

# Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile  
Università di Trieste  
Piazzale Europa 1, Trieste

## PARTE SECONDA

### **Meccanica della trave inflessa**

Corsi di Laurea triennali in  
Ingegneria Civile ed Ambientale curr. Ambientale, Civile, Edile  
Ingegneria Industriale curr. Materiali, Meccanica  
Ingegneria Navale

Trieste, 23 settembre 2007



# Indice

|          |                                                                                                |           |  |  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|--|--|
| <b>1</b> | <b>Premesse</b>                                                                                | <b>3</b>  |  |  |
| 1.1      | Geometria della trave                                                                          | 3         |  |  |
| 1.2      | Ipotesi cinematiche                                                                            | 4         |  |  |
| 1.2.1    | Campi di spostamento                                                                           | 5         |  |  |
| 1.2.2    | Modelli cinematici                                                                             | 5         |  |  |
|          | Trave rigida                                                                                   | 5         |  |  |
|          | Sezione indeformata                                                                            | 5         |  |  |
|          | Trave inflessa (Eulero-Bernoulli)                                                              | 6         |  |  |
|          | Teoria tecnica delle travi (Saint-Venant)                                                      | 6         |  |  |
|          | Sezione indeformata nel proprio piano                                                          | 6         |  |  |
| 1.2.3    | Piccoli spostamenti e piccole deformazioni                                                     | 6         |  |  |
|          | Corpo rigido                                                                                   | 7         |  |  |
|          | Teoria del primo ordine                                                                        | 7         |  |  |
|          | Equivalenza statica                                                                            | 7         |  |  |
|          | Teoria del secondo ordine                                                                      | 8         |  |  |
|          | Grandi spostamenti e piccole deformazioni                                                      | 8         |  |  |
| 1.3      | Travi piane                                                                                    | 8         |  |  |
| 1.4      | Vincoli e reazioni vincolari nella teoria delle travi                                          | 9         |  |  |
| 1.4.1    | Vincoli piani semplici                                                                         | 10        |  |  |
|          | Esercizio (doppio doppio pendolo)                                                              | 10        |  |  |
| 1.4.2    | Vincoli piani doppi                                                                            | 11        |  |  |
| 1.4.3    | Vincoli piani tripli                                                                           | 12        |  |  |
| 1.4.4    | Vincoli interni                                                                                | 13        |  |  |
| 1.4.5    | Vincoli spaziali                                                                               | 14        |  |  |
| <b>2</b> | <b>Statica della trave</b>                                                                     | <b>16</b> |  |  |
| 2.1      | Caratteristiche della sollecitazione                                                           | 16        |  |  |
| 2.2      | Relazione tra caratteristiche della sollecitazione e tensioni interne                          | 17        |  |  |
| 2.3      | Forze esterne                                                                                  | 18        |  |  |
| 2.4      | Trave Staticamente piana                                                                       | 19        |  |  |
| 2.5      | Equazioni indefinite di equilibrio di travi piane ad asse rettilineo (teoria del primo ordine) | 20        |  |  |
| 2.6      | Equazioni di discontinuità di travi piane                                                      | 21        |  |  |
| 2.7      | Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (travi piane ad asse rettilineo)          | 22        |  |  |
| 2.7.1    | Convenzioni di segno                                                                           | 22        |  |  |
| 2.7.2    | Forza normale                                                                                  | 23        |  |  |
| 2.7.3    | Taglio e momento flettente                                                                     | 24        |  |  |
| <b>3</b> | <b>Sistemi di travi rigide</b>                                                                 | <b>29</b> |  |  |
| 3.1      | Analisi cinematica dei sistemi di travi rigide                                                 | 29        |  |  |
| 3.2      | Analisi statica dei sistemi di travi rigide                                                    | 30        |  |  |
| 3.3      | Curva delle pressioni                                                                          | 31        |  |  |
| 3.3.1    | Tratto di trave non caricato                                                                   | 31        |  |  |
| 3.3.2    | Tratto di trave con carico distribuito costante (per unità di linea ortogonale al carico)      | 32        |  |  |
| 3.3.3    | Arco parabolico                                                                                | 34        |  |  |
| 3.3.4    | Arco circolare a tre cerniere                                                                  | 36        |  |  |
| 3.3.5    | Cenno all'equilibrio dei fili                                                                  | 37        |  |  |
| 3.4      | Sistemi di travi isostatici                                                                    | 39        |  |  |
| 3.4.1    | Travi Gerber                                                                                   | 39        |  |  |
| 3.4.2    | Sistemi chiusi isostatici                                                                      | 40        |  |  |
| 3.4.2.1  | Esempio 1                                                                                      | 40        |  |  |
| 3.4.2.2  | Esempio 2                                                                                      | 45        |  |  |
|          | Isostaticità                                                                                   | 45        |  |  |
|          | Reazioni interne ed esterne                                                                    | 46        |  |  |
| 3.4.3    | Travature reticolari isostatiche                                                               | 47        |  |  |
| 3.4.3.1  | Condizioni di isostaticità                                                                     | 48        |  |  |
| 3.4.3.2  | Esempi di travature reticolari piane                                                           | 49        |  |  |
| 3.4.3.3  | Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo dei nodi                           | 49        |  |  |
| 3.4.3.4  | Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo delle sezioni di Ritter            | 54        |  |  |
| <b>4</b> | <b>Cinematica della trave inflessa</b>                                                         | <b>56</b> |  |  |
| 4.1      | Ipotesi cinematiche                                                                            | 56        |  |  |
| 4.2      | Campo di spostamenti dovuto ad una rotazione                                                   | 57        |  |  |
| 4.3      | Variabili cinematiche                                                                          | 60        |  |  |
| 4.3.1    | Decomposizione di spostamenti e rotazioni                                                      | 60        |  |  |
| 4.3.2    | Trave cinematicamente piana                                                                    | 61        |  |  |

|                                                                                        |           |                                                                                        |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.3 Vincolo di trave inflessa . . . . .                                              | 62        | <b>7 Assi coniugati</b>                                                                | <b>101</b> |
| 4.4 Deformazioni . . . . .                                                             | 63        | 7.1 Relazione tra asse neutro e asse di sollecitazione . . . . .                       | 102        |
| 4.4.1 Dilatazione della linea d'asse . . . . .                                         | 63        | 7.2 Assi coniugati nel riferimento principale . . . . .                                | 104        |
| 4.4.2 Curvatura . . . . .                                                              | 63        | 7.3 Sistema di riferimento coniugato . . . . .                                         | 106        |
| <b>5 Legame costitutivo per la trave inflessa</b>                                      | <b>67</b> | 7.3.1 Sistema di riferimento obliquo . . . . .                                         | 106        |
| 5.1 Legame costitutivo nell'intorno di un punto . . . . .                              | 68        | 7.3.2 Rappresentazione del tensore di Eulero . . . . .                                 | 108        |
| 5.1.1 Legame costitutivo elastico . . . . .                                            | 68        | 7.4 Ellisse centrale di inerzia (o ellisse di Culmann) . . . . .                       | 109        |
| 5.1.2 Legame costitutivo elastoplastico . . . . .                                      | 69        | 7.4.1 Proprietà dell'ellisse centrale di inerzia . . . . .                             | 111        |
| 5.2 Dilatazione delle fibre longitudinali . . . . .                                    | 70        | 7.4.2 Esercizio: dimostrazione algebrica della proprietà<br>dei semidiametri . . . . . | 112        |
| 5.2.1 Travi piane ad asse rettilineo . . . . .                                         | 70        | <b>8 Sezioni omogenee</b>                                                              | <b>115</b> |
| 5.2.2 Travi piane ad asse curvo . . . . .                                              | 71        | 8.1 Sezioni tipiche . . . . .                                                          | 116        |
| 5.3 Legame costitutivo tra forza normale e dilatazione della<br>linea d'asse . . . . . | 73        | 8.1.1 Rettangolo . . . . .                                                             | 116        |
| 5.3.1 Travi a forte curvatura . . . . .                                                | 74        | 8.1.2 Rettangolo sottile . . . . .                                                     | 117        |
| 5.4 Legame costitutivo tra momento flettente e curvatura . . . . .                     | 74        | 8.1.3 Triangolo rettangolo . . . . .                                                   | 118        |
| 5.4.1 Travi a forte curvatura . . . . .                                                | 75        | 8.1.4 Arco circolare sottile . . . . .                                                 | 120        |
| 5.4.2 Appendice (doppio prodotto vettoriale) . . . . .                                 | 76        | 8.1.5 Settore circolare . . . . .                                                      | 122        |
| 5.5 Travi omogenee a piccola curvatura . . . . .                                       | 77        | 8.2 Sezioni composte di parti semplici . . . . .                                       | 123        |
| 5.6 Travi piane . . . . .                                                              | 77        | 8.2.1 Esempio 1: Sezione composta di due rettangoli . . . . .                          | 123        |
| <b>6 Geometria delle masse</b>                                                         | <b>79</b> | 8.2.2 Esempio 2: Sezione rettangolare con un intaglio . . . . .                        | 125        |
| 6.1 Masse distribuite su un'area piana . . . . .                                       | 79        | 8.2.3 La sezione a C sottile . . . . .                                                 | 128        |
| 6.2 Vettore dei momenti statici . . . . .                                              | 80        | 8.2.4 Sezione a Z . . . . .                                                            | 130        |
| 6.2.1 Momenti statici . . . . .                                                        | 81        | Riferimenti bibliografici . . . . .                                                    | 133        |
| 6.2.2 Proprietà del baricentro . . . . .                                               | 83        | Indice analitico . . . . .                                                             | 135        |
| 6.3 Tensore di inerzia . . . . .                                                       | 85        |                                                                                        |            |
| 6.3.1 Momenti di inerzia . . . . .                                                     | 87        |                                                                                        |            |
| 6.3.2 Formule di trasposizione (o del trasporto) . . . . .                             | 89        |                                                                                        |            |
| 6.3.3 Raggi di inerzia . . . . .                                                       | 91        |                                                                                        |            |
| 6.4 Direzioni e momenti principali di inerzia . . . . .                                | 91        |                                                                                        |            |
| 6.4.1 Equazione caratteristica e proprietà delle direzioni<br>principali . . . . .     | 92        |                                                                                        |            |
| 6.4.2 Relazione tra tensore di inerzia e tensore di Eulero . . . . .                   | 94        |                                                                                        |            |
| 6.4.3 Calcolo delle direzioni principali . . . . .                                     | 95        |                                                                                        |            |
| 6.4.4 Formule di rotazione . . . . .                                                   | 96        |                                                                                        |            |
| 6.4.5 Circonferenza di Mohr . . . . .                                                  | 97        |                                                                                        |            |

# Capitolo 1

## Premesse

### 1.1 Geometria della trave

Una trave è geometricamente un solido monodimensionale descritto da una linea media  $\ell$ , detta asse della trave, e dalle sezioni rette associate ai punti della linea d'asse (fig. 1.1a). A sua volta una sezione retta  $A$  è

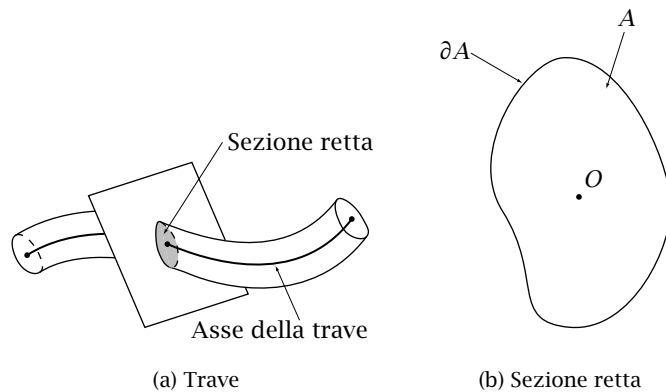


Figura 1.1: Geometria della trave

un'area piana limitata, in generale a connessione multipla, avente quale contorno  $\partial A$  una o più linee chiuse (fig. 1.1b).

Equivalentemente, una trave può anche essere definita quale solido generato da una figura piana, vincolata ad essere perpendicolare ad una data linea, che si muove nello spazio lungo la linea stessa variando, in

generale, di forma e di dimensioni. In tale descrizione gli ingredienti del modello sono la linea d'asse quale linea guida del moto, le sezioni rette e i loro punti posti sulla linea d'asse quali posizioni nei diversi istanti di tempo della figura piana che si muove nello spazio e, rispettivamente, del suo punto vincolato alla linea, ed infine la legge di variazione nel tempo della figura piana e il suo moto.

Come indicato in fig. 1.2a, un generico punto  $O$  della linea d'asse della

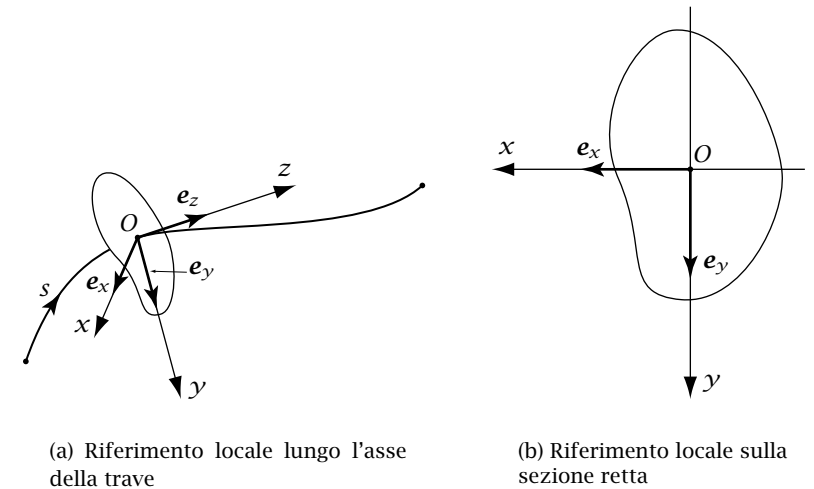


Figura 1.2: Riferimento locale

trave può al solito essere individuato da un'ascissa curvilinea  $s$ . Inoltre, ancora nel punto  $O$ , la direzione  $z$  ortogonale alla sezione retta, e quindi tangente alla linea d'asse, individua un sistema di riferimento cartesiano ortogonale locale  $Oxyz$ , con  $x$  e  $y$  ortogonali tra loro e posti sulla sezione retta (fig. 1.2b). A tale sistema di riferimento è naturalmente associata una base ortonormale locale  $e_x, e_y, e_z$ .

Si noti che la scelta di una linea d'asse da associare ad un generico corpo monodimensionale ha, allo stato attuale, ampi margini di arbitrarietà. Se, e quando, lo sviluppo dei particolari di un dato modello di trave dovesse fornire un significato fisico preciso a certi punti di una sezione retta, la scelta della linea d'asse ne potrà essere naturalmente condizionata.

Si noti inoltre che il modello geometrico prescelto di trave non deve, obbligatoriamente, coincidere con un dato corpo monodimensionale ma può semplicemente approssimarli, soprattutto se in tal modo si semplifica l'analisi del problema. A supporto di tale affermazione si consideri una tipica mensola in cemento armato, quale quella riportata in fig. 1.3, di sezioni verticali rettangolari. Innanzitutto, la forma del-

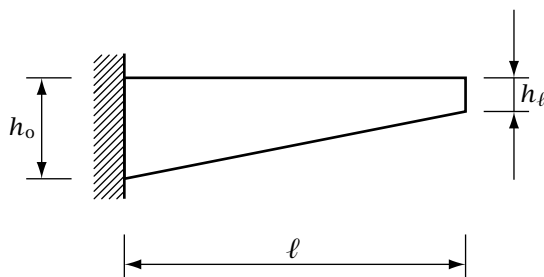


Figura 1.3: Casseratura della mensola

la mensola suggerirebbe una linea d'asse leggermente inclinata rispetto alla orizzontale ma, data la piccolezza, e quindi l'ininfluenza, di tale inclinazione è prassi la scelta di una linea d'asse orizzontale. Le sezioni rette (verticali) sono rettangolari e quindi doppiamente simmetriche e potrebbe essere quindi desiderabile scegliere quale linea d'asse il luogo dei punti intersezione degli assi di simmetria. Con tale scelta il modello geometrico individua il corpo di fig. 1.4, che non coincide geometrica-

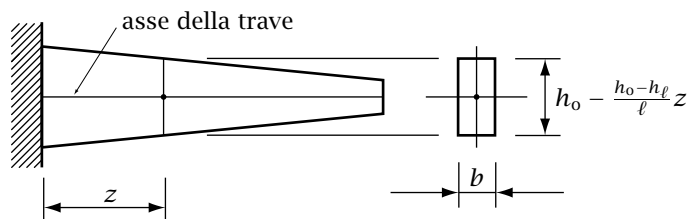


Figura 1.4: Modello geometrico della mensola

mente con la mensola originale che il modello vuole descrivere ma, più semplicemente, l'approssima.

A questo punto si ricorda che l'attendibilità del modello di trave dipende dal rapporto  $\ell/H$  tra la lunghezza della linea d'asse  $\ell$  e una dimensione significativa  $H$  delle sezioni rette. A parità di forma della sezione, più tale rapporto è grande e più la trave è snella, viceversa più tale rapporto è piccolo e più la trave è tozza. In base al valore del rapporto è quindi possibile distinguere, almeno in linea di principio, tra *travi tozze* e *travi snelle*. Naturalmente, più una trave è tozza e meno il solido che rappresenta si presta ad essere descritto da un modello monodimensionale per cui un termine come quello di *trave molto tozza* è contraddittorio. Nei casi concreti ci si può aspettare una differenza di comportamento all'aumentare del rapporto  $\ell/H$ , differenza di comportamento che permetterà di definire il concetto di travi tozze e travi snelle nel dato contesto. Aumentando ulteriormente il rapporto, restando quindi nell'ambito delle travi snelle, si potrebbe verificare un'ulteriore differenza di comportamento, dando in tal modo sostegno al concetto di *travi molto snelle*.

## 1.2 Ipotesi cinematiche

Le azioni esterne agenti su un corpo generico, e quindi anche su una trave, avranno l'effetto sia di provocarne il moto, almeno nel caso in cui non siano opportunamente contrastate, che di variarne la forma, ovverossia di *deformarlo*. Le *deformazioni* potranno essere più o meno pronunciate in dipendenza sia delle proprietà del o dei materiali componenti il corpo che dell'entità delle azioni stesse, ma rappresentano una conseguenza inevitabile se il corpo viene sollecitato. Comunque molti materiali hanno la proprietà di essere notevolmente rigidi, cioè di deformarsi poco anche in presenza di sollecitazioni notevoli. Questo consente spesso di utilizzare senza problemi la *meccanica del corpo rigido* al fine della descrizione del moto di un corpo, oppure del suo equilibrio se la possibilità del moto è opportunamente contrastata. D'altronde il modello di corpo rigido non è, evidentemente, in grado di fornire il quadro deformativo del corpo, quadro che è spesso necessario conoscere anche nel caso le deformazioni siano piccole. Non solo, ma non è nemmeno quasi mai in grado, per limitazioni intrinseche al modello, di fornire il quadro delle sollecitazioni interne, quadro da cui non si può prescindere per stimare la sicurezza delle costruzioni.

### 1.2.1 Campi di spostamento

Con riferimento alla fig. 1.5 la cinematica di una trave sarà descritta

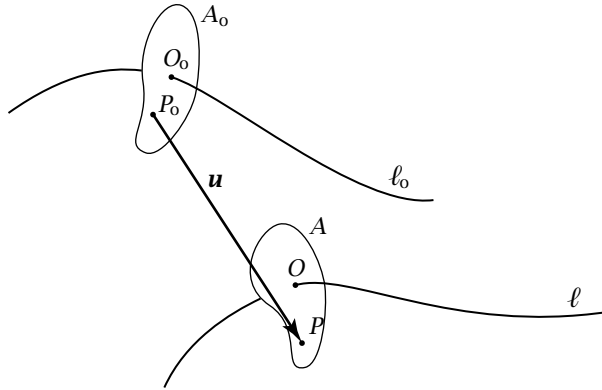


Figura 1.5: Spostamenti

scegliendo innanzitutto una configurazione di riferimento, individuata dalla sua linea d'asse  $\ell_0$  e dalle associate sezioni rette  $A_0$ . Nel caso più generale possibile, la configurazione deformata della trave sarà quindi caratterizzata da una linea d'asse  $\ell$  e dalle associate sezioni rette  $A$  deformate. La linea d'asse e le sezioni rette deformate possono essere, per es., individuate dagli spostamenti dei punti posti sulla linea d'asse e sulle sezioni rette nella configurazione di riferimento. Nello spirito di un modello monodimensionale, che vuole essere una semplificazione rispetto al modello tridimensionale, tutte le funzioni che intervengono dovranno però essere definite solo sui punti della linea d'asse di riferimento. Ne consegue che i campi di spostamento definiti nei punti delle sezioni rette indeformate devono essere fatti dipendere approssimativamente da un certo numero di funzioni definite sulla linea d'asse indeformata. Tale dipendenza equivale ad un vincolamento dei campi di spostamento delle sezioni rette.

Posto il problema in questi termini, ne consegue immediatamente che in generale le sezioni rette sono una proprietà della sola configurazione di riferimento, salvo il caso particolare della cinematica della trave inflessa, che infatti richiede alle sezioni rette, come si vedrà più avanti, di restare piane e perpendicolari alla linea d'asse anche dopo la deformazione. Naturalmente la trave deformata è ancora un solido monodimen-

sionale e come tale descrivibile geometricamente da una linea d'asse e da delle associate sezioni rette, che però in generale non corrisponderebbero, tramite la deformazione, alle sezioni rette della configurazione di riferimento.

Per quel che riguarda la linea d'asse deformata, questa può essere individuata in generale dallo spostamento  $\mathbf{u}$  dei suoi punti. Indicando con  $O_0$  il generico punto della linea d'asse indeformata  $\ell_0$ , resta così individuata la seguente funzione a valori vettoriali:

$$\mathbf{u}: \ell_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad O_0 \mapsto \mathbf{u}(O_0). \quad (1)$$

Se sulla linea d'asse indeformata viene scelta un'ascissa curvilinea  $s$ , per es. definita dalla distanza, misurata sulla linea, del generico punto da uno dei due punti di estremità, la funzione (1) diventa:

$$\mathbf{u}: [0, \ell_0] \rightarrow \mathcal{V}, \quad s \mapsto \mathbf{u}(s), \quad (2)$$

dove ora  $\ell_0$  indica la lunghezza della linea d'asse di riferimento.

La descrizione della cinematica delle sezioni rette per il tramite di funzioni definite sulla linea d'asse implica invece una scelta del modello cinematico di trave che si vuole utilizzare. Naturalmente tale scelta è vincolata dall'attendibilità dei risultati per i casi concreti che si debbono risolvere.

### 1.2.2 Modelli cinematici

Citiamo nel seguito i più comuni, e quindi semplici, modelli cinematici utilizzati in ambito tecnico.

**Trave rigida.** Come detto, il modello di corpo rigido prescinde dalla deformazione che la trave sviluppa quando soggetta ad azioni esterne. La trave subisce al più un moto rigido e il campo di spostamenti complessivo è quindi quello di un moto rigido. Le sezioni rette subiscono lo stesso moto rigido della trave e quindi i parametri del moto rigido sono le funzioni, in tal caso costanti lungo la linea d'asse, da cui dipendono i campi di spostamento delle singole sezioni rette.

**Sezione indeformata.** Il modo più semplice di descrivere il campo degli spostamenti di una trave deformabile è quello di richiedere che le

sezioni rette restino indeformate. In tal modo il campo degli spostamenti e le associate deformazioni della trave, quale solido tridimensionale, dipendono esclusivamente dagli spostamenti rigidi delle sezioni rette. Questo è quanto di più vicino possa esserci all'idea di trave quale corpo monodimensionale. Le funzioni da cui dipendono i campi di spostamento delle singole sezioni rette sono quindi in tal caso i parametri del moto rigido delle sezioni stesse che, a differenza del caso della trave rigida, sono variabili in generale lungo la linea d'asse, potendo quindi produrre una deformazione della trave.

L'unica richiesta di sezione retta indeformata equivale alle due seguenti ipotesi:

1. Le sezioni rette si conservano piane;
2. Le sezioni rette si conservano indeformate nel proprio piano;

ed è in questa forma che spesso viene citata tale ipotesi cinematica.

Il modello di *trave inflessa*, che svilupperemo nel seguito, così come il modello alla base della *teoria tecnica della trave* utilizzano l'ipotesi di sezione indeformata:

1. **Trave inflessa (Eulero-Bernoulli).** È bene chiarire subito che l'ipotesi di sezione retta indeformata non ha, nel modello di trave inflessa, semplicemente il ruolo di approssimare il campo di spostamenti reale, ma riveste un ruolo strumentale negli sviluppi del modello stesso. Ne consegue che più tale ipotesi è realistica e più il modello è attendibile. A tale proposito si può per es. dire che nel *problema di Saint-Venant*, la cui soluzione è ottenuta nell'ambito del modello di corpo solido e quindi senza alcuna restrizione cinematica, la sezione in generale si deforma nel proprio piano e si ingobba fuori di questo. Tuttavia in alcuni casi semplici di tale problema, e che sono poi quelli che si prestano ad essere risolti dal modello di trave inflessa, la sezione si conserva piana pur continuando a deformarsi nel proprio piano. Tra l'altro, questo risultato mostra che delle due ipotesi che equivalgono all'unica richiesta di sezione indeformabile, quella che gioca il ruolo principale è la conservazione della sezione piana;
2. **Teoria tecnica delle travi (Saint-Venant).** In tal caso l'implementazione del modello si ottiene attraverso una estensione della soluzione del problema di Saint-Venant, per cui il moto rigido delle

sezioni rette delle travi si riduce ad un *moto rigido medio* della sezione, sezione che, come detto, può in generale sia deformarsi nel proprio piano che fuori di questo.

**Sezione indeformata nel proprio piano.** Vi sono casi in cui l'ipotesi cinematica di indeformabilità delle sezioni rette è troppo restrittiva e necessita quindi di essere allentata. Tra questi per es. il problema della *torsione di travi di sezione sottile aperta*. In tal caso, agli spostamenti dovuti al moto rigido della sezione retta viene sommato un campo di spostamenti ortogonale alla sezione stessa che la ingobbano, pur conservandola indeformata nel proprio piano. Il campo di spostamenti ortogonale alla sezione viene ottenuto moltiplicando una funzione definita sulla linea d'asse, costituente una delle incognite del problema, con una funzione definita sulla sezione retta, detta *funzione di ingobbamento* e dipendente solo dalla forma geometrica della sezione stessa (*teoria di Vlasov*).

### 1.2.3 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni

È già stato detto più sopra che i corpi solidi reali si deformano poco anche se soggetti ad azioni esterne notevoli. È a questo punto necessario essere più precisi, in quanto è evidente che diminuendo opportunamente l'entità delle azioni esterne si può sempre fare in modo che le deformazioni siano sufficientemente piccole. La chiave è naturalmente nella espressione “azioni esterne notevoli”, che indica genericamente azioni senz'altro non inferiori a quelle a cui il corpo si trova normalmente ad essere soggetto. In altri termini, per parlare di piccole deformazioni queste devono essere dovute agli effettivi carichi normalmente agenti.

Se un corpo solido reale è vincolato in modo tale da non poter subire degli spostamenti rigidi, non solo le deformazioni, ma anche gli spostamenti che conseguono all'applicazione delle azioni esterne effettive sono spesso di piccola entità. D'altronde se il corpo, non sufficientemente vincolato, può subire degli spostamenti rigidi di notevole entità, mentre le deformazioni continuano ad essere spesso ancora di piccola entità, ciò non può dirsi in generale per gli spostamenti. Tuttavia è in tal caso spesso possibile ottenere un campo di spostamenti di piccola entità se agli spostamenti complessivi vengono tolti i contributi di un opportuno campo di spostamenti rigidi.

Ciò premesso, si può allora ottenere una notevole semplificazione dei problemi di meccanica dei solidi, e quindi di meccanica della trave, svi-

luppandoli sotto l'*ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni*, con l'avvertenza che per "spostamenti" deve intendersi in generale "spostamenti a meno di un opportuno campo di spostamenti rigidi". Naturalmente la "piccolezza" sia degli spostamenti che delle deformazioni può essere più o meno pronunciata e quindi più o meno accettabile nelle varie circostanze. Si comprende quindi come vi possano essere diversi gradi di applicazione delle semplificazioni che ne derivano. Nel seguito elencheremo alcune possibilità di semplificazione basate sulla ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, chiarendo così i limiti di applicabilità che ne conseguono.

**Corpo rigido.** La semplificazione più drastica è naturalmente quella di trascurare completamente le deformazioni, il che conduce direttamente al modello di corpo rigido. Se il corpo è sufficientemente vincolato gli spostamenti sono nulli e la configurazione finale coincide con quella iniziale. Se invece il corpo è libero di muoversi il suo moto è rigido, il campo degli spostamenti a meno del moto rigido è nullo, e la configurazione finale differisce da quella iniziale. In entrambi i casi l'equilibrio (o più in generale il bilancio) viene scritto nella configurazione finale, che è quella in cui sussiste l'equilibrio (o il bilancio). Nel primo caso la configurazione finale coincide, come detto, con quella iniziale, mentre in entrambi i casi si tratta di una configurazione indeformata. L'*ipotesi di indeformabilità* può quindi essere separata nelle tre ipotesi seguenti:

1. Spostamenti nulli, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. Deformazioni nulle;
3. Equilibrio scritto in una configurazione indeformata (nella configurazione iniziale indeformata se è impedito il moto rigido).

Come già detto, il modello di corpo rigido è una semplificazione troppo drastica, poiché elimina la possibilità di poter calcolare non solo la deformazione e gli spostamenti aggiuntivi dovuti a questa, il che è evidente, ma anche la sollecitazione interna.

**Teoria del primo ordine.** Per poter calcolare sia la deformazione che la sollecitazione di un corpo solido occorre quindi mettere in conto la deformazione stessa. Il modo più semplice per farlo è di assumere l'ipotesi di piccolezza sia degli spostamenti che della deformazione con tutte

le conseguenti approssimazioni. Il che poi da una parte significa linearizzare le relazioni dipendenti dagli spostamenti e dalle deformazioni trascurando tutto ciò che è di ordine superiore al primo negli stessi spostamenti e deformazioni. Dall'altra parte significa invece approssimare, ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio (oppure di bilancio), la configurazione finale deformata con una configurazione indeformata vicina, grazie all'ipotesi di piccolezza degli spostamenti che conducono dalla configurazione indeformata a quella deformata.

A questo punto è bene segnalare che anche ad eventuali spostamenti rigidi di piccola entità vanno applicate le approssimazioni di cui sopra. In altri termini, un campo di spostamenti rigidi piccolo può essere linearizzato, trascurando tutto ciò che è di ordine superiore al primo nei parametri lagrangiani che lo descrivono. Non solo, ma anche la configurazione finale può essere approssimata dalla configurazione iniziale. Se allora il corpo è vincolato a non subire spostamenti rigidi di notevole entità (potendoli però in generale subire di piccola entità) la configurazione finale deformata può confondersi con quella indeformata iniziale.

Un modello sviluppato utilizzando queste approssimazioni prende il nome di *teoria del primo ordine*. Riassumendo, una teoria del primo ordine è basata sulle seguenti ipotesi:

1. Piccoli spostamenti, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. Piccole deformazioni;
3. Equilibrio scritto in una configurazione indeformata vicina a quella deformata (nella configurazione iniziale indeformata se sono impediti spostamenti rigidi di notevole entità).

Si noti che in una teoria del primo ordine l'equilibrio viene scritto in una configurazione indeformata, come se il corpo fosse rigido. Si può quindi enunciare la seguente

- **Equivalenza statica.** *La statica di un sistema deformabile, sviluppata con le approssimazioni di una teoria del primo ordine, coincide con quella dello stesso sistema considerato composto da corpi rigidi.*

La meccanica della trave sviluppata nei capitoli seguenti è una teoria del primo ordine, quindi basata sull'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazione e su tutte le sue conseguenze.

**Teoria del secondo ordine.** Vi sono casi in cui le azioni esterne applicate sono tali che non è lecito scrivere l'equilibrio in una configurazione indeformata vicina a quella deformata, nonostante gli spostamenti (eventualmente a meno di un moto rigido) e le deformazioni dovute alle stesse forze possano ancora essere considerati piccoli. La piccolezza degli spostamenti e delle deformazioni permettono ancora di trascurare i termini di ordine superiore negli spostamenti e nelle deformazioni stesse ma non vi è più l'equivalenza statica tra sistemi deformabili e sistemi rigidi.

Questi casi si presentano quando la coincidenza della struttura deformata con quella indeformata si ottiene al prezzo di trascurare termini piccoli negli spostamenti (anche del primo ordine) che però modificano quantità altrimenti nulle. Se tali quantità intervengono nelle equazioni di equilibrio, non sempre la loro piccolezza garantisce la loro trascurabilità. In tale ottica la singola quantità può essere semplificata, però trascurando termini di ordine superiore rispetto ad altri che devono in ogni caso comparire nelle equazioni di equilibrio.

Un modello sviluppato utilizzando queste approssimazioni prende il nome di *teoria del secondo ordine*. Quindi una teoria del secondo ordine è basata solo sulle prime due ipotesi alla base di una teoria del primo ordine:

1. Piccoli spostamenti, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. Piccole deformazioni.

**Grandi spostamenti e piccole deformazioni.** Nel caso di *travi molto snelle* gli spostamenti possono facilmente diventare grandi non tanto perché le deformazioni sono grandi, ma in quanto queste sono distribuite su una notevole lunghezza. Ne risulta che in tal caso non sono più possibili le linearizzazioni dovute all'ipotesi di piccoli spostamenti, ma continuano ad essere lecite quelle dovute all'ipotesi di piccole deformazioni. Poiché l'equilibrio può essere scritto in una configurazione indeformata vicina a quella deformata solo se gli spostamenti sono piccoli, in tal caso tale approssimazione non è di conseguenza mai lecita.

Quindi un modello di trave molto snella può essere basato solo sulla seconda ipotesi alla base di una teoria del primo ordine, e cioè quella di *piccole deformazioni*.

### 1.3 Travi piane

Limitandosi al caso di una cinematica della sezione retta descritta da un moto rigido (ipotesi di sezione indeformata), una trave è detta *cinematicamente piana* se esiste un piano, detto *piano di flessione* (fig. 1.6), tale che:

1. L'asse indeformato e l'asse deformato della trave appartengono a tale piano;
2. Le rotazioni delle sezioni rette avvengono attorno ad assi perpendicolari a tale piano.

