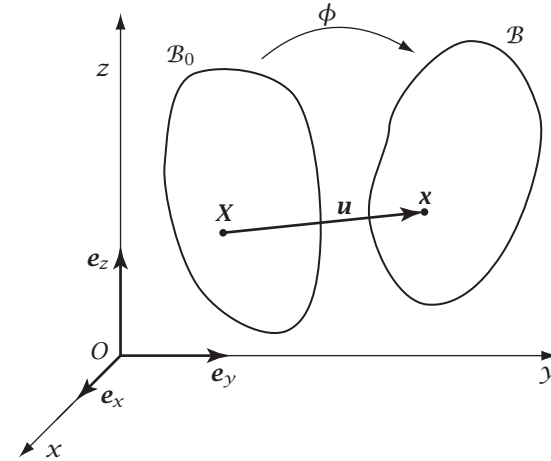


Figura 3.2: Deformazione e spostamento

deformazione o, più semplicemente, *deformazione*¹ del corpo.

Alternativamente, si può utilizzare il vettore *spostamento* $\mathbf{u}^2$ che mappa la configurazione $\mathcal{B}_0$ di riferimento nello spazio vettoriale ordinario $\mathcal{V}$ (fig. 3.2):

$$\mathbf{u} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \mathbf{u}(X) = \mathbf{x} - X, \quad (3.2)$$

e che costituisce pertanto un campo vettoriale sulla configurazione di riferimento. Dalle (3.1) e (3.2) si deduce immediatamente la seguente relazione tra la funzione ϕ di deformazione e il campo $\mathbf{u}$ degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(X) = \phi(X) - X. \quad (3.3)$$

Scegliendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la funzione di deformazione (3.1) e il campo vettoriale (3.2) si scindono ognuno in tre campi scalari x_i e u_i ($i = x, y, z$) delle tre variabili scalari X, Y, Z ,

¹Se la configurazione deformata differisce da quella indeformata per un moto rigido, la funzione di deformazione ϕ descrive tale moto rigido e la “deformazione” del corpo è in tal caso nulla. In inglese si usa il termine *deformation function*.

²*Displacement vector* nella letteratura inglese.

coordinate del punto materiale X :

$$x_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto x_i = x_i(X, Y, Z), \quad (3.4)$$

$$u_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto u_i = u_i(X, Y, Z), \quad (3.5)$$

dove x_i è la i -esima coordinata del punto spaziale $\mathbf{x}$ mentre u_i rappresenta la i -esima componente del vettore spostamento $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathbf{e}_i$ dei versori degli assi coordinati (fig. 3.2).

Si noti che la deformazione, lo spostamento e tutti i concetti che da questi derivano sono dipendenti dalla configurazione di riferimento. È infatti evidente che la medesima configurazione deformata viene individuata da diverse funzioni di deformazione e da diversi campi di spostamento relativamente a diverse configurazioni di riferimento.

3.1.2 Misure di deformazione

Si introducono nel seguito alcune misure di deformazione associate alla deformazione di linee, aree e volumi interni al corpo. Dato uno qualunque di questi enti geometrici, la sua misura nella configurazione di riferimento differirà in generale dalla sua misura nella configurazione deformata (fig. 3.3). Non solo, date due linee, l'angolo da esse indi-

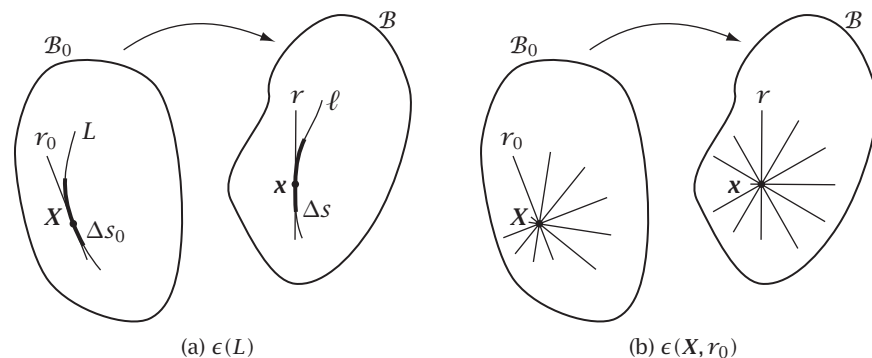


Figura 3.3: Dilatazione lineare

viduato varia nel passare dalla configurazione di riferimento a quella deformata. Nel seguito, utilizzando opportunamente tali variazioni di misura, saranno definite delle misure di deformazione relative agli enti geometrici associati al corpo.

Dilatazione lineare. Si consideri innanzitutto, nella configurazione di riferimento B_0 , una linea L passante per il punto materiale X (fig. 3.3a). Tale linea si trasforma, durante la deformazione, nella linea ℓ della configurazione deformata B . In tale processo la linea subisce un *allungamento*, definito dalla differenza $\ell - L$ tra la lunghezza deformata e quella indeformata,³ avendo indicato le lunghezze delle linee con gli stessi simboli L ed ℓ utilizzati per indicare le linee stesse. Rapportando poi l'allungamento della linea alla sua misura indeformata si ottiene l'*allungamento per unità di linea* o *dilatazione lineare* ϵ :⁴

$$\epsilon = \frac{\ell - L}{L}. \quad (3.6)$$

La (3.6) fornisce una misura di deformazione $\epsilon(L)$ legata ad una linea materiale L , misura che può essere indicata con il simbolo ϵ_L per sottolineare tale fatto. Poiché l'allungamento e la lunghezza di una linea sono dimensionalmente omogenee, per es. entrambe possono essere misurate in metri, ne risulta che la dilatazione lineare è adimensionale. Nell'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli, anche le dilatazioni lineari sono piccole. È allora usuale esprimerle in percentuale; per es. una dilatazione dello 0.2% rappresenta una dilatazione pari a 0.002.

Consideriamo ora una successione di parti Δs_0 della linea L che si racchiudano attorno al punto materiale X , appartenente alla linea stessa (fig. 3.3a). La dilatazione lineare della generica parte di linea Δs_0 vale $(\Delta s - \Delta s_0)/\Delta s_0$, avendo indicato con Δs la corrispondente parte di linea nella configurazione deformata. Questa espressione può considerarsi alla stregua di una dilatazione lineare media sulla linea L nell'intorno del punto X . Si perviene così a definire, al limite per $\Delta s_0 \rightarrow X$, la dilatazione lineare nel punto X nella direzione della linea L , che indichiamo ancora

³Naturalmente se $\ell < L$ l'"allungamento" risulta in realtà un "accorciamento". Nella letteratura inglese "allungamento" viene reso con *elongation* oppure con *extension*.

⁴Un'altra misura di deformazione collegata con la dilatazione lineare è lo *stiramento*, definito dal rapporto ℓ/L tra la lunghezza della linea dopo la deformazione e la lunghezza prima della deformazione. Visto che per la (3.6) la dilatazione lineare vale $\ell/L - 1$, ne consegue che lo stiramento vale $\epsilon + 1$. Nella letteratura inglese si utilizzano i termini *unit extension*, *unit elongation* e *linear strain* (o, più semplicemente, *strain*) per dilatazione lineare e il termine *stretch* per stiramento. Qualche volta si trova impiegato il termine *extension* con il significato di dilatazione lineare, come, per es., in Truesdell e Toupin (1960, p. 255).

con ϵ :⁵

$$\epsilon = \lim_{\substack{\Delta s_0 \rightarrow X \\ \Delta s_0 \subset L}} \frac{\Delta s - \Delta s_0}{\Delta s_0}. \quad (3.7)$$

Tenendo conto che al limite la linea Δs_0 tende alla tangente alla linea L nel punto X se ne deduce che il limite (3.7) non dipende tanto dalla linea L quanto dalla tangente r_0 alla linea nel punto X . In altri termini, il limite (3.7) coincide se eseguito su due diverse linee passanti per X ed aventi medesima tangente in tale punto. In definitiva la relazione (3.7) definisce una misura di deformazione $\epsilon(X, r_0)$ legata ai punti materiali del solido ed alle direzioni uscenti da tali punti (fig. 3.3b). Tale misura può essere indicata con il simbolo ϵ_{r_0} per sottolineare tale fatto.

La relazione (3.7) definisce un allungamento per unità di linea ϵ nell'intorno del punto X . Per recuperare l'allungamento $\ell - L$ dell'intera linea occorre allora integrare la dilatazione lineare sulla linea stessa:

$$\ell - L = \int_L \epsilon \, ds_0, \quad (3.8)$$

dove ds_0 indica l'elemento di linea indeformato. L'integrale (3.8) è ben definito poiché in un generico punto X della linea è definita la tangente r_0 alla linea stessa e quindi anche il valore $\epsilon(X, r_0)$ della dilatazione nella direzione della linea stessa.

Dilatazione quadratica e dilatazione cubica. Tutto quello che è stato detto per una linea appartenente al corpo si può dire per una sua superficie (interna) e per un suo volume. Siano allora S_0 una superficie e V_0 un volume appartenenti alla configurazione di riferimento $\mathcal{B}_0$ del solido (fig. 3.4). Siano poi S e V i corrispondenti elementi geometrici nella configurazione $\mathcal{B}$ deformata. La *dilatazione quadratica*⁶ ζ e la *dilatazione cubica*⁷ θ restano definite in modo analogo alla (3.6):

$$\zeta = \frac{S - S_0}{S_0}, \quad \theta = \frac{V - V_0}{V_0}, \quad (3.9)$$

⁵Per evitare ambiguità, si sottolinea il fatto che nel termine $\Delta s_0 \rightarrow X$ della (3.7) Δs_0 rappresenta una linea (che è parte della linea L), ed infatti tale termine indica che il limite è eseguito su una successione di parti della linea L che si racchiudono attorno al punto X . Nella frazione $(\Delta s - \Delta s_0)/\Delta s_0$ lo stesso simbolo compare invece con il significato di lunghezza della linea.

⁶Surface strain nella letteratura inglese.

⁷Volume strain oppure bulk strain nella letteratura inglese.

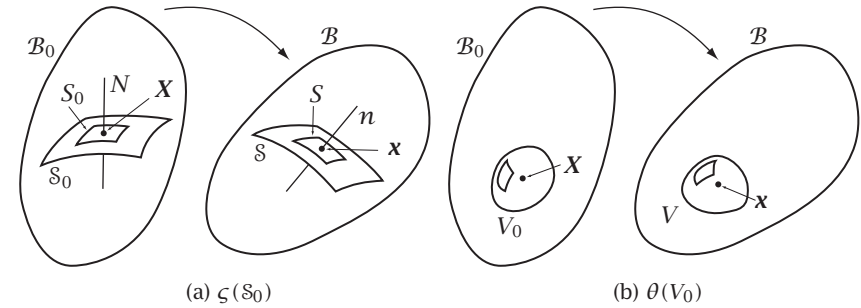


Figura 3.4: Dilatazione quadratica e cubica

intendendo che gli stessi simboli impiegati precedentemente per gli enti geometrici indichino ora le loro misure (di superficie e di volume).

Introducendo poi una successione di superfici S_0 in S_0 che si racchiudono attorno al punto materiale X (fig. 3.4a), ed analogamente una successione di volumi V_0 che ancora si racchiudono attorno al punto X (fig. 3.4b), si ottengono le misure di dilatazione quadratica e cubica nell'intorno del punto materiale X :

$$\zeta = \lim_{\substack{S_0 \rightarrow X \\ S_0 \subset S_0}} \frac{S - S_0}{S_0}, \quad \theta = \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (3.10)$$

Poiché al limite la superficie S_0 appartiene al piano tangente nel punto X alla superficie S_0 , il limite espresso dalla prima delle (3.10) dipende solo da tale piano tangente, o, se si vuole, dalla direzione N normale alla superficie nel punto X (fig. 3.4a). In altre parole, due diverse superfici per X aventi lo stesso piano tangente, e quindi la stessa normale, in X conducono allo stesso valore della dilatazione quadratica. In definitiva la prima delle (3.10) definisce una misura di deformazione $\zeta(X, N)$ legata ai punti materiali del solido ed ai piani di sostegno tali punti, piani rappresentati dalle direzioni normali. Per quel che riguarda la dilatazione cubica, la misura espressa dalla seconda delle (3.10) dipende solo dal punto X e risulta quindi un campo scalare del tipo $\theta(X)$.

Scorrimento tra due linee orientate. Si considerino ora due linee orientate L ed M passanti per il punto materiale X della configurazione

di riferimento $\mathcal{B}_0$. Nella fig. 3.5a l'orientamento delle due linee è individuato dai versori tangenti $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{s}_0$ nel punto X . L'angolo Ψ tra le due linee

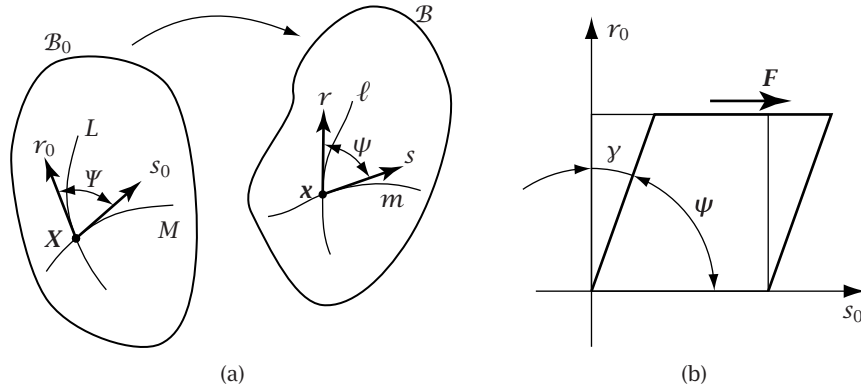


Figura 3.5: Scorrimento di due linee

orientate rappresenta l'angolo compreso tra le parti positive delle rette tangenti in X alle due linee. Nel corso della deformazione le due linee materiali si trasformano nelle due linee spaziali ℓ ed m , appartenenti alla configurazione deformata $\mathcal{B}$ e passanti per il punto x corrispondente del punto materiale X . L'orientazione delle due linee materiali L ed M si estende alle due linee deformate ℓ ed m : restano così individuati i due versori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ tangenti alle due linee deformate nel punto x e l'angolo ψ tra questi (fig. 3.5a). Il decremento γ dell'angolo tra le due linee che si ha nel corso della deformazione viene chiamato *scorrimento*:⁸

$$\gamma = \Psi - \psi. \quad (3.11)$$

Lo scorrimento dipende dalle due linee orientate L ed M solo attraverso i versori tangenti $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{s}_0$, e quindi risulta già ridotto al punto senza bisogno di un'operazione di limite. In definitiva la (3.11) definisce una misura di deformazione $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)$ legata ai punti materiali del solido ed alle coppie di direzioni orientate uscenti da tali punti. Tale misura può essere indicata con il simbolo γ_{rs} per sottolineare tale fatto.

Per giustificare la scelta del decremento dell'angolo piuttosto che del suo incremento nella definizione (3.11) di scorrimento, si consideri un

⁸Nella letteratura inglese si rende scorrimento con il termine *shear strain* o, più semplicemente, *shear*.

cubo la cui faccia laterale è illustrata nella fig. 3.5b. Se il cubo è sollecitato, nella sua faccia superiore, da una forza $\mathbf{F}$ concorde con il verso di $\mathbf{s}_0$, ci si aspetta che la faccia superiore “scorra” rispetto alla faccia inferiore nella direzione della forza e quindi di $\mathbf{s}_0$, provocando una diminuzione dell'angolo tra $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{s}_0$. La convenzione adottata assicura che in tale caso lo scorrimento sia positivo.

Quale differenza tra due angoli lo scorrimento ha le dimensioni di un angolo e può quindi essere misurato in radianti (rad). Ricordiamo che il radiante è definito dal rapporto di un arco di circonferenza con il suo raggio e che quindi è adimensionale.⁹

Se le due linee sono inizialmente ortogonali, cioè se $\Psi = \pi/2$ e quindi $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$, risulta:

$$\sin \gamma_{rs} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \cos \psi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}. \quad (3.12)$$

Quindi il seno dello scorrimento di due linee inizialmente ortogonali uguaglia il prodotto scalare dei versori tangenti alle linee deformate.

Se gli spostamenti, e quindi le deformazioni, sono piccole il seno di un angolo approssima l'angolo stesso e quindi in tal caso risulta:

$$\gamma_{rs} \approx \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}. \quad (3.13)$$

3.2 Dinamica

3.2.1 Equazioni di bilancio

Le variabili dinamiche descrivono le cause del moto di un corpo. In altri termini, descrivono le azioni che l'ambiente esterno al corpo esercita sul corpo stesso oppure sulle sue parti. Per poter descrivere le azioni esercitate su una parte del corpo, occorre isolare, almeno in via concettuale, tale parte dal resto del corpo. Questo fatto impone che le variabili dinamiche siano legate ai volumi e non ai punti, dato che i punti non sono isolabili da un corpo continuo.

Poiché si suppone che un corpo continuo sia indefinitamente suddivisibile, esso non è assimilabile ad un sistema di punti materiali. Infatti un insieme di particelle può assimilarsi ad un sistema di punti materiali se le dimensioni delle particelle stesse sono piccole rispetto alle loro

⁹Come indicato nella tabella 1.3 del §1.1.2 (p. 4) la formula dimensionale della grandezza angolo è rappresentata da L/L , dove L rappresenta la grandezza lunghezza. Radiante è reso nella letteratura inglese dal termine *radian*.

distanze. D'altronde, comunque si suddivida in parti un corpo continuo, le singole parti sono sempre a contatto, e quindi le distanze sono nulle. Tuttavia ciò non toglie che una singola parte del corpo continuo, sufficientemente piccola, possa assimilarsi ad un punto materiale.

Alla base della dinamica di un sistema di punti materiali, come noto, possono porsi le *leggi di Newton*,¹⁰ e tali leggi sono equivalenti alle *equazioni di bilancio della quantità di moto*¹¹ e del *momento della quantità di moto* o *momento angolare*.¹² Di conseguenza, le equazioni di bilancio possono essere poste alla base della dinamica dei sistemi di punti materiali ed è in questa forma che la dinamica dei sistemi di punti materiali si presta ad una generalizzazione alla dinamica dei mezzi continui:

Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo. *Ad ogni parte, cioè ad ogni volume, di un corpo continuo si richiede di soddisfare le due equazioni di bilancio.*

Si consideri allora un volume V interno alla generica configurazione deformata $\mathcal{B}$ del corpo (fig. 3.6). Detta $\mathbf{F}$ la *forza*¹³ totale agente nel

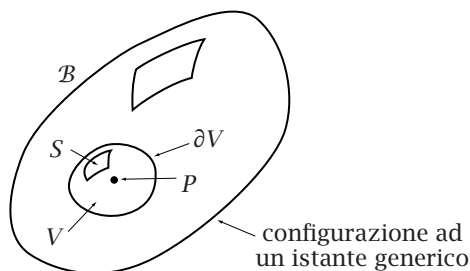


Figura 3.6: Bilancio su un volume generico

volume V , e detta $\mathbf{P}$ la quantità di moto totale relativa a tale volume, il bilancio della quantità di moto si scrive:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}, \quad (3.14)$$

¹⁰Le leggi di Newton, *Newton's laws* nella letteratura inglese, comprendono il principio di inerzia, la proporzionalità tra forza ed accelerazione ed infine la legge di azione e reazione.

¹¹*Linear momentum* o, più semplicemente, *momentum* nella letteratura inglese.

¹²*Angular momentum* oppure *moment of momentum* nella letteratura inglese.

¹³*Force* nella letteratura inglese.

dove il punto indica derivazione materiale, cioè valutata seguendo l'evoluzione del volume V nel corso del tempo. Se poi si indica con $\mathbf{M}$ il *momento delle forze*¹⁴ e con $\mathbf{L}$ il momento della quantità di moto entrambi relativi al volume V , il bilancio del momento della quantità di moto analogamente si scrive:

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}. \quad (3.15)$$

Per rendere operative le equazioni di bilancio (3.14) e (3.15) occorre precisare, relativamente al modello di corpo continuo, i concetti di quantità di moto, di momento della quantità di moto, di forza e di momento delle forze, concetti che in tali equazioni compaiono.

Nel caso statico, ovverossia in assenza di variazioni della quantità di moto e del momento della quantità di moto, le due equazioni di bilancio (3.14) e (3.15) si riducono alle due *equazioni di equilibrio* alla *traslazione* e alla *rotazione* rispettivamente:¹⁵

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

note come *equazioni cardinali della statica*. Ribadiamo che le equazioni di bilancio (3.14) e (3.15), oppure quelle di equilibrio (3.16) e (3.17), devono essere valide per ogni volume V estraibile dal corpo: le sole equazioni di bilancio, o di equilibrio, globali (relative a tutto il corpo $\mathcal{B}$) sono sufficienti a stabilire la dinamica, o la statica, del corpo rigido ma non del corpo continuo deformabile.

3.2.2 Forze e momenti delle forze

Le forze e i momenti applicati ad un generico volume V di un corpo continuo rappresentano l'azione che l'ambiente esterno al volume esercita sul volume stesso. Queste azioni si distinguono in *azioni a distanza*, che competono direttamente al volume, e in *azioni di contatto* trasmesse attraverso una qualunque porzione S della superficie di contorno del volume (fig. 3.6).

Si noti che se S è una qualunque superficie interna ad un corpo continuo occorre distinguere le sue due facce, attraverso le quali si esercitano

¹⁴*Moment of forces* nella letteratura inglese.

¹⁵*Equilibrium equations* nella letteratura inglese.

le azioni di una parte del corpo sull'altra. Per es. se S è parte del contorno ∂V di un volume interno V , è allora necessario distinguere tra l'azione che il resto del corpo esercita su tale volume attraverso la superficie S e l'azione che il volume V esercita sulla parte restante del corpo, sempre attraverso tale superficie. Allo scopo di distinguere le due facce di una stessa superficie interna S basta *orientare esternamente* la superficie, orientando la normale $\mathbf{n}$ tracciata per uno qualunque dei suoi punti (fig. 3.7a). Ad una superficie interna così orientata si associano per con-

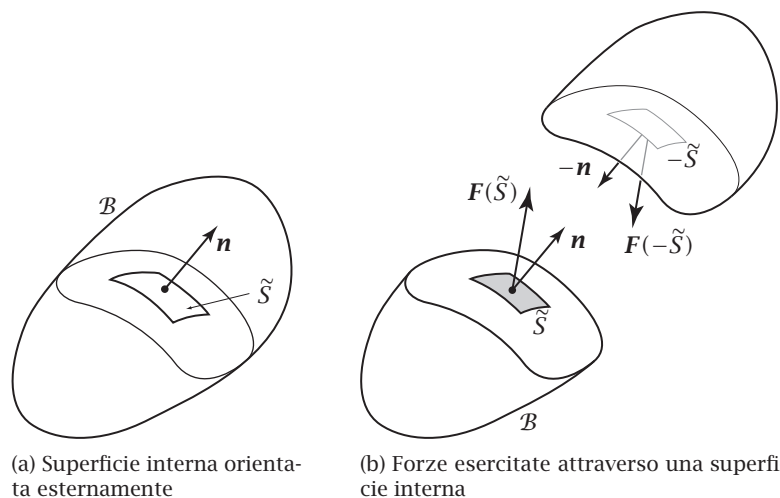


Figura 3.7: Superficie interna a un corpo continuo

venzione le forze che agiscono sulla parte del corpo di normale positiva uscente. Nel seguito indicheremo con $\tilde{S}$ la superficie interna S dotata di una delle due possibili orientazioni e con $-\tilde{S}$ la stessa superficie dotata dell'orientazione opposta.

Ciò precisato, occorre distinguere quindi tra *forze di volume*¹⁶ $\mathbf{F}(V)$ e *momenti di volume*¹⁷ $\mathbf{M}(V)$ che competono ad un generico volume V del corpo $\mathcal{B}$, eventualmente coincidente con il corpo stesso, e *forze di superficie*¹⁸ $\mathbf{F}(S)$ e $\mathbf{F}(\tilde{S})$ e *momenti di superficie*¹⁹ $\mathbf{M}(S)$ e $\mathbf{M}(\tilde{S})$, che

¹⁶Body force nella letteratura inglese.

¹⁷Moment of body forces nella letteratura inglese.

¹⁸Surface force oppure contact force nella letteratura inglese.

¹⁹Moment of surface forces nella letteratura inglese.

competono ad una generica superficie esterna S , appartenente quindi al contorno del corpo continuo, oppure ad una generica superficie interna orientata $\tilde{S}$, che può quindi essere parte del contorno di un volume interno al corpo. Se S è una qualunque superficie interna ne risultano quindi le forze $\mathbf{F}(\tilde{S})$ e $\mathbf{F}(-\tilde{S})$ vicendevolmente esercitate dalle due parti del corpo attraverso la superficie stessa (fig. 3.7b).

Relativamente ad un volume V di cui si sta scrivendo il bilancio, le forze di volume rappresentano delle azioni esterne, mentre le forze di superficie rappresentano delle azioni esterne od interne a seconda che competano alla superficie di contorno del corpo oppure, rispettivamente, ad una superficie interna che idealmente tagli il corpo a cui il volume appartiene. Si noti che se si volesse mettere in conto l'interazione a distanza delle diverse parti del corpo, dovuta, per esempio, alla loro mutua attrazione newtoniana, vi sarebbero delle forze di volume che rappresenterebbero delle azioni interne.

Un esempio di forza di volume è rappresentata dalla forza peso, forza dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre. Anche le forze elettromagnetiche, dovute alla presenza di cariche elettriche sia statiche che in moto, costituiscono esempi di forze di volume. La pressione di un fluido costituisce invece un esempio tipico di forza di superficie. Ma anche un corpo pesante appoggiato sulla superficie di contorno di un corpo trasmette una forza superficiale. Inoltre, le parti di un corpo interagiscono attraverso le superfici che le separano generando quindi delle forze superficiali.

Si ricordi che nel sistema SI di unità la forza, come indicato nella tabella 1.3 del §1.1.2 (p. 4), è misurata in newton (in sigla N), mentre il momento di una forza, di formula dimensionale FL, è invece misurato in N m.²⁰

3.2.3 Forze e momenti specifici

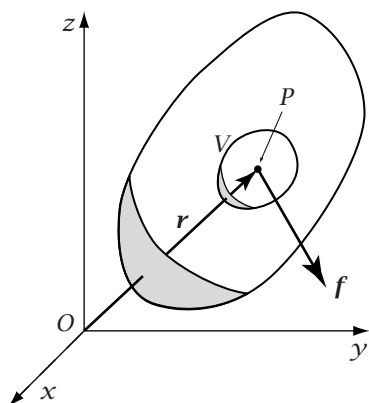
Al fine di generare variabili dinamiche legate al punto, costituenti quindi dei campi definiti in $\mathcal{B}$, si introducono le forze e i momenti specifici:

²⁰Si noti che le dimensioni di un momento coincidono con quelle dell'energia che, come indicato ancora nella tabella 1.3 del §1.1.2 (p. 4), è misurata in joule (in sigla J). Essendo l'energia e il momento di una forza grandezze fisiche diverse, il nome joule e la sigla J sono riservati alla grandezza energia e non vengono utilizzati per la grandezza momento di una forza.

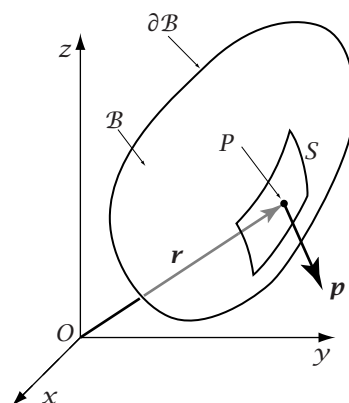
1. **Forza esterna per unità di volume.** La *forza f per unità di volume*²¹ associata ad un punto P (fig. 3.8a), resta definita come il limite della

$$F(V) = V\mathbf{f} + o(V)$$

$$F(S) = S\mathbf{p} + o(S) \\ S \subset \partial B$$



(a) Forza di volume



(b) Forza di superficie

Figura 3.8: Forze di volume e di superficie

forza rapportata alla misura del volume:

$$\mathbf{f}(P) = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\mathbf{F}(V)}{V}, \quad (3.18)$$

dove V rappresenta sia un generico volume nell'intorno del punto P che la sua misura. Una forza per unità di volume, di formula dimensionale FL^{-3} , è misurata per es. in N/mm^3 .

2. **Forza esterna per unità di superficie.** Se P è un punto della superficie di contorno ∂B del mezzo continuo e se S rappresenta una generica superficie, nell'intorno del punto P , contenuta in ∂B , la *forza esterna per unità di superficie*²² $\mathbf{p}$ associata al punto P (fig. 3.8b)

resta definita dal limite della forza rapporto l'area della superficie:

$$\mathbf{p}(P) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \partial B}} \frac{\mathbf{F}(S)}{S}. \quad (3.19)$$

Nel sistema SI di unità la forza per unità di superficie, come indicato nella tabella 1.3 del §1.1.2, ha dimensioni FL^{-2} ed è misurata per es. in MPa, o N/mm^2 .

3. **Tensione.** Sia $\tilde{S}$ una generica superficie contenuta nel mezzo continuo e contenente il punto P (fig. 3.9). Come già detto, la superficie

$$\mathbf{F}(\tilde{S}) = S\mathbf{t}(P, \tilde{S}) + o(S) \\ S \subset \tilde{S}$$

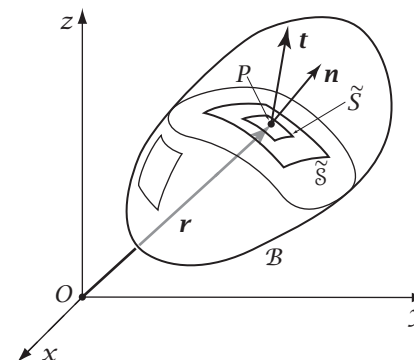


Figura 3.9: Tensione interna

$\tilde{S}$ separa il corpo mettendo in luce due facce attraverso le quali si esercitano le azioni di una parte sull'altra. Nella fig. 3.9 la superficie è orientata dal versore normale $\mathbf{n}$ in P uscente dalla parte del corpo sulla quale agisce la forza.

Ciò premesso, la *forza interna $\mathbf{t}$ per unità di superficie*, detta *vettore di tensione* o più semplicemente *tensione*,²³ associata al punto P ed alla superficie orientata $\tilde{S}$ risulta:

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S}) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \tilde{S}}} \frac{\mathbf{F}(\tilde{S})}{S}, \quad (3.20)$$

²¹ *Body force per unit volume* nella letteratura inglese.

²² *Traction* nella letteratura inglese. Alcuni autori usano il termine *traction* con il significato più generale di forza per unità di superficie, sia esterna che interna.

²³ *Stress vector* oppure *contact force density* nella letteratura inglese.

dove S rappresenta una generica superficie, nell'intorno del punto P , contenuta in $\mathcal{S}$. Naturalmente la tensione ha le dimensioni di una forza per unità di superficie e quindi si misura per es. in N/mm^2 .

4. **Momenti specifici.** Si suppone che i momenti specifici siano generati dalle forze specifiche.²⁴ Si assume dunque la validità dei seguenti limiti dei momenti rapporto la misura dell'elemento geometrico cui competono (figg. 3.8 e 3.9):

$$\lim_{V \rightarrow P} \frac{M(V)}{V} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (\text{momento per unità di volume}), \quad (3.21a)$$

$$\lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \partial \mathcal{B}}} \frac{M(S)}{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (\text{momento esterno per unità di superficie}), \quad (3.21b)$$

$$\lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \mathcal{S}}} \frac{M(\tilde{S})}{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{t}, \quad (\text{momento interno per unità di superficie}), \quad (3.21c)$$

dove l'operazione $\times$ indica il prodotto vettoriale di due vettori e $\mathbf{r}$ il vettore posizione del punto P rispetto al polo di riduzione dei momenti. Le formule dimensionali di un momento per unità di volume oppure per unità di superficie sono rispettivamente FL^{-2} e FL^{-1} e possono quindi misurarsi per es. in N/mm^2 e, rispettivamente, in N/mm .

Non sempre i limiti (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) esistono, come succede, per es., nel caso di una forza $\bar{\mathbf{F}}$ concentrata in un punto $\bar{P}$:

$$\mathbf{F}(V) = \begin{cases} \bar{\mathbf{F}} & \text{se } \bar{P} \in V \\ \mathbf{0} & \text{se } \bar{P} \notin V \end{cases}. \quad (3.22)$$

In tal caso il limite (3.18) vale $\mathbf{0}$ se $P \neq \bar{P}$ mentre il modulo del limite diventa infinito se $P = \bar{P}$, e dunque la funzione $\mathbf{f}$ non è definita in $\bar{P}$.²⁵

²⁴Si prescinde quindi dalla presenza di *momenti intrinseci*, ovverossia non generati dalle forze. Un solido in cui i momenti sono tutti generati dalle forze è detto *semplice*, mentre se si ammette la presenza di momenti intrinseci il solido viene detto di *Cosserat* o *polare*. In inglese si usa il termine generale *torque* per indicare sia momenti intrinseci che momenti dovuti a forze, mentre a volte si usa il termine *couple* per indicare un momento intrinseco.

²⁵La funzione $\mathbf{f}$ risulta invece definita nel senso esteso di *distribuzione*. Per chi fosse interessato al concetto di distribuzione si veda per es. Gilardi (1994, cap. III, pp. 89–

Come sempre quando si eseguono dei limiti di funzioni di dominio rapporto la misura di dominio (nel nostro caso funzioni di volume e di superficie) si recuperano le funzioni di dominio da quelle puntuali via integrazione nel dominio:

$$\mathbf{F}(V) = \int_V \mathbf{f} dV, \quad \mathbf{M}(V) = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV, \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{F}(S) = \int_S \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{M}(S) = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p} dS, \quad S \subset \partial \mathcal{B}, \quad (3.23b)$$

$$\mathbf{F}(\tilde{S}) = \int_S \mathbf{t} dS, \quad \mathbf{M}(\tilde{S}) = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS, \quad S \subset \mathcal{S}. \quad (3.23c)$$

3.2.4 Alcune proprietà delle tensioni interne

Nel seguito si suppone che le forze di volume $\mathbf{F}(V)$, così come la derivata della quantità di moto $\dot{\mathbf{P}}(V)$, associate ad un dato volume V siano infinitesime per $V \rightarrow 0$ dello stesso ordine del volume. In altri termini si suppone che i limiti: $\lim_{V \rightarrow 0} \mathbf{F}(V)/V$ e $\lim_{V \rightarrow 0} \dot{\mathbf{P}}(V)/V$ esistano e siano finiti, il che è per es. senz'altro vero per quel che riguarda la forza di volume se esiste la forza per unità di volume definita dalla (3.18).²⁶

Relativamente alle forze $\mathbf{F}(\tilde{S})$ e $\mathbf{F}(-\tilde{S})$ reciprocamente trasmesse attraverso una superficie S interna al corpo (fig. 3.7b) si dimostra il seguente:

Principio di azione e reazione.²⁷ *Le forze agenti sulle due facce di una stessa superficie interna sono l'una l'opposta dell'altra, oppure, in altri termini hanno uguale direzione e modulo, e verso opposto:*

$$\mathbf{F}(-\tilde{S}) = -\mathbf{F}(\tilde{S}). \quad (3.24)$$

Dimostrazione. Data una superficie S interna ad un corpo $\mathcal{B}$ e dato un versore $\mathbf{n}$ normale in un suo punto P , si consideri innanzitutto il cilindro di generatrice parallela alla normale $\mathbf{n}$ in P e di direttrice il contorno ∂S della superficie (fig. 3.10a). Si trasli poi di $\mathbf{r}$ la superficie S nella

154). Un'introduzione elementare a tale concetto è invece fornita in Tricomi (1970, § 2.10, pp. 115–125).

²⁶Tale assunzione non è per es. verificata, per quel che riguarda le forze di volume, in corrispondenza di punti soggetti a forze concentrate e analogamente, per quel che riguarda la derivata della quantità di moto, in corrispondenza di punti in cui le masse siano concentrate.

²⁷*Law of action and reaction* nella letteratura inglese.