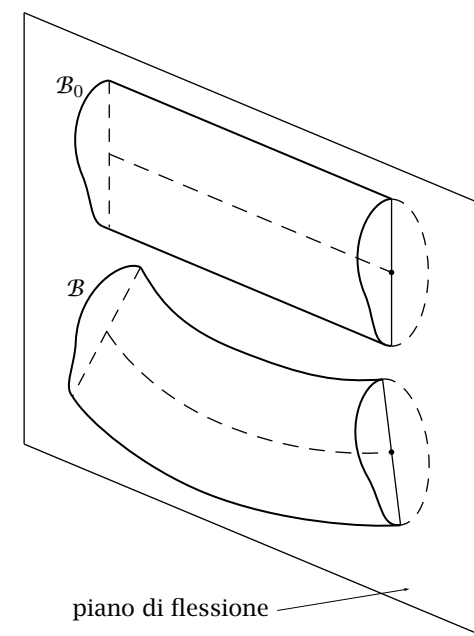


Figura 1.6: Trave cinematicamente piana

Si noti che in tal modo gli spostamenti dei punti della trave avvengono parallelamente al piano di flessione. Si noti poi che la definizione fa riferimento alla configurazione indeformata, configurazione che nel caso piano non può quindi essere arbitraria. Si noti infine che se l'asse

indeformato della trave è rettilineo il piano di flessione può essere uno qualunque dei piani di sostegno l'asse, mentre nel caso di asse curvo indeformato l'unica possibilità è quella del piano che contiene l'asse.

Una trave è invece detta *staticamente piana* se esiste un piano, detto *piano di sollecitazione*, tale che:

1. L'asse deformato della trave appartiene a tale piano;
2. Il sistema delle forze esterne, così come il sistema delle forze interne, applicate ai punti di una sezione retta è equivalente ad un sistema di forze appartenenti a tale piano.

Si noti che in tal modo un qualunque momento del sistema delle forze esterne (oppure delle forze interne) relative ad una sezione retta e valutato rispetto ad un punto del piano di sollecitazione ha asse momento perpendicolare al piano stesso. Si noti poi che, a differenza del caso cinematicamente piano, la definizione fa riferimento alla sola configurazione deformata e che quindi non dipende dalla configurazione di riferimento. Tuttavia, si ricordi che nell'ambito di una teoria del primo ordine ai fini dell'equilibrio la configurazione deformata si fa coincidere con quella indeformata. In tal caso al piano della trave è richiesto di contenere l'asse indeformato, e la configurazione deformata risulta ininfluente ai fini statici.

Si dice infine che una trave è *piana* se è contemporaneamente piana sia dal punto di vista cinematico che da quello statico. Nel caso di una trave ad asse indeformato curvilineo i piani di flessione e di sollecitazione devono coincidere con il piano dell'asse e quindi coincidono tra loro. Nell'ambito di una teoria del primo ordine e se l'asse indeformato della trave è rettilineo può invece presentarsi il caso di trave piana con piani di flessione e di sollecitazione non coincidenti. Una condizione sufficiente ad assicurare che una trave sia piana, con piani di flessione e di sollecitazione coincidenti in ogni caso, è che le forze applicate e le sezioni rette siano simmetriche rispetto al piano dell'asse indeformato, oppure ad un piano contenente l'asse indeformato se questi è rettilineo. La simmetria delle sezioni rette deve naturalmente riguardare anche il materiale di cui la trave è composta.

## 1.4 Vincoli e reazioni vincolari nella teoria delle travi

Come noto, *vincolare*<sup>1</sup> un punto equivale ad imporre delle limitazioni cinematiche al moto del punto stesso. Una delle assunzioni fondamentali della meccanica ammette l'esistenza delle *reazioni vincolari* o *reazioni dei vincoli*,<sup>2</sup> cioè di forze che possono essere sostituite ai vincoli senza alterare lo stato del punto vincolato. Un'ulteriore assunzione, limitata ai vincoli privi di attrito, permette a volte di determinare la direzione e anche il verso della reazione vincolare. Precisamente si suppone che la reazione vincolare abbia la direzione e verso opposto di uno spostamento del punto *totalmente impedito*.<sup>3</sup> Se il vincolo è anche *bilaterale*, come supporremo nel seguito, il verso non è più prevedibile e gli spostamenti totalmente impediti hanno direzione ortogonale a qualunque incremento di spostamento possibile, cioè non impedito dal vincolo stesso. In tal caso la reazione vincolare è quindi ortogonale a qualunque incremento di spostamento non impedito dal vincolo.

Nello spirito della teoria delle travi, descritte da una cinematica che lascia indeformate le sezioni rette, non sono però in generale i singoli punti ad essere vincolati ma le stesse sezioni rette. Ne consegue che un *vincolo di una trave* riguarda un'intera sezione retta e come tale limita l'incremento di moto rigido (eventualmente medio) di tale sezione. A un tale vincolo corrisponde quindi una reazione vincolare che riguarda l'intera sezione vincolata, rappresentata in generale dalla *reazione risultante* e dalla *reazione momento risultante* di tutte le reazioni corrispondenti al vincolamento della data sezione. L'incremento di moto rigido della sezione retta può essere descritto in termini di incremento di rotazione attorno ad un punto e di traslazione dello stesso punto. Se questo è il caso, la reazione risultante può avere quale retta d'azione una qualunque delle direzioni passanti dal punto che sia ortogonale agli incrementi di traslazione ammissibili, mentre la reazione momento risultante può avere quale direzione dell'asse momento una qualunque direzione ortogonale agli assi degli incrementi di rotazione possibili.

Nel seguito analizzeremo il caso delle travi piane e accenneremo al caso delle travi spaziali. Si ricordi che nel caso di travi piane la sola

<sup>1</sup> Vincolo si rende con *constraint* nella letteratura inglese.

<sup>2</sup> *Forces of constraint* nella letteratura inglese.

<sup>3</sup> Uno spostamento totalmente impedito da un vincolo porterebbe il punto in una posizione a cui il punto stesso non può avvicinarsi con incrementi di spostamento consentiti dal vincolo.

rotazione possibile è attorno ad un asse perpendicolare al piano della trave, mentre una eventuale reazione momento risultante deve avere asse ortogonale al piano della trave.

### 1.4.1 Vincoli piani semplici

I *vincoli semplici* impediscono un solo grado di libertà. Nel caso di trave piana, vi sono quindi due tipi di vincoli semplici. Un primo tipo impedisce l'incremento di spostamento di un punto della sezione retta in una data direzione, punto che può anche non appartenere alla linea d'asse della trave. In tal caso la retta d'azione della reazione risultante è parallela a tale direzione e passa per il punto vincolato, mentre la reazione momento risultante è nulla. Tale tipo di vincolo può essere rappresentato graficamente da un *carrello* con piano di scorrimento perpendicolare all'incremento di spostamento impedito (fig. 1.7a), oppure

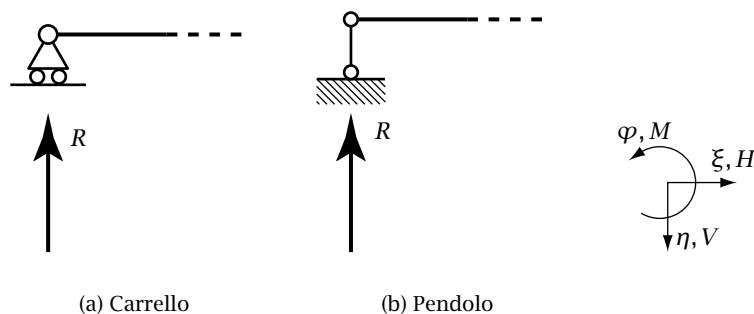


Figura 1.7: Vincoli che impediscono l'incremento di spostamento in una data direzione

da un *pendolo semplice* il cui asse ha quindi la direzione dell'incremento di spostamento impedito (fig. 1.7b). Si osservi che l'equivalenza tra il carrello e il pendolo semplice riguarda il solo incremento del moto, e quindi anche il tipo di reazione, poiché l'uno vincola il punto a spostarsi lungo una retta e l'altro lungo una circonferenza. Comunque, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti il carrello e il pendolo semplice possono considerarsi equivalenti, almeno approssimativamente, anche nella descrizione degli spostamenti in un intervallo finito di tempo. Nel caso dei due vincoli illustrati in fig. 1.7, le condizioni cinematiche e le

conseguenti condizioni statiche sulle componenti di reazione possono scriversi, con le convenzioni indicate nella stessa figura:

$$d\eta = 0, \quad H = 0, \quad M = 0, \quad (3)$$

mentre l'incremento di spostamento orizzontale  $d\xi$ , l'incremento di rotazione  $d\varphi$  e la componente verticale  $V$  della reazione risultante sono indeterminate e quindi, in generale, diverse da zero.

Il secondo tipo di vincolo semplice impedisce l'incremento di rotazione della sezione retta mentre consente un generico incremento di traslazione. La reazione consiste quindi in una coppia agente nel piano della trave, cioè con asse momento ortogonale al piano della trave e quindi coincidente con l'asse della rotazione impedita. Tale tipo di vincolo può essere rappresentato graficamente da un *doppio doppio pendolo* o *pendolo improprio*, costituito da due coppie di doppi pendoli connessi tramite un elemento rigido e con gli assi delle due coppie di doppi pendoli non allineati (fig. 1.8). Con riferimento alla fig. 1.8, le condi-

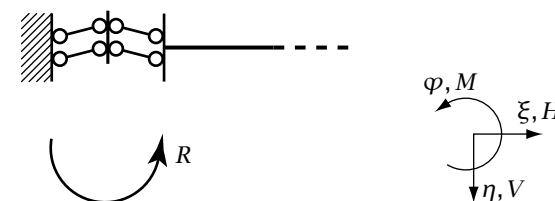


Figura 1.8: Doppio doppio pendolo (pendolo improprio)

zioni cinematiche che definiscono il vincolo e le conseguenti condizioni statiche sulle componenti di reazione possono scriversi:

$$d\varphi = 0, \quad H = 0, \quad V = 0, \quad (4)$$

mentre gli incrementi di spostamento, sia orizzontale  $d\xi$  che verticale  $d\eta$ , e la reazione momento risultante  $M$  sono indeterminati e quindi, in generale, diversi da zero.

**Esercizio (doppio doppio pendolo).** Si vuole verificare nel seguito che il doppio doppio pendolo reagisce al più con una coppia. Infatti, con riferimento allo schema di fig. 1.9a, sull'elemento rigido che connette i

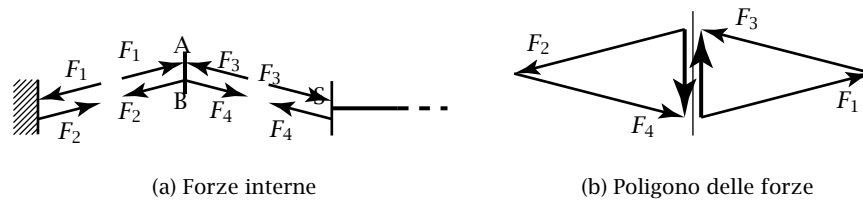


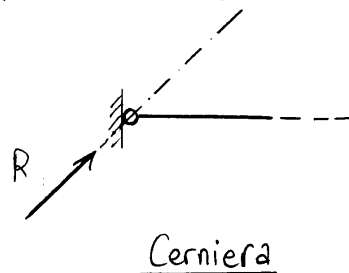
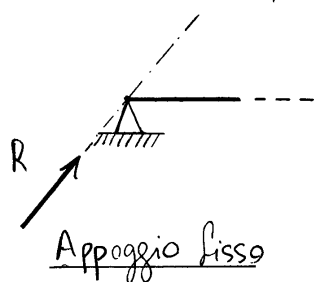
Figura 1.9: Equilibrio interno al doppio pendolo

due doppi pendoli agiscono quattro forze, di cui due nel punto A e due nel punto B. La risultante di  $F_1$  e  $F_3$  passa per A mentre la risultante di  $F_2$  e  $F_4$  passa per B. Per equilibrio tali risultanti devono essere uguali ed opposte ed avere quindi la stessa retta d'azione, che non può che essere verticale (fig. 1.9b). Poiché  $F_3$  e  $F_4$ , così come  $F_1$  e  $F_2$ , sono parallele deve dunque risultare  $F_1 = F_2$  e  $F_3 = F_4$ , con la conseguenza che la sezione S è al più soggetta ad una coppia.

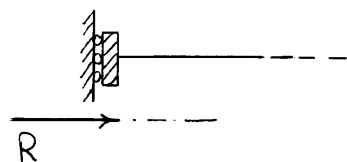
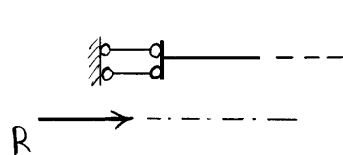
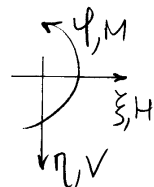
#### 1.4.2 Vincoli piani doppi

I vincoli doppi impediscono due gradi di libertà contemporaneamente e vi sono dunque due tipi di vincoli doppi. Un primo tipo impedisce la traslazione della sezione lasciando libera la rotazione attorno ad un punto e conseguentemente la reazione consiste in una forza passante per tale punto. Il secondo tipo impedisce la rotazione e la traslazione in una direzione, mentre consente alla sezione retta di traslare nella direzione ortogonale a quest'ultima. Di conseguenza la reazione consiste o in una forza avente la direzione

della traslazione impedita oppure in una coppia.



$$\begin{cases} d\xi = 0 & H \neq 0 \\ d\eta = 0 & V \neq 0 \\ d\varphi \neq 0 & M = 0 \end{cases}$$



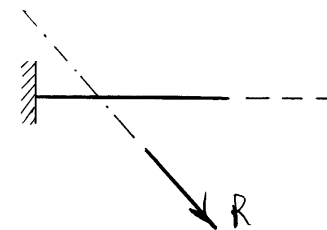
Doppio pendolo

Incastro scorrevole

$$\begin{cases} d\xi = 0 \\ d\eta \neq 0 \\ d\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H \neq 0 \\ V = 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$$

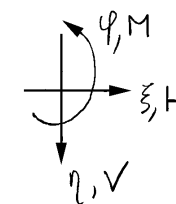
### 1.4.3 Vincoli piani tripli

Esiste chiaramente un unico vincolo triplo (nel caso piano), vincolo che blocca i tre gradi di libertà della sezione retta rendendola fissa nel piano. La reazione vincolare non è quindi soggetta a restrizioni e consiste in una forza avente una generica retta d'azione oppure in una coppia.



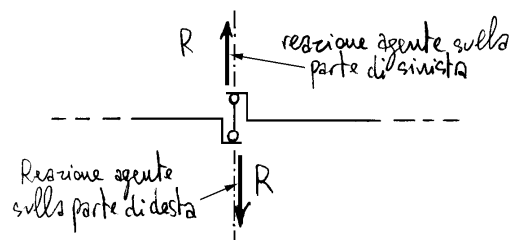
incastro

$$\begin{cases} d\xi = 0 \\ d\eta = 0 \\ d\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H \neq 0 \\ V \neq 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$$

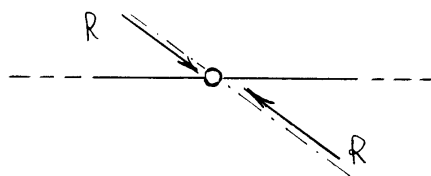


### 1.4.4 Vincoli interni

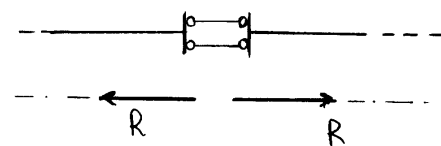
I vincoli interni vincolano una parte della struttura alla parte restante e quindi impediscono spostamenti relativi. A parte questo non hanno niente di diverso dal vincolamento esterno, quando si tenga presente che la reazione del vincolo agisce contemporaneamente sulle due parti vincolate con verso opposto.



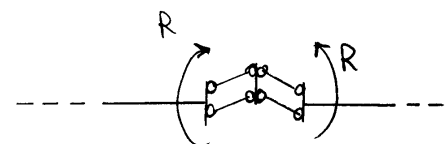
pendolo interno



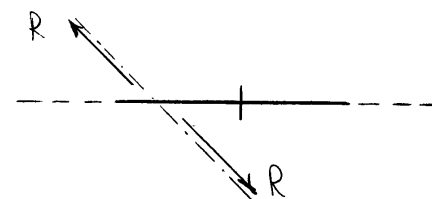
cerniera interna



doppio pendolo  
interno



doppio-doppio  
pendolo interno



Incastro interno

### 1.4.5 Vincoli spaziali

Una sezione retta ha nello spazio 6 gradi di libertà.

I diversi tipi di vincolo impediscono uno o più di tali gradi di libertà. Vediamone alcuni esempi:

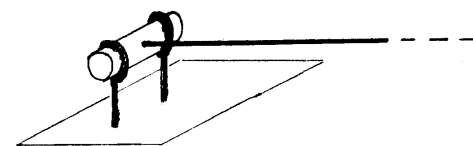
#### a) Cerniera sferica

Blocca la traslazione, ma permette la rotazione attorno ad un punto. Si tratta dunque di un vincolo triplo.

Le reazioni vincolari consistono in una forza passante per il punto attorno al quale avviene la rotazione.

#### b) Cerniera cilindrica

Blocca la traslazione, ma permette la rotazione attorno ad un asse. Si tratta quindi di un vincolo quintuplo (resta un solo grado di libertà).



Le reazioni consistono in generale in una forza passante per l'asse della rotazione e di direzione ortogonale a questo più una forza parallela all'asse della rotazione. Nel caso in cui la componente della risultante parallela all'asse della rotazione è nulla, può agire una coppia di asse momento ortogonale all'asse della rotazione

#### c) Appoggio sferico scorrevole

Consente la traslazione della sezione retta in una direzione parallela al piano di scorrimento dell'appoggio e la rotazione attorno ad un punto. La reazione passa per tale punto ed è perpendicolare al piano di scorrimento.

#### d) Appoggio cilindrico scorrevole

Consente la traslazione della sezione retta nella direzione parallela al piano di scorrimento dell'appoggio, la rotazione attorno ad un asse

perpendicolare al piano di scorrimento e la rotazione attorno ad un altro asse, per es. parallelo al piano di scorrimento.

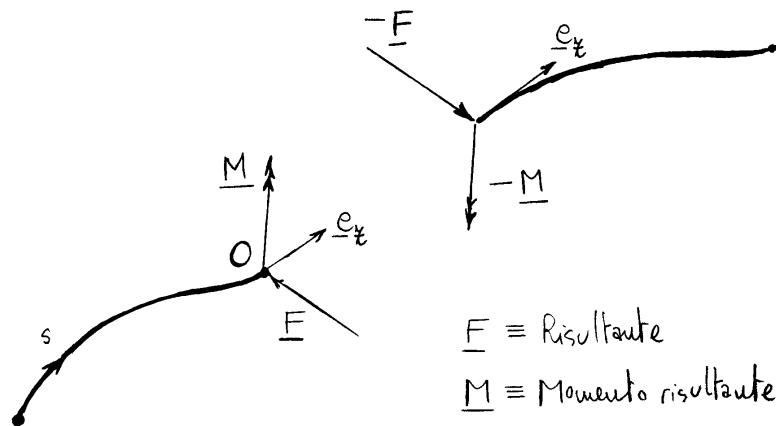
Le rezioni consistono in una forza ortogonale al piano di scorrimento e passante per l'asse di rotazione parallelo al piano di scorrimento, oppure (se la risultante è nulla) in una coppia di asse momento parallelo al piano di scorrimento e ortogonale all'asse di rotazione parallelo al piano di scorrimento.

## Capitolo 2

### Statica della trave

#### 2.1 Caratteristiche della sollecitazione

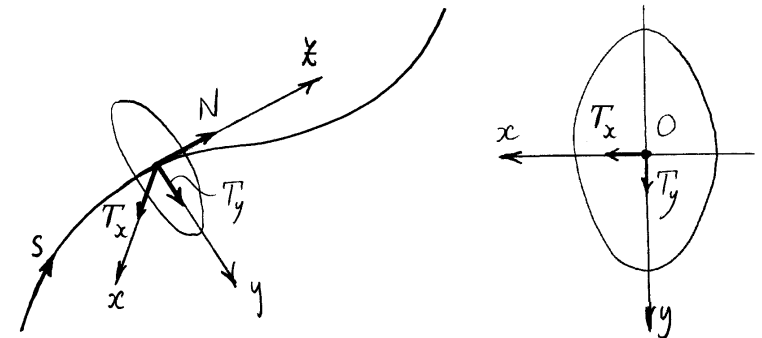
Le caratteristiche della sollecitazione rappresentano la risultante  $\underline{F}$  e il momento risultante  $\underline{M}$  delle forze interne che agiscono in corrispondenza delle sezioni della trave, con il momento valutato rispetto al punto  $O$  sulla linea d'asse.



La risultante e il momento risultante vengono decomposti localmente in una componente normale e in una

componente parallela alla sezione retta. Le componenti parallele alla sezione retta possono poi decomporci secondo le direzioni  $x$  e  $y$  nel piano della sezione:

$$\begin{cases} \underline{F} = \underline{T} + N \underline{e}_x \\ \underline{M} = \underline{M}_f + M_t \underline{e}_x \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{T} = T_x \underline{e}_x + T_y \underline{e}_y \\ \underline{M}_f = M_x \underline{e}_x + M_y \underline{e}_y \end{cases}$$



La componente normale  $N$  della forza risultante  $\underline{F}$  è detta forza normale, mentre la sua componente  $\underline{T}$  nel piano della sezione è detta forza tagliante, forza di taglio o, più semplicemente, taglio. La componente normale  $M_f$  del momento risultante, che rappresenta una coppia agente nel piano della sezione,

è detta momento torcente e la sua componente  $M_z$  nel piano della sezione, che rappresenta una coppia agente in un piano ortogonale alla sezione retta, è detta momento flettente.

## 2.2 Relazione tra caratteristiche della sollecitazione e tensioni interne

Le caratteristiche della sollecitazione sono la risultante e il momento risultante delle tensioni interne  $\underline{t}$  che agiscono su una sezione retta generica. Nel sistema  $Oxyz$  locale le componenti di tensione risultano:

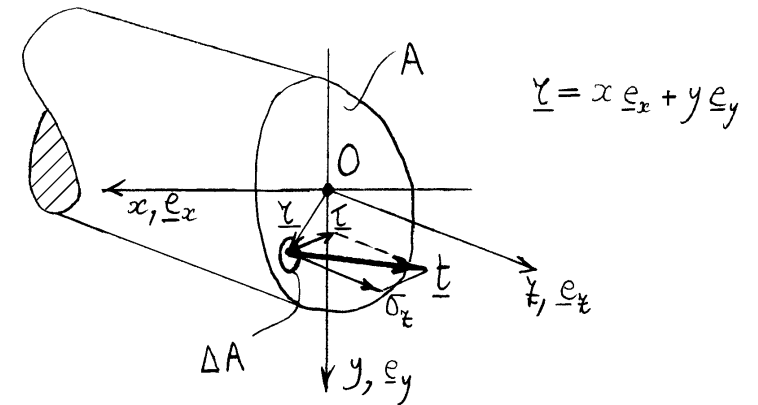
$$\begin{cases} \underline{t} = \sigma_z \underline{e}_z + \underline{\tau} \\ \underline{\tau} = \tau_{xz} \underline{e}_x + \tau_{yz} \underline{e}_y \end{cases},$$

e quindi si ottiene:

$$\underline{F} = \int_A \underline{t} dA = \left( \int_A \sigma_z dA \right) \underline{e}_z + \int_A \underline{\tau} dA,$$

$$N = \int_A \sigma_z dA,$$

$$\underline{T} = \int_A \underline{\tau} dA = \left( \int_A \tau_{xz} dA \right) \underline{e}_x + \left( \int_A \tau_{yz} dA \right) \underline{e}_y,$$



e:

$$\underline{M} = \int_A \underline{r} \times \underline{t} dA = \int_A \underline{r} \times (\sigma_z \underline{e}_z) dA + \int_A \underline{r} \times \underline{\tau} dA,$$

$$M_t \underline{e}_z = \int_A \underline{r} \times \underline{\tau} dA = \int_A \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x & y & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{vmatrix} dA =$$

$$= \left\{ \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA \right\} \underline{e}_z,$$

$$\underline{M}_f = \int_A \underline{r} \times (\underline{\sigma}_x \underline{e}_x) dA = \int_A \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{vmatrix} dA =$$

$$= \left( \int_A \sigma_x y dA \right) \underline{e}_x - \left( \int_A \sigma_x x dA \right) \underline{e}_y .$$

Le componenti locali delle caratteristiche della sollecitazione si dividono quindi in due gruppi. Un primo gruppo dipendente dalla sola tensione normale:

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_x = \int_A \sigma_x y dA \\ M_y = - \int_A \sigma_x x dA \end{cases} ,$$

ed un secondo gruppo dipendente dalla sola tensione tangenziale:

$$\begin{cases} T_x = \int_A \tau_{xz} dA \\ T_y = \int_A \tau_{yz} dA \\ M_t = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA \end{cases} .$$

## 2.3 Forze esterne

Le forze esterne applicate si riducono alla linea d'asse ottenendo i seguenti tipi di forze:

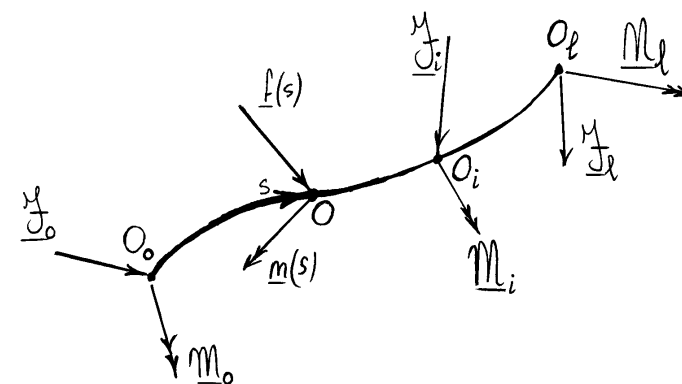
$\underline{f}(s)$   $\equiv$  forze distribuite per unit  di linea ,

$\underline{m}(s)$   $\equiv$  coppie distribuite per unit  di linea ,

$\underline{F}_0, \underline{F}_l$   $\equiv$  forze concentrate agenti nelle due estremit  (di ascissa  $s=0$  e  $s=l$ ),

$\underline{M}_0, \underline{M}_l$   $\equiv$  coppie concentrate agenti nelle due estremit  (di ascissa  $s=0$  e  $s=l$ ),

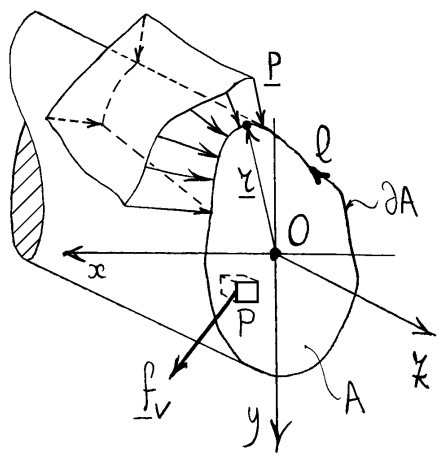
$\underline{F}_i, \underline{M}_i$   $\equiv$  forze e coppie concentrate agenti in punti interni della linea d'asse .



La relazione tra le forze di superficie e di volume e le forze ridotte alla linea d'asse risulta:

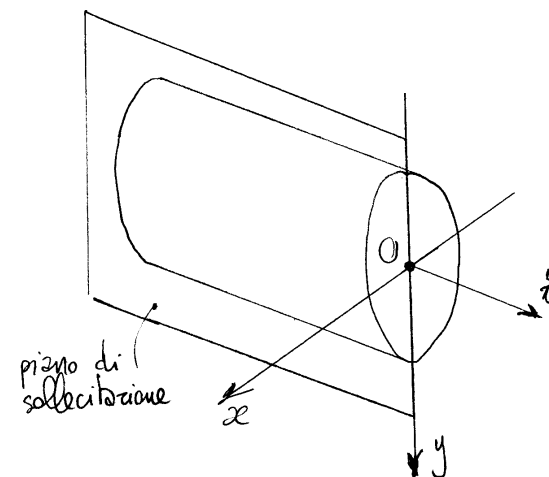
$$\begin{cases} \underline{f}(s) = \oint_{\partial A} \underline{p} d\ell + \int_A \underline{f}_v dA, \\ \underline{m}(s) = \oint_{\partial A} \underline{r} \times \underline{p} d\ell + \int_A \underline{r} \times \underline{f}_v dA. \end{cases}$$

dove  $\underline{f}_v$  indica le forze di volume e  $\underline{p}$  quelle di superficie, mentre  $\underline{f}$  e  $\underline{m}$  sono le forze e le coppie risultanti per unità di linea.



## 2.4 Trave Staticamente piana

Si consideri ora una trave staticamente piana. In tal caso le forze giacciono nel piano della trave, mentre i momenti hanno asse momento ortogonale al piano di sollecitazione.

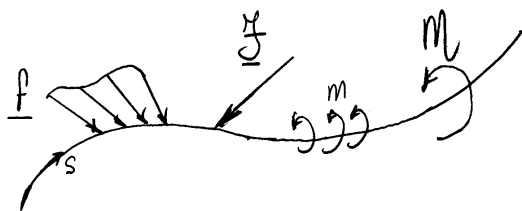


Per quel che riguarda le forze esterne applicate risulta quindi:

$$\begin{cases} \underline{f} = q \underline{e}_y + P \underline{e}_z, \\ \underline{m} = m \underline{e}_x \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{f} = Q \underline{e}_y + P \underline{e}_z, \\ \underline{m} = M \underline{e}_x \end{cases},$$

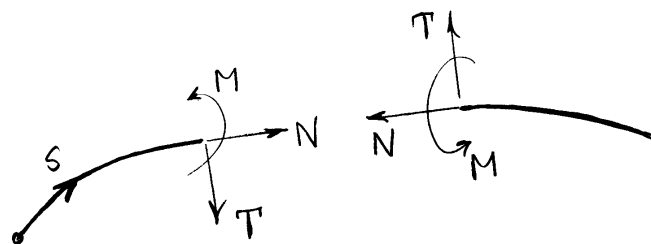
dove:

$$\begin{cases} q, Q \equiv \text{componenti in direzione dell'asse di sollecitazione} \\ p, P \equiv \text{componenti in direzione normale alla sezione retta.} \\ m, M \equiv \text{coppie agenti nel piano della trave} \end{cases}$$



Per quel che riguarda poi le caratteristiche della sollecitazione, si ha:

$$\begin{cases} \underline{F} = T \underline{e}_y + N \underline{e}_x \\ \underline{M} = M \underline{e}_x \end{cases}.$$



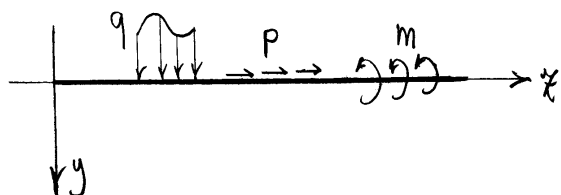
## 2.5 Equazioni indefinite di equilibrio di travi piane ad asse rettilineo (teoria del primo ordine)

Le equazioni indefinite di equilibrio rappresentano l'equilibrio nell'intorno di una sezione regolare, cioè non soggetta a forze concentrate.

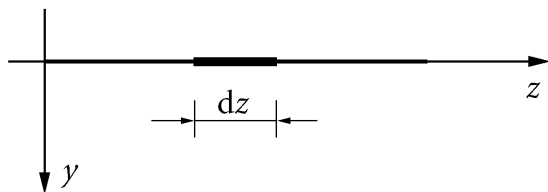
In generale, l'asse deformato della trave è curvo anche se l'asse indeformato è rettilineo, e dunque, se gli spostamenti sono grandi, le equazioni indefinite di equilibrio dipendono dalla curvatura dell'asse deformato.

Se gli spostamenti sono piccoli l'asse deformato si confonde con l'asse indeformato e quindi scrivere l'equilibrio sotto tale ipotesi è equivalente a scrivere l'equilibrio di una trave rigida.

Le semplificazioni che si ottengono supponendo che l'asse deformato sia rettilineo dipendono dunque strettamente dall'ipotesi di piccoli spostamenti.