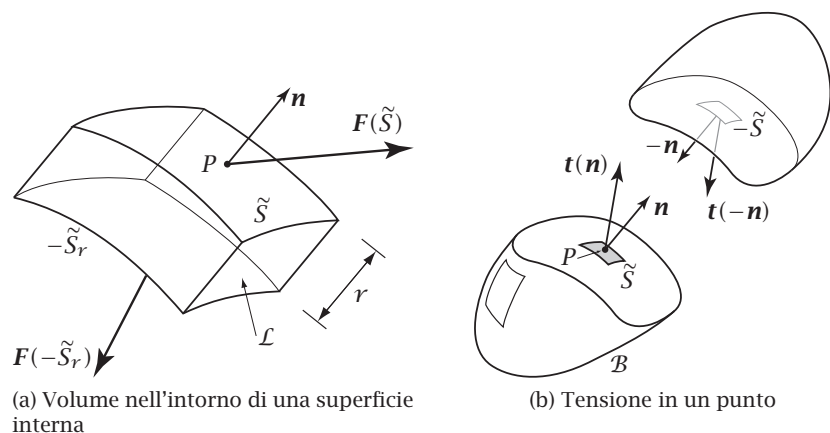


Figura 3.10: Principio di azione e reazione

direzione negativa di $\mathbf{n}$ e sia S_r la superficie così ottenuta. Si consideri infine la parte V del cilindro compresa fra S e S_r . Se $\tilde{S}$ e $-\tilde{S}_r$ indicano le superfici S e S_r orientate rispettivamente da $\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$, il bilancio relativo al volume V si scrive:

$$\mathbf{F}(\tilde{S}) + \mathbf{F}(-\tilde{S}_r) + \mathbf{F}(\mathcal{L}) + \mathbf{F}(V) = \dot{\mathbf{P}}(V), \quad (3.25)$$

dove $\mathbf{F}(\mathcal{L})$ è la forza esercitata su V attraverso la parte di contorno $\mathcal{L}$ appartenente alla superficie cilindrica.

Poiché $\mathbf{F}(\tilde{S})$ è indipendente da r , mentre $\mathbf{F}(-\tilde{S}_r) \rightarrow \mathbf{F}(-\tilde{S})$ per $r \rightarrow 0$, si ottiene immediatamente la tesi (3.24) ove si consideri che gli altri termini che compaiono nella (3.25) sono infinitesimi con V e quindi con r . ■

Se alla (3.24) si applica il limite (3.20) con la superficie S che tende al punto P variando sulla superficie fissa $\tilde{S}$, si ottiene il principio di azione e reazione scritto in termini di tensione:

$$\mathbf{t}(P, -\tilde{S}) = -\mathbf{t}(P, \tilde{S}). \quad (3.26)$$

Si ricordi ora che la tensione interna (3.20) dipende, oltre che dal punto, dalla superficie orientata $\tilde{S}$ su cui sono valutate le forze interne. Sulla dipendenza dalla superficie $\tilde{S}$ viene fatta la seguente fondamentale ipotesi:

Ipotesi di Cauchy. La tensione $\mathbf{t}(P, \tilde{S})$ dipende dalla superficie orientata $\tilde{S}$ tramite il versore normale $\mathbf{n}$ a $\tilde{S}$ in P , di verso concorde con l'orientazione della superficie, cioè si riduce ad una funzione del tipo $\mathbf{t}(P, \mathbf{n})$.

In altre parole, a due superfici orientate $\tilde{S}_1$ e $\tilde{S}_2$ per P , aventi lo stesso versore normale in P concorde con l'orientazione di entrambe le superfici, compete la stessa tensione in P . Naturalmente tale comune valore coincide con quello relativo alla tensione agente nel piano tangente in P alle due superfici. Per tale motivo quando si descrive la tensione nell'intorno di un punto si utilizza il termine *giacitura*, termine che è relativo ad un piano e corrisponde a *elemento di superficie*,²⁸ per indicare la superficie orientata su cui agisce la tensione.

Poiché alle due facce di una superficie interna al corpo corrispondono versori normali opposti, l'ipotesi di Cauchy permette di porre il principio di azione e reazione (3.26) nella forma:

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}), \quad (3.27)$$

avendo lasciata sottintesa la dipendenza di $\mathbf{t}$ dal punto.

Appendice (Dimostrazione dell'ipotesi di Cauchy). In realtà è possibile dimostrare l'ipotesi di Cauchy sulla base di ragionevoli assunzioni sulla tensione $\mathbf{t}$.²⁹ Nel seguito si dà un cenno di tale dimostrazione.

Dimostrazione. Sia infatti S una superficie qualunque per P di versore normale $\mathbf{n}$ in P . Si consideri innanzitutto un quadrato di lato b , intorno del punto P sul piano π tangente a S in P . Si consideri poi il cilindro di generatrice parallela al versore normale $\mathbf{n}$ e di direttrice il dato quadrato e infine il volume V che si ottiene sezionando tale cilindro con la superficie S e con un piano parallelo al piano π tracciato alla distanza b da P nella direzione negativa del versore normale $\mathbf{n}$.

Con riferimento alla fig. 3.11, se si indica con S l'intersezione di S con il cilindro a base quadrata ne risulta che $S \rightarrow P$ per $b \rightarrow 0$. Non solo, ma l'area della superficie S si differenzia dall'area del quadrato di lato b di un infinitesimo di ordine superiore a b^2 , per cui su tale superficie agisce una forza del tipo:

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S})b^2 + o(b^2), \quad (3.28)$$

²⁸Surface element nella letteratura inglese.

²⁹Per una dimostrazione rigorosa di tale teorema, citato in letteratura come *teorema di Hamel-Noll*, si veda per es. Truesdell (1991, pp. 172-174) oppure Wang e Truesdell (1973, pp. 122-125).

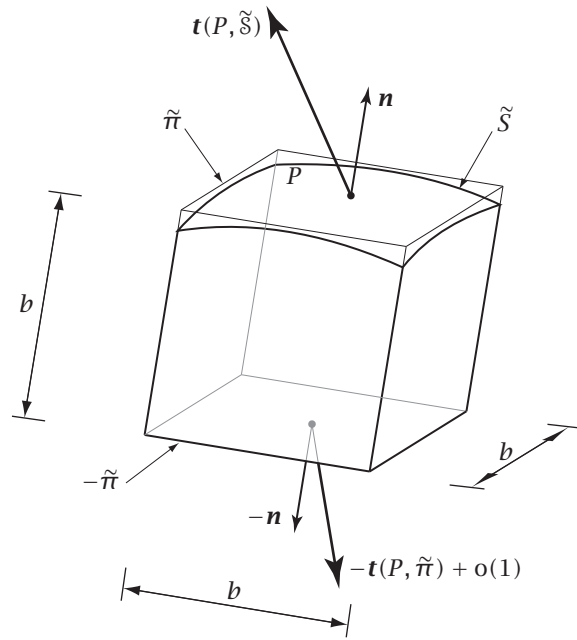


Figura 3.11: Dimostrazione dell'ipotesi di Cauchy

dove $\tilde{S}$ indica la superficie S orientata da $\mathbf{n}$. Invece sul quadrato parallelo a π e parte del contorno di V , per il principio di azione e reazione (3.26) agisce la forza:

$$-\mathbf{t}(P, \tilde{\pi})b^2 + o(b^2), \quad (3.29)$$

dove $\tilde{\pi}$ indica il piano π orientato da $\mathbf{n}$. Infine su ognuna delle due coppie di facce parallele che completano il contorno del volume V , le forze si fanno equilibrio, a meno di infinitesimi di ordine superiore a b^2 , sia per il principio di azione e reazione (3.26) che per il fatto che le aree di tali facce si differenziano dall'area del quadrato di lato b di un infinitesimo di ordine superiore a b^2 . Infine, le forze di volume e la derivata della quantità di moto sono infinitesimi dell'ordine del volume, cioè di b^3 .

Ciò premesso, il bilancio della quantità di moto del volume V si scrive:

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S})b^2 - \mathbf{t}(P, \tilde{\pi})b^2 + o(b^2) = 0, \quad (3.30)$$

da cui, dividendo per b^2 e mandando al limite per $b \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S}) = \mathbf{t}(P, \tilde{\pi}), \quad (3.31)$$

per ogni superficie S per P di normale $\mathbf{n}$ in P . Poiché $\tilde{\pi}$ dipende solo da $\mathbf{n}$ ne risulta dimostrata la tesi. ■

Componenti normale e tangenziale di tensione. Data una giacitura di normale $\mathbf{n}$ nell'intorno di un punto P la tensione $\mathbf{t}$ che agisce sulla giacitura può scomporsi nella direzione normale alla giacitura e in una direzione parallela alla giacitura (fig. 3.12a). La componente nella

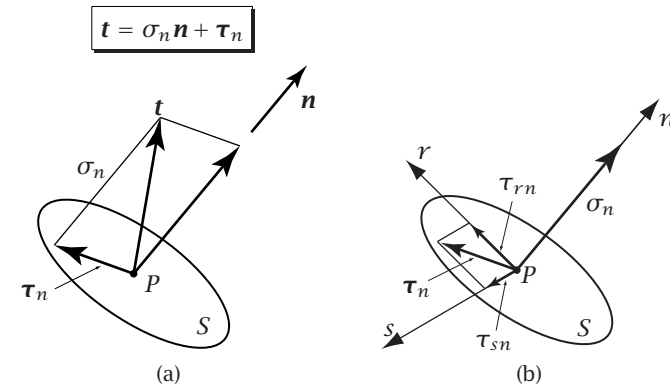


Figura 3.12: Componente normale e componente tangenziale

direzione normale viene detta *componente normale di tensione* oppure *tensione normale*,³⁰ mentre quella in una direzione parallela alla giacitura viene detta *componente tangenziale di tensione* o, meglio, *tensione tangenziale*.³¹ La componente scalare σ_n nella direzione normale e la componente tangenziale $\boldsymbol{\tau}_n$ valgono:

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t} - \sigma_n \mathbf{n}. \quad (3.32)$$

Scegliendo due assi ortogonali r e s sulla giacitura (fig. 3.12b) è poi possibile decomporre la tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}_n$ in due componenti scalari τ_{rn} e τ_{sn} .

Sforzo nell'intorno di un punto. Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si consideri nell'intorno di un punto P un

³⁰Normal stress nella letteratura inglese.

³¹Tangential stress oppure shear stress nella letteratura inglese.

cubo avente le facce parallele ai piani coordinati. Su ogni faccia del cubo agiscono tre componenti di tensione, una normale e due tangenziali (fig. 3.13). Le componenti di tensione relative alle facce di normali

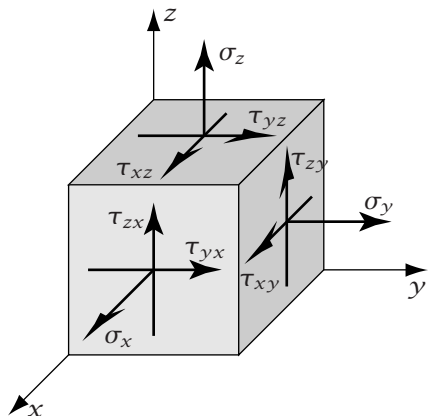


Figura 3.13: Stato di sforzo nell'intorno del punto

uscanti concordi con gli assi definiscono una matrice:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

detta *matrice degli sforzi*,³² che rappresenta lo stato tensionale nell'intorno del dato punto. Si noti che le componenti di tensione relative ad una faccia del cubo definiscono una colonna della matrice degli sforzi (3.33).

Riguardo alle tensioni tangenziali, si dimostra il seguente teorema:

Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali.³³ *Date, nell'intorno di un punto P, due giaciture ortogonali tra loro (fig. 3.14), le componenti tangenziali sulle due giaciture, nelle direzioni ortogonali allo spigolo comune, sono uguali in modulo ed orientate entrambe verso lo spigolo comune oppure orientate entrambe nella direzione opposta.*

³² *Stress matrix* nella letteratura inglese.

³³ *Theorem of conjugate shear stresses* nella letteratura inglese.

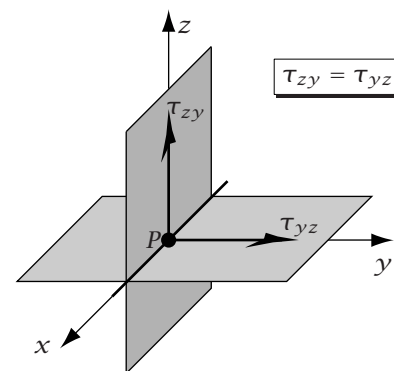


Figura 3.14: Reciprocità delle tensioni tangenziali

Dimostrazione. Detti y e z gli assi per P ortogonali alle due giaciture occorre allora dimostrare che (fig. 3.14):

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (3.34)$$

A tale scopo, detto x l'asse per P ortogonale agli assi y e z , si scriva l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse x di un cubo di lato b , con un vertice in P e con le facce parallele agli assi coordinati. Si tenga conto che la situazione tensionale nel cubo è del tipo di quella di fig. 3.13. Con riferimento alla fig. 3.15, si consideri ora che:

1. La componente f_x della forza di volume e le componenti di tensione σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} sono parallele a x e quindi non danno contributi;
2. Le componenti f_y e f_z della forza di volume e le componenti di tensione σ_y , σ_z , τ_{zx} e τ_{yx} danno un contributo del tipo $o(b^3)$. Per es., nel caso illustrato nella fig. 3.15 relativo alla σ_z , il contributo vale:

$$\int_A \left\{ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} b + o(b) \right\} y \, dA = \left\{ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right|_{\bar{P}} b + o(b) \left\} b^2 \bar{y},$$

avendo utilizzato il teorema della media,³⁴ con $\bar{P}$ interno alla faccia

³⁴ Il teorema della media afferma che l'integrale di una funzione continua in un dominio connesso si esprime come prodotto del valore $\bar{f}$ che la funzione assume in un punto particolare del dominio, detto *valore medio*, moltiplicato per la misura del dominio. Inoltre, se è data una successione di domini che si restringe in un punto P il valore medio su tali domini tende al valore $f(P)$. Si veda per es. Gilardi (1996, § 7, pp. 457-459)

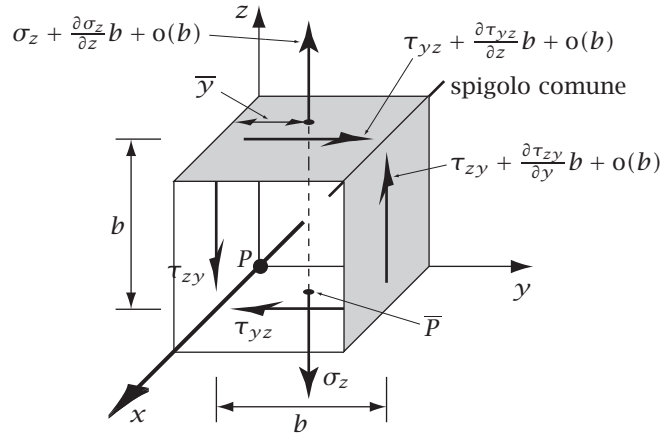


Figura 3.15: Dimostrazione della reciprocità delle tensioni tangenziali

A del cubo su cui viene eseguita l'integrazione. La coordinata $\bar{y}$ di $\bar{P}$ è dunque minore, e quindi dello stesso ordine o superiore, del lato del cubo b , e il contributo globale diventa del tipo $o(b^3)$;

3. Le componenti tangenziali τ_{zy} e τ_{yz} , ancora per il teorema della media, forniscono rispettivamente i contributi $(\bar{\tau}_{zy}b^2 + o(b^2))b$ e $-(\bar{\tau}_{yz}b^2 + o(b^2))b$, avendo indicato con $\bar{\tau}_{zy}$ e $\bar{\tau}_{yz}$ i valori che le tensioni tangenziali assumono in un punto interno alla faccia del cubo su cui agiscono.

L'equazione di equilibrio diviene quindi:

$$\bar{\tau}_{zy}b^3 - \bar{\tau}_{yz}b^3 + o(b^3) = 0. \quad (3.35)$$

Dividendo per b^3 ed eseguendo il limite per $b \rightarrow 0$, si ottiene la tesi (3.34), tenendo conto che al limite i valori $\bar{\tau}_{zy}$ e $\bar{\tau}_{yz}$ vanno calcolati nel punto P nell'intorno del quale si è costruito il cubo di lato b . ■

Capitolo 4

Comportamento dei materiali

Nel seguito si analizzerà il comportamento dei materiali dal punto di vista della *macromeccanica*¹ ovvero prescindendo dalla composizione fine della materia.²

Analizzando in dettaglio le proprietà macroscopiche dei diversi tipi di materiali utilizzati nelle costruzioni si ottiene un quadro molto complesso che sembrerebbe suggerire di trattare indipendentemente gli uni dagli altri i singoli materiali. Questo fatto è però vero solo fino ad un certo punto. Infatti è senz'altro inevitabile che diverse proprietà di una costruzione, per es. in cemento armato, dipendano essenzialmente dai materiali utilizzati nella sua costruzione, ma ciò non toglie che materiali anche molto diversi fra loro si comportano spesso in modo simile, come dimostrato dalla comparazione di prove meccaniche eseguite su diversi tipi di materiali. Le proprietà che sono comuni a più materiali sono alla base di *modelli ideali*³ di comportamento.

Naturalmente non ci si deve aspettare che un unico modello ideale di comportamento sia in grado di interpretare il comportamento di un materiale in ogni circostanza. Piuttosto, la validità di un particolare modello ideale dipenderà dal tipo di struttura e dal tipo e dall'entità delle azioni cui il materiale è sottoposto. Per es., se le forze applicate superano certi livelli il materiale può fratturarsi, per forze inferiori il materiale può semplicemente subire delle deformazioni permanenti, mentre se le forze sono sufficientemente piccole il materiale si deforma elasticamente. Non solo, ma anche il tipo di problema e la precisione desiderata o imposta (per es. dalla dispersione dei dati in ingresso) possono influire sul modello di comportamento da utilizzare.

¹*Macromechanics* nella letteratura inglese.

²La materia, a più livelli, si compone di parti discrete (grani, molecole, atomi), e questo fatto influisce sul suo comportamento macroscopico. È scopo della *micromeccanica* di indagare questa influenza.

³*Ideal models* nella letteratura inglese.

Per quel che riguarda le prove sui materiali, si utilizzano normalmente delle strutture semplici, dette *provini*,⁴ costruite con il materiale oggetto di indagine ed opportunamente sollecitate. In generale l'esito della prova dipende, oltre che dal materiale, anche dalla geometria del provino e dal modo in cui questo è sollecitato. Al fine del confronto dei risultati e della riproducibilità degli stessi, ne consegue la necessità di standardizzare le prove sia nella forma dei provini che nel modo di sollecitarli.

Fondamentali per la preparazione e l'interpretazione delle prove sui materiali sono i concetti di omogeneità e isotropia.

Materiali omogenei. Un materiale è detto omogeneo⁵ se le sue caratteristiche meccaniche non variano da punto a punto, ovvero se non variano nello spazio occupato dal materiale. Due provini estratti entrambi da un materiale omogeneo sono meccanicamente indistinguibili.⁶

Materiali isotropi. Un materiale è detto isotropo⁷ in un dato punto se le sue caratteristiche meccaniche non variano al variare della direzione uscente dal punto. È inoltre detto isotropo se è isotropo in tutti i punti. La rotazione di un provino di materiale omogeneo e isotropo non è meccanicamente rilevabile.

Per potere estrarre facilmente da una prova informazioni che riguardino il solo materiale di cui è composto il provino e non la sua geometria, occorre innanzitutto che durante la prova le singole parti del provino si trovino nello stesso stato. In altre parole occorre che lo stato del provino sia omogeneo, e a tal fine è necessario che il provino sia composto di materiale omogeneo. Se lo stato del provino è omogeneo, può essere

⁴*Specimen* nella letteratura inglese.

⁵*Homogeneous material* nella letteratura inglese.

⁶Il concetto di omogeneità è un concetto essenzialmente di macromeccanica, dato che al livello micromeccanico qualunque materiale risulta composto di parti più o meno piccole. Dal punto di vista della macromeccanica, il poter considerare omogeneo o meno un dato materiale dipende dalla scala dei problemi che si devono affrontare e dalla scala dei grani componenti. Per es., il calcestruzzo di cemento si compone di parti fini di diversa grandezza che rendono senz'altro il materiale non omogeneo alla scala dei grani componenti. D'altra parte, al livello di una struttura in calcestruzzo quello che conta è la distribuzione dei grani all'interno della stessa struttura, e se questa distribuzione è omogenea il materiale può essere considerato omogeneo.

⁷*isotropic material* nella letteratura inglese.

riprodotto indipendentemente dalla grandezza del provino e può quindi essere ascritto quale proprietà del solo materiale. In secondo luogo, occorre che i risultati delle prove siano espressi attraverso variabili indipendenti dalla geometria del provino, in modo da poter essere attribuiti ad ogni singola parte del provino.

Nel seguito saranno descritte innanzitutto due tipiche prove di routine: la prova di trazione monoassiale e la prova di torsione. Reso esplicito il modo di eseguire e di interpretare delle prove sui materiali, si passerà a descrivere alcuni modelli di comportamento ideale dei materiali, modelli che aiuteranno a meglio comprendere e classificare la molteplice fenomenologia dei risultati ottenuti da prove su materiali reali.⁸

4.1 Prova di trazione (o compressione) monoassiale

Descriviamo innanzitutto la *prova di trazione monoassiale*, o, più semplicemente *prova di trazione*.⁹

Si consideri un cilindro allungato composto di materiale omogeneo, fisso ad una estremità e assoggettato ad una forza F di trazione all'altra estremità diretta come l'asse del cilindro (fig. 4.1). La forza F viene

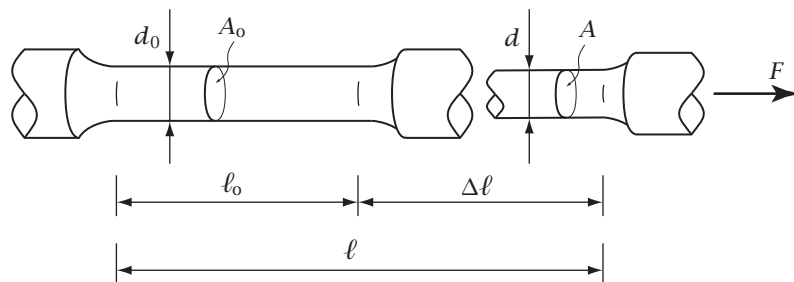


Figura 4.1: Prova di trazione monoassiale

⁸Per chi volesse approfondire gli argomenti relativi al comportamento meccanico dei materiali può consultare, tra gli altri, i seguenti testi: Nadai (1950), Courtney (1990) e Lemaitre e Chaboche (1990).

⁹Nella letteratura inglese indicata come *tension test* oppure *tensile test* od anche, più estesamente, *uniaxial tension test*.

incrementata ad una velocità sufficientemente bassa affinché il sistema subisca una *evoluzione quasi statica*,¹⁰ cioè in modo tale da non provocare accelerazioni sensibili nel sistema.¹¹ Si cerca inoltre di evitare che si sviluppino inflessioni laterali: se la sezione del cilindro presenta due assi di simmetria (per es. se la sezione è circolare oppure rettangolare) e se le proprietà del materiale non rompono tale simmetria¹² occorre a tale scopo che la retta d'azione della forza passi per l'intersezione dei due assi di simmetria.

Se tali condizioni sono soddisfatte il provino si presenta in uno stato di deformazione omogenea, almeno ad una certa distanza dalle due sezioni di estremità e fintanto che l'intensità della forza resta limitata. È necessario che il provino abbia una forma allungata proprio per garantire l'esistenza, durante la prova, di una parte centrale soggetta ad una deformazione omogenea. In tale parte centrale si può pertanto supporre che anche la tensione abbia una distribuzione omogenea e che sia del tipo illustrato in fig. 4.2a, ovvero sia che in una sezione ortogonale

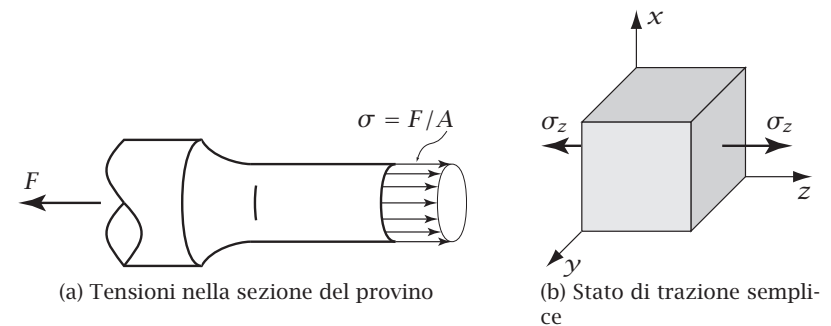


Figura 4.2: Tensioni nella prova di trazione

all'asse del cilindro agisca la sola tensione normale e che tale tensione normale sia costante sia sulla sezione che lungo l'asse del cilindro. La tensione normale sulla sezione avrà quindi il valore F/A , dove A indica la sezione del cilindro dopo l'applicazione della forza F (fig. 4.1).

¹⁰*Quasi-static evolution* nella letteratura inglese.

¹¹La prova è normalmente condotta a velocità di deformazione controllata, misurando contemporaneamente la forza che provoca tale deformazione, per es. misurando la pressione dell'olio se la macchina di prova è a controllo idraulico.

¹²Se il provino non è trasversalmente isotropo, occorre che le proprietà meccaniche siano invarianti lungo direzioni trasversali simmetriche.

È praticamente impossibile garantire durante una prova del genere che la forza F sia applicata ad una estremità in modo che soddisfi a tale distribuzione, e d'altronde è parimenti improbabile che la reazione all'estremità fissa abbia tale distribuzione. Ciò nonostante la distribuzione della forza si regolarizza all'interno del provino, ma perché ciò possa succedere occorre che il provino abbia una forma allungata. Questo garantisce alla prova di essere interpretabile come un'effettiva prova sul materiale.

Lo stato di tensione che si produce durante la prova nella zona centrale del provino è detto di *trazione semplice*.¹³ Tale stato di tensione può essere caratterizzato isolando, nell'intorno di un punto soggetto allo stato di trazione semplice, un cubetto avente una coppia di facce ortogonali alla direzione della trazione (direzione z nella fig. 4.2b): su queste due giaciture agisce la sola tensione normale ($\sigma = F/A$ nel caso descritto della prova di trazione monoassiale) mentre sulle altre facce del cubetto la tensione è nulla.

I risultati della prova di trazione monoassiale vengono riportati normalmente in un diagramma *tensione-dilatazione lineare*. La tensione viene normalmente espressa tramite la *tensione nominale*¹⁴ definita dal rapporto F/A_0 , tra la forza F applicata e l'area iniziale A_0 del provino. È evidente che la tensione nominale approssima la tensione $\sigma = F/A$ effettivamente agente nel provino, detta anche *tensione vera*,¹⁵ solo se la dilatazione quadratica di A_0 è piccola.¹⁶ Per quel che riguarda la dilatazione lineare, questa è definita dal rapporto $\Delta\ell/\ell_0$ tra l'allungamento $\Delta\ell$ del provino e la sua lunghezza iniziale ℓ_0 , in accordo con la definizione (3.6). La dilatazione così definita è anche detta *dilatazione nominale*¹⁷ in contrapposizione alla cosiddetta *dilatazione vera* o *logaritmica*,¹⁸ a volte utilizzata nell'ambito di stati di trazione semplice per esprimere l'associata dilatazione lineare (si veda l'appendice alla fine del paragrafo).

Oltre al diagramma *tensione-dilatazione lineare* è possibile tracciare anche il diagramma *dilatazione trasversale-dilatazione longitudina-*

le. La *dilatazione trasversale* o *dilatazione laterale*¹⁹ è riferita alle fibre trasversali, ortogonali all'asse del provino. Se il provino è cilindrico, come in fig. 4.1, e se d_0 e d rappresentano i diametri del provino rispettivamente deformato e indeformato la dilatazione trasversale ϵ_ℓ vale:²⁰

$$\epsilon_\ell = \frac{d - d_0}{d_0}. \quad (4.1)$$

Appendice (Dilatazione vera). Per definire la dilatazione vera si riferisce l'incremento di allungamento alla lunghezza del provino a partire dalla quale parte tale incremento. Sia dunque $d\bar{\epsilon}$ l'incremento di dilatazione vera in corrispondenza dell'incremento di allungamento $d\ell$ a partire da una lunghezza intermedia generica ℓ dell'asta (fig. 4.3):

$$d\bar{\epsilon} = \frac{d\ell}{\ell}. \quad (4.2)$$

La dilatazione vera $\bar{\epsilon}$ corrispondente ad un allungamento che porta l'asta dalla lunghezza ℓ_1 alla lunghezza ℓ_2 vale quindi, per definizione:

$$\bar{\epsilon} = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{d\ell}{\ell} = [\ln \ell]_{\ell_1}^{\ell_2} = \ln \ell_2 - \ln \ell_1 = \ln \frac{\ell_2}{\ell_1}. \quad (4.3)$$

La relazione (4.3) giustifica la denominazione di dilatazione logaritmica. La relazione tra la dilatazione vera e quella nominale si ottiene manipolando la (4.3):

$$\bar{\epsilon} = \ln \frac{\ell_2}{\ell_1} = \ln \frac{\ell_1 + \Delta\ell}{\ell_1} = \ln \left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_1} \right) = \ln (1 + \epsilon), \quad (4.4)$$

dove $\Delta\ell$ rappresenta l'allungamento $\ell_2 - \ell_1$ e la dilatazione nominale ϵ è valutata relativamente alla lunghezza iniziale ℓ_1 dell'asta. La relazione (4.4) mostra che finché le dilatazioni sono piccole la dilatazione vera e quella nominale coincidono, valendo l'espansione in serie di Taylor: $\ln(1 + \epsilon) = \epsilon + o(\epsilon)$.

La dilatazione vera, a differenza di quella nominale, gode della proprietà di essere sommabile (in senso incrementale). Si consideri infatti un'asta di lunghezza iniziale ℓ_0 che subisca un allungamento globale $\Delta\ell_{\text{tot}}$ (fig. 4.3). Spezziamo l'allungamento $\Delta\ell_{\text{tot}}$ in due fasi: una prima fase in cui l'asta si allunga di $\Delta\ell_1$ a partire dalla lunghezza iniziale ℓ_0 ed una seconda fase in cui l'asta si allunga di $\Delta\ell_2$ a partire dalla lunghezza $\ell = \ell_0 + \Delta\ell_1$ raggiunta nella prima fase. Naturalmente risulta $\Delta\ell_{\text{tot}} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$. Se rapportiamo gli allungamenti $\Delta\ell_1$ e $\Delta\ell_2$ alla lunghezza della asta precedente il singolo allungamento

¹⁹ *Lateral strain* nella letteratura inglese.

²⁰ Se il provino è trasversalmente isotropo la sezione resta circolare e le fibre trasversali si dilatano uniformemente, in caso contrario la dilatazione varia da fibra a fibra.

¹³ *Simple tension* nella letteratura inglese.

¹⁴ *Nominal stress* nella letteratura inglese.

¹⁵ *True stress* nella letteratura inglese.

¹⁶ È conveniente riportare la forza all'area indeformata nota piuttosto che all'area effettiva incognita, anche se tale rapporto non rappresenta direttamente lo sforzo trasmesso attraverso la sezione. In tal modo si semplifica anche il plottaggio dei risultati della prova.

¹⁷ *Nominal strain* nella letteratura inglese.

¹⁸ *True strain* oppure *logarithmic strain* nella letteratura inglese.

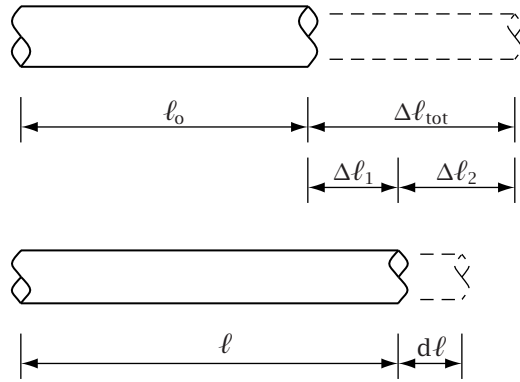


Figura 4.3: Dilatazione logaritmica

si ottengono le due dilatazioni:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\ell_0}, \quad \epsilon_2 = \frac{\Delta \ell_2}{\ell},$$

mentre l'allungamento globale rapportato alla lunghezza iniziale fornisce:

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{\Delta \ell_{\text{tot}}}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell_1}{\ell_0} + \frac{\Delta \ell_2}{\ell} \neq \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Naturalmente se le dilatazioni lineari ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_{tot} si calcolano rapportando tutti gli allungamenti alla lunghezza di una configurazione di riferimento comune (per es. quella iniziale di lunghezza ℓ_0), la sommabilità viene ripristinata.

Verifichiamo che vale invece la sommabilità della dilatazione vera, sempre con riferimento allo schema di fig. 4.3 in cui l'asta passa dalla lunghezza ℓ_0 alla lunghezza $\ell_0 + \Delta \ell_1$ e infine alla lunghezza $\ell_0 + \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = \ell_0 + \Delta \ell_{\text{tot}}$. Risulta:

$$\bar{\epsilon}_1 = \ln \frac{\ell_0 + \Delta \ell_1}{\ell_0}, \quad \bar{\epsilon}_2 = \ln \frac{\ell_0 + \Delta \ell_{\text{tot}}}{\ell_0 + \Delta \ell_1}, \quad \bar{\epsilon}_{\text{tot}} = \ln \frac{\ell_0 + \Delta \ell_{\text{tot}}}{\ell_0},$$

e poiché:

$$\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 = \ln \left(\frac{\ell_0 + \Delta \ell_1}{\ell_0} \frac{\ell_0 + \Delta \ell_{\text{tot}}}{\ell_0 + \Delta \ell_1} \right) = \ln \frac{\ell_0 + \Delta \ell_{\text{tot}}}{\ell_0} = \bar{\epsilon}_{\text{tot}},$$

la sommabilità è pienamente dimostrata. ■

4.2 Prova di torsione (o di taglio semplice)

Nella *prova di torsione*²¹ un cilindro allungato cavo²² di spessore sottile b e composto di materiale omogeneo viene fissato ad una estremità ed assoggettato all'altra estremità ad un momento torcente M_t ,²³ di asse momento coincidente con l'asse del cilindro come indicato nella fig. 4.4a. Nella fig. 4.4b è riportata invece la superficie media del

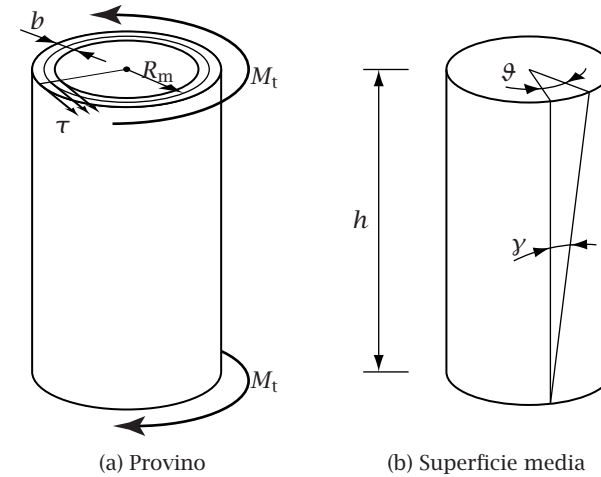


Figura 4.4: Prova di torsione

cilindro di raggio R_m e di altezza h .

In tale prova si vuole creare, nella zona centrale del provino, uno stato di sforzo omogeneo detto di *taglio semplice*.²⁴ Nell'intorno di un punto lo stato di sforzo è detto di taglio semplice se è possibile estrarre un cubetto con una faccia in cui agisca la sola tensione tangenziale in direzione ortogonale ad uno spigolo e con le altre facce in cui agiscono le sole tensioni tangenziali derivanti dalla reciprocità delle tensioni tangenziali. Come indicato nella fig. 4.5a quattro facce del cubetto sono

²¹ *Torsion test* nella letteratura inglese.

²² La prova di torsione può eseguirsi anche su provini cilindrici pieni, ma la sua interpretazione è più semplice nel caso della sezione cava sottile.

²³ Un momento torcente agisce nel piano della sezione retta ed ha quindi asse momento coincidente con quello del provino cilindrico.

²⁴ *Simple tension* nella letteratura inglese.

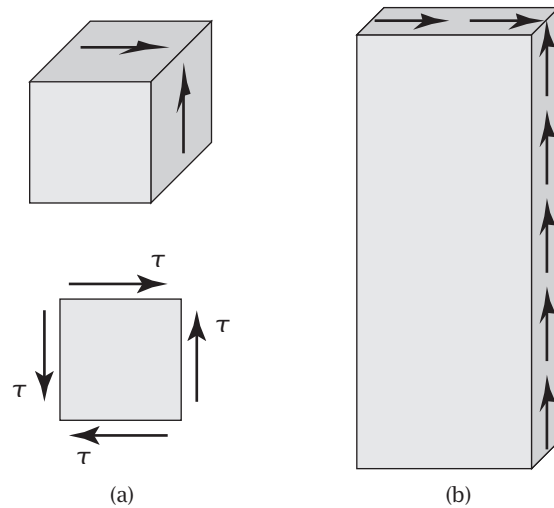


Figura 4.5: Stato di taglio semplice

soggette ad una tensione tangenziale mentre le altre due sono scariche.