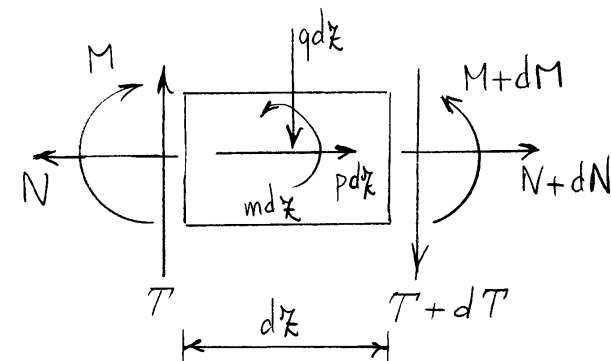


Per ottenere le equazioni indefinite di equilibrio è sufficiente scrivere le equazioni di equilibrio nel piano (due alla traslazione ed una alla rotazione) di un tratto di trave lungo  $dz$ , trascurando gli infinitesimi



di ordine superiore al primo in  $dz$ :

$$\begin{cases} -N + N + dN + p dz = 0 \\ -T + T + dT + q dz = 0 \\ -M + M + dM - T dz + m dz = 0 \end{cases}$$



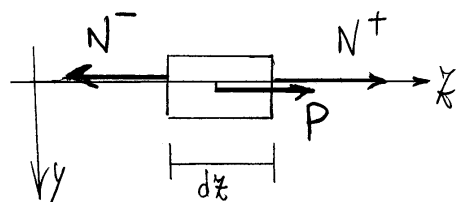
Si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m - T = 0 \end{cases}$$

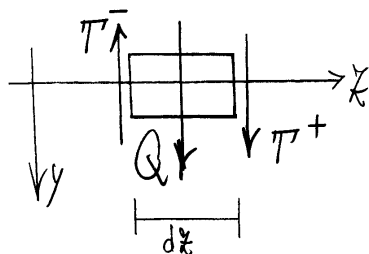
## 2.6 Equazioni di discontinuità di travi piane

Se in corrispondenza di un punto sulla linea d'asse agisce una forza oppure una coppia concentrata, l'equilibrio nell'intorno del punto impone che in sua corrispondenza le caratteristiche della sollecitazione subiscano delle discontinuità. In tale equilibrio le forze distribuite non intervengono perché al

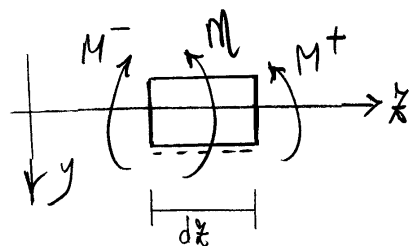
Limite per  $d\xi \rightarrow 0$  si annullano, mentre le forze concentrate restano invariate.



$$N^+ - N^- + P = 0 \Rightarrow \Delta N + P = 0$$



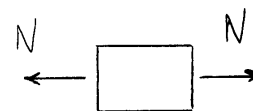
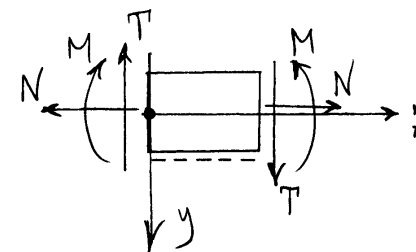
$$T^+ - T^- + Q = 0 \Rightarrow \Delta T + Q = 0$$



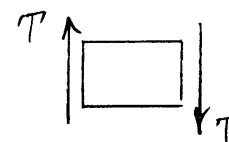
$$M^+ - M^- + m = 0 \Rightarrow \Delta M + m = 0$$

## 2.7 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (travi piane ad asse rettilineo)

### 2.7.1 Convenzioni di segno



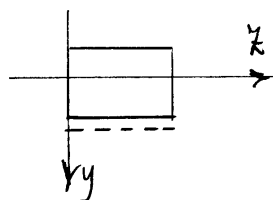
La forza normale è positiva se uscente dall'elemento



La forza di taglio è positiva se fa ruotare l'elemento in senso orario

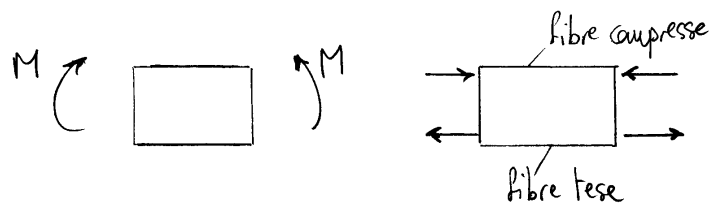


Il momento flettente è positivo se tende le fibre di riferimento (dalla parte del tratteggio)



Orientazione degli assi  $y$  e  $z$  relativamente alle fibre di riferimento se si vuole la validità della terza equazione indefinita di equilibrio

I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione si tracciano riportando, perpendicolarmente alla linea d'asse, il valore della caratteristica stessa. Per quel che riguarda forza normale e taglio non ha importanza da quale parte venga riportato il valore positivo, purché sia chiaramente indicato il segno della caratteristica. Nel caso del momento flettente invece ha importanza il suo segno, che può anche non essere indicato. E' però consuetudine riportare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese.



Se si scelgono delle fibre di riferimento per dare un segno al momento, questi va tracciato dalla parte delle fibre di riferimento se il momento è positivo, dalla parte opposta se il

momento è negativo, in modo da garantire in ogni caso che il momento sia tracciato dalla parte delle fibre tese.

Le equazioni indefinite di equilibrio e quelle di discontinuità impongono delle condizioni all'andamento dei diagrammi.

### 2.7.2 Forza normale

$$\frac{dN}{dx} + p = 0, \quad \Delta N + P = 0.$$

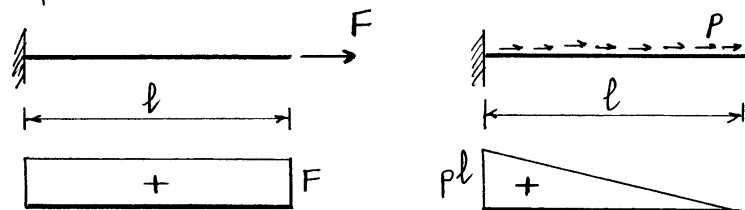
In un tratto non caricato da forze aventi la direzione della linea d'asse (forze di tipo assiale), la forza normale è costante:

$$p = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N = \text{cost.}$$

Se invece il carico di tipo assiale è costante, la forza normale è lineare:

$$p = \text{cost} \Rightarrow N = -p x + \text{cost.}$$

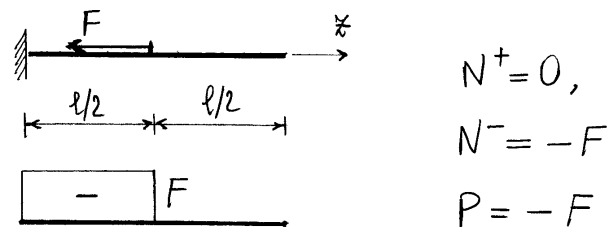
Esempi :



Se invece è presente una forza concentrata diretta come la linea d'asse, la forza normale presenta una discontinuità:

$$\Delta N = N^+ - N^- = -P.$$

Esempio :



### 2.7.3 Taglio e momento flettente

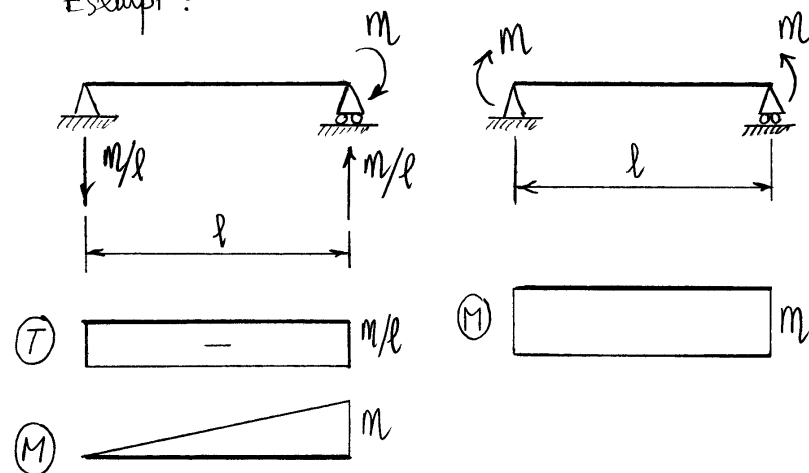
$$\begin{cases} \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m = T \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta T + Q = 0 \\ \Delta M + M = 0 \end{cases}$$

In un tratto non caricato da forze ortogonali alla linea d'asse e da coppie (forze di tipo flessionale), il taglio è costante e il momento flettente è lineare:

$$m, q = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dz} = 0 \Rightarrow T = \text{cost} \Rightarrow M = Tz + \text{cost}.$$

In particolare, se il taglio è nullo allora il momento flettente è costante.

Esempi :



Una forza concentrata ortogonale alla linea d'asse provoca una discontinuità nel diagramma del taglio e di conseguenza nella tangente al diagramma del momento che

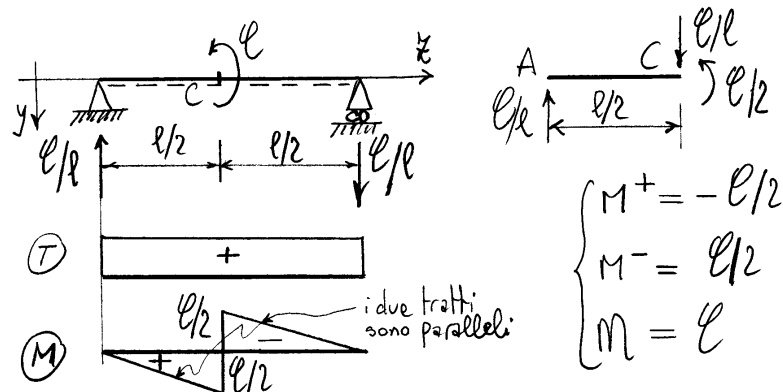
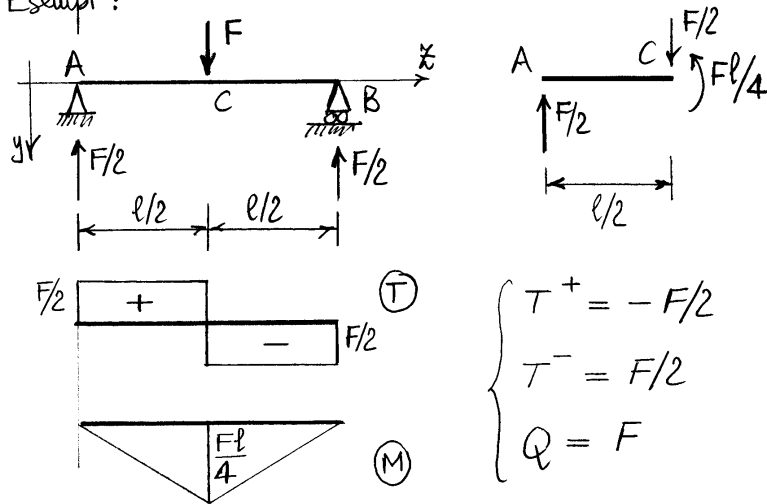
presenta quindi un punto angoloso:

$$\Delta T = T^+ - T^- = \frac{dM}{dx}^+ - \frac{dM}{dx}^- = -Q.$$

Se invece è presente una coppia concentrata si ha una discontinuità nel diagramma del momento flettente:

$$\Delta M = M^+ - M^- = -M.$$

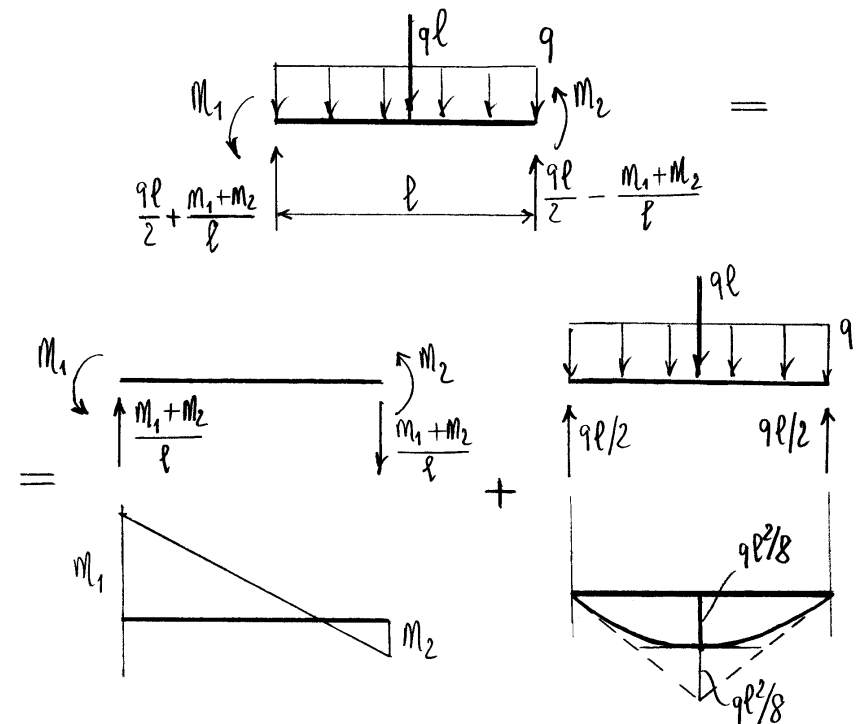
Esempi:



Se infine il carico distribuito ortogonale alla linea d'asse è costante, con le coppie distribuite nulle, il taglio risulta lineare e il momento parabolico, con asse della parabola parallela al carico:

$$\begin{cases} m=0 \\ q=\text{cost} \end{cases} \Rightarrow T = -qz + c_1 \Rightarrow M = -\frac{q}{2}z^2 + c_1z + c_2.$$

Il diagramma parabolico può sempre ottenersi come somma di due diagrammi particolari, uno lineare e uno parabolico:



Il diagramma parabolico particolare è quello di una trave appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico ripartito. In tal caso i momenti alle estremità sono nulli, per cui i momenti eventualmente applicati alle due estremità della trave compaiono nel diagramma lineare. Il diagramma complessivo conserva la convessità dalla stessa parte del diagramma parabolico particolare. Poiché in mezzeria della trave appoggiata soggetta a un carico ripartito costante il taglio è nullo, l'inclinazione del diagramma lineare rappresenta il taglio complessivo e quindi la tangente in mezzeria al diagramma complessivo.

Nei punti di estremità del tratto di applicazione del carico distribuito le caratteristiche della sollecitazione si possono calcolare sostituendo al carico ripartito la sua risultante  $qL$  applicata nel punto di mezzo. Ne consegue che il diagramma del momento flettente dovuto alla risultante è tangente, alle estremità del carico distribuito, al momento flettente dovuto al

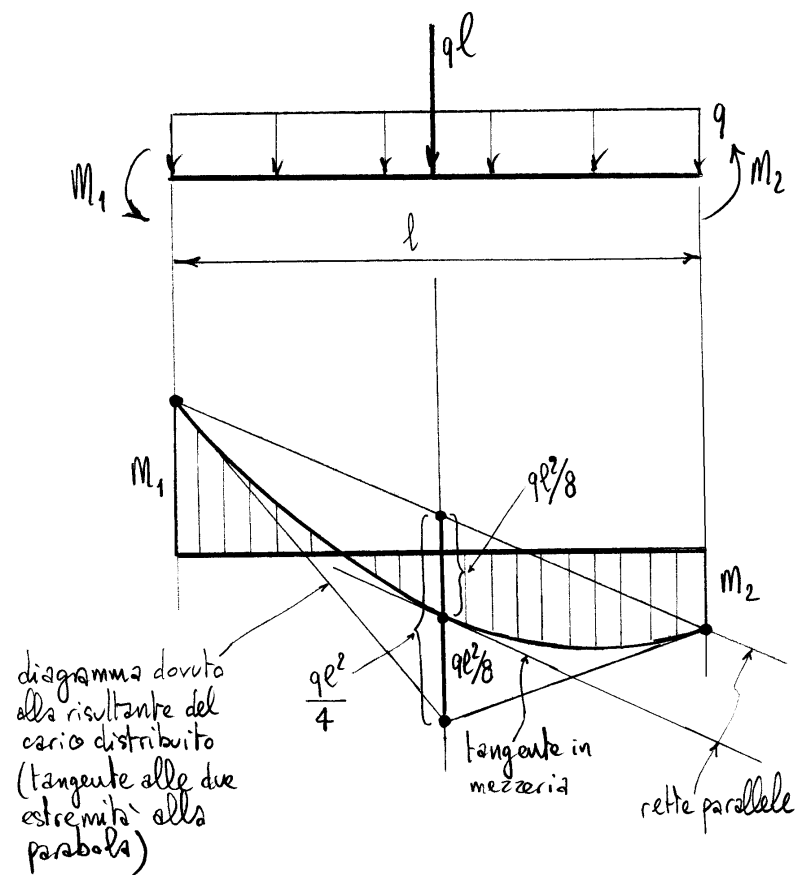
carico ripartito. Infatti, l'inclinazione del momento flettente rappresenta il taglio ed il taglio alle due estremità coincide nei due casi (di carico ripartito e di carico concentrato pari alla risultante).

Per costruire la parabola del momento flettente si può dunque procedere nel modo seguente:

- 1) Si riportano i valori del momento alle due estremità della trave (individuando così due punti della parabola);
- 2) Si uniscono i due punti di estremità (individuando così sia la parte lineare del momento che l'inclinazione della tangente in mezzeria);
- 3) Alla parte lineare si somma in mezzeria il valore  $qL^2/8$  concordemente al verso del carico (individuando un terzo punto della parabola);
- 4) Dal punto della parabola in mezzeria si manda la parallela alla parte lineare del diagramma (ottenendo così la tangente alla parabola in tale punto);
- 5) Dal terzo punto della parabola, sempre nel verso del

carico, si riparte un segmento di lunghezza  $ql^2/8$  (individuando così il vertice delle tangenti alle due estremità')

6) Si unisce il vertice delle tangenti ai due punti di estremità della parabola (ottenendo così le due tangenti di estremità della parabola).





## Capitolo 3

### Sistemi di travi rigide

Gli spostamenti di una trave deformabile, come già visto, si possono scindere in generale nella somma di spostamenti rigidi e di spostamenti dovuti alla deformazione. Se gli spostamenti dovuti alla deformazione sono piccoli, da una parte gli spostamenti rigidi risolvono il problema della determinazione di una configurazione indeformata del corpo “vicina” a quella finale deformata, mentre dall'altra parte le equazioni di equilibrio possono essere scritte in tale configurazione indeformata.

Se le ipotesi alla base di una teoria del primo ordine sono valide è quindi lecito utilizzare il modello di trave rigida allo scopo di determinare una configurazione approssimante quella finale deformata così come le reazioni dei vincoli e le caratteristiche della sollecitazione.

Da quanto precede segue l'importanza dell'analisi sia cinematica che statica dei sistemi di travi rigide. Gli aspetti principali di tale analisi saranno presentati nel seguito, senza alcuna pretesa di completezza.

#### 3.1 Analisi cinematica dei sistemi di travi rigide

Un sistema di travi rigide è detto *labile* se può subire dei moti rigidi infinitesimi.<sup>1</sup> Si noti che se un sistema può subire dei moti rigidi, può subire anche dei moti rigidi infinitesimi, che non sono altro che la linearizzazione dei precedenti. Non è invece vero l'inverso, ovvero sia esistono sistemi che possono subire dei moti rigidi infinitesimi senza che esistano degli effettivi moti rigidi, come la trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 3.1. Infatti tale trave non può subire un moto rigido poiché il punto fisso A richiederebbe alla trave di ruotare attorno allo stesso punto. Il punto B dovrebbe allora spostarsi su una circonferenza, ma il carrello impone a B di spostarsi sulla retta verticale per lo

<sup>1</sup>L'attenzione è diretta ai moti rigidi infinitesimi, poiché sono questi che forniscono le direzioni alle quali le reazioni dei vincoli sono ortogonali.

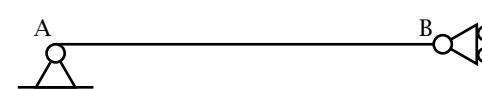


Figura 3.1: Trave su un appoggio fisso e un carrello

stesso punto. È invece possibile il moto rigido infinitesimo che si ottiene linearizzando il moto rigido di rotazione attorno al punto A, poiché questi richiede al punto B di spostarsi sulla verticale.

Il numero  $l$  dei parametri lagrangiani che definiscono il generico moto rigido infinitesimo è detto *grado di libertà*.<sup>2</sup> I possibili moti rigidi infinitesimi definiscono lo *stato cinematico* del sistema di travi rigide.

Un vincolo è detto *iperstatico* o *inefficace* se può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema di travi rigide. Se un vincolo non può invece essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema è detto *vincolo efficace*. È bene dire subito che si presentano sia casi in cui tutti i vincoli semplici, interni ed esterni, del sistema di travi rigide sono iperstatici sia casi in cui tutti i vincoli sono efficaci. Del primo caso ne è un semplice esempio la trave su tre carrelli di fig. 3.2a, mentre il secondo caso è illustrato dalla trave su un appoggio fisso e un



(a) Trave su tre carrelli

(b) Trave su un appoggio fisso e un carrello

Figura 3.2: Vincoli efficaci e inefficaci

carrello di fig. 3.2b.

<sup>2</sup>Affinché le strutture civili siano funzionali, devono essere fissate al terreno e le sue diverse parti fra di loro. Questo implica che non devono essere possibili moti rigidi, da cui il termine *libertà* per indicare in tale ambito i gradi di libertà, termine che contiene una connotazione negativa. D'altronde la stessa osservazione è valida anche per le costruzioni meccaniche che possono contenere parti in movimento od essere esse stesse in movimento. Infatti, ad esclusione di ciò che si può muovere, alle parti restanti è richiesto di essere fissate fra di loro, alle parti in movimento ed eventualmente al terreno, almeno nel caso in cui non sia previsto il movimento dell'intera struttura.

Il numero  $i$  dei vincoli semplici iperstatici che possono essere contemporaneamente rimossi senza modificare lo stato cinematico del sistema è detto *grado di iperstaticità*. Si osservi che tale definizione richiede che esista un insieme di  $i$  vincoli iperstatici soddisfacente la condizione, non che un qualunque insieme di  $i$  vincoli iperstatici soddisfi la condizione stessa, come mostrato dalla trave incastro-appoggio di fig. 3.3. È

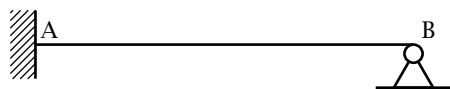


Figura 3.3: Trave incastro-appoggio

facile verificare che tutti i vincoli di tale sistema sono iperstatici e che il sistema stesso è due volte iperstatico. Rimuovendo però il vincolo in B che impedisce lo spostamento verticale e il vincolo in A che impedisce la rotazione della sezione si ottiene il sistema labile di fig. 3.1.

Dalla definizione di grado  $i$  di iperstaticità, ne consegue che rimosso un opportuno insieme di  $i$  vincoli iperstatici, non è poi più possibile rimuovere ulteriori vincoli senza modificare lo stato cinematico del sistema. I vincoli restanti sono quindi divenuti tutti efficaci. Se  $v$  è il numero dei vincoli semplici, interni ed esterni, il numero dei vincoli restanti, tutti efficaci, vale  $v - i$ . Se  $g$  rappresenta il numero dei gradi di libertà del sistema svincolato, il grado di labilità del sistema vale allora:

$$l = g - (v - i), \quad (1)$$

e ne consegue la relazione:

$$v - g = i - l. \quad (2)$$

Poiché un corpo rigido ha 6 gradi di libertà nello spazio e 3 gradi di libertà nel piano ne risulta:

$$g = \begin{cases} 6n & \text{nel caso spaziale,} \\ 3n & \text{nel caso piano,} \end{cases} \quad (3)$$

dove  $n$  è il numero di parti rigide del sistema connesse tra loro da vincoli interni.

Un sistema di travi è detto *labile* se il suo grado di labilità non è nullo. Analogamente è detto *iperstatico* se non è nullo il suo grado di iperstaticità. Si noti che un sistema può essere contemporaneamente labile

e iperstatico, come per es. il semplice caso della trave su tre carrelli di fig. 3.2a. Infatti i tre carrelli a piano di scorrimento orizzontale rendono possibile un moto rigido di traslazione orizzontale, e quindi  $l = 1$ . D'altronde uno qualunque dei tre carrelli può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico della trave rigida e quindi i tre vincoli sono iperstatici e di conseguenza la struttura è iperstatica. Poiché solo un carrello per volta può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema ne risulta  $i = 1$ . La trave su tre carrelli ha dunque un grado di iperstaticità e un grado di labilità. La trave incastro-appoggio di fig. 3.3 è invece un esempio di un sistema non labile e due volte iperstatico.

Se il sistema non è né labile e né iperstatico viene detto *isostatico*. La trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 3.2b è un semplice esempio di sistema isostatico.

Un sistema di travi rigide è dunque isostatico se e solo se:

$$i = 0 \quad \text{e} \quad l = 0. \quad (4)$$

Si osservi che la relazione (2) fornisce la seguente condizione necessaria di isostaticità:

$$v - g = 0. \quad (5)$$

La condizione non è sufficiente poiché è soddisfatta se  $i = l$  senza che entrambi siano nulli, come nel caso già visto della trave su tre carrelli di fig. 3.2a. Se un sistema soddisfa la condizione necessaria di isostaticità (5) senza essere isostatico ne consegue che è contemporaneamente labile e iperstatico con ugual grado di labilità e di iperstaticità. In tal caso si suol dire a volte che i vincoli sono *mal disposti*, naturalmente rispetto alla esigenza di avere un sistema di travi isostatico.

## 3.2 Analisi statica dei sistemi di travi rigide

Sia dato un sistema di travi rigide soggetto a generiche forze esterne. Il sistema è detto *equilibrato* se esiste un sistema di reazioni vincolari ammissibile equilibrante le date forze esterne. Si osservi che tale definizione è compatibile con l'esistenza di più sistemi di reazioni vincolari ammissibili equilibranti le date forze esterne.

Un sistema equilibrato è detto *staticamente determinato* se le reazioni vincolari sono univocamente determinate dalle equazioni di equilibrio, in caso contrario il sistema è detto *staticamente indeterminato*.

La labilità di un sistema di travi non dipende dalle forze applicate, ma solo dalla sua geometria. Un sistema labile può essere equilibrato se soggetto a certe forze esterne mentre può essere non equilibrato se soggetto ad altre forze. In quest'ultimo caso si dice che le forze *mettono in gioco la labilità del sistema*. La trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 3.4a, caricata da una forza verticale in corrispondenza del carrello, e la trave su tre carrelli di fig. 3.4b, soggetta ad una forza orizzontale,

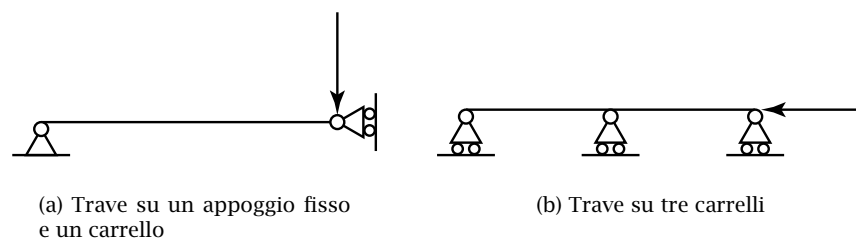


Figura 3.4: Esempi di travi labili non equilibrate

sono due semplici esempi di sistemi di travi labili non equilibrati.

I sistemi di travi non labili sono equilibrati per ogni sistema di forze esterne applicato. I sistemi equilibrati non iperstatici, in particolare i sistemi isostatici, sono sempre staticamente determinati, cioè le equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare univocamente tutte le reazioni vincolari. I sistemi equilibrati iperstatici, in particolare i sistemi non labili iperstatici, sono sempre staticamente indeterminati, cioè le equazioni di equilibrio non sono sufficienti a determinare univocamente tutte le reazioni vincolari. In tal caso un numero di reazioni vincolari pari al grado  $i$  di iperstaticità resta indeterminato.

### 3.3 Curva delle pressioni

Le sollecitazioni che si trasmettono attraverso una qualunque sezione retta di una trave piana equivalgono alla loro risultante agente lungo una ben determinata retta d'azione (*asse centrale* del sistema di forze) oppure, se tale risultante è nulla, equivalgono ad una coppia. Escluso quest'ultimo caso, ad ogni sezione retta di una trave piana corrisponde la retta d'azione della risultante delle forze agenti nella stessa sezione.

D'altronde una coppia  $\mathcal{M}$  rappresenta il caso limite di una forza  $F$  avente braccio  $b$  rispetto ad un punto  $P$  del piano quando la forza tende a zero e il braccio tende all'infinito mantenendo costantemente uguale a  $\mathcal{M}$  il prodotto  $Fb$ . Ne consegue una “forza nulla” che agisce secondo la *retta all'infinito* o *retta impropria* e quindi ad ogni sezione retta di una trave piana corrisponde la retta d'azione, propria o impropria, della risultante delle tensioni agenti nella stessa sezione.

La *curva delle pressioni* rappresenta l'involuppo delle rette d'azione delle risultanti relative a tutte le sezioni rette di un sistema di travi. Tale strumento grafico sintetizza, in modo qualitativo, le sollecitazioni cui una trave è sottoposta.

#### 3.3.1 Tratto di trave non caricato

In un tratto di trave non caricato direttamente la curva delle pressioni è rappresentata da una linea retta, poiché in tal caso l'equilibrio richiede che la retta d'azione della risultante non vari al variare della sezione retta considerata. Infatti, due sezioni generiche di tale tratto individuano una parte di tale tratto caricata solo in corrispondenza delle sezioni stesse e quindi le due forze che si trasmettono in tali sezioni devono essere uguali ed opposte.

Se la trave è caricata solo da forze concentrate la curva delle pressioni risulta, per quanto detto, poligonale. I lati del “poligono” delle pressioni corrispondono ai tratti di trave tra un carico concentrato e l'altro (fig. 3.5a). Con riferimento all'esempio di fig. 3.5a, l'intersezione tra la traccia di una generica sezione  $S$  e la retta d'azione della risultante delle forze agenti nella stessa sezione (retta d'azione che rappresenta un lato del poligono delle pressioni) individua il *centro di sollecitazione*  $C$ .<sup>3</sup> Il valore della risultante può essere dedotto dal *poligono delle forze* (fig. 3.5b), che rappresenta l'equilibrio in forma vettoriale. La componente in direzione normale alla sezione individua la forza normale, quella in direzione della traccia della sezione la forza di taglio mentre il momento flettente dipende dalla eccentricità della risultante rispetto al punto  $S$  della linea d'asse, oppure dalla eccentricità della sola forza normale (indicata con  $e$  in fig. 3.5a). Il momento flettente si annulla dove i lati del poligono delle pressioni intersecano la linea d'asse del sistema di travi nel tratto di propria competenza. Nel caso della fig. 3.5a, tale

<sup>3</sup>A volte detto *centro di pressione*.

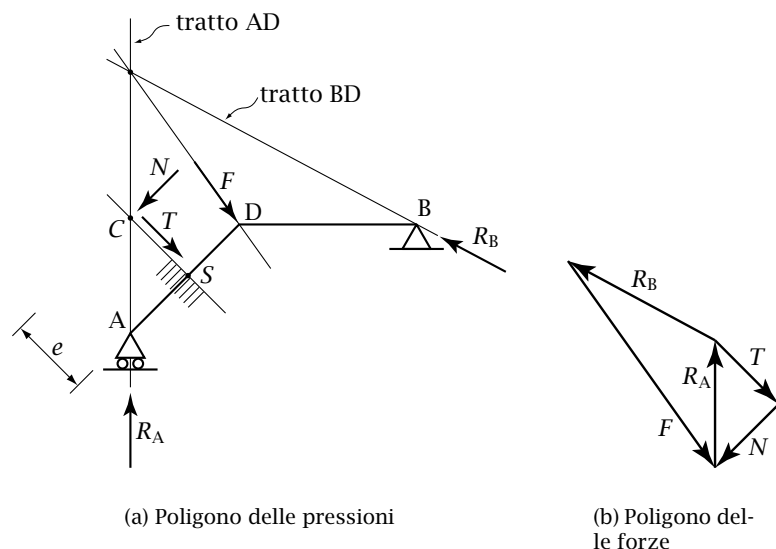


Figura 3.5: Esempio di un sistema di travi soggetto ad un carico concentrato

situazione si verifica solo in corrispondenza delle sezioni vincolate A e B.

### 3.3.2 Tratto di trave con carico distribuito costante (per unità di linea ortogonale al carico)

Si vuole ora mostrare che *in un tratto di trave soggetto ad un carico distribuito  $q$  costante per unità di linea ortogonale al carico, la curva delle pressioni è una parabola il cui asse ha la direzione del carico.*

**Dimostrazione.** Facendo infatti riferimento allo schema di fig. 3.6a, dove la direzione del carico distribuito è verticale e il carico è ritenuto costante per unità di linea orizzontale (o per unità di proiezione orizzontale), si consideri la generica sezione  $S$ . La quota di carico distribuito che compete al tratto  $AS$  vale  $qa$ , dove  $a$  è la distanza in orizzontale di  $A$  da  $S$ . È quindi possibile determinare, tramite il poligono delle forze (fig. 3.6b), la risultante che compete alla sezione  $S$ . L'inclinazione di tale risultante fornisce, per definizione di inviluppo, la tangente  $r$  alla curva

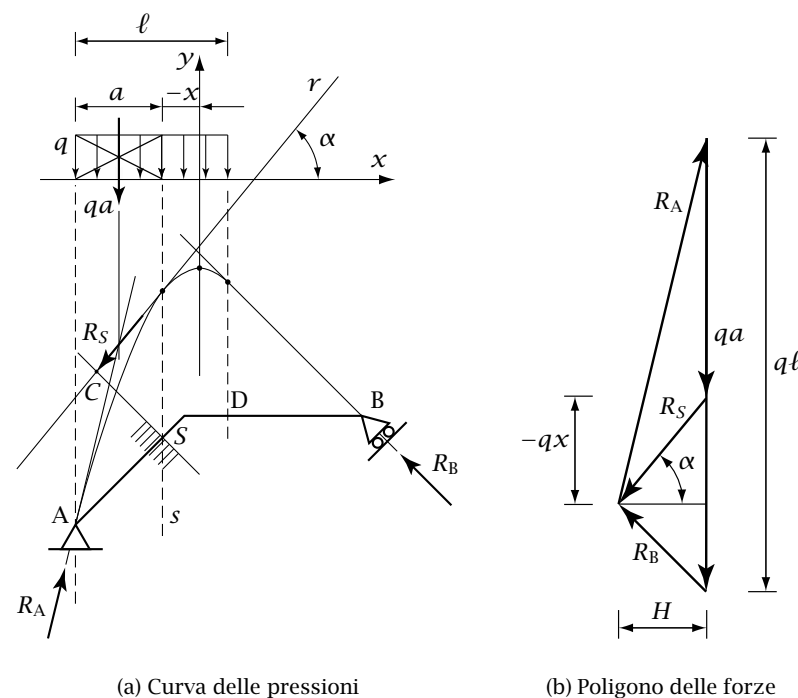


Figura 3.6: Esempio di un sistema di travi soggetto ad un carico ripartito

delle pressioni nel punto individuato dalla intersezione della curva con la retta d'azione  $s$  della quota di carico ripartito agente in  $S$ . Si assumano allora due assi ortogonali di riferimento, un asse orizzontale  $x$  generico ed un asse verticale  $y$  tale che divida il carico ripartito in due quote, individuate nel poligono delle forze dalla orizzontale per il punto di incontro delle reazioni  $R_A$  ed  $R_B$ . Detta  $f(x)$  l'equazione della curva delle pressioni, deve quindi risultare:

$$\frac{df}{dx} = \tan \alpha = \frac{-qx}{H}, \quad (6)$$

dove  $\alpha$  è l'inclinazione della tangente rispetto all'asse  $x$  e  $H$  è la distanza, misurata nel poligono delle forze, della risultante del carico distribuito dal punto di incontro delle reazioni  $R_A$  ed  $R_B$ . Dato che la distanza

$H$  non dipende da  $x$ , integrando si ottiene:

$$f(x) = -\frac{qx^2}{2H} + c, \quad (7)$$

equazione che rappresenta una parabola di asse  $y$ , come volevasi dimostrare. ■

Nella dimostrazione precedente si è ipotizzato che il punto di tangenza della risultante  $r$  in  $S$  si trovi sulla retta  $s$ .