Si noti che, a differenza del caso della prova di trazione, un provino di forma allungata a base rettangolare sottile non assicura l'omogeneità dello stato di tensione. Infatti al fine di generare uno stato omogeneo di taglio semplice è necessario, come indicato in fig. 4.5b, caricare anche la superficie laterale del provino, ma in tal modo si perde l'effetto di regolarizzazione che si ha quando sono caricate le sole basi del provino.

Per eliminare la necessità delle azioni esterne sulle facce laterali basta eliminare tali facce richiudendo il provino su se stesso a formare un cilindro cavo sottile nel quale le azioni tangenziali sulle basi equivalgono all'applicazione di un momento torcente M_t (fig. 4.4a). Nella parte centrale del provino le azioni si regolarizzano e quindi la tensione non varia muovendosi lungo la linea media della sezione circolare sottile. Si può inoltre ipotizzare, in virtù dello spessore sottile, che lungo una generica corda la tensione tangenziale sia approssimativamente costante ed abbia la direzione della linea media²⁵ (fig. 4.4a). Ne deriva uno stato

²⁵Per via della reciprocità delle tensioni tangenziali, sul contorno della sezione tali tensioni devono essere tangenti al contorno stesso, altrimenti ne deriverebbe una tensione tangenziale sul contorno laterale avente la direzione dell'asse del cilindro.

omogeneo di taglio semplice nella parte centrale del provino.

I risultati della prova di torsione vengono riportati in un diagramma *tensione-scorrimento*. La tensione tangenziale τ può essere messa in relazione col momento torcente, tenendo conto che lungo una generica corda, di spessore b , la risultante τb delle tensioni tangenziali genera il contributo $\tau b R_m$ al momento torcente, avendo indicato con R_m il raggio della linea media (fig. 4.4a). Integrando infine tale contributo lungo la linea media si ottiene il momento torcente complessivo M_t , per cui la tensione tangenziale risulta:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi b R_m^2}.$$

Come già per il caso della prova di trazione semplice, è evidente che tale tensione approssima la tensione effettivamente agente nel provino solo se la dilatazione quadratica della sezione retta è piccola, cosa senz'altro vera fino a che lo spessore b e il raggio R_m variano di poco.

Lo scorrimento γ riguarda invece una generica linea longitudinale della superficie media del cilindro ed una linea a questa ortogonale tangente alla linea media di una generica sezione retta, come illustrato in fig. 4.4b dove è riportata la superficie media del cilindro. Se ϑ rappresenta la rotazione torsionale relativa tra due sezioni rette e h rappresenta la loro distanza, ne risulta la relazione:

$$\gamma = \frac{R_m \vartheta}{h},$$

valida fino a che gli spostamenti sono piccoli.²⁶

4.3 Modelli ideali di comportamento

Le risposte dei diversi tipi di materiali alle azioni che li sollecitano possono essere fatte rientrare in tre tipi semplici fondamentali:

²⁶La linea longitudinale si trasforma, nella deformazione, in un'elica cilindrica. Se gli spostamenti sono piccoli la linea deformata è approssimata dalla sua retta tangente all'origine, l'angolo γ approssima $\tan \gamma$ e la relazione vale senz'altro. In generale, se gli spostamenti sono grandi, l'inclinazione delle tangenti all'elica cilindrica che rappresenta la linea deformata è costante e il rapporto a secondo membro della relazione continua a rappresentare $\tan \gamma$, che però non si può più approssimare con lo scorrimento γ .

1. **Elasticità.** Un materiale è detto *elastico*²⁷ se la deformazione provocata dall'applicazione di certe forze si annulla una volta che le forze siano state rimosse. Normalmente un materiale reagisce elasticamente fintanto che le azioni cui è soggetto provocano deformazioni limitate;
2. **Plasticità.** Un materiale è poi detto *plastico*²⁸ se tutta o parte della deformazione dovuta alle forze applicate non viene recuperata, una volta che tali forze siano state rimosse. Quando le deformazioni cui è soggetto un qualunque materiale diventano notevoli in generale il materiale non recupera più la forma che questo aveva prima dell'applicazione delle azioni e si sviluppano quindi delle deformazioni permanenti;
3. **Viscosità.** Un materiale è infine detto *viscoso*²⁹ se la sua risposta alle sollecitazioni varia col tempo. Un materiale viscoso modifica quindi la sua risposta, nel corso del tempo, senza che si modifichino le azioni che lo sollecitano. Tutti i materiali presentano, su "lunghi" intervalli di tempo, un comportamento viscoso più o meno pronunciato. Di tale comportamento va tenuto conto se i carichi agenti sono permanenti, come il peso proprio, oppure se vengono applicati per lunghi intervalli di tempo.

Nel seguito verranno delineati dei modelli di comportamento ideale. Con riferimento alle prove di trazione monoassiale e di torsione descritte nei due paragrafi precedenti, saranno tracciati dei diagrammi di risposta corrispondenti a tali modelli ideali. Le tensioni e le dilatazioni saranno, come è consuetudine, quelle nominali.³⁰ Naturalmente si continua a supporre che la risposta del materiale consegua ad azioni o a deformazioni fatte variare "lentamente", ovvero sia in modo quasi statico.

²⁷Nella letteratura inglese si usano i termini *elastic material* per materiale elastico e *elasticity* per elasticità.

²⁸Nella letteratura inglese si usano i termini *plastic material* per materiale plastico e *plasticity* per plasticità.

²⁹Viscosity nella letteratura inglese.

³⁰Come già detto, fino a che le deformazioni sono piccole la tensione e la dilatazione nominali si confondono con quelle vere.

4.3.1 Elasticità lineare

Se il comportamento del materiale è elastico, si ottiene una curva che passa dall'origine degli assi (provino scarico) e che viene percorsa in un senso se la forza viene incrementata (*fase di carico*) mentre viene percorsa nel verso opposto se la forza viene diminuita (*fase di scarico*).

Se la deformazione è proporzionale all'intensità delle forze applicate si parla di *elasticità lineare*.³¹ La proporzionalità tra tensione e deformazione è nota come *legge di Hooke*.³² Molti materiali che presentano un comportamento elastico hanno in realtà un comportamento elastico lineare, in accordo quindi con la legge di Hooke. Nella fig. 4.6 sono ri-

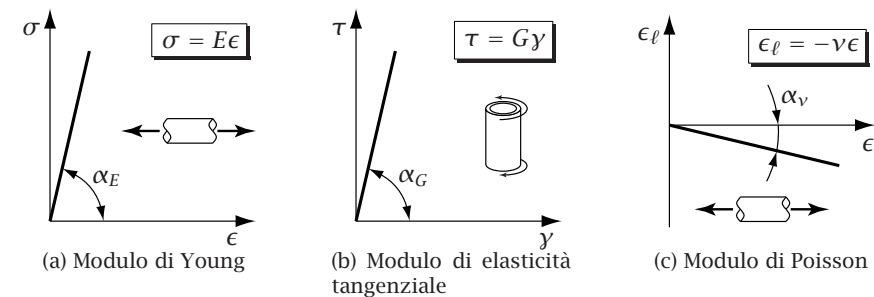


Figura 4.6: Elasticità lineare

portati i diagrammi lineari corrispondenti alle prove di trazione e di torsione. Le costanti di proporzionalità tra le variabili in gioco definiscono i cosiddetti *moduli tecnici di elasticità*:

1. Dal diagramma lineare σ - ϵ (tensione normale-dilatazione lineare) di fig. 4.6a risulta definito il *modulo di Young* o *modulo di elasticità normale*:³³

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \alpha_E, \quad [E] = \text{FL}^{-2}, \quad (4.5)$$

dove α_E rappresenta l'angolo che la linea di carico forma con l'asse ϵ . Dimensionalmente il modulo di Young risulta una tensione per unità di dilatazione lineare. Poiché una tensione è una forza per unità di superficie e una dilatazione lineare è un allungamento per

³¹*Linear elasticity* nella letteratura inglese.

³²*Hooke's law* nella letteratura inglese.

³³*Young's modulus* nella letteratura inglese.

unità di lunghezza, cioè un numero puro, il modulo di Young ha le stesse dimensioni di una tensione, come indicato nella (4.5);³⁴

2. Dal diagramma lineare τ - γ (tensione tangenziale-scorrimento) di fig. 4.6b risulta definito il *modulo di elasticità tangenziale* o *modulo di Coulomb*:³⁵

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \tan \alpha_G, \quad [G] = \text{FL}^{-2}, \quad (4.6)$$

dove α_G rappresenta l'angolo che la linea di carico forma con l'asse γ . Il modulo di elasticità tangenziale è una tensione per unità di scorrimento e quindi, dato che lo scorrimento è adimensionale come la dilatazione lineare, ha le stesse dimensioni del modulo di Young, come indicato nella (4.6);

3. Infine, dal diagramma lineare ϵ_ℓ - ϵ (dilatazione laterale-dilatazione longitudinale) di fig. 4.6c risulta definito il *coefficiente di Poisson* o *coefficiente di contrazione trasversale*:³⁶

$$\nu = -\frac{\epsilon_\ell}{\epsilon} = -\tan \alpha_\nu, \quad [\nu] = \text{L}^2\text{L}^{-2} = 1, \quad (4.7)$$

dove α_ν rappresenta l'angolo che la linea di carico forma con l'asse ϵ . Il segno meno presente nella definizione (4.7) è giustificato dal desiderio che il coefficiente di Poisson sia positivo nel caso che il provino teso subisca una contrazione laterale, come in figura. Infatti in tal caso la dilatazione longitudinale è positiva mentre la dilatazione trasversale è negativa. Il coefficiente di Poisson è una dilatazione lineare per unità di dilatazione lineare e quindi adimensionale, come indicato nella (4.7).

Nella tabella 4.1³⁷ sono riportati i valori dei moduli di elasticità relativi a vari tipi di materiali, ordinati in ordine di modulo di Young decrescente. La tabella vuole essere puramente indicativa di quelli che sono gli ordini di grandezza dei moduli di elasticità e quindi non tiene conto della loro più o meno grande variabilità nell'ambito di uno

³⁴Naturalmente il modulo di Young e la tensione sono variabili di genere diverso, anche se nel sistema internazionale di unità hanno le stesse dimensioni.

³⁵*Shear modulus* o *rigidity* nella letteratura inglese.

³⁶*Poisson's ratio* nella letteratura inglese.

³⁷Cfr., per es., Love (1944, p. 105), Lemaitre e Chaboche (1990, pp. 131-132), Gordon (1979, p. 43), Bell (1973, pp. 291-292, 306) e infine Colombo (1975, pp. 521-538)

Materiale	E/MPa	G/MPa	ν
Acciaio	210 000	80 000	0.31
Ferro	200 000	77 000	0.28
Rame	120 000	45 000	0.36
Ottone	100 000	37 000	0.34
Alluminio	71 000	26 000	0.34
Vetro	60 000	24 000	0.25
Calcestruzzo	30 000	13 000	0.17
Piombo	16 000	6 000	0.44
Legno*	12 000	950	0.43
Plexiglas	3 000	1000	0.40

*Nella direzione delle fibre

Tabella 4.1: Moduli di elasticità

stesso materiale. Per es., i moduli di elasticità del legno³⁸ hanno una grande variabilità a seconda dell'essenza legnosa considerata, quelli del calcestruzzo³⁹ dipendono dalla granulometria, dalla natura degli inerti, dal rapporto acqua-cemento e naturalmente dalla qualità del cemento, mentre la variabilità dei moduli di elasticità dell'acciaio è molto limitata.

4.3.2 Elasticità non lineare

Nel caso più generale possibile l'elasticità è non lineare ed è quindi rappresentata da una curva a pendenza variabile. La fig. 4.7a fa riferimento a un diagramma tensione-dilatazione costituito da un primo tratto elastico lineare e da un successivo tratto elastico non lineare. Il

³⁸Il legno è un materiale fortemente non isotropo e i risultati delle prove dipendono dall'orientamento delle fibre. I valori riportati sono propri dell'*abete di Douglas*, con le fibre del legno orientate nella direzione della trazione.

³⁹Il calcestruzzo è un materiale fortemente non lineare e occorre quindi distinguere tra i moduli tangenti e quelli secanti (cfr. §4.3.2). Inoltre il calcestruzzo è un materiale viscoso (cfr. §4.3.5) e quindi la sua deformazione, a carico costante, aumenta nel tempo originando un'apparente diminuzione del modulo di Young. Il valore riportato in tabella è indicativo di un modulo istantaneo tangente all'origine del diagramma tensione-dilatazione.

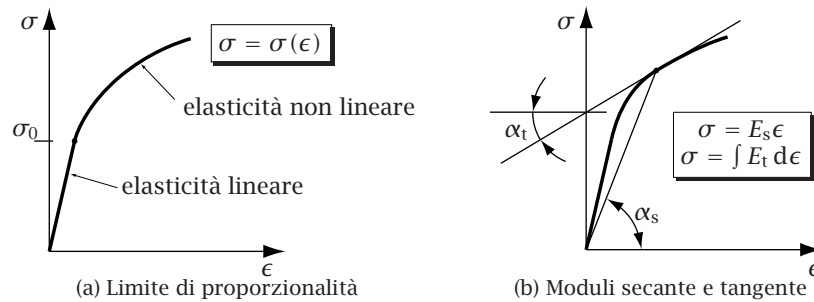


Figura 4.7: Elasticità non lineare

valore di tensione σ_0 , che separa il tratto lineare da quello non lineare, è detto *limite di proporzionalità*.⁴⁰

Per il tratto non lineare, a pendenza variabile, si possono introdurre i concetti di *modulo secante* E_s e di *modulo tangente*⁴¹ E_t , entrambi variabili da punto a punto:

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \alpha_s, \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \tan \alpha_t. \quad (4.8)$$

Come indicato in fig. 4.7b, con riferimento ad un generico punto sulla curva, il modulo secante rappresenta l'inclinazione della congiungente del punto sulla curva con l'origine degli assi, mentre il modulo tangente rappresenta l'inclinazione della retta tangente alla curva.

4.3.3 Dominio di elasticità.

Alcuni materiali “reali” presentano un comportamento istantaneo, cioè in intervalli ristretti di tempo, di tipo elastico e spesso anche di tipo elastico lineare se lo stato di sforzo a cui è assoggettato è inferiore ad una certa soglia. Si è portati allora ad introdurre il concetto di *dominio elastico*,⁴² definito come l'insieme degli stati tensionali ai quali corrisponde un comportamento elastico da parte del materiale. Naturalmente, al di fuori del dominio elastico il materiale presenta lo sviluppo

⁴⁰ *Proportional limit* nella letteratura inglese.

⁴¹ Nella letteratura inglese si indica con *secant modulus* il modulo secante e con *tangent modulus* il modulo tangente.

⁴² *Elastic domain* nella letteratura inglese.

di deformazioni permanenti. La superficie di contorno del dominio di elasticità, nello spazio delle tensioni, prende il nome di *superficie di snervamento*.⁴³ I criteri che permettono di stabilire se uno stato tensionale è sulla frontiera del dominio di elasticità vengono detti *criteri di snervamento*.⁴⁴

Se l'elasticità del materiale è di tipo lineare si parla anche di *dominio di linearità*. Inoltre il materiale potrebbe avere un dominio di elasticità con un dominio interno di linearità. In tal caso gli stati tensionali che giacciono tra i due domini rappresentano stati di elasticità non lineare.

4.3.4 Elastoplasticità

Si dice che un materiale ha un comportamento *elastoplastico*⁴⁵ se solo una parte della deformazione dovuta alle forze applicate non è recuperata, una volta che tali forze siano state rimosse.

Nella fig. 4.8a è riportato un possibile comportamento elastoplastico,

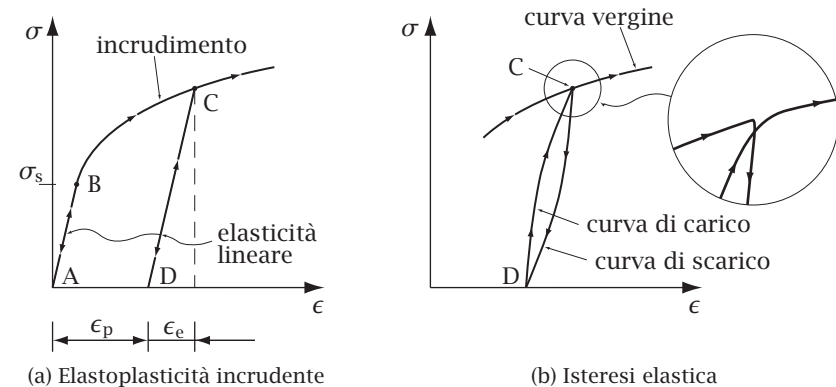


Figura 4.8: Elastoplasticità

consistente con l'esistenza di un dominio di elasticità. Il tratto AB rappresenta una curva di carico elastica lineare, simboleggiata dalla doppia freccia ad indicare che la linea è percorsa nei due sensi, a seconda che

⁴³ *Yield surface* nella letteratura inglese.

⁴⁴ Criterio di snervamento si rende con *yield criterion* oppure *yield condition* nella letteratura inglese.

⁴⁵ Nella letteratura inglese si usa il termine *elastoplasticity* per elastoplasticità.

la forza venga aumentata oppure diminuita. Raggiunta la tensione σ_s , detta *tensione di snervamento*,⁴⁶ iniziano a svilupparsi le deformazioni permanenti. Scaricando il provino oltre il limite di snervamento non si segue più, a ritroso, la curva di carico del provino vergine, simboleggiata per tale motivo con le frecce nella sola direzione di carico. Nell'esempio di figura è indicata una possibile curva di scarico a partire dal punto C della curva di carico del provino vergine. Per questa linea (linea CD in figura) si sono indicate la quota di deformazione permanente ϵ_p (deformazione plastica) e la quota di deformazione recuperata ϵ_e (deformazione elastica) a scarico avvenuto. In accordo con numerose risultanze sperimentali, la linea di scarico CD è tracciata parallelamente alla linea di carico iniziale AB. Se dopo lo scarico si ricomincia a caricare il provino si segue, a ritroso, la stessa linea per poi riprendere, a partire dal punto C, il percorso lungo la curva di carico del provino vergine: la linea CD rappresenta dunque una linea di scarico e carico elastica lineare e per questo è stata indicata con la doppia freccia. Se la curva di carico del provino vergine oltre il limite di snervamento è crescente, come nella fig. 4.8a, snervando il materiale si provoca un innalzamento del limite di snervamento, fenomeno che ha il nome di *incrudimento*.⁴⁷

Si dice poi che un materiale elastoplastico presenta una *isteresi elastica*⁴⁸ se la successione scarico-carico, a partire da un punto della curva di carico iniziale situato oltre il limite di snervamento, avviene lungo un ciclo chiuso, ciclo che si ripete all'iterare dello scarico-carico. Nella fig. 4.8b è illustrato il ciclo corrispondente allo scarico-carico lungo la linea CD della fig. 4.8a. Nel riquadro della stessa figura è anche illustrato come il ciclo normalmente si raccorda alla curva di carico vergine del provino. Normalmente un ciclo di isteresi più o meno schiacciato è sempre presente in un ciclo scarico-carico di tale tipo. Ciò non toglie che spesso tale ciclo è trascurabile e può essere sostituito dalla corrispondente linea di fig. 4.8a.

La curva di carico del provino vergine dopo il limite di snervamento, oltre che crescente (*incrudimento*), può anche essere costante (*plasticità*

perfetta)⁴⁹ oppure decrescente (*incrudimento negativo*).⁵⁰

Il modello più semplice possibile per un materiale elastoplastico è rappresentato da un diagramma composto da una bilatera: una linea passante dall'origine degli assi a rappresentare un comportamento iniziale elastico lineare ed una linea raccordata alla precedente in corrispondenza della tensione di snervamento a rappresentare un successivo comportamento plastico pure lineare. Nella fig. 4.9 sono illustrati i

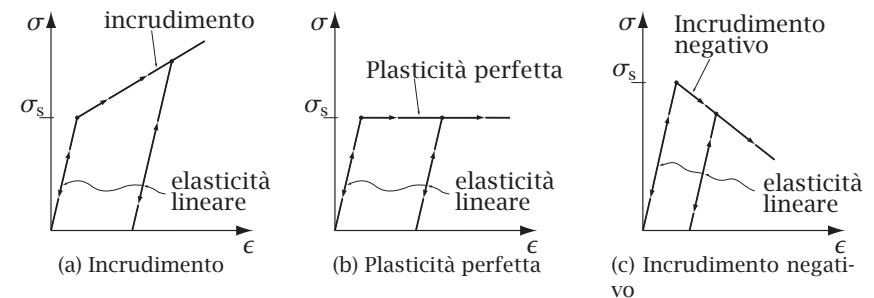


Figura 4.9: Elastoplasticità bilatera

tre possibili casi a seconda che la fase plastica lineare sia incrudente, perfettamente plastica oppure ad incrudimento negativo.

4.3.5 Viscoelasticità⁵¹

Il fenomeno della viscosità avvicina il comportamento dei fluidi a quello dei solidi. Senza entrare troppo nei dettagli un *fluido viscoso*⁵² è caratterizzato da un incremento costante della deformazione sotto carico costante, quindi da un aumento illimitato della deformazione, oltre alla tendenza a non recuperare la deformazione una volta che i carichi siano stati rimossi. Ne consegue la tendenza a non avere una forma propria che è caratteristica dei fluidi. Nella fig. 4.10a è riportato il dia-

⁴⁶La tensione di snervamento rappresenta uno stato tensionale di trazione semplice che giace sulla superficie di snervamento. Nella letteratura inglese si utilizza il termine *yield stress* per tensione di snervamento.

⁴⁷*Hardening* nella letteratura inglese.

⁴⁸*Elastic hysteresis* nella letteratura inglese.

⁴⁹Il tratto a carico costante non rappresenta un comportamento del materiale dipendente dal tempo poiché è possibile bloccare il flusso della deformazione, ovvero sia l'incremento della deformazione a tensione costante, diminuendo la tensione applicata di una quantità comunque piccola.

⁵⁰Nella letteratura inglese si usano i termini *perfect plasticity* per plasticità perfetta e *softening* per incrudimento negativo.

⁵¹*Viscoelasticity* nella letteratura inglese.

⁵²*Viscous fluid* nella letteratura inglese.

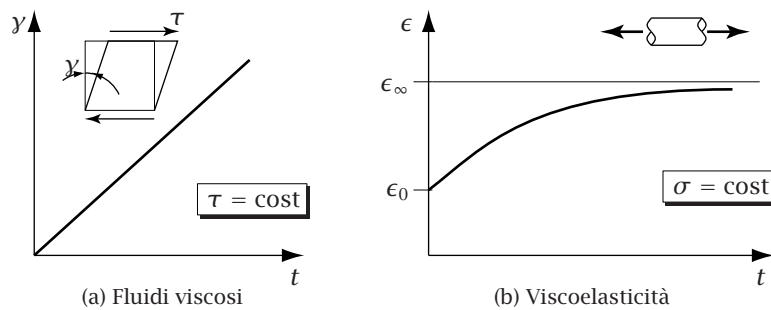


Figura 4.10: Viscosità

gramma dello scorrimento in un fluido in funzione del tempo quando venga applicato uno sforzo di taglio mantenuto costante nel tempo.

All'opposto, un *solido viscoelastico* si comporta come un corpo elastico sotto l'azione di forze istantanee, cioè applicate e rimosse in “piccoli” intervalli di tempo, mentre sotto carichi costanti la deformazione aumenta nel corso del tempo,⁵³ ma con un incremento decrescente e restando limitata. Inoltre il solido tende a recuperare tutta la deformazione una volta che i carichi siano stati rimossi. Il diagramma riportato in fig. 4.10b illustra, per un materiale viscoelastico, l'andamento della dilatazione lineare a tensione costante. Con riferimento ad una prova di trazione semplice, in un breve intervallo di tempo viene applicata la tensione σ provocando la dilatazione elastica istantanea ϵ_0 . Mantenendo poi costante la tensione, la dilatazione continua a svilupparsi nel corso del tempo, raggiungendo a tempo infinito il valore asintotico ϵ_∞ . La differenza $\epsilon_\infty - \epsilon_0$ tra i valori di dilatazione asintotica e istantanea rappresenta l'*elasticità ritardata*,⁵⁴ cioè la quota di dilatazione che si sviluppa gradualmente e che gradualmente viene recuperata una volta che la tensione applicata sia stata azzerata (fig. 4.11).

Tra il comportamento di un fluido viscoso e quello di un solido viscoelastico esistono tutta una serie di situazioni intermedie che avvicinano il comportamento di un solido a quello di un fluido e viceversa. La viscosità si configura quindi come un ponte gettato tra i fluidi e i solidi.

Legato al comportamento viscoelastico di un solido è il fenomeno del

⁵³Nella letteratura inglese l'aumento di deformazione sotto carico costante è nota con il termine di *Creep*.

⁵⁴*Delayed elasticity* nella letteratura inglese.

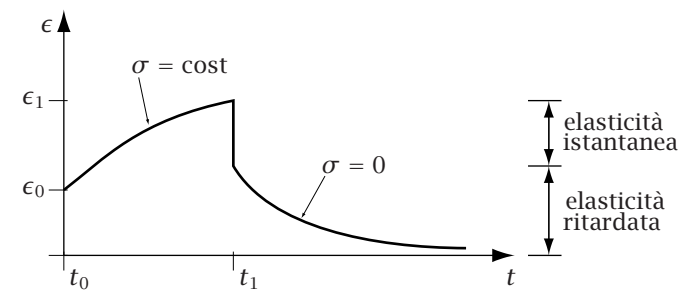


Figura 4.11: Elasticità ritardata

rilassamento,⁵⁵ cioè il fenomeno della diminuzione del carico necessario a mantenere, nel corso del tempo, la stessa deformazione.⁵⁶

Il diagramma di fig. 4.12 rappresenta l'andamento nel corso del tem-

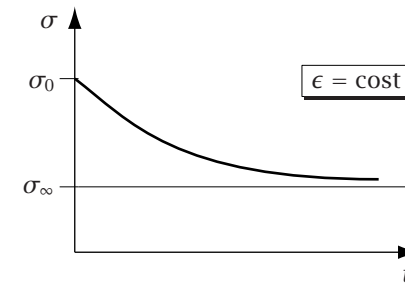


Figura 4.12: Rilassamento

po della tensione σ quando la stessa venga portata al livello iniziale σ_0 , ed indi la conseguente dilatazione ϵ venga tenuta costante. A tempo infinito la tensione che mantiene la stessa dilatazione scende al valore asintotico σ_∞ . Molto importante nella tecnica è il problema del rilassamento dei cavi di acciaio pretesi nelle strutture in cemento armato precompresso. In tale tipo di strutture, dei cavi di acciaio vengono tesi al fine di comprimere il calcestruzzo e di renderlo quindi adatto ad assorbire, via decompressione, le sollecitazioni di trazione che altrimenti

⁵⁵*Relaxation* nella letteratura inglese.

⁵⁶Nel caso di un fluido viscoso occorre azzerare il carico pressoché istantaneamente se si vuole che la deformazione resti costante.

il calcestruzzo stesso non sarebbe in grado di sopportare. La trazione iniziale dei cavi di acciaio provoca una dilatazione degli stessi cavi che viene conservata praticamente invariata nel corso del tempo dal contrasto del calcestruzzo. Il rilassamento dei cavi di acciaio fa sì che dopo qualche tempo si possa contare solo sulla tensione di trazione a tempo infinito σ_∞ al fine della benefica compressione del calcestruzzo.

4.4 Prove sui materiali

A titolo di esempio e per fornire un'idea dei valori numerici delle grandezze in gioco si riportano nel seguito alcuni diagrammi realistici di prove su materiali.

4.4.1 Materiali metallici

I materiali metallici si comportano normalmente in modo simile a trazione e a compressione. Poiché le prove di compressione sono più complesse, e quindi più costose, da realizzare non stupisce che la prova di routine tipica per un materiale metallico sia la prova di trazione.

Nella fig. 4.13 è riportato un possibile diagramma *tensione nominale-*

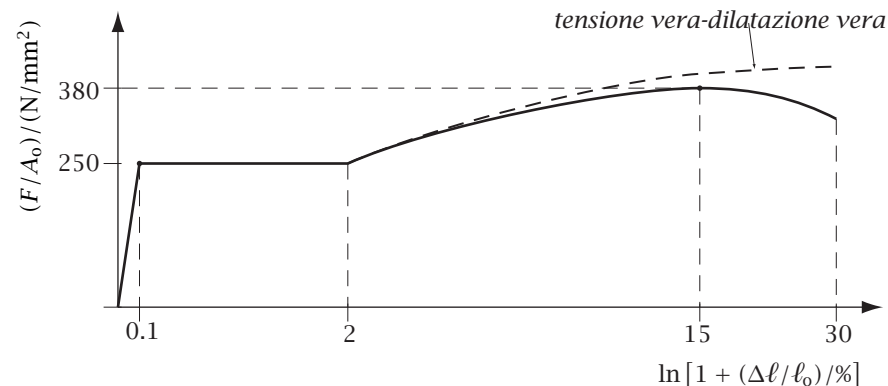


Figura 4.13: Tipico diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale* di un acciaio tipo Fe360 per struttura metallica

dilatazione nominale, quale risultato di una prova di trazione monoassiale a deformazione controllata eseguita su acciaio strutturale lamina-

to a caldo tipo Fe360.⁵⁷ Si noti che le dilatazioni nominali sono state riportate in ascissa in scala logaritmica. Il diagramma è caratterizzato, nella parte iniziale, da un primo tratto elastico lineare, dalla tensione di snervamento $\sigma_s = 250 \text{ N/mm}^2$ e da un successivo tratto perfettamente plastico. In realtà, come illustrato più dettagliatamente in fig. 4.14a, lo

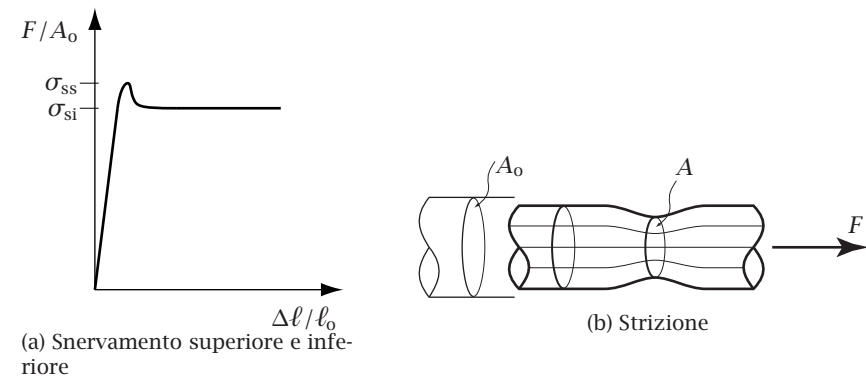


Figura 4.14: Prova di trazione semplice (provini metallici)

snervamento avviene ad un valore σ_{ss} , detto *snervamento superiore*,⁵⁸ più elevato di quello indicato in fig. 4.13. Di seguito al raggiungimento dello snervamento superiore la tensione diminuisce rapidamente e, dopo una serie di oscillazioni dovute alla rapidità del fenomeno, si stabilizza ad un livello σ_{si} detto *snervamento inferiore*.⁵⁹ Lo snervamento superiore, a differenza di quello inferiore, dipende strettamente dalla forma del provino e da come la prova è eseguita. Risulta quindi giustificato assumere lo snervamento inferiore quale livello di snervamento del materiale oggetto di indagine. Sempre con riferimento alla fig. 4.13,

⁵⁷La classificazione degli acciai per strutture metalliche laminati a caldo, con le loro condizioni generali di fornitura, è stabilita dalle norme europee EN 10025, riviste nel 2004 e recepite dall'UNI nel 2005 nel testo originale inglese. Tra queste, la UNI EN 10025-1 (2005) definisce le condizioni generali di fornitura.

La norma UNI EN 1993-1-1 (2005), prima parte dell'eurocodice 3 che fornisce i criteri generali di progettazione di edifici e opere di ingegneria civile di acciaio, passata nel 2005 dalla forma sperimentale a quella definitiva e recepita nello stesso anno dall'UNI nel testo originale inglese, si riferisce esplicitamente alle EN 10025 per quel che riguarda le proprietà degli acciai laminati a caldo.

⁵⁸Upper yield stress nella letteratura inglese.

⁵⁹Lower yield stress nella letteratura inglese.

al tratto perfettamente plastico segue poi un tratto ad incrudimento positivo seguito a sua volta da un tratto ad incrudimento negativo. La tensione massima σ_r , raggiunta al passaggio tra l'incrudimento positivo e quello negativo, che nel diagramma di figura vale 380 N/mm^2 , è nota come *tensione di rottura*.⁶⁰ Dopo il raggiungimento della tensione di rottura, nel provino si sviluppa un fenomeno di localizzazione della deformazione noto con il termine di *strizione*⁶¹ e consistente in un restringimento localizzato della sezione del provino (fig. 4.14b). È evidente che con lo sviluppo della strizione viene a perdersi l'omogeneità del provino e che quindi la parte di diagramma susseguente il raggiungimento della tensione di rottura non rappresenta più il solo comportamento del materiale. Inoltre, la sezione A della zona soggetta a strizione è nettamente inferiore alla sezione A_0 indeformata e ne risulta che la tensione vera F/A è notevolmente superiore di quella nominale F/A_0 . Se si traccia il diagramma *tensione vera-dilatazione vera* si ottiene la linea tratteggiata di fig. 4.13 che, a differenza del diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale*, risulta sempre crescente.

Nella fig. 4.15a è riportato invece il risultato di una prova di trazione

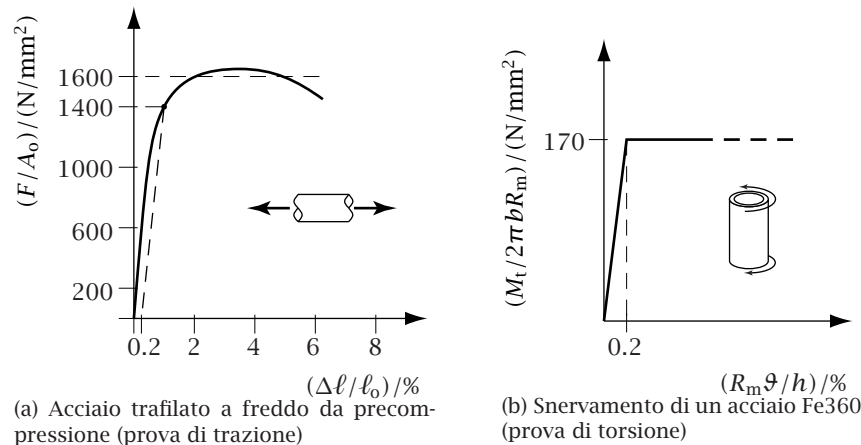


Figura 4.15: Prove di trazione e di torsione su materiali metallici

⁶⁰ Affinché un acciaio sia classificato quale Fe360 occorre che la sua tensione di rottura superi 360 N/mm^2 . Tensione di rottura si rende in inglese, tra gli altri, con i termini *ultimate stress* oppure *tensile strength*.

⁶¹ *Necking* nella letteratura inglese.

monoassiale a deformazione controllata eseguita su acciaio trafilato a freddo da precompressione.⁶² Si noti che tale tipo d'acciaio, a differenza di quello laminato a caldo per strutture metalliche, non presenta un limite netto di snervamento. È consuetudine in tali casi di definire quale limite di snervamento il valore di tensione al quale allo scarico corrisponde una deformazione permanente prestabilita. Nel caso illustrato in fig. 4.15a alla deformazione residua dello 0.2 % corrisponde il limite di snervamento di 1400 N/mm^2 .

Per quel che riguarda la prova di torsione, i risultati sono qualitativamente simili alla prova di trazione. Ci si limita a riportare nella fig. 4.15b la parte iniziale del diagramma *tensione tangenziale nominale-scorrimento* nel caso di un acciaio laminato a caldo tipo Fe360 per strutture metalliche, con le indicazioni di un possibile livello di snervamento e del corrispondente valore di scorrimento.

4.4.2 Calcestruzzo

Poiché il calcestruzzo è un materiale con scarsa resistenza a trazione, la prova di resistenza tipica eseguita su campioni di calcestruzzo è la prova di compressione monoassiale. A tal fine il materiale viene sagomato, come indicato in fig. 4.16a, in forma di cubetti, tipicamente di 15 cm di lato, oppure in forma di cilindri di 15 cm di diametro e di 30 cm di altezza. Data la forma tozza dei provini è evidente che il loro stato durante la prova di compressione non sarà omogeneo, soprattutto per quel che riguarda i provini di forma cubica. I risultati ottenuti su provini, per es. cubici, di diversa grandezza oppure eseguendo la prova con modalità differenti non saranno quindi direttamente confrontabili. La prova di compressione si configura quindi quale *prova convenzionale* che, al fine della confrontabilità dei risultati, deve essere necessariamente normalizzata, con l'indicazione di tutte le specifiche che occorre

⁶² I requisiti dell'acciaio da precompressione sono per il momento stabilite dalla norma europea EN ISO 15630-3 (2002), parte terza delle norme ISO 15630 e recepitata dalla normativa europea. Comunque sono in fase di approvazione le nuove norme europee EN 10138, attualmente disponibili sotto forma di bozze. Di queste, la parte prima prEN 10138-1 (2006) riguarda i requisiti generali degli acciai da precompressione.