*Dimostrazione.* Per mostrare che così è si consideri la fig. 3.7, dove sono

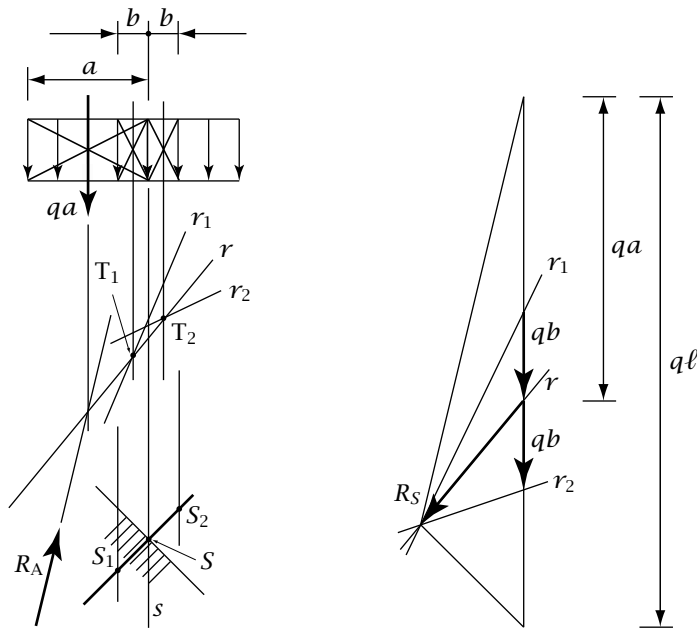


Figura 3.7: Tangenti alla curva delle pressioni nell'intorno di un punto

state tracciate le rette d'azione  $r_1$  e  $r_2$  delle risultanti relative rispettivamente alle due sezioni  $S_1$  e  $S_2$  che distano  $b$  da  $S$  in direzione orizzontale e che sono poste rispettivamente a sinistra e a destra di  $S$ . Le risultanti dei due carichi  $qb$  intercettano su  $r$  i punti  $T_1$  e  $T_2$  da cui

passano le rette d'azione  $r_1$  e  $r_2$ . È evidente dalla costruzione che il punto di tangenza di  $r$  deve essere interno all'intervallo  $T_1T_2$ . Essendo la distanza  $b$  arbitraria il punto di tangenza deve quindi stare sulla retta  $s$ . ■

Con riferimento alla fig. 3.8, si affronta ora il problema della costruzione dell'arco di parabola che rappresenta la curva delle pressioni tramite l'individuazione di tre dei suoi punti e delle corrispondenti tangenti, come già fatto per il tracciamento del diagramma parabolico del momento flettente. A tale proposito si ricordi che nel dato esempio la

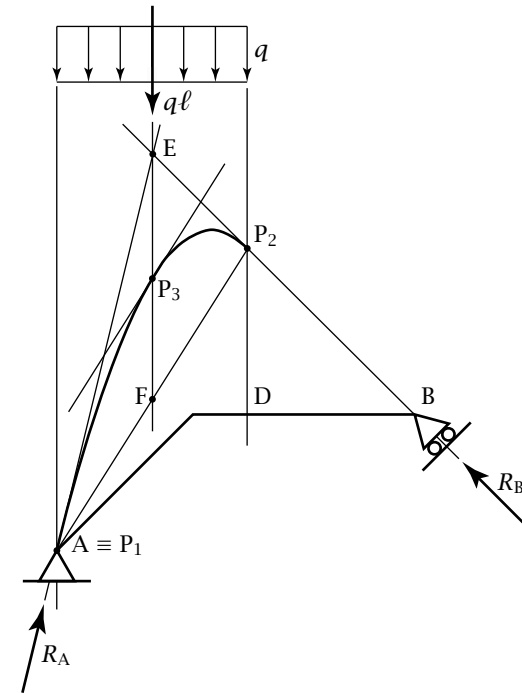


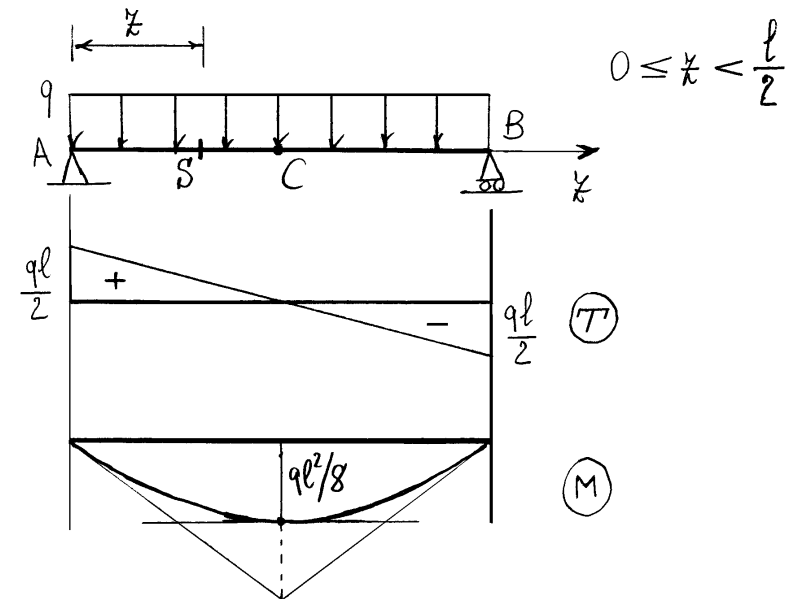
Figura 3.8: Costruzione della curva delle pressioni parabolica

direzione del carico coincide con la direzione verticale. Si consideri allora innanzitutto che i due punti di estremità  $P_1$  e  $P_2$  della curva delle pressioni coincidono con le intersezioni tra le verticali per le sezioni A e D di estremità del carico distribuito e le rette d'azione delle risultanti

in A e in D rispettivamente. Si noti che nell'esempio di fig. 3.8 il primo dei due punti,  $P_1$ , coincide con il punto A. Le rette d'azione relative ai due punti di estremità rappresentano anche le due tangenti di estremità della curva delle pressioni mentre il vertice E delle tangenti si trova sulla retta d'azione della risultante del carico distribuito. Per completare la costruzione a questo punto basta unire i due punti di estremità  $P_1$  e  $P_2$  della curva delle pressioni, individuando così l'intersezione F con la retta d'azione della risultante del carico distribuito. Dividendo a metà il segmento EF si individua il terzo punto  $P_3$  della parabola, mentre la tangente si ottiene mandando per  $P_3$  la parallela alla congiungente  $P_1P_2$ .

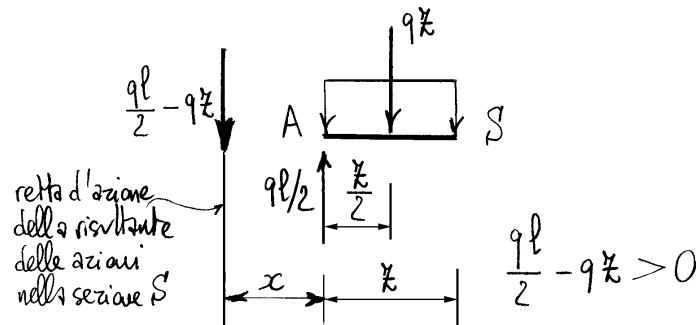
### 3.3.3 Arco parabolico

Si consideri una trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito e si calcoli la posizione della risultante relativa alla generica sezione  $S'$  posta nella metà di sinistra della trave.



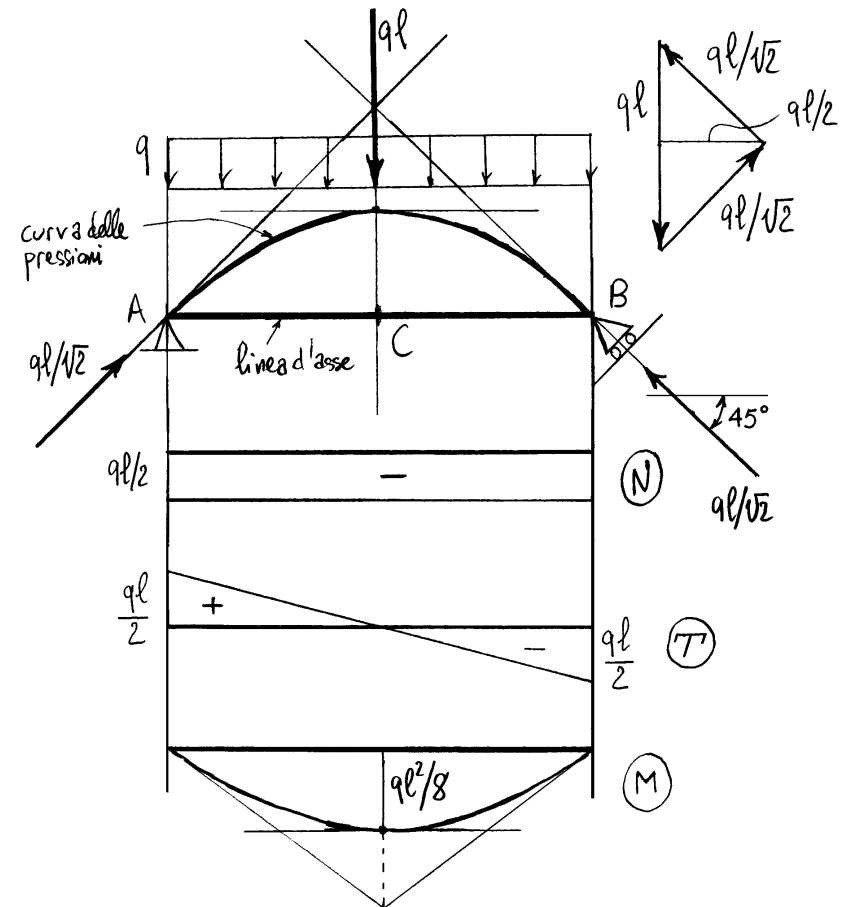
Detta  $x$  la distanza dall'appoggio di sinistra  $A$  risulta:

$$\left(\frac{ql}{2} - qx\right)x - (qx)\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{x^2}{l - 2x}.$$



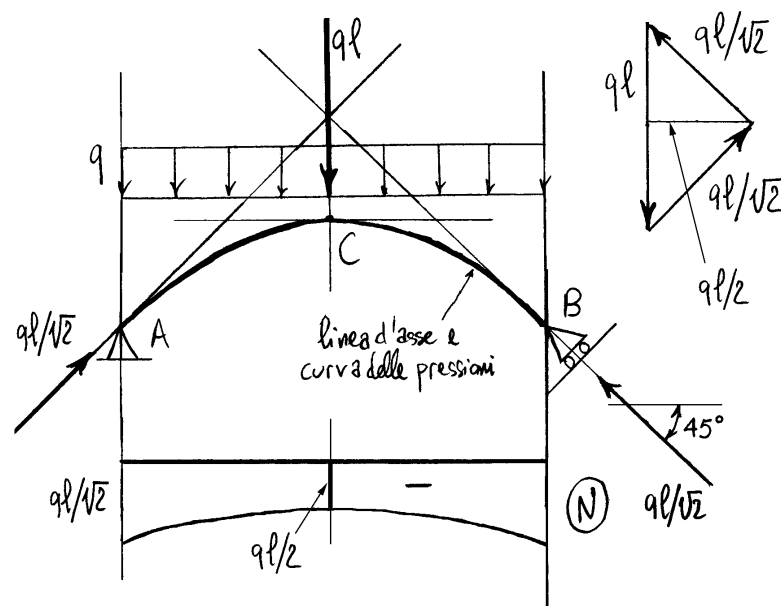
La retta d'azione della risultante in  $A$  è la retta verticale per  $A$ . Facendo variare  $S$  da  $A$  a  $C$  (sezione sulla mezzatura della trave)  $\xi$  varia da  $0$  a  $l/2$  e  $x$  varia da  $0$  a  $+\infty$ . Le rette d'azione delle risultanti relative alle sezioni della metà sinistra  $AC$  della trave individuano quindi le rette verticali poste a sinistra dell'appoggio  $A$ . Analogamente, alle sezioni della metà destra  $CB$  della trave corrispondono le rette verticali poste a destra dell'appoggio  $B$ . Inoltre, alla sezione  $C$  corrisponde la retta impropria, in accordo col fatto che la risultante in  $C$  è nulla. Poiché tutte le rette d'azione sono verticali, non esiste nessun inviluppo e quindi in tal caso non esiste la curva delle pressioni.

Per generare una curva delle pressioni nella trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito costante occorre una reazione orizzontale che permetta di inclinare le rette d'azione delle risultanti. Si inclini, a tale scopo, il carrello in  $B$ , ottenendo una curva delle pressioni parabolica.



I diagrammi del taglio e del momento flettente restano invariati, ma viene ad aggiungersi la forza normale che nel caso precedente era nulla.

Si sostituisca ora la trave ad asse rettilineo con un arco parabolico di linea d'asse coincidente con la curva delle pressioni precedente, lasciando invariati i vincoli in A e in B.



Si ottiene così una struttura in grado di assorbire il carico ripartito generando esclusivamente una forza normale. Ciò è particolarmente vantaggioso se il materiale di cui è composto l'arco non è resistente a trazione, poiché il carico in tal modo può essere assorbito generando solo sforzi di compressione.

### 3.3.4 Arco circolare a tre cerniere

Si consideri l'equilibrio di un arco di circonferenza AB di centro O, di semiapertura  $\beta$  generica, soggetto ad un carico distribuito  $q$  radiale (per unità di linea d'asse) e a due forze in A e in B tangenti alla linea d'asse (fig. 3.9a).

Il carico radiale è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'angolo  $\widehat{AOB}$  e quindi tale bisettrice coincide con la retta d'azione della risultante del carico. Sempre per simmetria, le due tangenti in A e in B si incontrano sulla bisettrice dell'angolo  $\widehat{AOB}$  rendendo così possibile l'equilibrio (dato che condizione necessaria per l'equilibrio di tre forze è che si incontrino in un punto).

Poiché la risultante del carico radiale ha retta d'azione l'asse di simmetria, è sufficiente integrare la componente del carico in tale direzione. La simmetria permette inoltre di integrare solo su metà arco. Con le convenzioni di fig. 3.9a si ottiene così:

$$Q = 2 \int_0^\beta q \cos \alpha R d\alpha = 2qR \sin \beta. \quad (8)$$

Come può poi dedursi dal poligono delle forze (fig. 3.9b), gli sforzi alle due estremità A ed B dell'arco valgono  $qR$ . Si noti che tale risultato è indipendente dalla semiapertura  $\beta$  dell'arco.

Si consideri ora l'arco circolare a tre cerniere di fig. 3.10, soggetto ad un carico distribuito radiale costante (ancora per unità di linea d'asse).

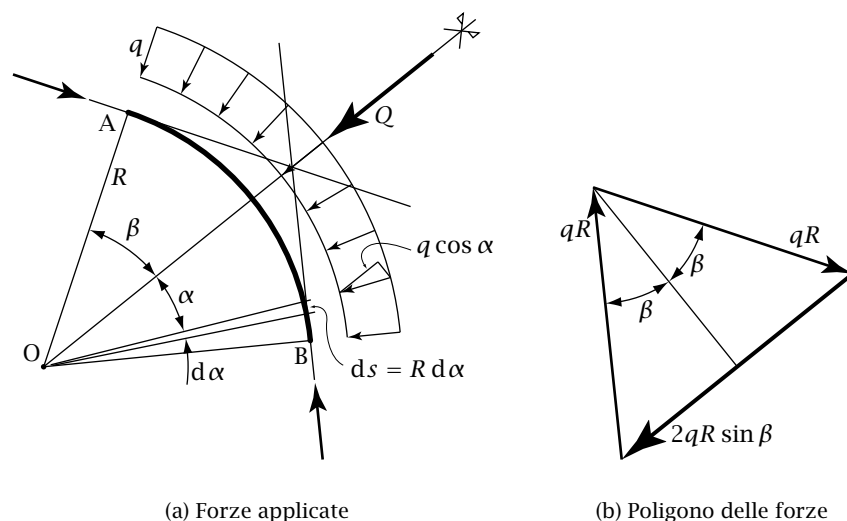


Figura 3.9: Equilibrio di un arco circolare soggetto ad un carico radiale

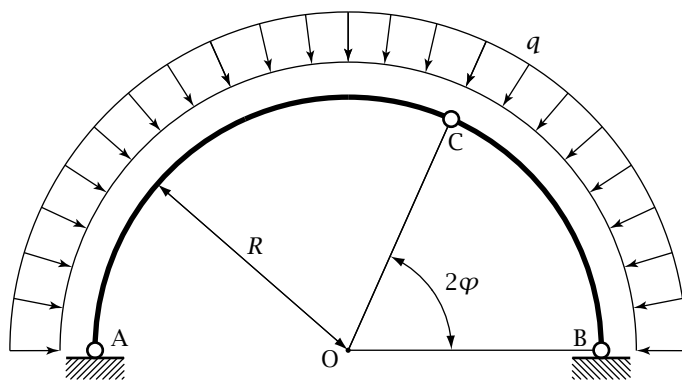


Figura 3.10: Arco circolare a tre cerniere soggetto ad un carico ripartito radiale

Si sconnetta in corrispondenza delle tre cerniere (interna ed esterne). Per la soluzione precedente, è possibile equilibrare i due archi con delle forze tangenti alla linea d'asse, di modulo  $qR$  indipendente dalla

semiapertura degli archi, come indicato in fig. 3.11. Le due forze in cor-

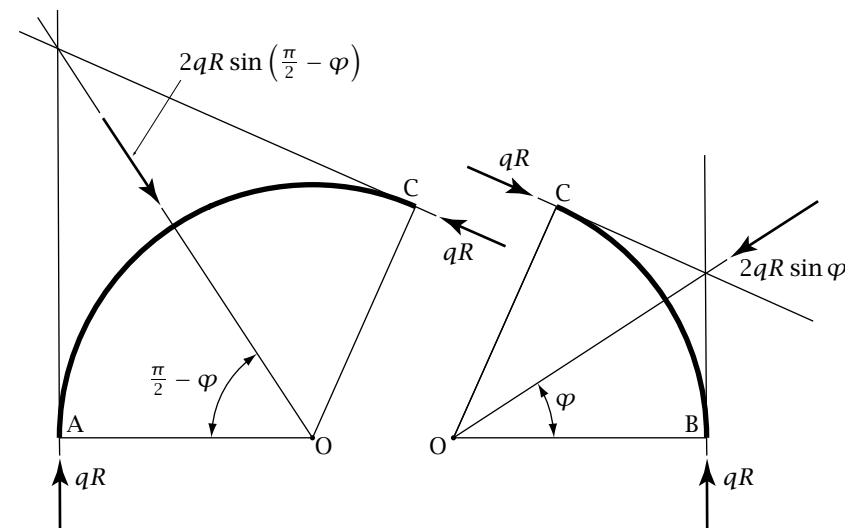


Figura 3.11: Reazioni interne ed esterne

rispondenza della cerniera interna sono quindi uguali ed opposte come imposto dal vincolo. Essendo soddisfatto l'equilibrio e tutte le condizioni imposte dai vincoli, lo schema di fig. 3.11 fornisce la soluzione dell'arco circolare a tre cerniere soggetto a carico radiale.

Si noti che l'arco è soggetto alla sola forza normale e che quindi la curva delle pressioni coincide con la linea d'asse dell'arco.

### 3.3.5 Cenno all'equilibrio dei fili

Come già visto nel caso dell'arco parabolico, la curva delle pressioni non dipende dalle linee d'asse del sistema di travi ma solo dalle forze applicate (forze attive e reazioni dei vincoli), almeno finché la forma della struttura non influenza le forze applicate. Si consideri allora un *filo inestendibile*, ovverossia un filo che conserva la sua lunghezza. Essendo indefinitamente flessibile, il filo può essere internamente soggetto solo a forze normali di trazione, dirette quindi secondo la tangente alla linea

che rappresenta la configurazione equilibrata sotto le date forze.<sup>4</sup> Ne consegue che se si atteggia un filo inestendibile secondo la curva delle pressioni determinata da dati carichi (e reazioni vincolari) si ottiene una configurazione equilibrata del filo soggetto a quei dati carichi, almeno nel caso in cui le forze normali sono di trazione.

Quale primo esempio si consideri il poligono delle pressioni di fig. 3.5a a pagina 32. Tenuto conto che nel caso considerato lo sforzo normale è di compressione, è sufficiente modificare il verso della forza  $F$  esterna applicata per ottenere la configurazione di un filo inestendibile in equilibrio sotto le date forze (fig. 3.12a). Analogamente si consideri

so in conto il peso proprio del filo. Si consideri allora un filo omogeneo pesante. In tale caso il peso proprio rappresenta un carico distribuito costante per unità di linea. Se il filo è molto teso tra due punti posti su una linea orizzontale, la sua configurazione equilibrata è vicina a quella rettilinea passante per i due punti. In tal caso il peso proprio del filo si può allora approssimativamente considerare quale carico distribuito costante per proiezione orizzontale. Ne consegue che il filo si atteggia, approssimativamente, secondo una curva parabolica passante per i due punti dati. L'equazione della parabola è fornita dalla (7) a pagina 33, dove  $H$  rappresenta la forza normale a cui il filo è soggetto.

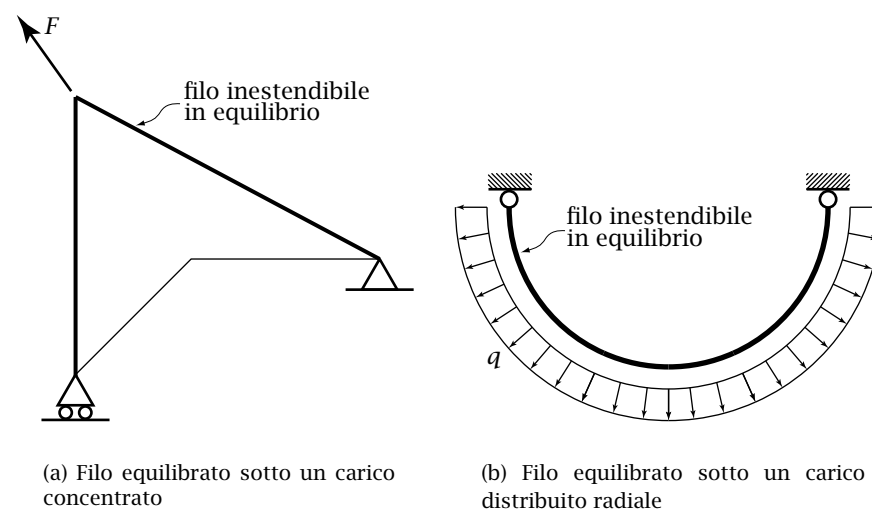


Figura 3.12: Fili inestendibili in equilibrio

la curva delle pressioni dell'arco semicircolare di fig. 3.10 nella pagina precedente, che ricordiamo essere coincidente con la linea d'asse semicircolare. Tenendo ancora conto che nel caso trattato la forza normale è di compressione, se ne deriva che la configurazione del filo inestendibile di fig. 3.12b è equilibrata sotto il carico distribuito radiale.

Si conclude osservando che negli equilibri precedenti non è stato mes-

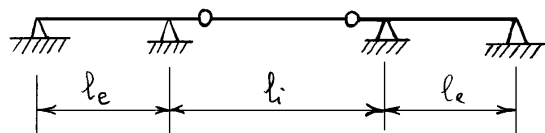
<sup>4</sup>Si noti che non avendo il filo una forma propria, non ha senso scrivere l'equilibrio in una configurazione indeformata vicina a quella deformata.

### 3.4 Sistemi di travi isostatici

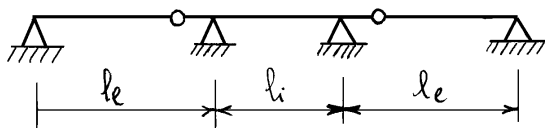
#### 3.4.1 Travi Gerber

La trave Gerber è una trave su più di due appoggi resa isostatica mediante un numero sufficiente di svincoli interni. Si tratta, dunque, di un sistema di travi, collegate tra loro da vincoli interni (tipicamente cerniere).

Casi più frequenti di travi Gerber su quattro appoggi:

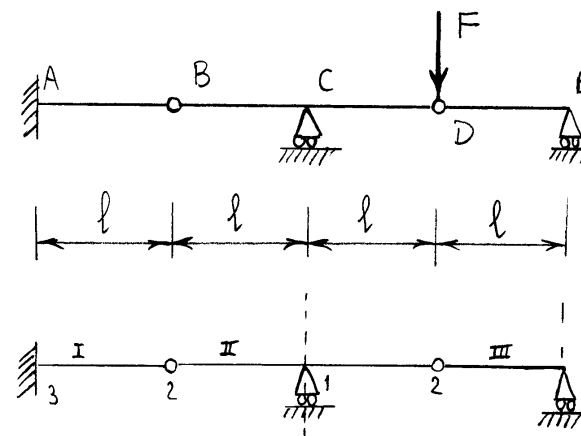


$$l_e < l_i$$



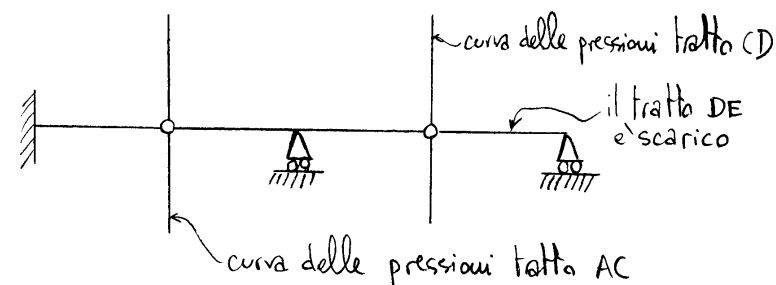
$$l_e > l_i$$

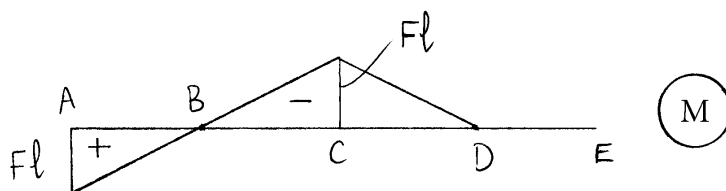
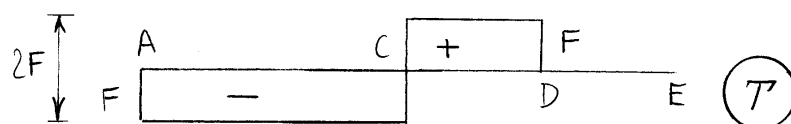
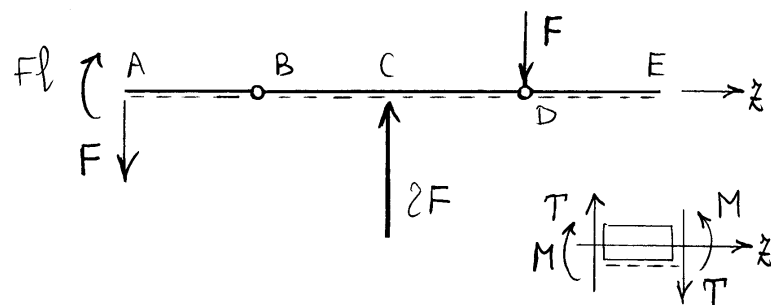
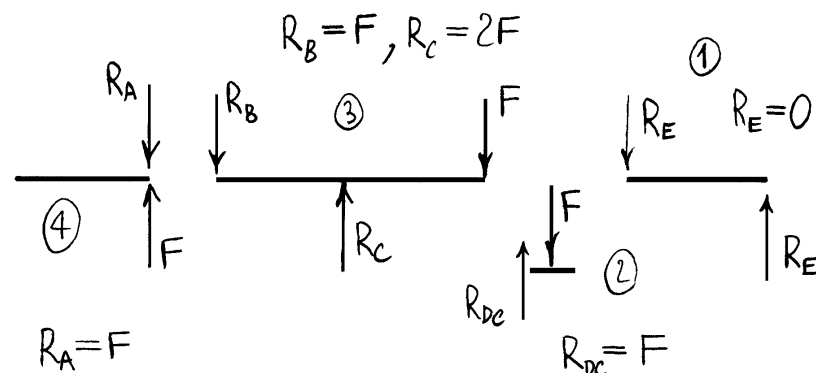
#### Esercizio



$$\begin{cases} g = 9 \\ v = 9 \\ l = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

Il tratto AB è fisso. Il tratto BD è vincolato a ruotare attorno a B, ma in tal caso il punto C deve spostarsi verticalmente, il che è impedito dall'appoggio e quindi anche il tratto BD è fisso, così come DE che a questo punto risulta una trave su due appoggi. Ne risulta che il sistema è isostatico.

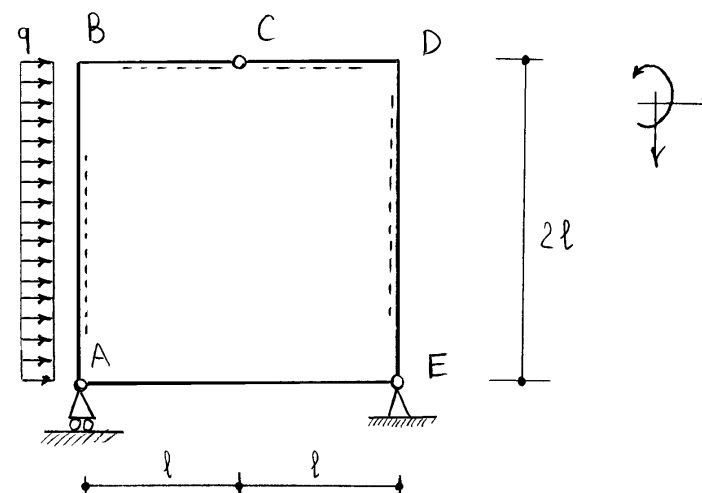




### 3.4.2 Sistemi chiusi isostatici

#### 3.4.2.1 Esempio 1

Si consideri il sistema chiuso di figura soggetto ad un carico ripartito uniformemente sul montante AB. Un sistema chiuso biconnesso ha tre gradi di iperstaticità poiché rimuovendo la continuità in corrispondenza di una generica sezione, cioè rimuovendo tre vincoli semplici, non si modifica la situazione cinematica del sistema, considerato rigido.



Nel caso in esame, nel tratto chiuso sono presenti tre connessioni semplici mentre esternamente sono presenti tre vin-

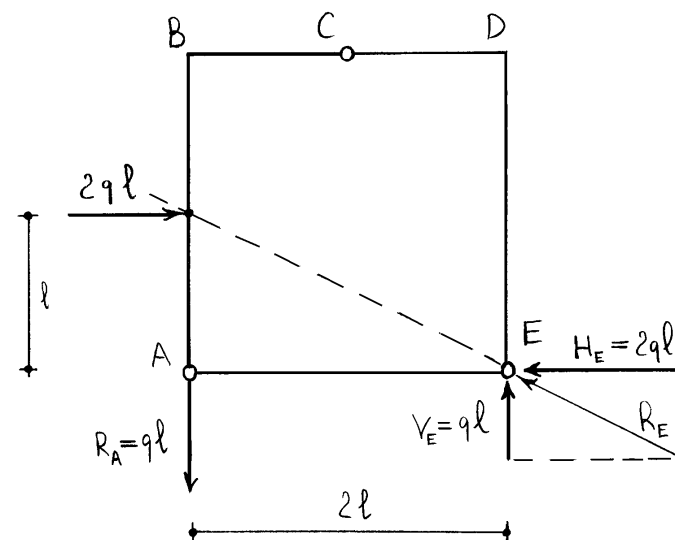
coli semplici. La condizione necessaria di isostaticità è dunque soddisfatta. Alternativamente, i tre tratti AE, ABC e CDE posseggono 9 gradi di libertà nel piano, sono vincolati tra loro da 3 vincoli doppi (le cerniere in A, E e C) e sono vincolati esternamente da un vincolo doppio (l'appoggio in E) e da un vincolo semplice (il carrello in A):

$$g = 3 \times 3 = 9, \quad v = 2 \times 4 + 1 = 9 \Rightarrow g - v = 0.$$

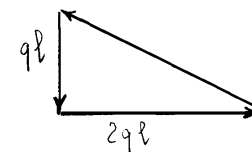
Inoltre, nell'ipotesi di labilità della struttura, il tratto AE deve ruotare attorno al punto E, ma in tal caso il punto A deve spostarsi verticalmente, il che è impedito dal carrello. Quindi il punto A è fisso. Il punto C, pensato appartenente al tratto ABC, deve quindi spostarsi in direzione ortogonale alla congiungente AC così come, pensato appartenente al tratto CDE, deve spostarsi in direzione ortogonale alla congiungente EC. Quindi anche C è fisso e la struttura non è labile. Ne consegue che la struttura è isostatica.

Dato che la struttura è esternamente isostatica (è isostatica e i vincoli semplici esterni sono tre) l'equilibrio globale individua le reazioni dei vincoli esterni.

soluzione esterna



poligono delle forze



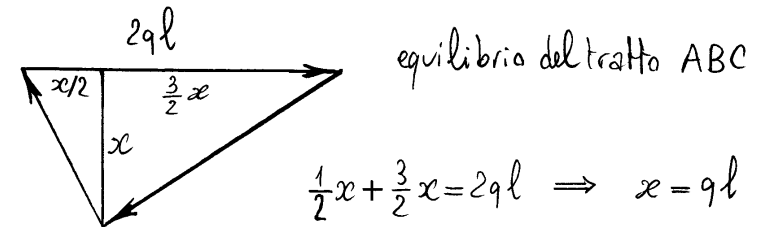
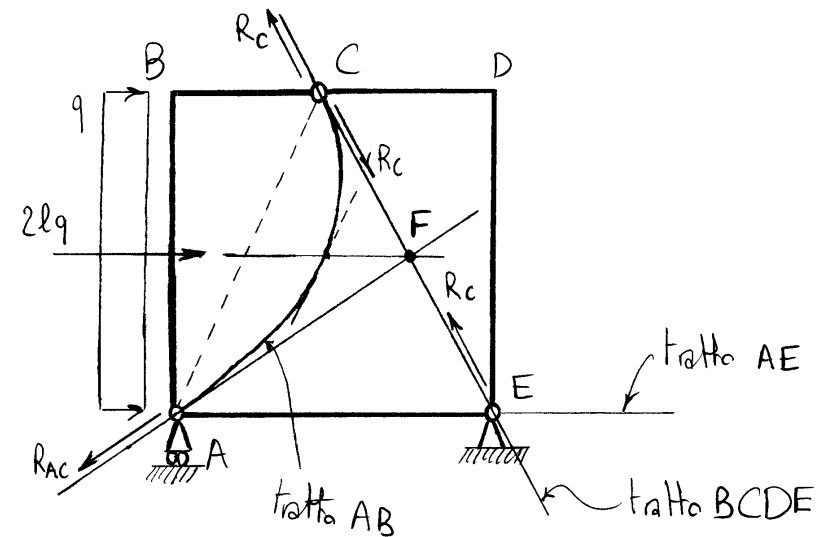
Equilibrio

- |                 |                 |                                  |
|-----------------|-----------------|----------------------------------|
| 1) Orizzontale: | 2) Verticale:   | 3) Rotazione di polo E:          |
| $2ql - H_E = 0$ | $R_A - V_E = 0$ | $R_A \cdot 2l - 2ql \cdot l = 0$ |

### Soluzione vettoriale interna e curva delle pressioni

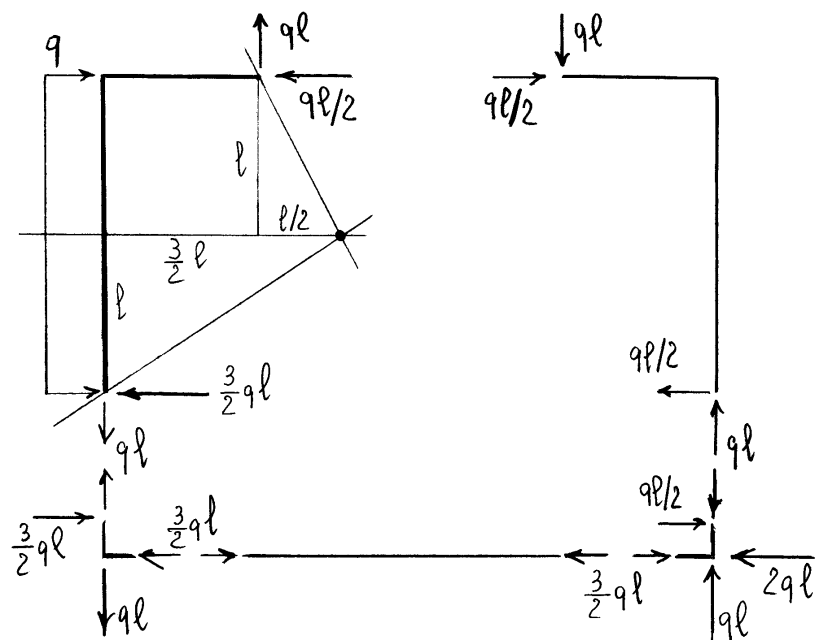
Per risolvere internamente la struttura si consideri l'equilibrio del tratto CDE. Essendo tale tratto soggetto alle due sole forze trasmesse in C ed in E, con rette d'azione rispettivamente per C e per E, ne risulta che le due forze devono essere uguali ed opposte. La loro retta d'azione coincide quindi con la congiungente CE, e tale congiungente rappresenta la curva delle pressioni nel tratto BCDE, tratto privo di forze esterne applicate.

Si consideri poi l'equilibrio del tratto ABC. La risultante del carico distribuito e la forza trasmessa in C si incontrano in un punto F per il quale deve passare, per equilibrio, anche la terza forza agente in A e con retta d'azione per A. Tale forza ha quindi la congiungente AF quale retta d'azione. La curva delle pressioni del tratto AB è una parabola ad asse orizzontale, passante per i punti A e C dove le tangenti sono le rette AF e CF rispettivamente. Dimmezzando il segmento



orizzontale da F (vertice delle tangenti) alla congiungente AC si ottiene il terzo punto della parabola di tangente parallela ad AC.

Infine il tratto AE non è soggetto a forze esterne e la curva delle pressioni coincide con l'asse dell'atave.



Soluzione analitica interna

Parte 1

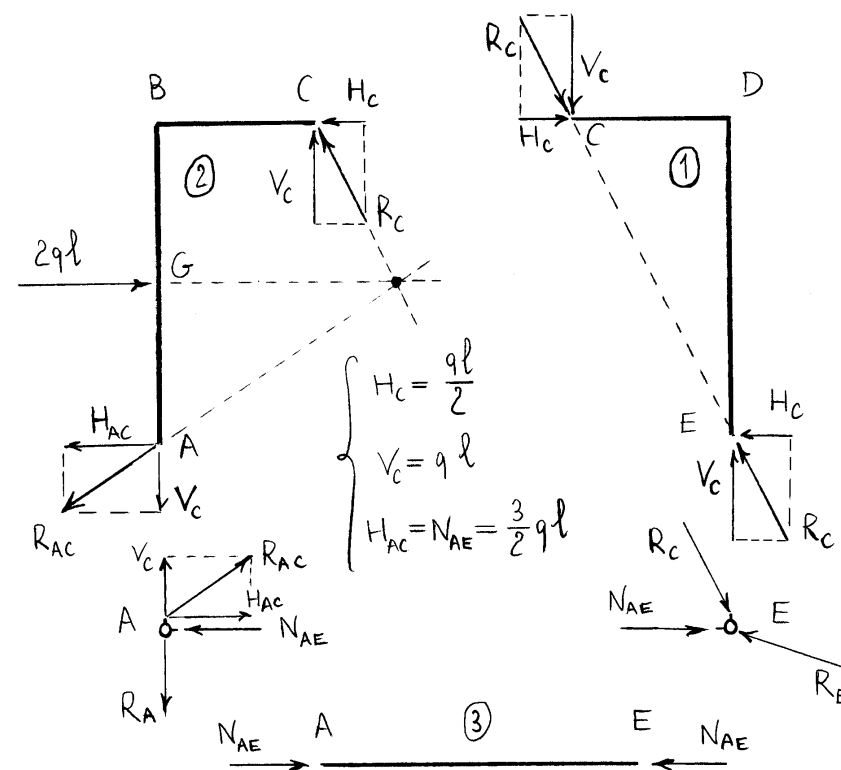
Equilibrio alla rotazione attorno al punto C :

$$V_c l - H_c 2l = 0 \Rightarrow V_c = 2H_c$$

Parte 2

Equilibrio alla traslazione orizzontale :

$$2ql - H_c - H_{AC} = 0 \Rightarrow H_{AC} = 2ql - H_c$$



Equilibrio alla rotazione attorno al punto A :

$$H_c 2l + V_c l - 2ql l = 0$$

$$2H_c l + 2H_c l - 2ql^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} H_c &= \frac{1}{2} ql \\ H_{AC} &= \frac{3}{2} ql \end{aligned}$$

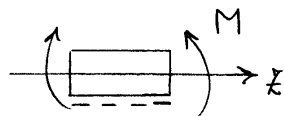
Nodo A

Traslazione orizzontale :

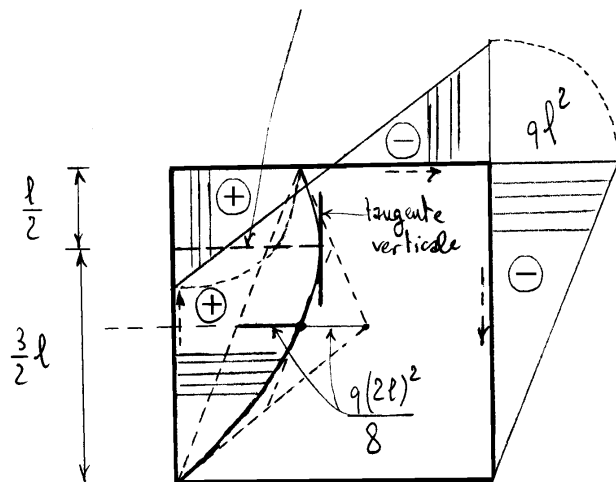
$$H_{AC} - N_{AE} = 0 \Rightarrow N_{AE} = H_{AC}$$

## Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

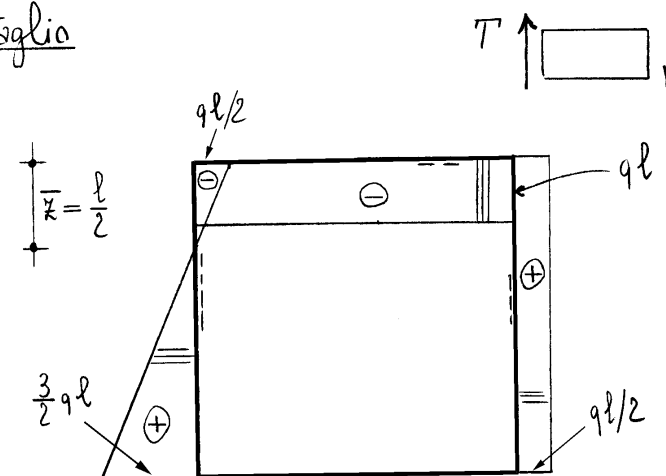
### Momento flettente



$$M_{\max} = H_{Ac} \frac{3}{2}l - q\left(\frac{3}{2}l\right)\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{9}{8}ql^2$$

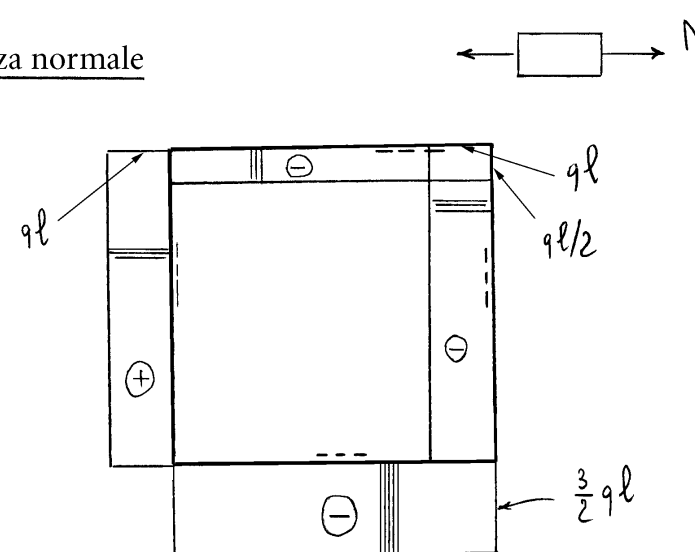


### Taglio



$$\frac{\bar{x}}{ql/2} = \frac{2l - \bar{x}}{\frac{3}{2}ql} \rightarrow 3\bar{x} = 2l - \bar{x}$$

### Forza normale



## 3.4.2.2 Esempio 2

Si consideri ora il sistema chiuso di fig. 3.13, soggetto ad una coppia

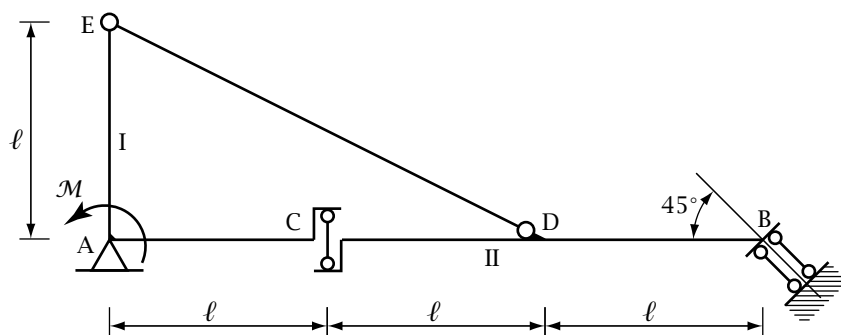
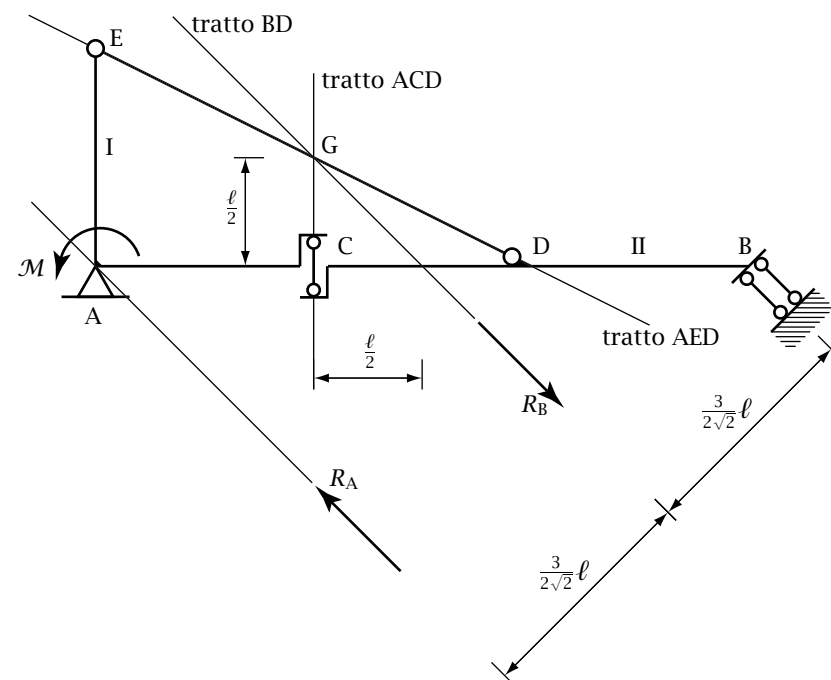


Figura 3.13: Sistema di travi chiuso soggetto ad una coppia

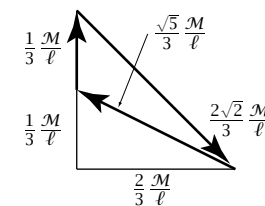
antioraria applicata nel nodo rigido A.

**Isostaticità** Il sistema di travi di fig. 3.13, contenente una parte chiusa, può essere considerato composto delle due parti rigide I e II connesse dal pendolo ED e dal pendolino interno in C. Essendo esternamente vincolata dall'appoggio in A e dal doppio pendolo in B, il numero globale dei vincoli semplici è quindi 6, pari al numero dei gradi di libertà delle due parti svincolate. Il sistema soddisfa allora la condizione necessaria di isostaticità.

Se la parte II subisse un moto rigido, causa il doppio pendolo questi sarebbe di traslazione. Supponiamo una traslazione che abbassa e sposta verso sinistra della stessa quantità, diciamo  $a$ , tutti i suoi punti, compresi quindi i punti C e D. Se il punto C si abbassa, per la continuità dello spostamento imposto dal pendolo la parte I deve ruotare in senso orario attorno al punto fisso A. Il punto E si sposta allora verso destra di  $a$ . Eseguendo tale traslazione al pendolo ED il punto D si sposta verso destra di  $a$ . Si imponga ora una rotazione oraria di tale pendolo attorno alla cerniera in E in modo tale da rispettare la continuità dello spostamento verticale in D, e quindi tale da abbassare il punto D di  $a$ . Poiché il braccio verticale è la metà di quello orizzontale, ne risulta uno spostamento orizzontale pari a  $a/2$  verso sinistra e quindi uno spostamento complessivo di D verso destra di  $a/2$ , in contrasto



(a) Poligono delle pressioni



(b) Poligono delle forze

Figura 3.14: Poligoni delle pressioni e delle forze

con la traslazione di  $a$  verso sinistra dovuto alla traslazione della parte II. La contraddizione dimostra che il sistema di travi non può subire moti rigidi e che quindi non è labile e di conseguenza è isostatico.

**Reazioni interne ed esterne** Per determinare le reazioni interne ed esterne, si consideri l'equilibrio della parte II. Le reazioni in corrispondenza delle sconnessioni in C, D e B hanno quali rette d'azione, rispettivamente, la verticale per C, la retta per E e D, e una retta parallela agli assi dei pendoli del doppio pendolo in B. Con riferimento allo schema di fig. 3.14a, le prime due si incontrano nel punto G da dove deve passare anche la retta d'azione della reazione del doppio pendolo. Resta così completamente determinato il poligono delle pressioni del sistema di travi.

Ciò stabilito, si consideri ora l'equilibrio globale. Dovendo equilibrare la coppia antioraria  $\mathcal{M}$ , le reazioni dell'appoggio in A e del doppio pendolo in B devono costituire una coppia oraria, di forze parallele agli assi dei pendoli del doppio pendolo e di braccio  $\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell$ . Risulta quindi:

$$R_A = R_B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mathcal{M}}{\ell}. \quad (9)$$

Il poligono delle forze riportato in fig. 3.14b determina le reazioni del pendolo in C e del pendolo ED, completando così il calcolo delle reazioni

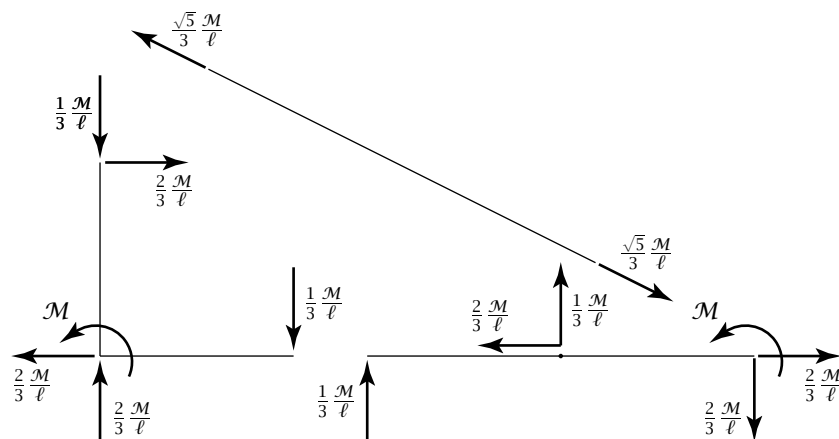


Figura 3.15: Reazioni interne ed esterne

interne ed esterne. Tale soluzione è riportata nello schema di fig. 3.15, dove risulta anche semplice la verifica dell'equilibrio.<sup>5</sup>

In fig. 3.16 è poi riportato il diagramma del momento flettente. Sem-

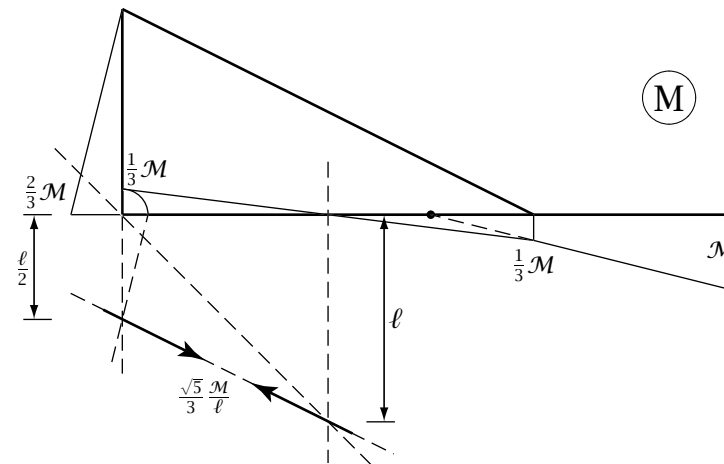


Figura 3.16: Diagramma del momento flettente

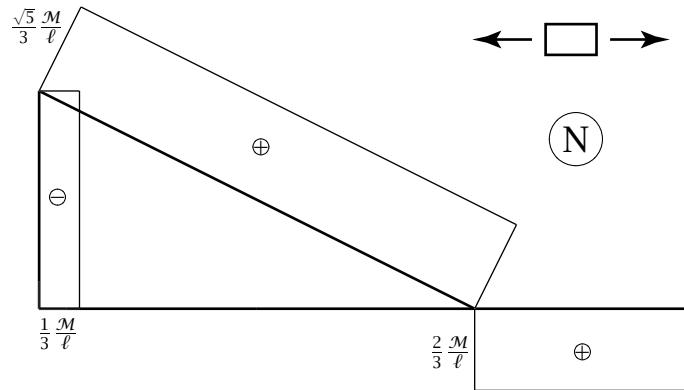
pre nella fig. 3.16 sono anche mostrate a sinistra la risultante della reazione del pendolo ED e della coppia applicata in A, e a destra la risultante della reazione del pendolo in C e della reazione in A, risultanti che devono essere uguali ed opposte. Mandando dall'intersezione della retta d'azione di tali risultanti con il prolungamento del tratto EA una retta parallela al diagramma del momento nel tratto EA, si ottiene in A il valore che il momento flettente ha immediatamente a destra di A nel tratto AC.

Nelle figg. 3.17a e 3.17b sono infine riportati i diagrammi della forza normale e del taglio rispettivamente.

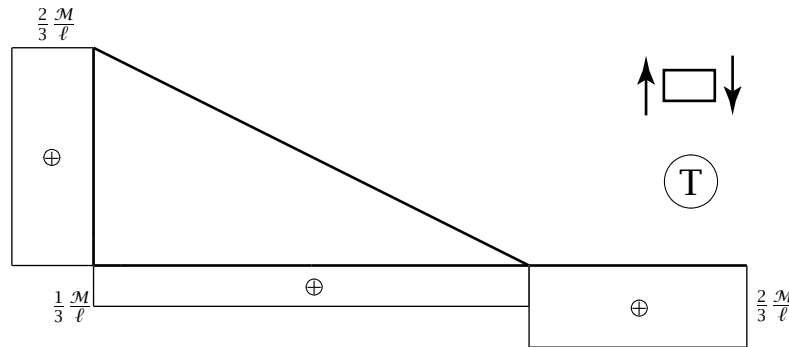
<sup>5</sup>È sempre consigliabile di riportare la soluzione, comunque ottenuta, in uno schema riassuntivo del tipo di quello di fig. 3.15, che tra l'altro permette un semplice controllo dell'equilibrio e quindi della validità della stessa soluzione.

### 3.4.3 Travature reticolari isostatiche

Si consideri un sistema composto di travi ad asse rettilineo incerniate nei nodi. Se il sistema non è labile internamente, viene detto travatura reticolare.

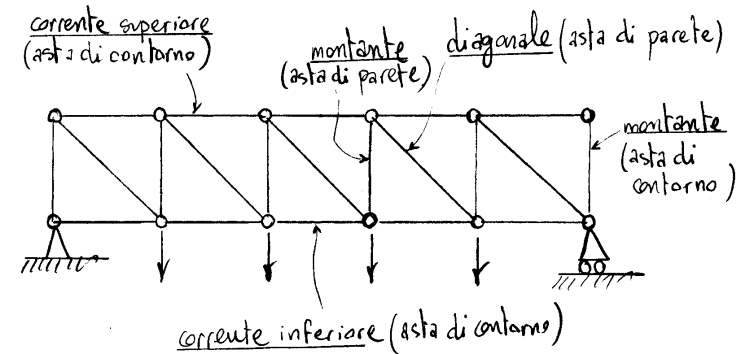


(a) Forza normale



(b) Taglio

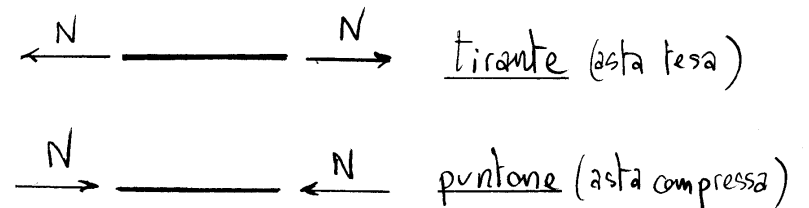
Figura 3.17: Diagrammi della forza normale e del taglio



Le travi che compongono le travature reticolari sono tradizionalmente denominate aste.

Se una travatura reticolare è caricata solo nei nodi, è soggetta internamente alla sola forza normale.

Le aste di una travatura reticolare, soggetta a date forze, sono distinte in tiranti e puntone a seconda che siano rispettivamente tese oppure compresse.



## 3.4.3.1 Condizioni di isostaticità

Si consideri una travatura reticolare piana con nodi cernieri. Ogni singolo nodo se considerato libero nel piano possiede due gradi di libertà per cui l'insieme dei nodi della travatura, considerati liberi, possiede  $2n$  gradi di libertà, se  $n$  è il numero dei nodi. Ogni asta, considerata rigida, introduce un grado di vincolo per cui i gradi di libertà dei nodi vincolati dalle aste risultano almeno  $2n - a$ , se  $a$  è il numero delle aste. Condizione necessaria affinché la travatura reticolare sia internamente isostatica è dunque:

$$2n - a = 3,$$

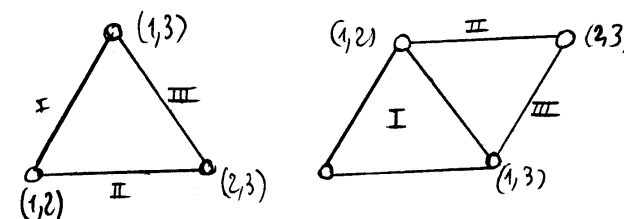
poiché 3 devono essere i suoi gradi di libertà nel piano.

Se la travatura reticolare è di tipo triangolato, cioè se è possibile generarla a partire da un triangolo per successiva aggiunta di due aste ed un nodo costituente un ulteriore triangolo, essa è senz'altro

isostatica internamente.

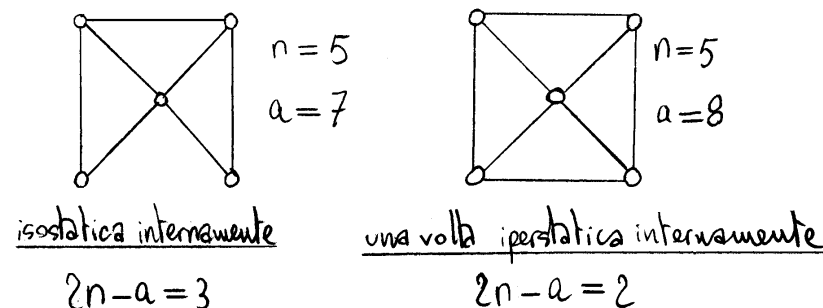
Infatti sia dato un sistema di tre aste costituenti un triangolo e incerniate alle estremità.

Con riferimento alla figura, le aste II e III, per poter subire un moto relativo rispetto all'asta I, devono ruotare at-

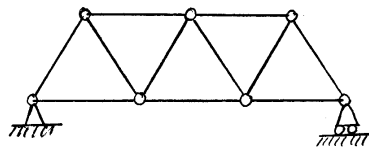
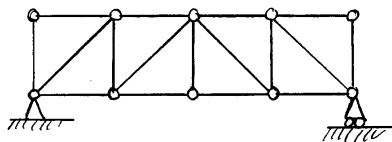
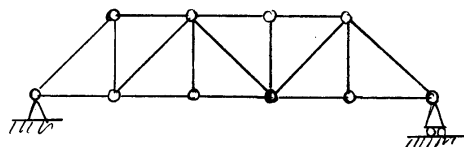
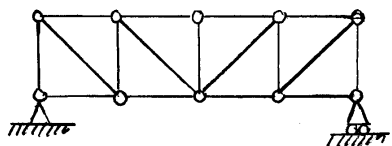
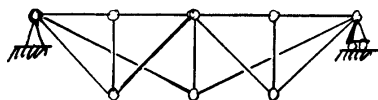
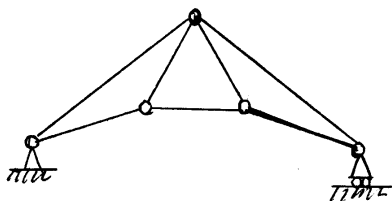


torno ai punti (1,2) e (1,3) rispettivamente. Ma in tal caso il punto (2,3) subirebbe un diverso spostamento nei due moti rigidi relativi che pertanto non sono ammissibili. Se si aggiungono due aste generando un ulteriore triangolo, si può ripetere il ragionamento considerando i moti rigidi delle due aste aggiunte rispetto al triangolo di partenza, e così via.

Se si genera un triangolo aggiungendo una sola asta la struttura diventa una volta iperstatica internamente.



## 3.4.3.2 Esempi di travature reticolari piane

Travatura NevilleTravatura HoweTravatura PrattTravatura MohnieTravatura FinkCapriata semplice

## 3.4.3.3 Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo dei nodi

Si scrivono due equazioni di equilibrio alla traslazione per ogni nodo. Si hanno così a disposizione  $2n$  equazioni. Le incognite sono le 3 reazioni dei vincoli esterni e gli  $a$  sforzi normali nelle aste. Se la struttura è isostatica risulta  $2n = a + 3$ , cioè il numero delle equazioni uguale al numero delle incognite. Non solo, se la struttura è isostatica, cioè se le aste sono anche ben disposte, allora la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è senz'altro invertibile e il sistema risolubile in modo unico. È anche possibile

procedere predeterminando le reazioni dei vincoli esterni tramite le equazioni di equilibrio globale procedendo poi via equilibrio dei nodi. In tal caso tre delle  $2n$  equazioni diventano identicamente soddisfatte e permettono un controllo dei risultati.

Se in un nodo convergono solo due aste di cui siano incogniti gli sforzi normali, le due equazioni di equilibrio permettono di determinare tali sforzi indipendentemente dalle altre equazioni di equilibrio. Se, una volta predeterminate le reazioni dei vincoli esterni, risulta possibile risolvere la travatura reticolare partendo da un nodo in cui convergono solo due aste e procedendo poi via equilibrio di nodi in cui convergono solo due aste con sforzi incogniti, si dice

che la travatura è a nodi canonici. In tal caso è possibile risolvere graficamente ogni singolo nodo tracciando un poligono delle forze.

### Casi particolari

Se in un nodo non soggetto a carichi esterni (nodo scarico) convergono solo due aste, lo sforzo normale nelle due aste è nullo (aste scariche):

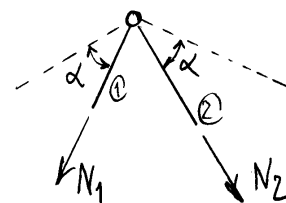
Infatti:

Equilibrio alla traslazione del nodo nella direzione ortogonale all'asta ②:

$$N_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

Equilibrio alla traslazione del nodo nella direzione ortogonale all'asta ①:

$$N_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

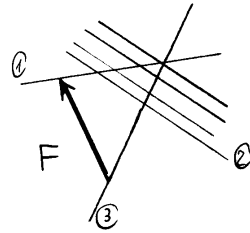
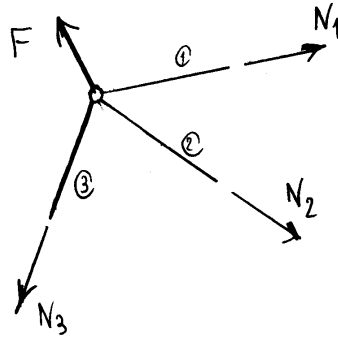


Oppure:

L'equilibrio sotto due forze sussiste se e solo se le due forze hanno stessa retta d'azione, modulo uguale e verso opposto

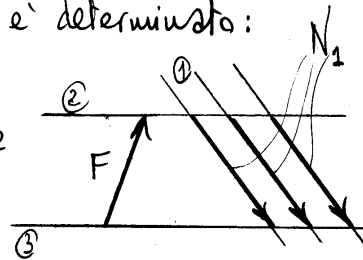
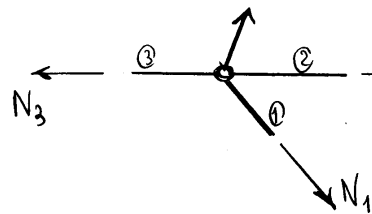
Se in un nodo convergono tre aste resta una indeterminazione:

misurazione:

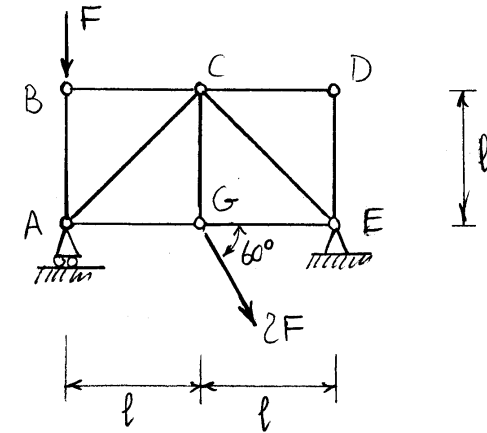


tracciate due parallele alle aste dalle due estremità della forza  $F$  e' possibile tracciare infinite parallele alla terza asta in modo che l'equilibrio di nodo sia soddisfatto

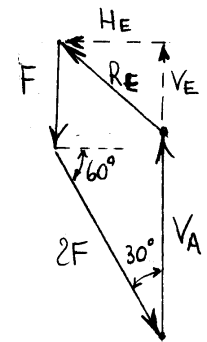
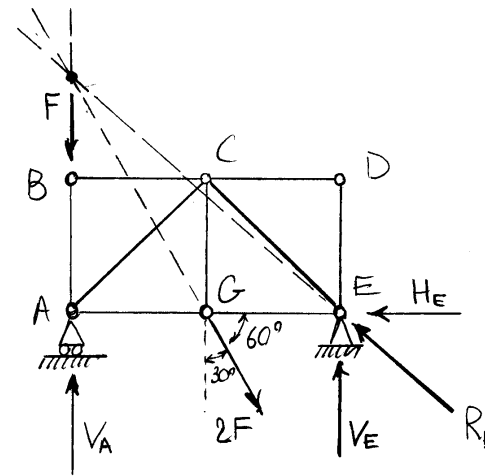
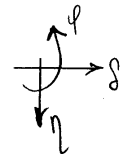
Se due di tre aste convergenti in un nodo sono allineate allora lo sforzo nella terza asta e' determinato:



Esempio



$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2 \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$



Equilibrio globale (3 incognite):

$$-H_E + 2F \sin 30^\circ = 0 \quad (\text{traslazione orizzontale})$$

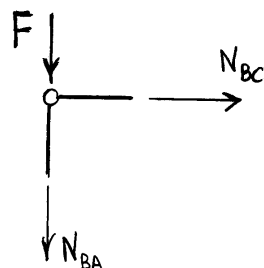
$$V_E 2l - 2F G \sin 30^\circ l = 0 \quad (\text{rotazione attorno ad A})$$

$$\begin{cases} H_E = F \\ V_E = \frac{\sqrt{3}}{2} F \end{cases} \Rightarrow R_E = \frac{\sqrt{7}}{2} F$$

$$-V_A + 2F \cos 30^\circ + F - V_E = 0 \quad (\text{traslazione verticale})$$

$$V_A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F$$

Equilibrio nodo B (due incognite):