Il semplice acciaio per cemento armato è invece oggetto della norma europea EN 10080, recepitata dall'UNI nel 2005 nel testo originale inglese (UNI EN 10080, 2005).

Sia la EN 10138 che la EN 10080 sono citate quali riferimenti delle proprietà dell'acciaio dalla norma UNI EN 1992-1-1 (2005), prima parte dell'eurocodice 2 che fornisce i criteri generali per la progettazione delle strutture di calcestruzzo non armato, armato e precompresso, passata nel 2004 dalla forma sperimentale a quella definitiva e recepitata l'anno successivo dall'UNI in traduzione italiana.

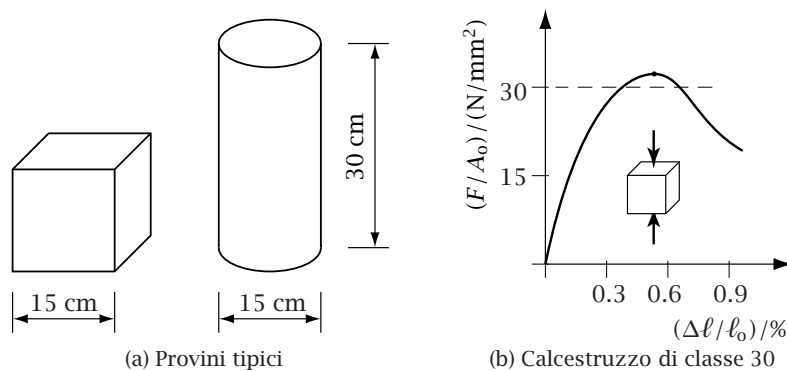


Figura 4.16: Prova di compressione (provini di calcestruzzo)

soddisfare sia nella preparazione dei provini che nell'esecuzione della prova stessa.⁶³

Il calcestruzzo viene classificato, in base alla sua *resistenza caratteristica cilindrica/cubica a compressione*, in *classi di resistenza*.⁶⁴ La resistenza caratteristica cilindrica/cubica a compressione rappresenta il livello tensionale in N/mm^2 al disotto del quale ci si aspetta di trovare al più il 5% delle tensioni di rottura relative a prove di compressione su cilindri/cubetti del dato tipo di calcestruzzo.

Nella fig. 4.16b è riportato un possibile diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale*, quale risultato di una prova di compressione monoassiale a deformazione controllata eseguita su un provino cubico di calcestruzzo di classe 25/30. La tensione di rottura è leggermente superiore a 30 N/mm^2 , come ci si aspetta per la maggior parte delle prove eseguite su cubetti di calcestruzzo di classe 25/30. Si osservi che nel

⁶³Naturalmente tutte le prove di routine per il controllo dei materiali sono normalizzate. Quello che si vuole dire è che nel caso della prova di compressione di provini di calcestruzzo, a differenza della prova di trazione per materiali metallici, la normalizzazione è indispensabile al fine di rendere confrontabili i risultati della prova stessa.

⁶⁴Le classi di resistenza e la resistenza caratteristica a compressione del calcestruzzo sono stabilite dalla norma UNI EN 206-1 (2006), traduzione italiana della prima parte delle norme europee EN 206, riviste nel 2006 e recepite dall'UNI nello stesso anno, riguardanti i requisiti per i materiali componenti del calcestruzzo e le proprietà del calcestruzzo.

La parte prima dell'eurocodice 2 UNI EN 1992-1-1 (2005), già citato, si riferisce alla EN 206 per quel che riguarda le proprietà del calcestruzzo.

tracciamento del diagramma di fig. 4.16b si sono assunti positivi sia la forza di compressione F che l'accorciamento $\Delta\ell$ del provino.

4.5 Duttilità, fragilità e modelli di danneggiamento

La *ductilità*⁶⁵ di un materiale rappresenta la sua capacità di subire delle deformazioni plastiche senza fratturarsi, cioè senza giungere a rottura. Un materiale duttile, come per es. l'acciaio, può subire lavorazioni che ne modificano la forma in virtù della sua capacità di subire deformazioni permanenti.

Se il materiale non è duttile si dice *fragile*.⁶⁶ Un materiale fragile presenta deformazioni plastiche trascurabili e giunge quindi a rottura sostanzialmente in fase elastica e spesso in fase elastico lineare.

Occorre subito dire che il concetto di duttilità, e quindi di fragilità, non è assoluto poiché può dipendere anche dalle dimensioni in gioco. In altre parole, non dipende solo dalle proprietà del materiale ma anche dalla struttura. Per es., un materiale tipicamente duttile come l'acciaio presenta un comportamento tendenzialmente fragile in strutture di grandi dimensioni (come le lastre impiegate nella costruzione di navi in acciaio).

La differenza di comportamento tra materiali (prevalentemente) duttili e materiali (prevalentemente) fragili dipende dai *meccanismi di danneggiamento*⁶⁷ a livello microscopico. Nei materiali duttili come le leghe metalliche il danneggiamento è rappresentato dalle *dislocazioni*⁶⁸ cioè da scorrimenti tra piani atomici o cristallini, scorrimenti che preservano la continuità del materiale e sono alla base del comportamento plastico. Nei calcestruzzi e nelle rocce, materiali tipicamente fragili, esistono sempre delle *microfratture*,⁶⁹ che nel caso del calcestruzzo possono essere semplicemente degli scollamenti tra la matrice cementizia e i componenti granulari. Queste microfratture si estendono ad opera delle sollecitazioni esterne fino ad originare una fessura macroscopica

⁶⁵Materiale duttile si rende in inglese con *ductile material*.

⁶⁶Materiale fragile si rende in inglese con *brittle material*.

⁶⁷Per più dettagli sui meccanismi di danneggiamento nei materiali si veda per es. Lemaitre e Chaboche (1990, cap. 1). Danneggiamento si rende in inglese con il termine *damage*.

⁶⁸Dislocazione si rende in inglese con il termine *dislocation*.

⁶⁹Microfrattura si rende in inglese con il termine *microfracture*.

che rompe la continuità del materiale. Nei *materiali compositi fibro rinforzati*, composti di una matrice rinforzata da fibre,⁷⁰ il meccanismo di danneggiamento è rappresentato dallo sfilamento delle fibre, cioè dal loro distacco dalla matrice. Invece nei *materiali compositi laminati*,⁷¹ composti da più strati incollati il danneggiamento può presentarsi come scollamento degli strati, fenomeno noto come *delaminazione*.

I materiali duttili presentano un comportamento a trazione e a compressione simile, mentre per i materiali fragili il comportamento a trazione e compressione è nettamente diverso, potendo la resistenza a compressione essere anche di un ordine di grandezza superiore a quella di trazione.

Se la prova di trazione di un provino in calcestruzzo viene condotta pilotando la deformazione con le moderne tecniche di controllo elettronico, in luogo di una rottura netta viene individuato un ramo di incrudimento negativo (softening), come illustrato in fig. 4.17a.⁷² Poiché il

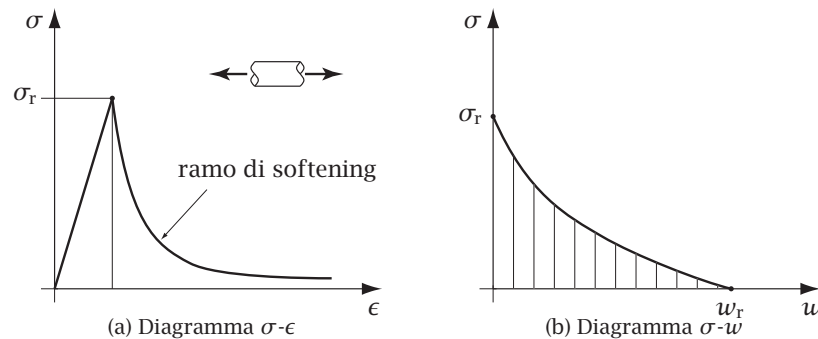


Figura 4.17: Prova di trazione di un provino in calcestruzzo

ramo di softening permette di dissipare una notevole quantità di energia, rappresenta una importante caratteristica del materiale. Quando si raggiunge il ramo di softening, la deformazione del provino tende ad essere localizzata in una stretta banda (analogamente al fenomeno della

⁷⁰Le matrici più comuni sono di resina, prevalentemente epossidica, ma si sono utilizzate anche matrici metalliche come leghe di alluminio. Tra i materiali prevalentemente impiegati per le fibre sono invece vetro, boro, carbonio e kevlar (un polimero organico). Per più dettagli si veda per es. Gordon (1976, cap. 8). Materiale composito fibro rinforzato si rende in inglese con il termine *fibre-resin composite*.

⁷¹Materiale composito laminato si rende in inglese con il termine *composite laminate*.

⁷²Per più dettagli si veda per es. Carpinteri (1992, § 1.1).

strizione per i provini metallici). In conseguenza, se ci si riferisce all'intero provino, i risultati dipendono non solo dal materiale, ma anche dalle dimensioni del provino. Per evitare questa dipendenza occorre mettere in conto l'ampiezza w della zona a deformazione localizzata dove si sviluppa la frattura che porta il provino alla rottura.

In un diagramma $\sigma - w$ (fig. 4.17b) l'area sottesa dalla curva rappresenta il lavoro L_f speso per unità di superficie per fratturare il solido, lavoro che risulta essere una proprietà intrinseca del materiale nota come *energia di frattura*:

$$L_f = \int_0^{w_r} \sigma \, dw. \quad (4.9)$$

4.6 Verifiche di sicurezza

Un modello di comportamento meccanico di una struttura, più o meno realistico che sia, permette di trasformare le azioni che si prevede agiranno sulla struttura in risposte della struttura stessa, sia in termini di spostamenti e deformazioni che in termini di tensioni e di eventuali danneggiamenti. Risulta pertanto possibile eseguire delle *verifiche di sicurezza*, ovvero sia prevedere se la struttura sarà in grado di servire allo scopo che ne giustifica l'esistenza, garantendo contemporaneamente un "sufficiente" margine di sicurezza rispetto a crolli sia parziali che totali della struttura a garanzia sia della incolumità delle persone che della conservazione delle cose che dovranno interagire con essa.

4.6.1 Stati limite

Il concetto alla base delle attuali verifiche di resistenza è quello di *stato limite*. Con tale termine si intende un qualunque stato della struttura che precede un evento rispetto al quale ci si vuole cautelare.⁷³ Gli stati limite sono distinti essenzialmente in due categorie:

1. *stati limite ultimi*, che corrispondono al collasso della struttura. Gli stati limite ultimi possono riguardare, per es.:

⁷³Le verifiche di resistenza basate sul concetto di stato limite sono oggetto dell'eurocodice UNI EN 1990 (2006), approvato nel 2002, aggiornato nel 2005 e recepito dall'UNI nel 2006 nel testo originale inglese. Tale eurocodice stabilisce i principi e i requisiti per la sicurezza, l'esercizio e la durabilità delle strutture, descrive i criteri generali per la loro progettazione e verifica e fornisce le linee guida per i correlati aspetti di affidabilità strutturale.

- (a) la perdita di equilibrio della struttura come corpo rigido;
 - (b) lo sviluppo di deformazioni plastiche localizzate che innescano un moto rigido delle parti connesse;
 - (c) la rottura oppure la perdita di stabilità della struttura o di parti di essa;
2. *stati limite di servizio o di esercizio*, che corrispondono alla perdita di funzionalità, per es. come conseguenza di deformazioni eccessive, senza che ne sia messa in pericolo la statica. Gli stati limite di servizio possono riguardare, per es.:
- (a) deformazioni e spostamenti eccessivi che causano malfunzionamenti di macchine oppure la rottura di elementi non strutturali od anche un aspetto della struttura non accettabile;
 - (b) vibrazioni eccessive con conseguente disagio per le persone oppure danneggiamento e mancanza di funzionalità della struttura;
 - (c) danneggiamenti di vario tipo (tra cui la fessurazione) che non conducono di per se stessi al collasso ma influiscono sull'aspetto, la funzionalità e la durabilità della struttura.

Una struttura è giudicata affidabile nei confronti di un particolare stato limite (ultimo o di servizio) se le azioni che agiscono su di essa, eventualmente amplificate da opportuni *coefficienti di sicurezza*,⁷⁴ provocano effetti ad un livello inferiore a quelli che si hanno in corrispondenza del dato stato limite, effetti valutati mediante la scelta di un opportuno modello meccanico, alcuni parametri del quale saranno eventualmente amplificati oppure ridotti da ulteriori coefficienti di sicurezza. I valori dei coefficienti di sicurezza utilizzati dipendono dalla più o meno grande importanza o pericolosità o altro del fattore oggetto di ampliamento (o di riduzione).⁷⁵ Senza entrare nei dettagli, la verifica di sicurezza così tratteggiata si compone quindi, in generale, di diverse fasi:

⁷⁴*Safety factors* nella letteratura inglese.

⁷⁵Gli eurocodici usano il termine *coefficienti parziali*, da cui il nome *metodo dei coefficienti parziali* per indicare tale metodo di verifica. L'aggettivo "parziale" sottolinea il fatto che la sicurezza offerta da uno di tali coefficienti è parziale, cioè riguarda il solo fattore a cui il coefficiente è riferito. Il metodo è introdotto nell'eurocodice UNI EN 1990 (2006), già citato. Negli eurocodici UNI EN 1992-1-1 (2005) e UNI EN 1993-1-1 (2005), già citati, tale metodo viene applicato al caso particolare delle strutture in calcestruzzo e di quelle di acciaio rispettivamente. Negli eurocodici i coefficienti parziali sono indicati con la lettera greca γ .

1. *Analisi delle azioni agenti sulla struttura*.⁷⁶ Come già detto, ogni azione agente sarà eventualmente amplificata da un opportuno coefficiente di sicurezza. Nel caso in cui più azioni variabili nel tempo agiscano simultaneamente, queste saranno eventualmente ridotte da opportuni *coefficienti di combinazione*⁷⁷ per tenere conto che tali azioni non agiranno tutte contemporaneamente al loro massimo valore;⁷⁸
2. *Scelta del modello meccanico della struttura*. La risposta del modello meccanico dipenderà dalle proprietà dei materiali impiegati (per es. dai moduli di elasticità), proprietà che andranno quindi modellate ed eventualmente ridotte tramite opportuni coefficienti di sicurezza, uno per ogni proprietà;⁷⁹
3. *Scelta delle variabili per la valutazione della sicurezza*. Tali variabili andranno valutate sia in corrispondenza delle azioni agenti sulla struttura che in corrispondenza dello stato limite considerato.⁸⁰

⁷⁶Le azioni agenti su strutture generiche sono oggetto delle norme europee EN 1991-1, prima parte dell'eurocodice 1, insieme di sei norme che dal 2002 al 2005 sono giunte alla loro versione definitiva e recepite dall'UNI nel 2004 e nel 2005, di cui le prime due in traduzione italiana. Di queste, citiamo la norma UNI EN 1991-1-1 (2004), che si occupa tra l'altro dei pesi per unità di volume dei materiali da costruzione, del peso proprio degli elementi costruttivi e dei sovraccarichi sugli edifici, la norma UNI EN 1991-1-3 (2004), che si occupa dei carichi da neve ed infine la norma UNI EN 1991-1-4 (2005), che tratta dell'azione del vento.

Le azioni sismiche, data la loro grande importanza, sono oggetto delle norme EN 1998, appositamente dedicate a tale argomento e costituenti l'eurocodice 8, composto di sei norme, cinque delle quali rese definitive nel 2004 e nel 2005 e recepite dall'UNI nel 2005 e nel 2006 nel testo originale inglese. In particolare, la norma UNI EN 1998-1 (2005) stabilisce i requisiti fondamentali che devono soddisfare gli edifici e le opere di ingegneria civile in zona sismica e regola la modellizzazione delle azioni sismiche.

⁷⁷Indicati negli eurocodici con la lettera greca ψ .

⁷⁸I valori che così si ottengono sono detti dagli eurocodici *valori di progetto delle azioni*.

⁷⁹Si originano in tal modo quelli che gli eurocodici chiamano *valori di progetto delle proprietà dei materiali*. Un analogo discorso riguarda la modellizzazione dei dati geometrici del modello meccanico con la conseguente definizione dei *valori di progetto dei dati geometrici*.

⁸⁰Gli eurocodici indicano i valori così ottenuti *valori di progetto degli effetti delle azioni* e, rispettivamente, *resistenze di progetto*, e, naturalmente, dispongono di eseguire la verifica di sicurezza confrontando i valori di progetto degli effetti delle azioni con le resistenze di progetto.

4.6.2 Tensioni ammissibili⁸¹

Le verifiche di sicurezza basate sul concetto di stati limite e sull'uso di più coefficienti di sicurezza rappresentano il superamento del *metodo delle tensioni ammissibili*, ormai inadeguato a fornire un quadro concettuale coerente al problema delle verifiche di sicurezza a seguito del notevole progresso tecnico-scientifico registratosi negli ultimi decenni nel campo delle costruzioni in generale e di quelle civili in particolare. Infatti, non solo il metodo delle tensioni ammissibili è nato in un contesto in cui veniva quasi esclusivamente utilizzato quale modello di risposta del materiale quello elastico-lineare, ma la sua stessa definizione è strettamente connessa a tale tipo di risposta. L'utilizzo, sempre più frequente, di modelli non lineari fa sì che tale metodo debba essere di continuo adattato, con interventi ad hoc, al fine di essere applicato a situazioni che non gli sono proprie, con la conseguenza di apparire sempre più insoddisfacente e arbitrario.⁸²

⁸¹Tensione ammissibile si rende con *admissible load* nella letteratura inglese.

⁸²Gli eurocodici che, in obbedienza alla direttiva CEE 89/106 (modificata dalla direttiva CEE 93/68 e dal regolamento CE n. 1882/2003), devono diventare la base dell'ordinamento normativo ufficiale italiano, contemplano la sola verifica di sicurezza basata sugli stati limite.