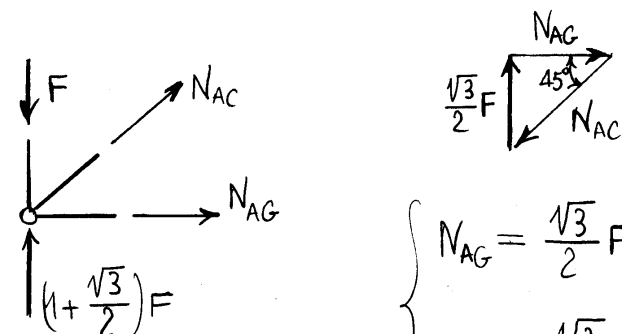


$$\begin{cases} N_{Bc} = 0 \\ N_{BA} = -F \end{cases}$$

Equilibrio nodo D (due incognite):

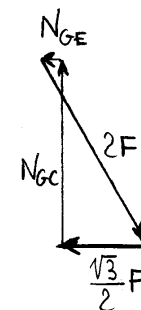
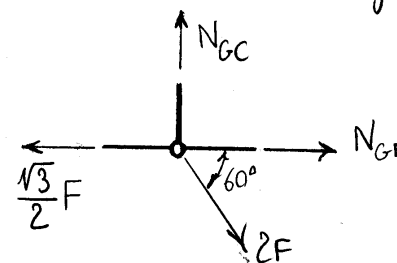
$$\begin{cases} N_{Dc} = 0 \\ N_{DE} = 0 \end{cases} \quad (\text{Nodo scarico})$$

Equilibrio nodo A (due incognite):



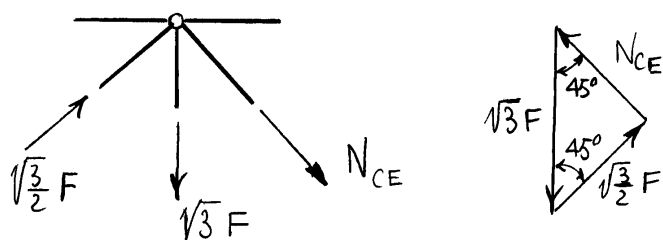
$$\begin{cases} N_{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} F \\ N_{Ac} = -\frac{\sqrt{3}}{2} F \end{cases}$$

Equilibrio nodo G (due incognite):



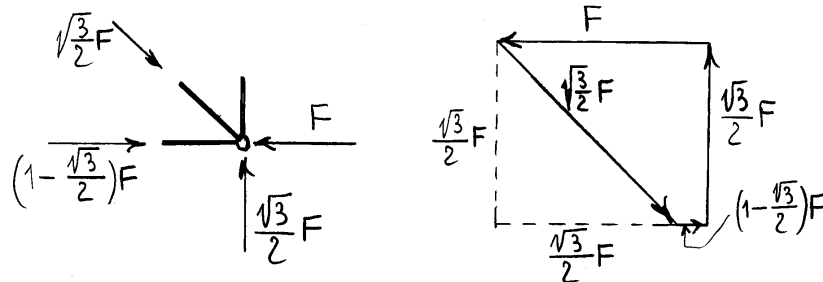
$$\begin{cases} N_{GE} = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F \\ N_{GC} = \sqrt{3} F \end{cases}$$

Equilibrio nodo C (una sola incognita)



$$N_{CE} = -\sqrt{\frac{3}{2}} F$$

Equilibrio nodo E (nessuna incognita)

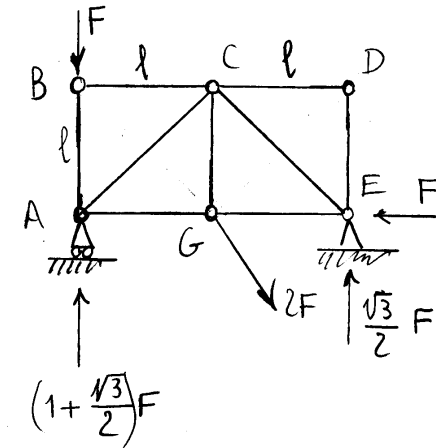


| Aste               |    | Tipo    | Sforzo normale                          |
|--------------------|----|---------|-----------------------------------------|
| Corrente inferiore | AG | tirante | $\frac{\sqrt{3}}{2} F$                  |
|                    | GE | puntone | $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F$ |
| Corrente superiore | BC | scarica | 0                                       |
|                    | CD | scarica | 0                                       |
| Montanti           | AB | puntone | F                                       |
|                    | GC | tirante | $\sqrt{3} F$                            |
|                    | ED | scarica | 0                                       |
| Diagonali          | AC | puntone | $\frac{\sqrt{3}}{2} F$                  |
|                    | EC | puntone | $\frac{\sqrt{3}}{2} F$                  |

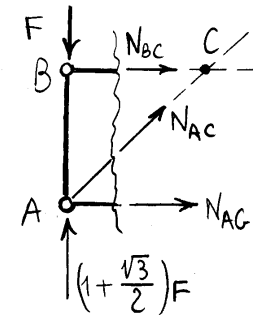
### 3.4.3.4 Soluzione delle travature reticolari isostatiche col metodo delle sezioni di Ritter

È un metodo che, se applicabile, permette di determinare lo sforzo normale in un'asta se sono note le reazioni dei vincoli esterni. Per fare ciò basta, se possibile, dividere in due parti la travatura reticolare sezionando tre aste, tra le quali quella di cui si vuole determinare lo sforzo normale. Le due restanti aste o si incontrano in un punto, e quindi è possibile determinare lo sforzo normale richiesto scrivendo l'equilibrio alla rotazione rispetto a tale punto di una delle due parti della travatura reticolare, oppure sono parallele ed è quindi possibile scrivere l'equilibrio alla traslazione nella direzione perpendicolare all'asse delle due aste.

### Esempio



Determiniamo, via metodo delle sezioni, lo sforzo normale  $N_{AG}$  nell'asta AG:

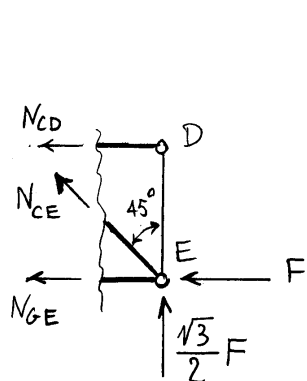


Equilibrio alla rotazione attorno al punto C:

$$N_{AG} l - \frac{\sqrt{3}}{2} F l = 0$$

$$N_{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

Determiniamo ora, sempre via metodo delle sezioni,  
lo sforzo normale  $N_{CE}$  nell'asta CE:



↑ +  
Equilibrio alla  
trazione verticale:

$$N_{CE} \cos 45^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0$$

$$N_{CE} = -\sqrt{\frac{3}{2}} F$$

## Capitolo 4

### Cinematica della trave inflessa

#### 4.1 Ipotesi cinematiche

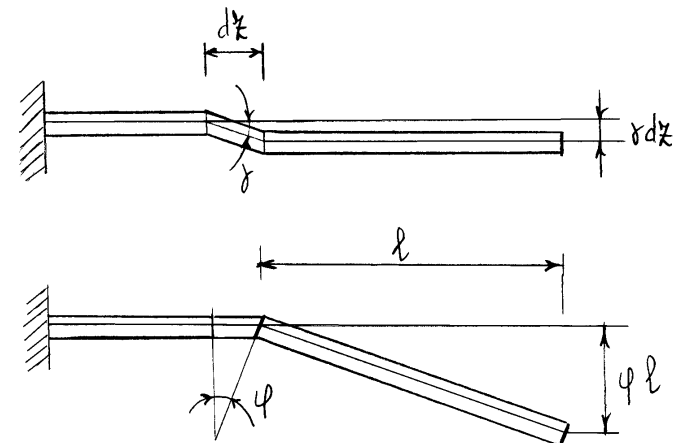
Le ipotesi alla base della cinematica della trave inflessa sono le seguenti:

- 1) Le sezioni rette si conservano piane;
- 2) Le sezioni rette si conservano indeformate nel proprio piano;
- 3) Le sezioni rette si conservano ortogonali alla linea d'asse.

Le prime due ipotesi sono già state discusse in precedenza.

Per quel che riguarda la terza ipotesi, questa equivale a trascurare gli scorrimenti tra linea d'asse e sezioni rette.

Notiamo che questo scorrimento, localizzato in un elemento di trave, provoca, nel caso in cui la trave sia snella, un campo di spostamenti trascurabile rispetto a quello provocato da un differenziale nella rotazione delle due sezioni di estremità dello stesso elemento.



Infatti, gli spostamenti provocati da una rotazione relativa in un elemento di trave sono proporzionali alla distanza dall'elemento, a differenza degli spostamenti dovuti allo scorrimento. Più la trave è snella, maggiore sarà gli

effetti semplificati, dovuti alle distanze in gioco, sugli spostamenti dovuti alle rotazioni relative.

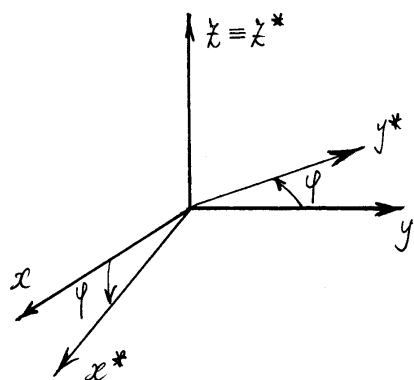
Intuitivamente, la rotazione relativa è associata all'azione del momento flettente e lo scorrimento tra linea d'asse e sezione retta all'azione del taglio. L'equazione indefinita di equilibrio che lega taglio e momento flettente assicura poi che la presenza di scorrimenti tra linea d'asse e sezioni rette è sempre accompagnata da rotazioni relative tra sezioni e gli effetti di queste ultime, nel caso di trave snella, sono predominanti.

## 4.2 Campo di spostamenti dovuto ad una rotazione

Come detto, la deformazione della trave inflessa è descritta dal moto rigido delle sue sezioni rette. Come noto, un moto rigido è sempre decomponibile nella somma di una traslazione più una rotazione. Le traslazioni, rappresentate da un vettore, non danno luogo a problemi particolari. Per quel che riguarda le rotazioni, queste sono in generale rappresentate da un tensore doppio.

Si ricordi che le componenti di un tensore rotazionale rappresentano i coseni direttori degli assi ruotati  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  relativamente agli assi originali  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Si ricordi anche che se l'asse  $z$  coincide con l'asse di rotazione e  $\varphi$  è l'angolo di ampiezza della rotazione, positiva se antioraria sulla faccia positiva del piano  $xy$ , risulta:

$$\underline{R} \equiv \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$



Se l'ampiezza  $\varphi$  della rotazione è piccola la sua rappresentazione si può approssimare tenendo conto dei soli termini lineari in  $\varphi$ :

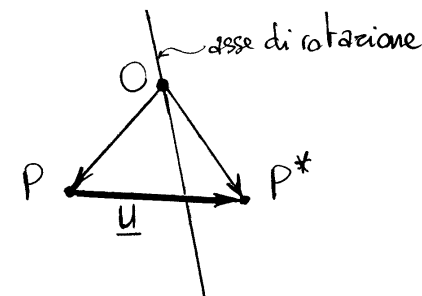
$$\underline{R} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Gli spostamenti dovuti ad una rotazione valgono:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= P^* - P = (P^* - O) - (P - O) = \\ &= \underline{R} (P - O) - \underline{I} (P - O), \end{aligned}$$

ovverossia:

$$\underline{u} = (\underline{R} - \underline{I}) (P - O). \quad (3)$$



Se  $\underline{z}$  coincide con l'asse di rotazione e la rotazione è piccola dalla (2) si ottiene:

$$\underline{R} - \underline{I} \approx \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

La matrice che compare nella (4) è emisimmetrica. Quindi il tensore  $\underline{R} - \underline{I}$  è approssimativamente emisimmetrico.

Ad ogni tensore emisimmetrico  $\underline{W}$  corrisponde in modo unico un vettore  $\underline{w}$ , detto assiale di  $\underline{W}$ , tale che:

$$\underline{W} \underline{v} = \underline{w} \times \underline{v} \quad \text{per ogni } \underline{v}. \quad (5)$$

Il vettore  $\underline{w}$  che corrisponde all'approssimazione emi-

simmetrica di  $\underline{R} - \underline{I}$  viene detto vettore rotazione.

Risulta quindi:

$$\underline{u} = (\underline{R} - \underline{I})(P - O) \approx \underline{\varphi} \times (P - O). \quad (6)$$

Se  $Oxyz$  è un generico sistema di riferimento ortor= male la corrispondenza tra le componenti di  $\underline{\varphi}$  e quelle del tensore emisimmetrico approssimante  $\underline{R} - \underline{I}$  risulta:

$$\underline{\varphi} \equiv \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \iff \underline{R} - \underline{I} \approx \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

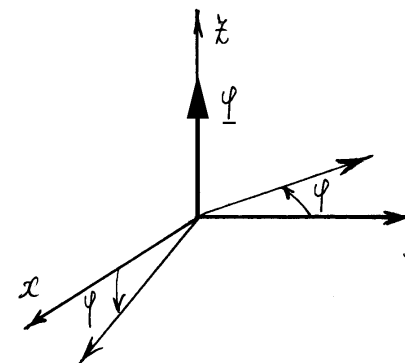
come può facilmente essere verificato.

Se l'asse  $z$  coincide con l'asse della rotazione, per via delle (4) e (7) risulta:

$$\underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_z.$$

Ne consegue che il vettore rotazione ha la direzione e il verso dell'asse rotazione orientato dalla rotazione stessa e modulo pari all'ampiezza della rotazione.

Inoltre i vettori rotazione sono sommabili, nel senso che una rotazione  $\underline{\varphi}_1$  seguita da una rotazione  $\underline{\varphi}_2$  corrisponde ad un'unica rotazione pari a  $\underline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_2$ . Infatti sia  $P$  un punto e



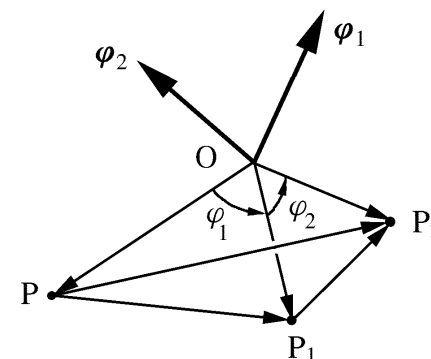
sia  $P_1$  la sua posizione dopo l'applicazione di  $\underline{\varphi}_1$  e  $P_2$  quella che si ha dopo l'ulteriore applicazione di  $\underline{\varphi}_2$ . Allora risulta:

$$\begin{aligned} P_1 - P &= \underline{\varphi}_1 \times (P - O), \\ P_1 - O &= (P - O) + \underline{\varphi}_1 \times (P - O), \\ P_2 - P_1 &= \underline{\varphi}_2 \times (P_1 - O) \approx \underline{\varphi}_2 \times (P - O), \end{aligned}$$

poichè  $\underline{\varphi}_2 \times \{\underline{\varphi}_1 \times (P - O)\}$  è un infinitesimo di ordine superiore al primo nelle rotazioni. Ne consegue:

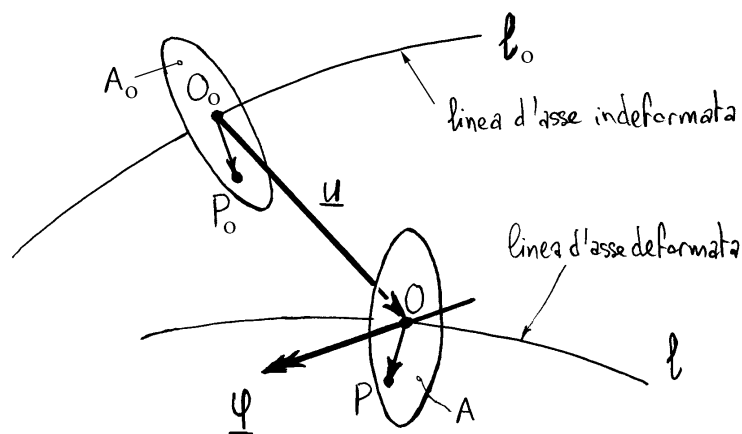
$$P_2 - P = (P_2 - P_1) + (P_1 - P) \approx (\underline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_2) \times (P - O),$$

come volevasi dimostrare.



### 4.3 Variabili cinematiche

La trave inflessa viene descritta cinematicamente dal moto rigido delle sezioni rette assieme alla condizione che le sezioni rette restino ortogonali alla linea d'asse anche dopo la deformazione. Il moto rigido di una sezione retta  $A$  viene descritto dallo spostamento  $\underline{u}$  del punto  $O$  della sezione posto sulla linea d'asse e dalla rotazione  $\underline{\varphi}$  della sezione attorno ad un asse passante per  $O$ .



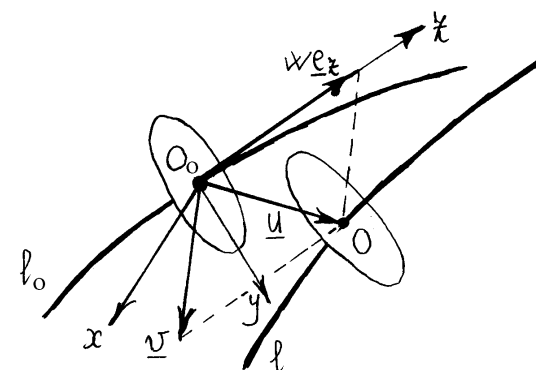
$\underline{u} \equiv$  vettore spostamento

$\underline{\varphi} \equiv$  vettore rotazione

#### 4.3.1 Decomposizione di spostamenti e rotazioni

Lo spostamento  $\underline{u}$  di un punto della linea d'asse può localmente scomporsi in uno spostamento  $w$  nella direzione  $\hat{x}$  ortogonale alla sezione retta indeformata (e quindi tangente alla linea d'asse) ed in uno spostamento  $\underline{v}$  sulla sezione retta indeformata:

$$\underline{u} = \underline{v} + w \underline{e}_x.$$



A sua volta lo spostamento  $\underline{v}$  sulla sezione retta indeformata può scomporsi secondo due assi  $x$  e  $y$  di riferimento scelti sulla stessa sezione:

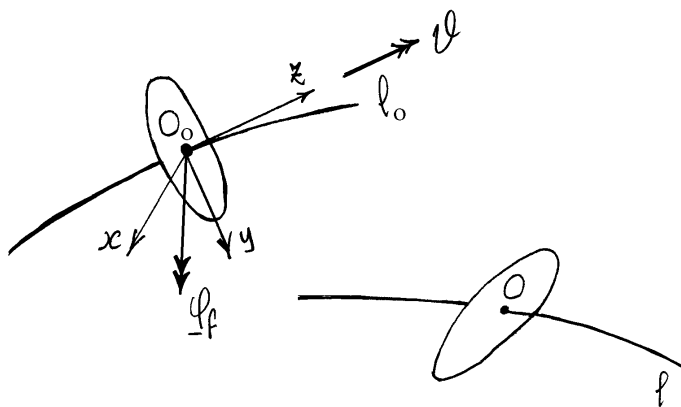
$$\underline{v} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y.$$

Analogamente può farsi per la rotazione  $\underline{\varphi}$  :

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_f + \vartheta \underline{e}_z,$$

dove  $\vartheta$  è la componente torsionale della rotazione, rappresentando una rotazione della sezione nel proprio piano, mentre  $\underline{\varphi}_f$  è la componente flessionale della rotazione, rappresentando una rotazione della sezione attorno ad un asse che le appartiene. La rotazione flessionale  $\underline{\varphi}_f$  può poi essere decomposta secondo gli assi  $x$  e  $y$  :

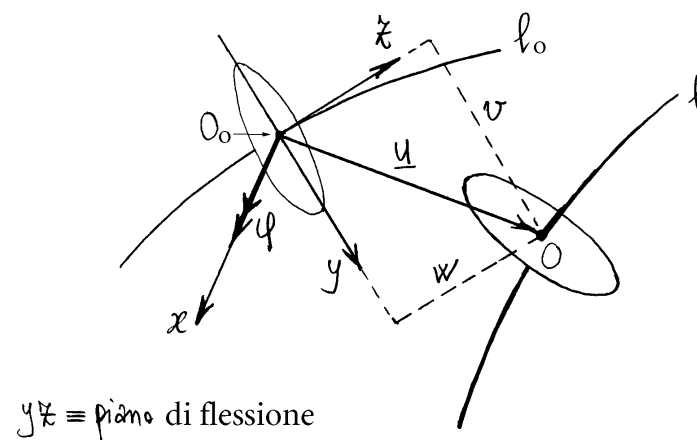
$$\underline{\varphi}_f = \varphi_x \underline{e}_x + \varphi_y \underline{e}_y.$$



È bene ancora ribadire che il sistema di riferimento  $Oxyz$  utilizzato per decomporre i vettori spostamento e rotazione, come già per definire le caratteristiche della sollecitazione, è un sistema locale, cioè varia da sezione a sezione, salvo che l'asse della trave non sia rettilineo.

#### 4.3.2 Trave cinematicamente piana

Se la trave è cinematicamente piana, gli spostamenti dei punti sulla linea d'asse avvengono nel piano di flessione e le rotazioni delle sezioni avvengono attorno ad un asse

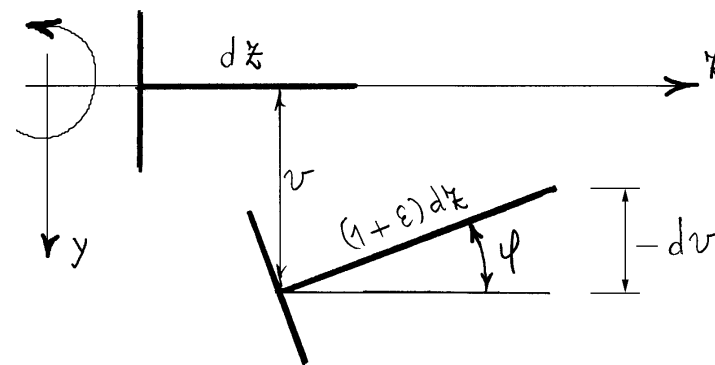


$yz \equiv$  piano di flessione

perpendicolare al piano di flessione:

$$\underline{u} = v \underline{e}_y + w \underline{e}_z, \quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_x,$$

dove l'asse  $y$  rappresenta l'intersezione tra sezione retta e piano della trave mentre l'asse  $z$  coincide con l'asse ortogonale al piano della trave.



ovverossia:

$$(1 + \epsilon) \sin \varphi = - \frac{dv}{dz}.$$

Se gli spostamenti sono piccoli si può porre  $\sin \varphi \approx \varphi$  e trascurare il termine del secondo ordine  $\epsilon \varphi$  ottenendo:

$$\varphi = - \frac{dv}{dz}.$$

Il vincolo di trave inflessa rappresenta la condizione di ortogonalità tra linea d'asse e sezione retta dopo la deformazione. Limitandosi ancora al caso di trave piana ad asse rettilineo si consideri una generica sezione retta, la cui traccia è indicata nella figura, ed un elemento d'asse  $dz$  nel suo intorno. Poiché l'elemento  $dz$  deve restare ortogonale alla sezione retta, tale elemento deve subire la stessa rotazione  $\varphi$  della sezione retta e quindi risulta:

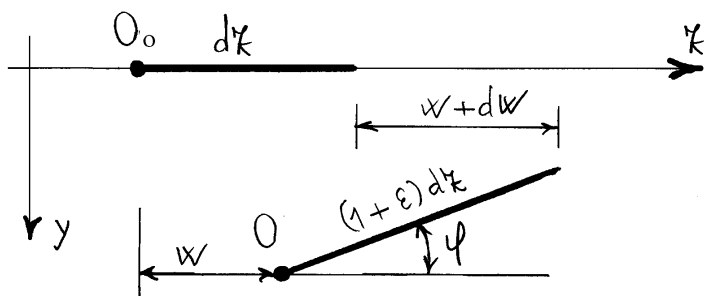
$$-dv = (1 + \epsilon) dz \sin \varphi,$$

## 4.4 Deformazioni

### 4.4.1 Dilatazione della linea d'asse

Poiché la trave si deforma, le sue linee subiscono delle dilatazioni. Essendo la trave un solido monodimensionale, la dilatazione  $\varepsilon$  della linea d'asse ricopre un ruolo fondamentale. Ricordiamo che la dilatazione rappresenta l'allungamento della linea, dovuto alla deformazione, per unità di linea.

Le equazioni che legano spostamenti (e rotazioni) alle deformazioni sono dette equazioni di congruenza. Limitandosi al caso di trave piana ad asse rettilineo, si consideri un punto  $O$  della linea d'asse ed un elemento d'asse  $d\xi$  nel suo intorno.



Poiché la lunghezza dell'elemento  $d\xi$  dopo la deformazione vale  $d\xi + \varepsilon d\xi$ , per definizione di dilatazione lineare, risulta:

$$w + (1 + \varepsilon)d\xi \cos \varphi = d\xi + w + dw,$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti risulta  $\cos \varphi \approx 1$  e infine si ottiene l'equazione di congruenza:

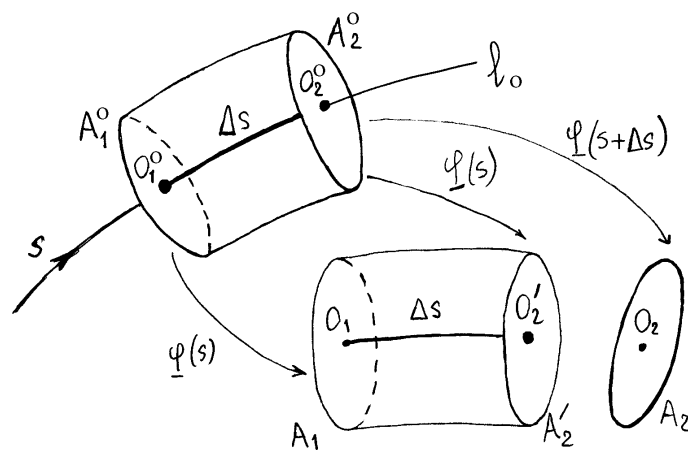
$$\varepsilon \approx \frac{dw}{d\xi}.$$

### 4.4.2 Curvatura

La curvatura  $\underline{\kappa}$  della configurazione deformata di una trave è definita come rotazione relativa, per unità di lunghezza indeformata, tra due sezioni rette della trave:

$$\underline{\kappa} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s + \Delta s) - \varphi(s)}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (1)$$

Se la trave subisce un moto rigido le rotazioni relative, e quindi la curvatura, sono nulle. La curvatura rappre=



senta allora una misura di deformazione e l'equazione (1) rappresenta un'equazione di congruenza.

Siano  $A_1^o$  e  $A_2^o$  due sezioni della trave. Se la sezione  $A_2^o$  fosse connessa rigidamente alla sezione  $A_1^o$  subirebbe la stessa rotazione di  $A_1^o$  e si porterebbe nella posizione  $A_2'$ . La rotazione relativa è dunque la rotazione del moto rigido che porta la sezione  $A_2^o$  dalla posizione  $A_2'$  a quella finale  $A_2$ .

La curvatura sopra definita, misura di deformazione della trave, va distinta dalla curvatura geometrica  $\underline{c}$  dell'asse della trave. Una trave ad asse rettilineo ha curva-

tura geometrica nulla ( $\underline{c}_0 = 0$ ) e la curvatura (di deformazione)  $\underline{k}$  rappresenta allora, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la curvatura geometrica  $\underline{c}$  dell'asse deformato. Se invece la trave è ad asse indeformato curvo, le curvature geometriche  $\underline{c}_0$  e  $\underline{c}$  degli assi indeformato e deformato rispettivamente sono entrambe, in generale, diverse da zero. In tal caso, sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la curvatura  $\underline{k}$  di deformazione rappresenta la differenza  $\underline{c} - \underline{c}_0$  tra le curvature geometriche.

La curvatura globale  $\underline{k}$  si scompone in una quota flettente  $\underline{k}_f$ , detta curvatura flessionale, giacente sulla sezione retta, ed in una quota torcente  $\Theta$ , detta angolo unitario di torsione, perpendicolare alla sezione retta:

$$\underline{k} = \underline{k}_f + \Theta \underline{e}_z.$$

La curvatura flessionale  $\underline{k}_f$  può poi scomporsi nelle componenti rispetto agli assi  $x$  e  $y$ , posti nel

piano della sezione:

$$\underline{k}_f = k_x \underline{e}_x + k_y \underline{e}_y .$$

Nel caso piano le rotazioni delle sezioni rette avvengono attorno all'asse  $x$ , ortogonale al piano della trave. Ne consegue che la curvatura  $\underline{k}$  ha la sola componente flessionale relativa all'asse  $x$ :

$$\underline{k} = k \underline{e}_x ,$$

e che l'equazione di congruenza (1) si riduce all'equazione scalare:

$$k = \frac{d\varphi}{ds} .$$



## Capitolo 5

### Legame costitutivo per la trave inflessa

Si costruirà nel seguito la teoria di Eulero-Bernoulli della trave elastica inflessa, innestando una semplice assunzione costitutiva nel quadro cinematico sviluppato in precedenza. La prima versione di tale teoria è dovuta a Giacomo Bernoulli.<sup>1</sup> In seguito Eulero,<sup>2</sup> su suggerimento di Daniele Bernoulli,<sup>3</sup> risolse basandosi sulla teoria di Giacomo il problema della determinazione della *elastica*, cioè della forma che una trave elastica molto snella assume sotto diverse condizioni di carico.

Le più ampie applicazioni in sede tecnica della teoria della trave inflessa si riferiscono alla sua versione ristretta alle ipotesi di un legame costitutivo di tipo elastico lineare inserito nel quadro cinematico valido sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti. Tuttavia, come vedremo, nello spirito della teoria delle travi inflesse risulta possibile considerare anche altri tipi di legami costitutivi, per es. elastici non lineari oppure elastoplastici od ancora viscoplastici. D'altronde spesso non è possibile prescindere da tali tipi più generali di legami costitutivi, per es. se si vogliono eseguire delle verifiche agli stati limite ultimi.

Inoltre, alcuni risultati saranno sviluppati nel seguito utilizzando relazioni strettamente valide solo nel caso di trave a sezione costante e ad asse rettilineo. Tali risultati si potranno comunque estendere, in modo approssimato, alle travi ad asse curvo con piccola curvatura e a quelle a

---

<sup>1</sup>Giacomo [Jakob, Jacob, Jacques] Bernoulli (1654-1705), nato a Basilea. La versione definitiva della teoria della trave inflessa fu da lui pubblicata in "Histoire de l'Académie des Sciences de Paris," 1705.

<sup>2</sup>Leonardo [Leonhard, Leonard] Eulero [Euler] (1707-1783), nato a Basilea. I suoi principali risultati sullo studio delle travi elastiche sono riportati in appendice al suo libro "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", pubblicato nel 1744, nel quale le soluzioni di svariati problemi sono ottenute sistematicamente con metodi variazionali.

<sup>3</sup>Daniele [Daniel] Bernoulli (1700-1782), figlio di Giovanni [Johann] Bernoulli (1667-1748), fratello di Giacomo. Daniele propose ad Eulero il problema della determinazione della forma di una trave inflessa con una lettera del 1742.

sezione lentamente variabile. Utilizzando relazioni più generali è inoltre possibile rimuovere tali limitazioni, per es., come vedremo, sviluppando una versione della teoria valida per travi inflesse piane a grande curvatura (anche se in tal caso il modello si riduce a rappresentare dei solidi che potrebbe essere inappropriato definire monodimensionali).

La teoria della trave inflessa si presta bene ad affrontare lo studio delle travi piane, travi che non sono soggette a deformazione di tipo torsionale. In tal caso si potrebbe anche considerare, senza problemi, un quadro cinematico di riferimento non limitato ai piccoli spostamenti. Nel caso di travi spaziali, si presta invece ad affrontare lo studio della sola parte flessionale della deformazione. In tal caso l'ipotesi di piccoli spostamenti diventa indispensabile, o comunque di difficoltosa rimozione, per la necessità di separare la deformazione nella parte flessionale e in quella torsionale, agevole solo sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti.

La versione della teoria ristretta ad un legame elastico lineare, alle piccole deformazioni ed alle travi ad asse rettilineo o a piccola curvatura e con sezioni rette omogenee lentamente variabili coincide con la parte flessionale della *teoria tecnica delle travi*, costruita a partire dalla soluzione del problema di Saint-Venant.

Osserviamo subito che le due teorie si intrecciano senza che l'una sia compresa nell'altra, dato che la teoria tecnica delle travi è ristretta a tali assunzioni e quindi, da questo punto di vista, meno generale della teoria della trave inflessa, e nello stesso tempo risulta più generale in quanto da una parte rimuove il vincolo interno di trave inflessa mentre dall'altra parte è in grado di descrivere anche la parte torsionale della deformazione.

Si conclude osservando che un pregio della teoria delle travi inflesse elastiche lineari è anche quello di mostrare esplicitamente le analogie esistenti tra la deformazione di una trave elastica inflessa ed il moto di un corpo rigido. Risulta allora chiaro perché la flessione di una trave dipende, come si vedrà più avanti, da un *vettore dei momenti statici* e da un *tensor di inerzia*, analogamente al moto di un corpo rigido, da cui la necessità dello sviluppo di una "geometria delle masse" nell'ambito della teoria delle travi inflesse.

## 5.1 Legame costitutivo nell'intorno di un punto

I legami tra sollecitazioni e deformazioni, dipendenti dalle proprietà dei materiali, vengono detti *legami costitutivi*.<sup>4</sup> Al fine di implementare un legame costitutivo per la trave inflessa, si suppone che la linea d'asse della trave sia piana, in particolare rettilinea, e che la sezione retta sia costante lungo l'asse della trave. In tal caso la trave può essere considerata come un insieme di fibre longitudinali parallele alla linea d'asse e ortogonali alle sezioni rette.<sup>5</sup>

L'ipotesi costitutiva fondamentale delle travi inflesse richiede che un elemento di fibra longitudinale si comporti come una barra sottoposta a trazione semplice (fig. 5.1). Questa ipotesi caratterizza dunque il lega-

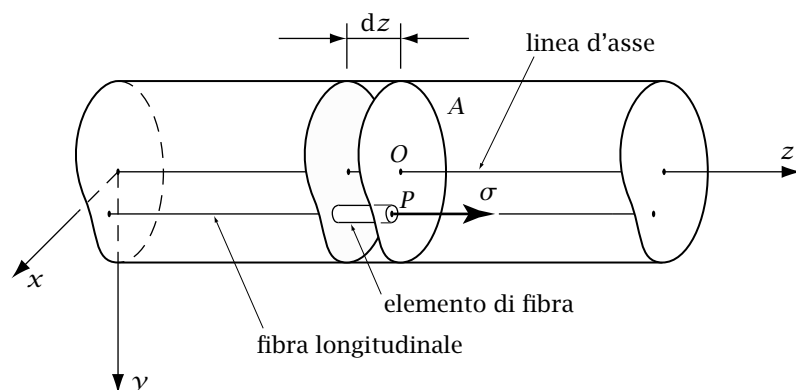


Figura 5.1: Generica fibra longitudinale

me costitutivo nell'intorno di un punto per il tramite di un diagramma tensione-dilatazione. La dilatazione è quella, calcolata nel dato punto, della fibra longitudinale passante dal punto stesso mentre la tensione è quella agente, in corrispondenza del punto, sulla giacitura di normale la direzione della fibra stessa. Naturalmente la dilatazione delle fibre longitudinali, così come le corrispondenti tensioni, varieranno in generale sia lungo una data fibra che su una data sezione retta.