La normativa italiana attualmente in vigore è stabilita dal decreto ministeriale 14 settembre 2005 "Norme tecniche per le costruzioni" (Supplemento ordinario alla Gazzetta Ufficiale n. 222 del 23 settembre 2005). Tale normativa permette in casi particolari, oltre alla verifica di sicurezza basata sugli stati limite, una cosiddetta *verifica di sicurezza alle tensioni*, vicina al metodo delle tensioni ammissibili. Per quel che riguarda gli eurocodici, è in vari punti in contrasto con essi e li pone alla pari degli altri codici internazionali e della letteratura tecnica consolidata, a cui permette genericamente di riferirsi, per es. per la valutazione dei coefficienti parziali di sicurezza, imponendo come restrizione la sola clausola del rispetto dei livelli di sicurezza fissati dalla presente norma.

In contemporanea alle norme tecniche per le costruzioni e in seguito all'ordinanza n. 3467 del 13 ottobre 2005 "Disposizioni urgenti di protezione civile in materia di norme tecniche per le costruzioni in zona sismica", il 23 ottobre 2005 è entrata in vigore anche l'ordinanza n. 3274 del 20 marzo 2003 (Gazzetta Ufficiale n. 105 dell'8 maggio 2003) "Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica", con la quale sono state dettate le nuove normative tecniche per le costruzioni in zona sismica.

Inoltre, in virtù dell'art. 14-undevices (Regime transitorio per l'operatività delle norme tecniche per le costruzioni) della legge n. 168 del 17 agosto 2005 (Gazzetta Ufficiale n. 194 del 22 agosto 2005) e del successivo comma 4bis dell'art. 3 (Disposizioni in materia di costruzioni, opere infrastrutturali e lavori in edilizia) della legge n. 17 del 26 febbraio 2007 (Supplemento ordinario n. 48 alla Gazzetta Ufficiale n. 47 del 26 febbraio 2007) è consentita in alternativa l'applicazione, fino al 31 dicembre 2007, della normativa precedente, al fine di avviare una fase sperimentale di applicazione delle norme tecniche in questione. Quindi fino al 31 dicembre 2007 è applicabile il decreto ministeriale 9 gennaio 1996 "Norme tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle

Il metodo delle tensioni ammissibili pone l'accento sul raggiungimento del limite di snervamento, che viene visto come una evenienza da evitarsi al fine del buon funzionamento di una struttura. Uno stato tensionale è giudicato accettabile se appartiene ad un *dominio di ammissibilità* interno al dominio di elasticità. Il dominio di ammissibilità si ottiene dividendo le tensioni al limite elastico tramite un *coefficiente di sicurezza* maggiore di 1. Lo stato tensionale che così si ottiene è detto *ammissibile*. Il metodo delle tensioni ammissibili prende quindi come riferimento lo stato tensionale nell'intorno del punto.

A parità di materiale e di stato tensionale, tutto ciò che riguarda le condizioni al contorno, come la geometria della struttura e il tipo di forze applicate, non influenzano la verifica di resistenza fatta salva la scelta del valore numerico del coefficiente di sicurezza. D'altronde una struttura può giungere a collasso perché l'equilibrio che sussiste sotto l'azione delle forze applicate diventa instabile, quando ancora le tensioni sono ben al disotto del limite di snervamento. Per giudicare la *stabilità dell'equilibrio*⁸³ di una struttura non si può prescindere dalle forze applicate e dalla sua geometria. Ancora, se il materiale che compone la struttura è duttile come, per es., l'acciaio, imporre al materiale di non fuoriuscire dal dominio elastico può essere molto penalizzante nei confronti delle reali capacità di resistenza della struttura. Non solo, ma esistono casi nei quali cautelarsi nei confronti degli stati tensionali al limite di snervamento può non essere sufficiente a causa di forti non linearità del legame costitutivo che rende non significativo il coefficiente di sicurezza.

È quindi evidente che il metodo di verifica basato sugli stati limite affronta il problema in modo più scientifico, introducendo da una parte il concetto di stato limite, indipendente dalla modellizzazione della risposta del materiale, e dall'altra parte dando il giusto peso a tutto ciò che influenza tale calcolo con un uso coerente di vari coefficienti di sicurezza. Il metodo delle tensioni ammissibili risulta invece limitato dal fatto che rappresenta, dal punto di vista degli stati limite, il solo *stato limite di elasticità*, e dalla circostanza che tutto ciò che interviene nel calcolo viene pesato dall'unico coefficiente di sicurezza che definisce la tensione ammissibile.

strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche" (Supplemento ordinario alla Gazzetta Ufficiale n. 29 del 5 febbraio 1996) che permette tra l'altro l'uso del metodo delle tensioni ammissibili come stabilito dal precedente decreto ministeriale 14 febbraio 1992 (Supplemento ordinario alla Gazzetta Ufficiale n. 65 del 18 marzo 1992).

⁸³*Stability of equilibrium* nella letteratura inglese.

Riferimenti bibliografici

- Arri, E. e Sartori, S. (1984) *Le Misure di Grandezze Fisiche. Manuale di Metrologia*. Paravia, Torino.
- Bell, J. F. (1973) The experimental foundations of solid mechanics. In *Encyclopedia of Physics, Volume VIa/1: Mechanics of Solids I* (A cura di C. Truesdell). Springer-Verlag, Berlin.
- BIPM (1998) *The International System of Units (SI)*. Bureau International des Poids et Mesures, 7a edizione.
- Bowen, R. M. e Wang, C. C. (1976) *Introduction to Vectors and Tensors, Volume 1: Linear and Multilinear Algebra*. Plenum Press, New York.
- Carpinteri, A., a cura di (1992) *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora, Bologna.
- Colombo, G. (1975) *Manuale dell'Ingegnere*. Hoepli, Milano, 80a edizione.
- Courtney, T. H. (1990) *Mechanical Behavior of Materials*. Materials Sciences and Engineering. McGraw-Hill, New York.
- EN ISO 15630-3 (2002) Steel for the reinforcement and prestressing of concrete - Test methods - Part 3: Prestressing steel.
- Gilardi, G. (1994) *Analisi Tre*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano.
- Gilardi, G. (1995) *Analisi Uno*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, seconda edizione.
- Gilardi, G. (1996) *Analisi Due*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, seconda edizione.
- Gordon, J. E. (1976) *La Scienza dei Materiali Resistenti ovvero perchè non sprofondiamo nel pavimento*. Mondadori, Milano.
- Gordon, J. E. (1979) *Strutture ovvero perchè le cose stanno in piedi*. Mondadori, Milano.
- ISO-31 (1992) *Quantities and Units*. International Organization for Standardization, Geneva.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J.-L. (1990) *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lipschutz, S. (1975) *Algebra Lineare*. Etas, Milano.
- Love, A. E. H. (1944) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.
- Nadai, A. (1950) *Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume 1*. McGraw-Hill, New York, seconda edizione.
- prEN 10138-1 (2006) Prestressing steels - Part 1: General requirements.
- Sartori, S., a cura di (1979) *Le Misure nella Scienza, nella Tecnica, nella Società. Manuale di Metrologia*. Paravia, Torino.
- Taylor, B. N. (1995) Guide for the use of the international system of units (SI). Special Publication 811, NIST National Institute of Standards and Technology.
- Tricomi, F. G. (1970) *Istituzioni di Analisi Superiore, Metodi Matematici della Fisica*. Cedam, Padova, seconda edizione.
- Truesdell, C. e Toupin, R. (1960) The classical field theories. In *Encyclopedia of Physics, Volume III/1: Principles of Classical Mechanics and Field Theory* (A cura di S. Flügge), pp. 226-793. Springer-Verlag, Berlin.
- Truesdell, III, C. A. (1991) *A First Course in Rational Continuum Mechanics, Volume 1: General Concepts*. Academic Press, Boston, seconda edizione.
- UNI CEI ISO 31-0 (1996) *Grandezze ed Unità di Misura: Principi Generali*. UNI Ente Nazionale di Unificazione, Milano.
- UNI CEI ISO 31-03 (2002) *Grandezze ed Unità di Misura: Meccanica*. UNI Ente Nazionale di Unificazione, Milano.
- UNI CEI ISO 31-04 (2001) *Grandezze ed Unità di Misura: Calore*. UNI Ente Nazionale di Unificazione, Milano.
- UNI CEI ISO 31-11 (1998) *Grandezze ed Unità di Misura: Segni e Simboli Matematici da Usare nelle Scienze Fisiche e nella Tecnica*. UNI Ente Nazionale di Unificazione, Milano.
- UNI EN 10025-1 (2005) Prodotti laminati a caldo di acciai per impieghi strutturali - Parte 1: Condizioni generali di fornitura.

UNI EN 10080 (2005) Acciaio per cemento armato - Acciaio saldabile per cemento armato - Generalità.

UNI EN 1990 (2006) Eurocodice - Criteri generali di progettazione strutturale.

UNI EN 1991-1-1 (2004) Eurocodice 1 - Azioni sulle strutture. Parte 1-1: Pesi per unità di volume, pesi propri e sovraccarichi per gli edifici.

UNI EN 1991-1-3 (2004) Eurocodice 1 - Azioni sulle strutture. Parte 1-3: Azioni in generale - Carichi da neve.

UNI EN 1991-1-4 (2005) Eurocodice 1 - Azioni sulle strutture. Parte 1-4: Azioni in generale - Azioni del vento.

UNI EN 1992-1-1 (2005) Eurocodice 2 - Progettazione delle strutture in calcestruzzo. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici.

UNI EN 1993-1-1 (2005) Eurocodice 3 - Progettazione delle strutture di acciaio. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici.

UNI EN 1998-1 (2005) Eurocodice 8 - Progettazione delle strutture per la resistenza sismica - Parte 1: Regole generali, azioni sismiche e regole per gli edifici.

UNI EN 206-1 (2006) Calcestruzzo - Parte 1: Specificazione, prestazione, produzione e conformità.

Wang, C. C. e Truesdell, C. (1973) *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff, Leyden.

Indice analitico

- alberi, 21n
- allungamento, 26
 - per unità di linea, *vedi* dilatazione, lineare
- alternatore, *vedi* permutazione, simbolo di
- anelli, 21n
- archi, 21n
- aste, 21n
- azione
 - a distanza, 29
 - di contatto, 30
- azione e reazione
 - principio, 32
- base
 - di tensori doppi, 11
 - ortonormale, 9
- bilancio
 - equazioni, 29
- calcestruzzo, 48, 49
- capacità portante, 17
- carichi, 17, 18
- Cauchy
 - ipotesi di, 33
- cavo, *vedi* filo
- coefficiente
 - di contrazione trasversale, *vedi* coefficiente di Poisson
 - di Poisson, 43
 - di sicurezza, 51
- coefficienti
 - di combinazione, 51
 - parziali, 51n

- colonne, 21n
- compressione
 - prova di, 48
- configurazione
 - deformata, 19
 - di riferimento, 19
 - euleriana, *vedi* configurazione spaziale
 - lagrangiana, *vedi* configurazione materiale
 - materiale, 19
 - spaziale, 19
- corda, *vedi* filo
- corpo continuo, 18
- costruzioni, 17
 - dighe di ritenuta, 17
 - muri di sostegno, 17
 - reali, 18
- covettore, 6
- criterio di snervamento, 44
- cupole, 23n
- danneggiamento
 - meccanismi di, 49
- deformazione
 - funzione di, 25
 - localizzazione della, 48
- delaminazione, 50
- determinante, 10
- dilatazione
 - cubica, 27
 - lineare, 26
 - logaritmica, 39n

- nominale, 39
- quadratica, 27
- trasversale, 39
- vera, *vedi* dilatazione logaritmica
- direzione orientata, 5
- dislocazioni, 49
- distribuzione, 32n
- dominio
 - di ammissibilità, 52
 - di linearità, 44
 - elastico, 44
- duttilità, 49
- elastica
 - isteresi, 45
- elasticità, 42
 - lineare, 42
 - ritardata, 46
- elastico
 - dominio, 44
- elastoplasticità, 44
- elastoplastico
 - comportamento, 44
- energia
 - di frattura, 50
- equilibrio
 - alla rotazione, 29
 - alla traslazione, 29
 - equazioni di, 29
 - stabilità dell', 52
- filo, 20
- fluidi, 19
- fluido
 - viscoso, 45
- forma lineare, 6
- forza, 29
 - di superficie, 30
 - di volume, 30
 - per unità di volume, 31
- fragilità, 49

- giacitura, 33
- gradiente
 - funzione scalare, 6
 - funzione vettoriale, 8
- grandezza
 - fisica, 3
 - misura di una, 3
 - particolare, 3
- grandezze
 - adimensionali, 5
- gusci, 23n
- Hooke
 - legge di, 42
- imbozzamento, 24
- incrudimento, 45
 - negativo, 45
- instabilità
 - locale, 24
- isotropia, 37
- isteresi elastica, 45
- Kronecker
 - delta, 9
- laminati, 50
- lastra, 23
 - segmento ortogonale, 23
- limite
 - stato, 50
- linearità
 - dominio di, 44
- liquido, 19
- macromeccanica, 37
- massa
 - per unità di volume, *vedi* densità
 - specifica, *vedi* densità
- materiale
 - duttile, 49

- fragile, 49
- materiali
 - fibro rinforzati, 50
 - isotropi, 37
 - laminati, 50
 - metallici, 47
 - omogenei, 37
- matrici, 9
- membrana, 23
- mezzi materiali, 17
 - acqua, 17
 - ammassi di materiali sciolti, 17
 - aria, 17
 - terreno, 17
- mezzo continuo, 18n
- microfratture, 49
- misura
 - di una grandezza, 3
 - unità di, 3
- modelli, 18
 - ideali, 37
 - micromeccanici, 18n
- modello
 - bidimensionale con struttura, 23
 - continuo, *vedi* corpo continuo
 - monodimensionale con struttura, 21
- moduli
 - tecnici, 42
- modulo
 - di Coulomb, *vedi* modulo di elasticità tangenziale
 - di elasticità normale, *vedi* modulo di Young
 - di elasticità tangenziale, 43
 - di un vettore, 5
 - di Young, 42
 - secante, 44
 - tangente, 44
- momento
 - di superficie, 30
 - di volume, 30
 - esterno per unità di superficie, 32
 - interno per unità di superficie, 32
 - per unità di volume, 32
- montante, 21n
- moto
 - descrizione
 - euleriana, *vedi* moto, descrizione spaziale
 - lagrangiana, *vedi* moto, descrizione materiale
 - materiale, 19
 - spaziale, 19
- Newton
 - leggi di, 29
- numeri puri, 5
- o piccolo, 6
- omogeneità, 37
- orientazione
 - esterna di una superficie, 30
- ortogonale
 - tensore, 12
- pelo libero, 19
- permutazione
 - simbolo di, 9
- piastre, 23n
- pilastrini, 21n
- plasticità, 42
 - perfetta, 45
- Poisson
 - coefficiente di, 43
- principio
 - di azione e reazione, 32
- proiezione, 8
- proporzionalità
 - limite di, 44
- prova
 - di compressione, 48
 - di torsione, 40, 48
 - di trazione, 38, 47
- provino, 37

- quantità di moto, 29
 - momento della, 29
- quasi statica
 - evoluzione, 38
- radiante, 28
- regione di controllo, 19
- resistenza
 - caratteristica, 49
 - Classi di, 49
- resistenze di progetto, 51n
- Ricci
 - tensore di, *vedi* permutazione, simbolo di
- rilassamento, 46
- ritardata
 - elasticità, 46
- rocce, 49
- rotazione
 - tensore, 12
- rottura
 - tensione di, 48
- SaintVenant
 - problema, 22
- scalare, 5
- scorrimento, 28
- sforzo
 - di taglio semplice, 40
 - trazione semplice, 39
- sicurezza
 - coefficiente di, 51
 - verifiche di, 50
- simbolo di permutazione, 9
- sistema di unità
 - coerente, 3
- snervamento
 - criterio di, 44
 - inferiore, 47
 - superficie di, 44
 - superiore, 47
 - tensione di, 45
- solidi, 19
 - spostamento, 25
- solido
 - viscoelastico, 46
- spazio euclideo, 5, 18
- stabilità
 - dell'equilibrio, 52
- stati limite
 - ultimi, 50
- statica
 - evoluzione quasi, 38
- Stato limite, 50
- stato limite
 - di servizio, 51
- stiramento, 26n
- strizione, 48
- struttura, 17
 - portante, 17, 18
- superficie
 - di snervamento, 44
 - elemento di, 33
- taglio
 - semplice, 40
- tensione, 31
 - di rottura, 48
 - nominale, 39
 - vera, 39
- tensioni
 - ammissibili, 52
- tensioni tangenziali
 - reciprocità, 35
- tensore
 - di Ricci, *vedi* permutazione, simbolo di
 - doppio, 7
 - emisimmetrico, 8
 - identità, 8
 - inverso, 8
 - nullo, 8
 - opposto, 8

- ortogonale, 12
- prodotto, 8
- rotazione, 12
- simmetrico, 8
- tensori
 - rappresentazione algebrica, 10, 11
 - somma, 8
- terreno, 19
- torsione
 - prova di, 40, 48
- trasformazioni
 - lineari, 6, 7
- trave, 21
 - asse, 21
 - di sezione sottile, 22, 24
 - aperta, 22
 - chiusa, 22
 - in parete sottile, *vedi* trave di sezione sottile
 - sezione retta, 21
- travi
 - teoria tecnica, 22
- travi parete, 23n
- trazione
 - prova di, 38, 47
 - semplice, 39
- tubi, 23n
- Unità
 - Sistema Internazionale di, 3
- unità
 - fondamentali, 4
 - joule, 30
 - newton, 30
- valore medio, 36n
- valori di progetto
 - degli effetti delle azioni, 51n
 - dei dati geometrici, 51n
 - delle azioni, 51n
- vento, 17
- verifiche di sicurezza, 50
- versore, 5
- vettore
 - di tensione, *vedi* tensione
 - nullo, 5
 - opposto, 5
 - ordinario, 5
 - posizione, 19
 - somma, 5
 - unitario, *vedi* versore
- vettori
 - prodotto esterno, *vedi* vettori, prodotto vettoriale
 - prodotto interno, *vedi* vettori, prodotto scalare
 - prodotto scalare, 5
 - prodotto tensoriale, 8
 - prodotto vettoriale, 5
 - rappresentazione algebrica, 10
 - spazio, 6
- viscoelastico
 - solido, 46
- viscosità, 42
- viscoso
 - fluido, 45
- volte, 23n
- Young
 - modulo di, 42