Si ricordi che nell'ipotesi di piccoli spostamenti l'equilibrio viene scritto nella configurazione indeformata, nella quale le fibre longitudinali

sono sempre ortogonali alla sezione retta. In tale ipotesi la tensione è dunque ortogonale alla sezione retta, e ne consegue che alla dilatazione  $\epsilon$  di una fibra longitudinale corrisponde una tensione normale  $\sigma$  agente sulla sezione retta in corrispondenza della sua intersezione con la fibra stessa.<sup>6</sup>

Nel caso più generale possibile, la tensione normale agente in un dato punto ad un dato istante dipenderà dalla storia della corrispondente dilatazione fino a quell'istante (*legge di determinismo*). Qui ci si limiterà a considerare due legami costitutivi particolari, quello elastico, e in particolare elastico lineare, e quello elastoplastico. Nel seguito si svilupperà poi in forma completa il solo caso elastico lineare.

### 5.1.1 Legame costitutivo elastico

Se il materiale è elastico il diagramma *tensione normale-dilatazione* è univoco e viene seguito sia durante la fase di carico che in quella di scarico (fig. 5.2a). In altri termini ad una data dilatazione viene a corrispondere una ben precisa tensione normale. Dette  $\epsilon$  la dilatazione, in un dato punto, della fibra longitudinale passante dallo stesso punto e  $\sigma$  la corrispondente tensione normale agente sulla sezione retta nello stesso punto, il più generale legame costitutivo elastico si scriverà pertanto nella forma:

$$\sigma = \sigma(\epsilon). \quad (1)$$

Si noti che tale legame rappresenta il comportamento del materiale di cui è composta la trave. Se la trave non è omogenea tale legame varierà da punto a punto.

Se il diagramma è lineare il legame costitutivo (1) diventa poi (fig. 5.2b):

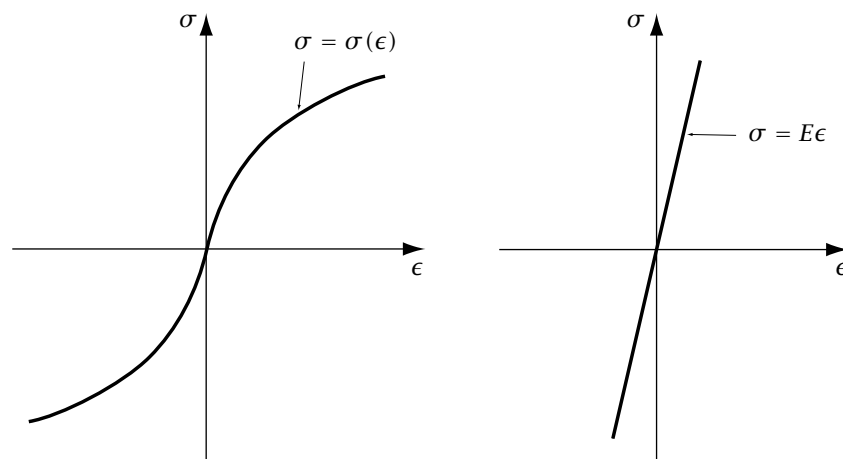
$$\sigma = E\epsilon, \quad (2)$$

dove il coefficiente di proporzionalità  $E$  rappresenta il modulo di Young del dato materiale. Se la trave non è omogenea il modulo di Young può in generale variare da punto a punto, sia lungo una data fibra che nella sezione retta. Casi tecnicamente importanti di travi non omogenee si hanno, per es., nel caso di travi in *cemento armato*, realizzate con una

<sup>6</sup>Nel caso di *spostamenti finiti*, ovvero se gli spostamenti non sono piccoli, le tensioni devono considerarsi agenti nella configurazione deformata. Le tensioni sono allora ortogonali alla sezione retta deformata solo se le fibre restano perpendicolari alla sezione retta anche dopo la deformazione. Per la trave che soddisfa il vincolo interno di ortogonalità tra asse e sezioni rette questa condizione è senz'altro vera solo in assenza di deformazione di torsione, come si verifica per es. nel caso cinematicamente piano.

<sup>4</sup>Constitutive equations nella letteratura inglese.

<sup>5</sup>La cosa non è più vera se la linea d'asse della trave è sghemba.



(a) Elasticità non lineare

(b) Elasticità lineare

Figura 5.2: Elasticità

gettata di calcestruzzo di cemento all'interno della quale sono annegate delle barre di acciaio, oppure nel caso di travi *laminare*, composte da strati di diverso materiale. In tutti questi casi il modulo di Young è costante a tratti.

### 5.1.2 Legame costitutivo elastoplastico

Se il materiale è elastoplastico il diagramma *tensione normale-dilatazione* non è più univoco poiché allo scarico, una volta superata la tensione di snervamento, viene seguito un diverso percorso elastico lineare. Il caso più semplice possibile è quello di un diagramma bilineare, elastico lineare prima e perfettamente plastico dopo lo snervamento, con uguale limite di snervamento a trazione e compressione (fig. 5.3), utilizzato per modellare sia gli acciai per cemento armato che quelli per strutture metalliche.<sup>7</sup> Se in un percorso di carico viene superato il limite di

<sup>7</sup>Le norme UNI EN 1992-1-1 (2005) e UNI EN 1993-1-1 (2005), prime parti degli eurocodici 2 e 3 rispettivamente, al fine di eseguire verifiche agli stati limite permettono l'uso di diagrammi bilineari per gli acciai per cemento armato e per strutture metalliche rispet-

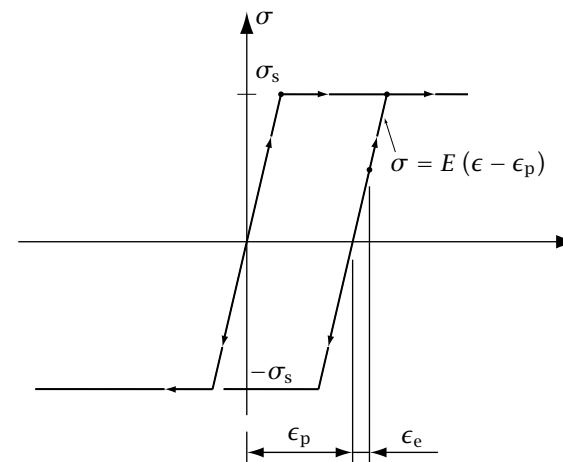


Figura 5.3: Elastoplasticità

snervamento la tensione normale non è più determinata univocamente dal valore attuale della dilatazione della fibra longitudinale, ma viene a dipendere dalla storia della dilatazione stessa precedente l'istante di tempo attuale. Si noti che risulta possibile scaricare una deformazione permanente sviluppata per il superamento del limite di snervamento per es. a trazione, scaricando prima e ricaricando poi fino a superare il limite di snervamento a compressione.

Le dilatazioni elastica  $\epsilon_e$ , permanente  $\epsilon_p$  e totale  $\epsilon$  sono legate dalla relazione:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p. \quad (3)$$

Ne consegue la validità della seguente relazione elastica lineare allo scarico:

$$\sigma = E (\epsilon - \epsilon_p), \quad (4)$$

relazione che coincide con la (2) nel caso di provino vergine.

tivamente. Il limite di snervamento in tali diagrammi è riferito allo snervamento caratteristico  $f_{yk}$ , eventualmente modificato tramite un opportuno coefficiente moltiplicativo  $\alpha$  e opportunamente ridotto tramite un coefficiente di sicurezza  $\gamma_s$ :  $\sigma_s = \alpha f_{yk} / \gamma_s$ . Analogamente a qualunque valore caratteristico, lo *snervamento caratteristico* rappresenta il livello tensionale al disotto del quale ci si aspetta di trovare al più il 5% delle tensioni di snervamento relative a prove di trazione su provini del dato tipo di acciaio.

Un altro esempio di diagramma elastoplastico può essere quello riguardante il calcestruzzo compresso che, allo scopo di coglierne la forte non linearità, può essere modellato con un tratto parabolico nella parte elastica seguito da un tratto perfettamente plastico,<sup>8</sup> come indicato in fig. 5.4.

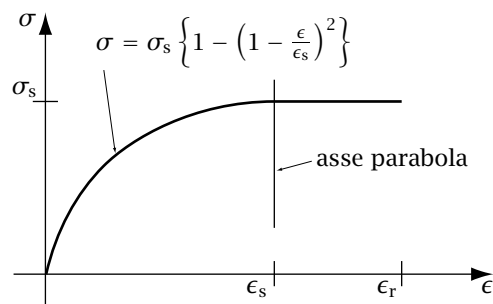


Figura 5.4: Calcestruzzo compresso

Occorre a questo punto precisare che un diagramma del tipo di quello riportato in fig. 5.3 risulta valido se sulla sezione retta non agiscono tensioni tangenziali, ovvero se sono nulle le azioni taglianti e il momento torcente. Nel caso ciò non sia vero il diagramma è ancora valido fino al raggiungimento dello snervamento, quindi in fase elastica. Il livello tensionale che provoca lo snervamento dipende invece dalla contemporanea presenza della tensione normale e di quella tangenziale, così come il comportamento che ne consegue a seguito dello sviluppo delle deformazioni plastiche. Comunque tale dipendenza è spesso trascurabile quando si tratta di tensioni tangenziali dovute ad un'azione tagliante, almeno se il valore di questa azione è contenuto.

<sup>8</sup>La norma UNI EN 1992-1-1 (2005), citata alla nota precedente, al fine di eseguire verifiche agli stati limite permette l'uso per il calcestruzzo compresso di un diagramma del tipo di quello indicato in fig. 5.4. Il livello di snervamento  $\sigma_s$  del calcestruzzo compresso, come già per l'acciaio, è riferito allo snervamento caratteristico  $f_{ck}$ , eventualmente modificato tramite un opportuno coefficiente moltiplicativo  $\alpha$  e opportunamente ridotto tramite un coefficiente di sicurezza  $\gamma_c$ :  $\sigma_s = \alpha f_{yk} / \gamma_c$ .

## 5.2 Dilatazione delle fibre longitudinali

Allo scopo di implementare una teoria della trave, occorre trasformare il legame costitutivo locale descritto al paragrafo precedente in un legame costitutivo tra le caratteristiche di sollecitazione e di deformazione della trave. A tal fine occorre innanzitutto utilizzare la cinematica della trave inflessa descritta in precedenza allo scopo di esprimere la dilatazione  $\epsilon_P$  della fibra longitudinale passante dal generico punto  $P$  della sezione retta in funzione della dilatazione  $\epsilon_0$  della linea d'asse e della curvatura  $k$  della trave, compito del presente paragrafo. La relazione così ottenuta sarà poi inserita nella opportuna equazione costitutiva locale, per es. la (2) nel caso della elasticità lineare.

Nei paragrafi successivi l'integrazione della tensione normale  $\sigma$  e del suo momento sulla sezione retta permetterà infine di ottenere le cercate equazioni costitutive.

### 5.2.1 Travi piane ad asse rettilineo

Si considera innanzitutto il caso delle travi ad asse rettilineo. Con riferimento alla fig. 5.5 siano allora  $A$  e  $A_1$  due sezioni rette della trave di ascissa  $z$  e  $z + dz$  rispettivamente e siano  $O$  e  $O_1$  i rispettivi punti posti sulla linea d'asse. Sia poi  $A'_1$  la posizione dopo la deformazione

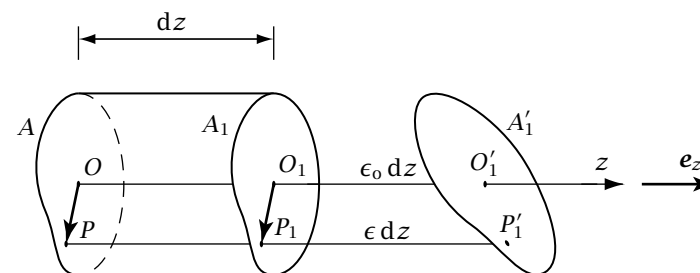


Figura 5.5: Dilatazione delle fibre longitudinali

della sezione  $A_1$  a meno del moto rigido di  $A$ .

Se  $O'_1$  è la nuova posizione di  $O_1$ , il segmento  $OO'_1$  rappresenta, a meno del moto rigido di  $A$  e a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $dz$ , la tangente in  $O$  alla linea d'asse deformata. Il vincolo di trave inflessa impone alla tangente di essere ortogonale alla sezione

retta  $A$  e quindi di avere la direzione dell'asse  $z$  della trave. Se  $\epsilon_0$  è la dilatazione lineare della linea d'asse risulta allora, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $dz$ :

$$O'_1 - O_1 = \epsilon_0 dz \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

dove  $\mathbf{e}_z$  è il versore della direzione normale alla sezione  $A$ . Ricordando che la curvatura  $\mathbf{k}$  rappresenta la rotazione relativa per unità di linea, la posizione  $A'_1$  viene dunque individuata, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $dz$ , dal moto rigido che porta  $A_1$  su  $A'_1$  tramite la traslazione  $\epsilon_0 dz \mathbf{e}_z$  e la rotazione relativa  $dz \mathbf{k}$ .

Sia ora data una generica fibra longitudinale passante per i punti  $P$  e  $P_1$  di  $A$  e  $A_1$  rispettivamente e sia  $P'_1$  la posizione di  $P_1$  dopo la deformazione, ancora a meno del moto rigido di  $A$ . Lo spostamento del punto  $P_1$  vale quindi:

$$P'_1 - P_1 = \epsilon_0 dz \mathbf{e}_z + \mathbf{k} \times (P_1 - O_1), \quad (6)$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $dz$ . Se ora si tiene conto della evidente identità  $P_1 - O_1 = P - O$  e che la curvatura  $\mathbf{k}$  può esprimersi per il tramite della curvatura flessionale  $\mathbf{k}_f$  e dell'angolo unitario di torsione  $\Theta$ , la (6) diventa:

$$P'_1 - P_1 = \epsilon_0 dz \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - O) + \Theta \mathbf{e}_z \times (P - O). \quad (7)$$

Si consideri ora che, se  $\epsilon$  è la dilatazione della fibra longitudinale per  $P$ , il vettore  $P'_1 - P$  ha modulo  $dz + \epsilon dz$ , sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $dz$ . D'altronde, per l'ipotesi di piccoli spostamenti, la sua proiezione nella direzione dell'asse della trave ha approssimativamente lo stesso modulo. Ne consegue che la proiezione dello spostamento  $P'_1 - P_1$  nella direzione  $\mathbf{e}_z$  dell'asse della trave vale:

$$(P'_1 - P_1) \cdot \mathbf{e}_z = \epsilon dz. \quad (8)$$

Tenendo allora conto che i primi due addendi nel secondo membro della (7) hanno la direzione di  $\mathbf{e}_z$  mentre il terzo addendo ne è ortogonale, dividendo per  $dz$  e facendo il limite per  $dz \rightarrow 0$ , si ottiene infine la relazione cercata:

$$\epsilon \mathbf{e}_z = \epsilon_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - O). \quad (9)$$

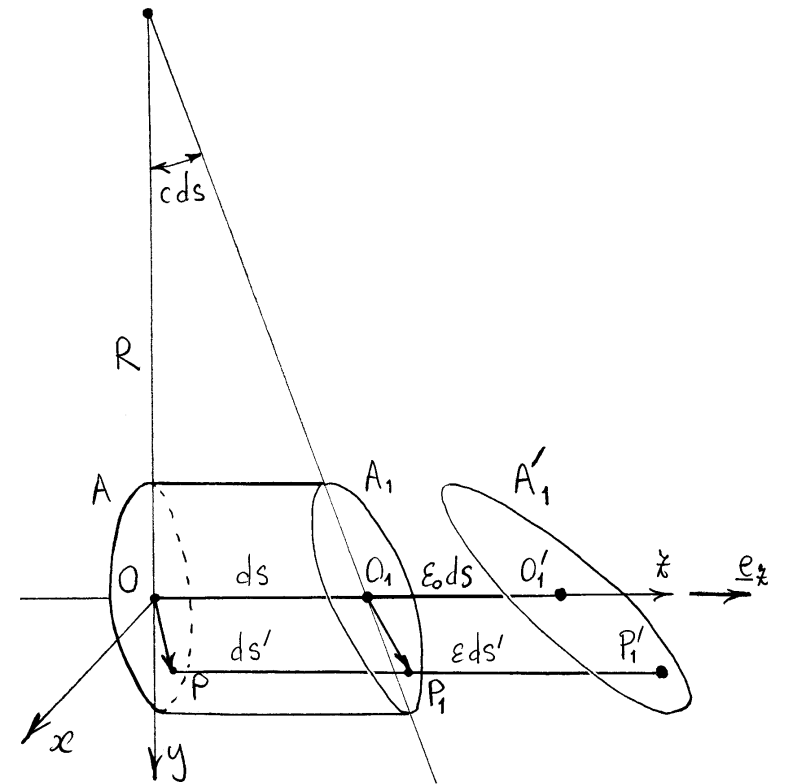
Utilizzando la (9) nella equazione costitutiva elastica lineare (2) si ottiene inoltre la distribuzione della tensione normale  $\sigma$  sulla sezione retta:

$$\sigma \mathbf{e}_z = E \epsilon_0 \mathbf{e}_z + E \mathbf{k}_f \times (P - O), \quad (10)$$

dove  $E$  è il modulo di Young.

## 5.2.2 Travi piane ad asse curvo

In tal caso l'elemento  $ds'$  della fibra longitudinale si differenzia dall'elemento  $ds$  lungo l'asse della trave.



Se  $c$  è la curvatura dell'asse ed

$$R = 1/c$$

è il raggio di curvatura in corrispondenza di  $A$ , si ha:

$$\frac{ds'}{R+y} = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds' = (1+cy)ds,$$

dove  $y$  è la coordinata di  $P$  secondo l'asse  $y$  (locale) che ha la direzione della normale principale all'asse della trave.

Tenendo conto che al limite il vettore  $P_1-O_1$ , cui dovrebbe applicarsi la rotazione relativa, tende a  $P-O$ , e che la differenza tra  $\epsilon_0 ds$  ed  $\epsilon ds'$  dipende ancora solo dalla rotazione rigida relativa, si ottiene:

$$\epsilon ds' \underline{e}_z = \epsilon_0 ds \underline{e}_z + \underline{k}_f \times (P-O) ds,$$

cioè, definitivamente:

$$\epsilon \underline{e}_z = \frac{1}{1+cy} \left\{ \epsilon_0 \underline{e}_z + \underline{k}_f \times (P-O) \right\}. \quad (11)$$

Questa espressione suggerisce cosa debba intendersi per piccola curvatura dell'asse della trave:

$$cy_{\max} \ll 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{y_{\max}}{R} \ll 1,$$

cioè la massima coordinata  $y$  dei punti della sezione deve essere "piccola" relativamente al raggio di curvatura. In tale ipotesi risulta, con buona approssimazione:

$$1+cy \cong 1,$$

e la (9) continua ad essere approssimativamente valida.

### 5.3 Legame costitutivo tra forza normale e dilatazione della linea d'asse

Integrando la tensione normale sulla sezione retta si ottiene la forza normale:

$$\begin{aligned} N \underline{e}_x &= \int_A \sigma \underline{e}_x dA = \\ &= \varepsilon_0 \underline{e}_x \int_A E dA + \underline{\kappa}_f \times \int_A E (\underline{P} - \underline{O}) dA. \end{aligned}$$

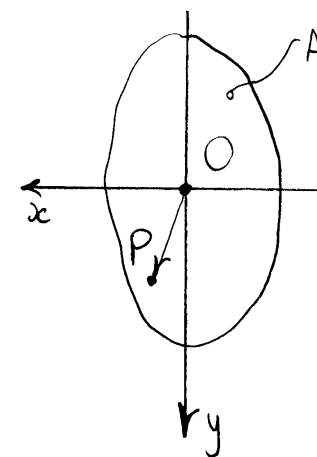
Utilizzando il linguaggio della geometria delle masse, riferendosi al modulo di Young quale "distribuzione di massa", si pone:

$$M = \int_A E dA, \quad (\text{Massa totale})$$

$$\underline{J}_0 = \int_A E (\underline{P} - \underline{O}) dA, \quad (\text{Vettore dei momenti statici})$$

Il baricentro  $G$  della sezione retta è poi

definito come quel punto del piano della sezione tale che sia nullo il suo vettore dei momenti statici.



$$\int_A E (\underline{P} - \underline{G}) dA = \underline{0}.$$

Notiamo che al baricentro viene solo chiesto di appartenere al piano della sezione e non alla sezione stessa. Questo è perfettamente coerente poiché il moto rigido della sezione può estendersi a tutto il suo piano.

Se l'asse della trave ci fa coincidere con l'asse dei baricentri si ottiene la seguente semplice espressione per la forza normale:

$$N = M \varepsilon_G$$

dove  $\varepsilon_G$  rappresenta la dilatazione dell'asse baricentrico. In seguito, salvo avviso contrario, l'asse della trave coinciderà sempre con l'asse dei baricentri.

### 5.3.1 Travi a forte curvatura

Nel caso di travi a forte curvatura, il modulo di Young va diviso per il coefficiente  $1+cy$ . La massa totale risulta tal caso:

$$M = \int_A \frac{E}{1+cy} dA.$$

## 5.4 Legame costitutivo tra momento flettente e curvatura

Il momento flettente risulta:

$$\begin{aligned} \underline{M}_f &= \int_A (\underline{P}-\underline{G}) \times (\sigma \underline{e}_z) dA = \\ &= \left( \int_A E (\underline{P}-\underline{G}) dA \right) \times (\varepsilon_G \underline{e}_z) \\ &\quad + \int_A E (\underline{P}-\underline{G}) \times \{ \underline{K}_f \times (\underline{P}-\underline{G}) \} dA. \end{aligned}$$

Tenendo conto della proprietà che definisce il baricentro  $G$  e scomponendo il doppio prodotto vettoriale si ottiene poi:

$$\begin{aligned} \underline{M}_f &= \left( \int_A E (\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) dA \right) \underline{K}_f \\ &\quad - \int_A E \{ (\underline{P}-\underline{G}) \cdot \underline{K}_f \} (\underline{P}-\underline{G}) dA \\ &= \left\{ \left( \int_A E (\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) dA \right) \underline{I} + \right. \\ &\quad \left. - \int_A E (\underline{P}-\underline{G}) \otimes (\underline{P}-\underline{G}) dA \right\} \underline{K}_f \end{aligned}$$

Introducendo il tensore di inerzia (relativo al baricentro):

$$\underline{J} = \left( \int_A E (P-G) \cdot (P-G) dA \right) \underline{I} - \int_A E (P-G) \otimes (P-G) dA$$

si ottiene infine:

$$\underline{M}_f = \underline{J} \underline{K}_f .$$

Il secondo addendo della definizione di  $\underline{J}$  viene detto tensore di Eulero (relativo al baricentro):

$$\underline{Y} = \int_A E (P-G) \otimes (P-G) dA ,$$

mentre il coefficiente che compare nel primo addendo viene detto momento di inerzia polare (di polo il baricentro):

$$J_G = \int_A E (P-G) \cdot (P-G) dA .$$

Con queste convenzioni il tensore di inerzia risulta:

$$\underline{J} = J_G \underline{I} - \underline{Y} .$$

Riassumendo, i legami costitutivi si scrivono:

$$\begin{cases} N = M \varepsilon_0 \\ \underline{M}_f = \underline{J} \underline{K}_f \end{cases}$$

Più propriamente,  $M$  rappresenta la rigidezza assiale e  $\underline{J}$  rappresenta la rigidezza flessionale.

#### 5.4.1 Travi a forte curvatura

Nel caso di travi a forte curvatura, il modulo di Young va diviso per il coefficiente  $1+cy$ .

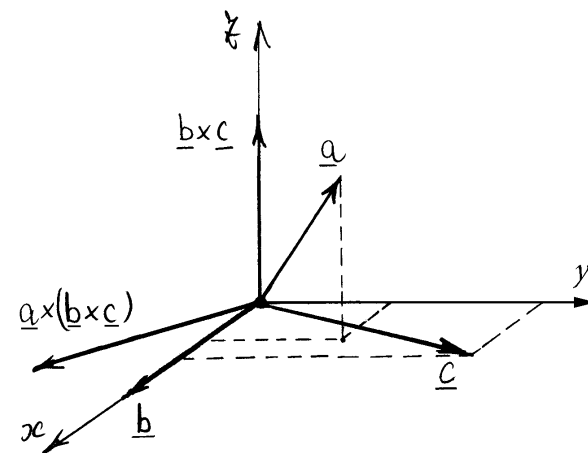
Il tensore di inerzia risulta in tal caso:

$$\underline{J} = \left( \int_A \frac{E}{1+cy} (P-G) \cdot (P-G) dA \right) \underline{I} - \int_A \frac{E}{1+cy} (P-G) \otimes (P-G) dA .$$

### 5.4.2 Appendice (doppio prodotto vettoriale)

Negli sviluppi richiesti per calcolare il momento flettente è stato necessario scomporre nella somma di due vettori un doppio prodotto vettoriale. Se  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  sono tre vettori il loro doppio prodotto vettoriale  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$  appartiene al piano di  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  poiché  $\underline{b} \times \underline{c}$  è perpendicolare a tale piano. È dunque possibile decomporre il doppio prodotto secondo le direzioni di  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$ . A tale scopo si scelga un sistema di riferimento  $Oxyz$  cartesiano ortogonale con l'asse  $x$  avente la direzione di  $\underline{b}$ , con l'asse  $y$  nel piano di  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  e l'asse  $z$  ortogonale, di conseguenza, a tale piano. Le componenti dei tre vettori risultano:

$$\underline{a} \equiv \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \quad \underline{b} \equiv \begin{Bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{c} \equiv \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ 0 \end{Bmatrix}.$$



Risulta quindi:

$$\underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ b & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = b c_y \underline{e}_z,$$

e indi:

$$\begin{aligned} \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) &= \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & b c_y \end{vmatrix} = a_y b c_y \underline{e}_x - a_x b c_y \underline{e}_y = \\ &= (a_x c_x + a_y c_y) b \underline{e}_x - a_x b (c_x \underline{e}_x + c_y \underline{e}_y), \end{aligned}$$

da cui infine:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}.$$

### 5.5 Travi omogenee a piccola curvatura

Se la trave è a debole curvatura ed omogenea nella sezione retta ( $E = \text{cost}$ ) si può scrivere:

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon_G \\ \underline{M}_f = E \underline{J}_A \underline{\kappa}_f \end{cases},$$

dove ora:

$$A = \int_A dA,$$

rappresenta l'area totale della sezione e

$$\underline{J}_A = \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \cdot (\underline{P} - \underline{G}) \underline{I} dA = \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \otimes (\underline{P} - \underline{G}) dA,$$

dipende solo dalla forma della sezione retta e non dal materiale. Si ottiene in tal caso una geometria delle aree.

### 5.6 Travi piane

Se la trave è piana, con coincidenza dei piani di flessione e di sollecitazione, risulta:

$$\begin{cases} \underline{M}_f = M \underline{e}_x, \\ \underline{\kappa}_f = K \underline{e}_x, \end{cases}$$

e quindi:

$$M \underline{e}_x = K \underline{J} \underline{e}_x \Rightarrow \underline{J} \underline{e}_x = \frac{M}{K} \underline{e}_x.$$

Se un vettore  $\underline{v}$  è trasformato da un tensore  $\underline{A}$  in un vettore avente la stessa direzione:

$$\underline{A} \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

si dice che  $\underline{v}$  è un autovettore e lo scalare  $\lambda$ , componente di  $\underline{A} \underline{v}$  rispetto a  $\underline{v}$ , è l'associato autovalore.

Quindi nel caso piano  $\underline{e}_x$  rappresenta un autovettore di  $\underline{J}$  con autovalore  $J$  tale che:

$$J = \frac{M}{K}.$$

Risulta quindi:

$$M = J K.$$

oppure, nel caso omogeneo:

$$M = E J K.$$

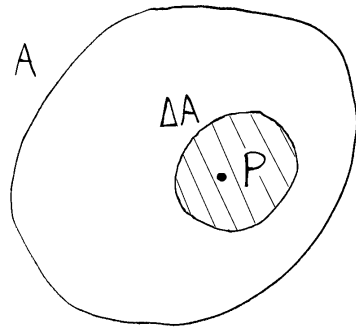
La direzione associata ad un autovettore di  $J$  viene detta direzione principale di inerzia e un asse associato asse principale di inerzia.

## Capitolo 6

### Geometria delle masse

#### 6.1 Masse distribuite su un'area piana

Sia data un'area piana  $A$ . Una massa  $m$  distribuita nell'area è una funzione di "insieme"



che ad ogni parte  $\Delta A$  di  $A$  associa uno scalare  $m(\Delta A)$ . La massa per unità di superficie :

$$\mu(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow P} \frac{m(\Delta A)}{\Delta A},$$

rappresenta una funzione del punto. La massa

associata all'area  $\Delta A$  è recuperabile tramite una integrazione:

$$m(\Delta A) = \int_{\Delta A} \mu \, dA.$$

Lo studio del legame costitutivo delle travi inflesse si inquadra in questo contesto "astratto" tradizionale, qualora il modulo di Young  $E$  delle fibre longitudinali della trave, definito quindi in tutti i punti di una sezione retta, sia interpretato quale massa per unità di superficie. Le dimensioni di  $E$  sono quelle di una forza per unità di superficie:  $E \equiv F L^{-2}$ . Quindi la massa associata ad un'area ha le dimensioni di una forza.

In conseguenza della derivazione del legame costitutivo delle travi inflesse da un moto rigido

della sezione retta, permane una struttura formale analoga a quella alla base della descrizione del moto rigido. Tuttavia occorre tenere presente che i significati fisici in gioco sono del tutto diversi e che in conseguenza di ciò gli sviluppi nei due casi possono notevolmente divergere.

La massa totale rappresenta la massa associata all'intera area:

$$M = m(A) = \int_A \mu dA .$$

## 6.2 Vettore dei momenti statici

Si definisce vettore dei momenti statici rispetto ad un generico punto  $O$  del piano il vettore:

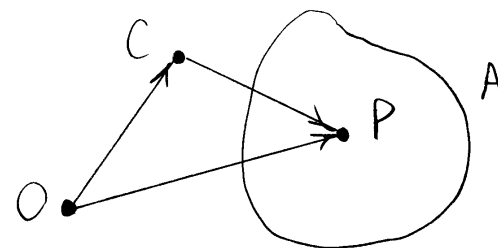
$$\underline{s} = \int_A \mu (P-O) dA .$$

Si è così costruito un campo vettoriale definito nel piano della sezione. Se  $O$  e  $C$  sono due punti del piano, dalla identità vettoriale:

$$P-C = (P-O) - (C-O),$$

si trae la relazione:

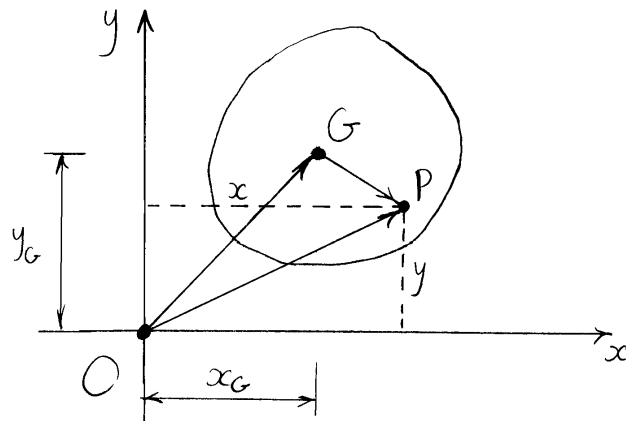
$$\underline{s}(C) = \underline{s}(O) - M(C-O),$$



che descrive il campo vettoriale noto il suo valore in un punto  $O$ . Se  $M \neq 0$  (come nel caso di un sistema di masse tutte positive) il vettore dei momenti statici si annulla in uno e un solo punto del piano  $G$ , detto baricentro del sistema di masse. Posto  $C \equiv G$ , dalla condizione  $\underline{s}(G) = \underline{0}$  si trae:

$$G - O = \frac{1}{M} \underline{s}(O) .$$

In componenti in un sistema cartesiano



ortogonale  $Oxy$  risulta:

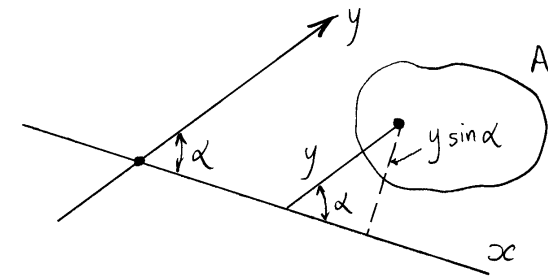
$$\{P-O\} \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \{G-O\} \equiv \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix}.$$

Se ne deduce:

$$\{\underline{s}(O)\} = \begin{Bmatrix} \int_A \mu x dA \\ \int_A \mu y dA \end{Bmatrix} .$$

### 6.2.1 Momenti statici

Data una retta  $x$  non orientata nel piano delle masse ed una associata retta orientata  $y$ , non



parallela a  $x$ , si definisce momento statico del sistema di masse rispetto all'asse  $x$  la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per la

distanza con segno da  $x$ , valutata nella direzione di  $y$ :

$$S_x = \int_A \mu y dA .$$

Si dice che la retta  $y$  orienta esternamente la retta  $x$ , e, in contrapposizione, che la retta  $y$  è orientata internamente. Se con  $\bar{S}_x$  indichiamo il momento statico ottenuto valutando le distanze nella direzione ortogonale ad  $x$ , sempre con l'orientazione esterna indotta da  $y$ , si ottiene:

$$\bar{S}_x = \int_A \mu y \sin \alpha dA = S_x \sin \alpha .$$

In un sistema cartesiano ortogonale  $Oxy$  gli assi cartesiani si orientano esternamente vicendevolmente e i relativi momenti statici risultano:

$$\begin{cases} S_x = \int_A \mu y dA \\ S_y = \int_A \mu x dA \end{cases} ,$$

da cui l'interpretazione delle componenti del vettore dei momenti statici:

$$\{\underline{s}\} \equiv \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} .$$

Le coordinate del baricentro risultano dunque:

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{m} \\ y_G = \frac{S_x}{m} \end{cases} .$$

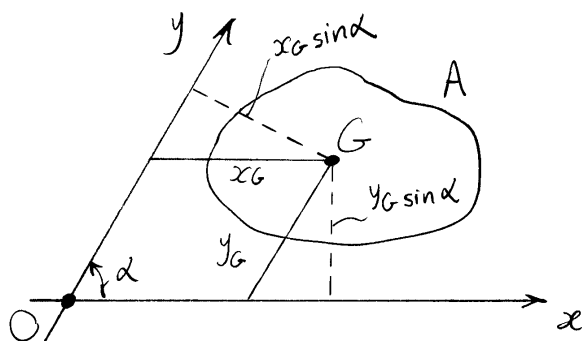
Queste relazioni restano valide anche in un sistema di riferimento obliquo. Infatti in tal caso risulta:

$$y_G \sin \alpha = \frac{\bar{S}_x}{m} = \frac{S_x \sin \alpha}{m} ,$$

e analogamente:

$$x_G \sin \alpha = \frac{\bar{S}_y}{M} = \frac{S_y \sin \alpha}{M},$$

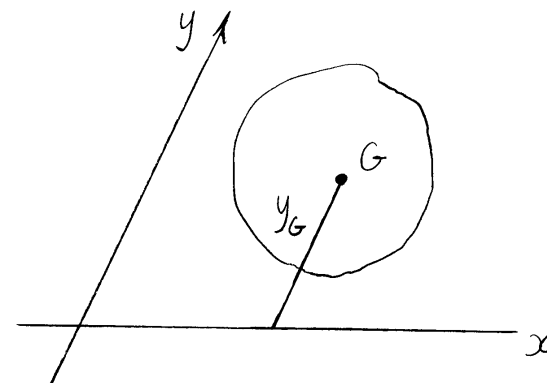
dove, ancora,  $\bar{S}_x$  e  $\bar{S}_y$  sono i momenti statici valutati con distanze ortogonali a  $x$  e  $y$  rispettivamente.



### 6.2.2 Proprietà del baricentro

Ricavando i momenti statici rispetto agli assi in funzione delle coordinate del baricentro si ottiene il teorema di Varignon, che afferma:

Nota il baricentro, e quindi nota la sua distanza da una qualunque retta del piano, per es. la

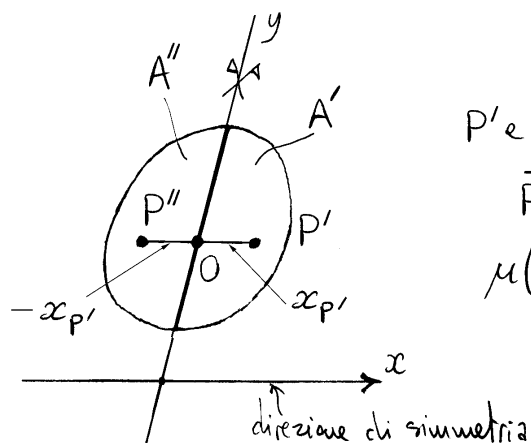


retta  $x$ , il momento statico rispetto a tale retta, orientata esternamente da una retta  $y$ , si ottiene moltiplicando la massa totale per la distanza dotata del segno indotto da  $y$ :

$$S_x = M y_G.$$

E' evidente da tale risultato che il momento statico si annulla in corrispondenza e solo in corrispondenza delle rette baricentriche, e questo indipendentemente dalla direzione rispetto alla quale sono valutate le distanze.

Da ciò consegue che se il sistema di masse possiede un asse di simmetria (anche obliqua) allora tale asse contiene il baricentro. Infatti, sia  $y$  un asse di simmetria dell'area piana  $A$  e sia  $x$  un asse avente la direzione di simmetria.



$P'$  e  $P''$  simmetrici:

$$\overline{P'O} = \overline{P''O}$$

$$\mu(P') = \mu(P'')$$

L'asse  $y$  divide l'area in due parti  $A'$  e  $A''$  tali che:

$$\int_{A'} \mu x dA = - \int_{A''} \mu x dA,$$

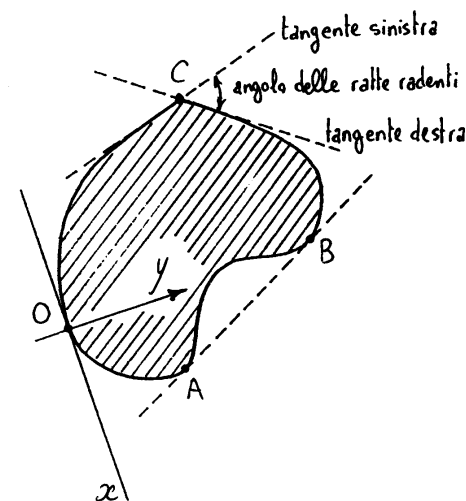
poiché ad ogni punto  $P'$  in  $A'$  avente distanza con segno  $x_{P'}$  da  $y$  e massa  $\mu'$ , corrisponde il punto simmetri-

co  $P''$  in  $A''$  avente stessa massa e distanza con segno opposto. Risulta quindi:

$$S_y = \int_{A'} \mu x dA + \int_{A''} \mu x dA = 0.$$

Vale inoltre la proprietà: se le masse sono tutte positive e non allineate allora il baricentro è interno all'involuppo delle rette radenti, ovvero sia di quelle rette che toccano la figura senza tagliarla.

Infatti, data una qualunque retta radente  $x$



orientato esternamente da una retta  $y$  entrante nel semipiano contenente le masse risulta:

$$S_x > 0 \quad \text{e dunque} \quad y_G = S_x/M > 0.$$

Quindi il baricentro si trova, rispetto all'asse  $x$ , dalla parte delle masse. Poiché questo deve valere per ogni retta tangente, il baricentro è interno al loro inviluppo.

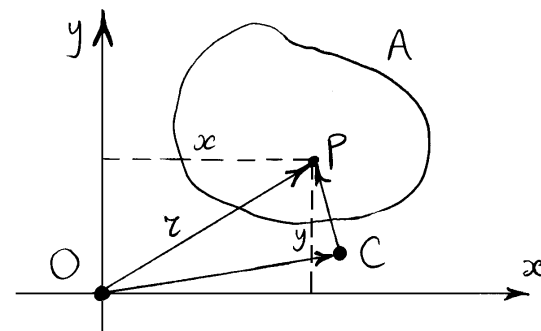
### 6.3 Tensore di inerzia

Definiamo tensore di inerzia, relativo ad un generico punto  $O$  del piano, il seguente tensore doppio:

$$\underline{J} = \int_A \mu \{ (P-O) \cdot (P-O) \underline{I} - (P-O) \otimes (P-O) \} dA.$$

Il tensore di Eulero, relativo allo stesso punto, vale:

$$\underline{J} = \int_A \mu (P-O) \otimes (P-O) dA.$$



Il tensore di inerzia  $\underline{J}$  e il tensore di Eulero  $\underline{J}$  costituiscono due campi tensoriali definiti in tutti i punti del piano delle masse.

Infine, si definisce momento di inerzia polare rispetto ad un punto  $O$  del piano (detto polo) la quantità scalare:

$$J_o = \int_A \mu (P-O) \cdot (P-O) dA = \int_A \mu r^2 dA,$$

dove  $r$  è la distanza del generico punto dal polo  $O$ .

Dalla identità tensoriale:

$$P-O = (P-C) + (C-O),$$

risulta :

$$(P-O) \otimes (P-O) = (P-C) \otimes (P-C) + (C-O) \otimes (C-O) + \\ + (P-C) \otimes (C-O) + (C-O) \otimes (P-C),$$

e quindi :

$$\underline{J}(O) = \underline{J}(C) + M(C-O) \otimes (C-O) + \\ + \underline{J}(C) \otimes (C-O) + (C-O) \otimes \underline{J}(C).$$

In particolare, se si fa coincidere il punto  $C$  con il baricentro  $G$ , si ottiene:

$$\underline{J}(O) = \underline{J}(G) + M(G-O) \otimes (G-O),$$

poiché  $\underline{J}(G) = \underline{0}$ .

In componenti, in un sistema cartesiano ortogonale  $Oxy$ , risulta:

$$\{P-O\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},$$

$$[(P-O) \otimes (P-O)] = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} [x \ y] = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix},$$

$$(P-O) \cdot (P-O) = [x \ y] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = x^2 + y^2,$$

$$(P-O) \cdot (P-O) \underline{I} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi :

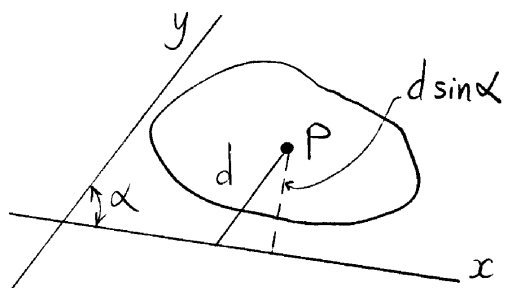
$$[\underline{J}] = \begin{bmatrix} \int_A \mu y^2 dA & -\int_A \mu xy dA \\ -\int_A \mu xy dA & \int_A \mu x^2 dA \end{bmatrix},$$

$$[\underline{J}] = \begin{bmatrix} \int_A \mu x^2 dA & \int_A \mu xy dA \\ \int_A \mu xy dA & \int_A \mu y^2 dA \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \int_A \mu (x^2 + y^2) dA.$$

### 6.3.1 Momenti di inerzia

Data una retta non orientata  $x$  nel piano delle masse ed una direzione  $y$  non parallela ad  $x$  si



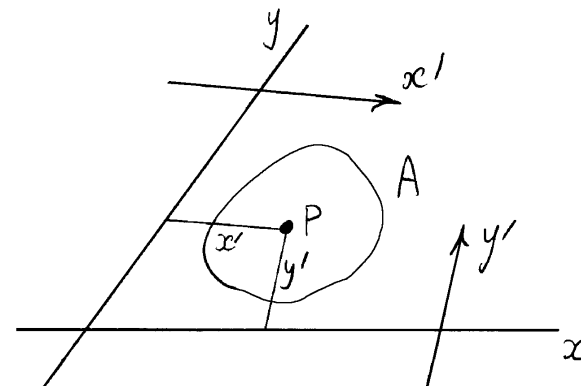
definisce momento di inerzia del sistema di masse rispetto all'asse  $x$  la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per il quadrato della distanza dall'asse  $x$  valutata nella direzione  $y$ :

$$J_x = \int_A \mu d^2 dA .$$

Se con  $\bar{J}_x$  si indica il momento di inerzia che si ottiene valutando le distanze nella direzione ortogonale ad  $x$  si ottiene poi:

$$\bar{J}_x = \int_A \mu (d \sin \alpha)^2 dA = J_x \sin^2 \alpha .$$

Analogamente, dati due assi  $x$  e  $y$  orientati esternamente dalle rette orientate  $y'$  e  $x'$



rispettivamente, si definisce momento centrifugo del sistema di masse rispetto agli assi  $x$  e  $y$  la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per le distanze dagli assi  $x$  e  $y$  valutate, in segno, nella direzione di  $y'$  e  $x'$  rispettivamente:

$$J_{xy} = \int_A \mu x' y' dA .$$

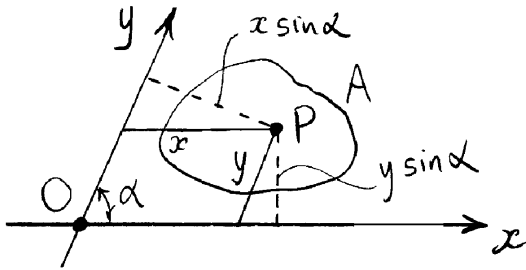
Dato un sistema cartesiano  $Oxy$ , in generale obliquo,

ciascuno degli assi orienta esternamente l'altro. valutando il momento centrifugo legato a tali orientazioni si ottiene:

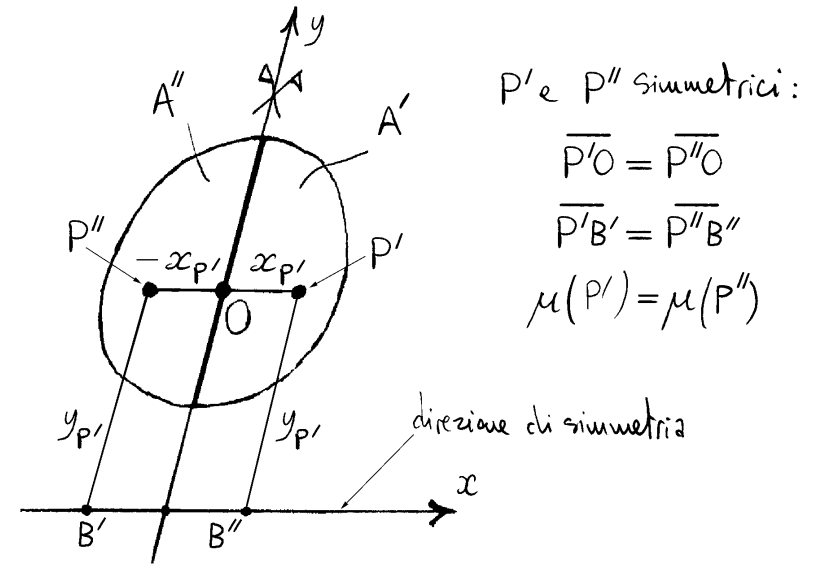
$$I_{xy} = \int_A \mu xy dA.$$

valutando poi il momento centrifugo  $\bar{I}_{xy}$  legato alle direzioni ortogonali agli assi  $x$  e  $y$ , con le orientazioni indotte da tali assi, si ha:

$$\bar{I}_{xy} = \int_A \mu (x \sin \alpha) (y \sin \alpha) dA = I_{xy} \sin^2 \alpha.$$



Se la sezione possiede un asse di simmetria anche obliqua, il momento centrifugo rispetto all'asse di simmetria e ad un qualunque asse avente la direzione della simmetria e' nullo.



$P'$  e  $P''$  simmetrici:

$$\overline{P'O} = \overline{P''O}$$

$$\overline{P'B'} = \overline{P''B''}$$

$$\mu(P') = \mu(P'')$$

Infatti sia  $y$  un asse di simmetria dell'area piana  $A$  e sia  $x$  un asse avente la direzione di simmetria e si considerino le due aree  $A'$  e  $A''$  in cui l'area  $A$  e' divisa dall'asse  $y$ . Poiche' ad ogni punto  $P'$  di  $A'$  corrisponde il punto simmetrico  $P''$  avente stessa massa, uguale distanza con segno dall'asse  $x$  e distanza con segno opposta dall'asse  $y$  risulta:

$$\int_{A''} \mu xy dA = - \int_{A'} \mu xy dA,$$

da cui segue immediatamente che  $J_{xy} = 0$ .

Cio' premesso, le rappresentazioni del momento di inerzia polare  $J_0$  e dei tensori di inerzia  $\underline{J}$  e di Eulero  $\underline{y}$  in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  diventano:

$$J_0 = J_x + J_y,$$

$$[\underline{J}] \equiv \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix},$$

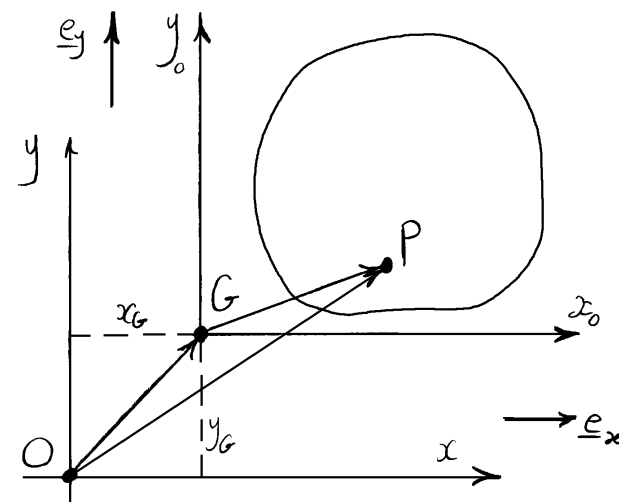
$$[\underline{y}] \equiv \begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix},$$

dove i momenti di inerzia  $J_x$  e  $J_y$  e il momento centrifugo  $J_{xy}$  sono relativi agli assi coordinati.

### 6.3.2 Formule di trasposizione (o del trasporto)

Noti i momenti d'inerzia  $J_{x_0}, J_{y_0}$  e il momento centrifugo  $J_{x_0 y_0}$  relativi ad una coppia  $G x_0 y_0$  di assi baricentrici, componenti del tensore di Eulero  $\underline{y}(G)$ , e' possibile determinare gli stessi momenti  $J_x, J_y$  e  $J_{xy}$  relativamente ad una coppia di assi  $Oxy$  paralleli ai precedenti, componenti del tensore di Eulero  $\underline{y}(O)$ . A tal fine basta mettere in componenti la relazione:

$$\underline{y}(O) = \underline{y}(G) + M(G-O) \otimes (G-O).$$



Poichè:

$$\{(G-O)\} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix},$$

$$[(G-O) \otimes (G-O)] = \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix},$$

dove  $x_G$  e  $y_G$  sono le coordinate del baricentro nel sistema non baricentrico  $Oxy$ , risulta:

$$\begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{y_0} & J_{x_0 y_0} \\ J_{x_0 y_0} & J_{x_0} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix}.$$

Si ottengono così le formule di trasposizione per i momenti di inerzia e centrifugo:

$$\begin{cases} J_x = J_{x_0} + M y_G^2 \\ J_y = J_{y_0} + M x_G^2 \\ J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G \end{cases}.$$

Da queste formule è evidente che in un fascio di rette parallele il minimo momento di inerzia si ha rispetto all'asse baricentrico, almeno nel caso di sistemi di masse positive.

Sommando le due formule di trasposizione relative ai momenti di inerzia si ottiene la formula di trasposizione per il momento polare:

$$J_0 = J_G + M r_G^2,$$

dove  $r_G^2 = x_G^2 + y_G^2$  è il quadrato della distanza del punto  $O$  dal baricentro e dove si è tenuto conto che

$$J_0 = J_x + J_y \quad \text{e} \quad J_G = J_{x_0} + J_{y_0}.$$

### 6.3.3 Raggi di inerzia

Un momento di inerzia  $J_x$ , valutato rispetto ad un generico asse  $x$ , ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato. Se lo si divide per la massa totale e si estrae la radice quadrata si ottiene una quantità omogenea ad una lunghezza che prende il nome di raggio di inerzia (relativo all'asse  $x$ ):

$$l_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}}.$$

Il significato fisico di raggio di inerzia  $l_x$  è quello di distanza dall'asse  $x$  a cui occorre concentrare la massa totale  $M$  per ottenere lo stesso momento di inerzia rispetto all'asse  $x$ .

Dividendo le due formule di trasposizione relative ai momenti di inerzia per la massa totale si ottengono le analoghe formule di trasposizione per i raggi di inerzia:

$$\begin{cases} l_x^2 = l_{x_0}^2 + y_G^2 \\ l_y^2 = l_{y_0}^2 + x_G^2 \end{cases}.$$

### 6.4 Direzioni e momenti principali di inerzia

Come già detto, dato un tensore doppio  $\underline{A}$ ,  $\underline{v}$  è un autovettore e  $\lambda$  l'associato autovalore se:

$$\underline{A} \underline{v} = \lambda \underline{v}.$$

Se  $\underline{v}$  è un autovettore di  $\underline{A}$  associato all'autovalore  $\lambda$  allora  $\alpha \underline{v}$  è un autovettore di  $\underline{A}$  associato a  $\lambda$  per ogni scalare  $\alpha$ :

$$\underline{A}(\alpha \underline{v}) = \alpha(\underline{A} \underline{v}) = \alpha(\lambda \underline{v}) = \lambda(\alpha \underline{v}).$$

Quindi se  $\underline{v}$  è un autovettore, tutti i vettori aventi la stessa direzione sono autovettori aventi lo stesso autovalore. La direzione di un autovettore è detta direzione principale.

Nel caso del tensore di inerzia  $\underline{I}$  le direzioni principali sono dette principali di inerzia.

### 6.4.1 Equazione caratteristica e proprietà delle direzioni principali

La ricerca degli autovettori e degli autovalori può eseguirsi scrivendo:

$$\underline{J} \underline{v} - \lambda \underline{I} \underline{v} = \underline{0},$$

e cioè:

$$(\underline{J} - \lambda \underline{I}) \underline{v} = \underline{0}.$$

In componenti in un sistema di riferimento Oxy cartesiano ortogonale tale relazione si scrive:

$$\begin{bmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Affinché vi siano soluzioni  $\underline{v} \neq \underline{0}$  deve essere:

$$\det \begin{bmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando si ottiene l'equazione determinatrice degli autovalori, detta equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - (J_x + J_y)\lambda + (J_x J_y - J_{xy}^2) = 0.$$

Indicando con  $J_\xi$  e con  $J_\eta$  le radici dell'equazione caratteristica, risulta:

$$\left. \begin{matrix} J_\xi \\ J_\eta \end{matrix} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}.$$

Si noti che le radici dell'equazione caratteristica sono sempre reali, ed inoltre sono anche distinte salvo che non sia:

$$J_x = J_y \quad \text{e} \quad J_{xy} = 0.$$

Se questo è il caso risulta:

$$\underline{J} = J_x \underline{I},$$

e tutti i vettori del piano sono autovettori associati all'unica radice doppia  $J_x$ .

Si supponga ora che le radici  $J_\xi$  e  $J_\eta$  siano distinte, e siano  $\xi$  e  $\eta$  due direzioni principali associate a  $J_\xi$  e  $J_\eta$  rispettivamente. Se  $\underline{e}_\xi$  è un versore

della direzione  $\xi$  e  $\underline{e}_\eta$  della direzione  $\eta$ , risulta, tenendo conto della simmetria di  $\underline{J}$ :

$$\underline{e}_\xi \cdot (\underline{J} \underline{e}_\eta) = \underline{e}_\eta \cdot (\underline{J} \underline{e}_\xi) \Rightarrow \underline{e}_\xi \cdot (J_\eta \underline{e}_\eta) = \underline{e}_\eta \cdot (J_\xi \underline{e}_\xi) \\ \Rightarrow (J_\xi - J_\eta) \underline{e}_\xi \cdot \underline{e}_\eta = 0.$$

Dunque, se  $J_\xi \neq J_\eta$  allora  $\underline{e}_\xi$  e  $\underline{e}_\eta$  sono ortogonali. Tutte le direzioni principali associate a  $J_\eta$  devono dunque essere ortogonali a tutte le direzioni principali associate a  $J_\xi$  e questo implica che esistono due sole direzioni  $\xi$  e  $\eta$  principali ortogonali tra loro. E' quindi possibile scegliere un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\xi\eta$  principale di inerzia. Poiche' risulta:

$$\begin{cases} \underline{e}_\xi \cdot \underline{J} \underline{e}_\xi = J_\xi \\ \underline{e}_\eta \cdot \underline{J} \underline{e}_\eta = J_\eta \\ \underline{e}_\xi \cdot \underline{J} \underline{e}_\eta = 0 \end{cases},$$

la rappresentazione principale di  $\underline{J}$  diventa:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\eta \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori  $J_\xi$  e  $J_\eta$  hanno dunque il significato di momenti di inerzia rispetto agli assi principali  $\xi$  e  $\eta$  e sono detti momenti principali di inerzia. Il momento centrifugo rispetto agli assi principali e' invece nullo. Viceversa, se due assi ortogonali  $x$  e  $y$  sono tali che  $J_{xy} = 0$  allora  $x$  e  $y$  sono principali di inerzia. Infatti se  $J_{xy} = 0$  deve essere:

$$-\underline{e}_x \cdot \underline{J} \underline{e}_y = 0.$$

Cioe'  $\underline{J} \underline{e}_y$  deve essere ortogonale all'asse  $x$ , e quindi deve avere la direzione dell'asse  $y$ :

$$\underline{J} \underline{e}_y = \lambda \underline{e}_y,$$

che e' equivalente a dire che  $y$ , e quindi anche l'asse  $x$  ortogonale a  $y$ , e' principale di inerzia.

Si è già visto che se  $y$  è un asse di simmetria allora  $J_{xy} = 0$ , dove l'asse  $x$  ha la direzione di simmetria. Se la simmetria è ortogonale, gli assi  $x$  e  $y$  sono ortogonali e quindi sono anche principali di inerzia.

#### 6.4.2 Relazione tra tensore di inerzia e tensore di Eulero

Nel sistema  $O\xi\eta$  principale di inerzia il tensore di Eulero si rappresenta nella forma diagonale seguente:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\xi \end{bmatrix}.$$

Questo significa che  $\xi$  e  $\eta$  sono direzioni principali di  $\underline{J}$  associate ai valori principali  $J_\eta$  e  $J_\xi$  rispettivamente:

$$\underline{J} \underline{e}_\xi = J_\eta \underline{e}_\xi, \quad \underline{J} \underline{e}_\eta = J_\xi \underline{e}_\eta.$$

Sia allora  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$  la rotazione di  $90^\circ$  nel piano in senso antiorario. Risulta:

$$\left( \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{J} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \right) \underline{e}_\xi = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (\underline{J} \underline{e}_\eta) = J_\xi \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{e}_\eta = J_\xi \underline{e}_\xi,$$

e analogamente:

$$\left( \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{J} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \right) \underline{e}_\eta = J_\eta \underline{e}_\eta,$$

ovverossia i tensori  $\underline{J}$  e  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{J} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$  coincidono poiché hanno gli stessi autovettori e autovalori associati:

$$\underline{J} = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{J} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}.$$

Poiché applicando due volte la rotazione di  $90^\circ$  si ottiene quella di  $180^\circ$  che coincide con l'opposta dell'identità:

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} = -\underline{I}, \quad \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T = -\underline{I}$$

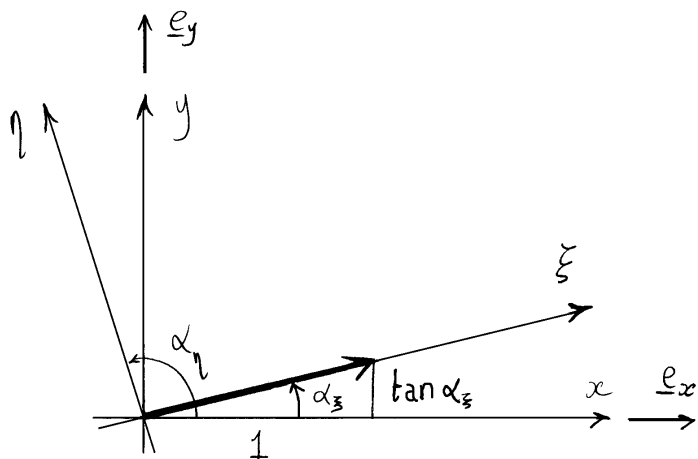
risulta anche:

$$\underline{J} = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{J} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T.$$

### 6.4.3 Calcolo delle direzioni principali

Come detto, se  $J_{\xi} = J_{\eta}$  tutte le direzioni del piano sono principali. Se  $J_{\xi} \neq J_{\eta}$  e  $J_{xy} = 0$  le direzioni principali sono quelle degli assi  $x$  e  $y$ .

Restano da determinare le direzioni principali nel caso sia  $J_{\xi} \neq J_{\eta}$  e  $J_{xy} \neq 0$ . Se  $\alpha_{\xi}$  è l'angolo che individua la direzione principale  $\xi$  rispetto all'asse  $x$ , il vettore di componenti  $[1 \quad \tan \alpha_{\xi}]^T$



è un autovettore. Si ha dunque:

$$\begin{bmatrix} J_x - J_{\xi} & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y - J_{\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tan \alpha_{\xi} \end{Bmatrix} = 0.$$

Poiché il determinante dei coefficienti è nullo, si ottengono due equazioni linearmente dipendenti, dalla prima delle quali si deduce:

$$\tan \alpha_{\xi} = \frac{J_x - J_{\xi}}{J_{xy}}.$$

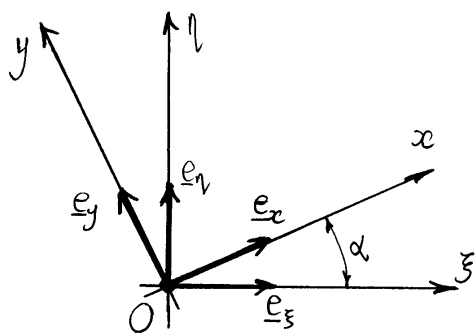
Analogamente si ottiene il valore di  $\tan \alpha_{\eta}$ :

$$\tan \alpha_{\eta} = \frac{J_x - J_{\eta}}{J_{xy}},$$

dove l'angolo  $\alpha_{\eta}$  individua, rispetto a  $x$ , la direzione principale  $\eta$ .

#### 6.4.4 Formule di rotazione

Siano  $O\xi\eta$  e  $Oxy$  rispettivamente il sistema principale e un generico sistema di riferimento, entrambi di centro  $O$ . Noti i momenti principali  $J_\xi$  e  $J_\eta$  e l'angolo  $\alpha$  che l'asse  $x$  forma con l'asse  $\xi$ , positivo se antiorario, si vogliono determinare i momenti di inerzia  $J_x$  e  $J_y$  e il momento centrifugo  $J_{xy}$ .



A questo scopo, sia  $\underline{R}$  la rotazione che ruota gli assi principali negli assi  $x$  e  $y$ , di componenti nel sistema  $O\xi\eta$ :

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

e si ricordi che le componenti di  $\underline{J}$  nel sistema  $Oxy$  coincidono con le componenti di  $\underline{R}^T \underline{J} \underline{R}$  nel sistema principale:

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

si ottengono così le formule di rotazione:

$$\begin{cases} J_x = J_\xi \cos^2\alpha + J_\eta \sin^2\alpha \\ J_y = J_\xi \sin^2\alpha + J_\eta \cos^2\alpha \\ J_{xy} = (J_\xi - J_\eta) \sin\alpha \cos\alpha \end{cases}.$$

Dividendo le prime due per la massa totale  $M$  si ottengono le formule di rotazione per i raggi di inerzia:

$$\begin{cases} l_x^2 = l_\xi^2 \cos^2\alpha + l_\eta^2 \sin^2\alpha \\ l_y^2 = l_\xi^2 \sin^2\alpha + l_\eta^2 \cos^2\alpha \end{cases}.$$

### 6.4.5 Circonferenza di Mohr

Ad ogni sistema di riferimento  $Oxy$  centrato in  $O$  corrispondono i momenti di inerzia  $J_x$  e  $J_y$  e il momento centrifugo. Ognuno di tali sistemi è individuato univocamente dall'angolo  $\alpha$  che l'asse  $x$  forma con l'asse  $\xi$  del sistema principale  $O\xi\eta$ . Riportando in ascissa il valore  $J_x$  e in ordinata il valore  $J_{xy}$  in una opportuna scala, al variare di  $\alpha$  si ottiene una curva che rappresenta in un piano, detto piano di Mohr, le proprietà inerziali del sistema di masse rispetto alle rette del fascio di sostegno  $O$ .

Se si inseriscono le seguenti formule trigonometriche:

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \end{cases},$$

nelle formule di rotazione, si ottiene:

$$\begin{cases} J_x = \frac{J_\xi + J_\eta}{2} + \frac{J_\xi - J_\eta}{2} \cos 2\alpha \\ J_{xy} = \frac{J_\xi - J_\eta}{2} \sin 2\alpha \end{cases}.$$

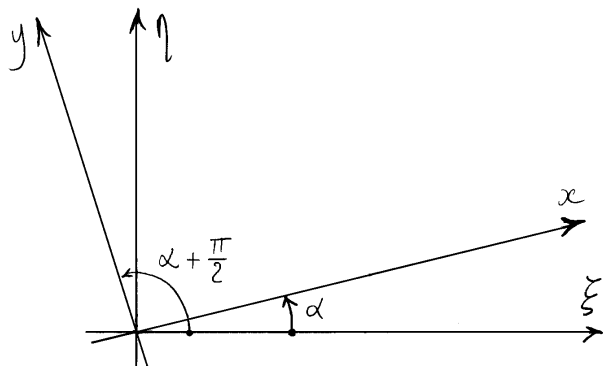
Supponendo, senza perdita di generalità, che sia  $J_\xi > J_\eta$  si ponga:

$$R = \frac{J_\xi - J_\eta}{2}, \quad c = \frac{J_\xi + J_\eta}{2}.$$

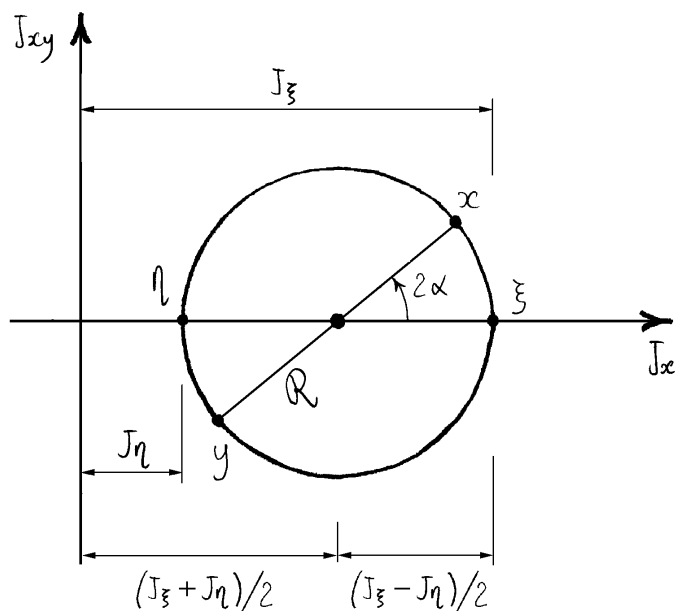
Ne consegue:

$$\begin{cases} J_x = c + R \cos 2\alpha \\ J_{xy} = R \sin 2\alpha \end{cases},$$

che rappresentano le equazioni parametriche di una circonferenza di raggio  $R$  e di centro  $(c, 0)$ , detta circonferenza di Mohr. Le intersezioni della circonferenza con l'asse delle ascisse individuano i punti  $\xi$  e  $\eta$  corrispondenti agli assi principali. Ne risulta che  $J_\xi$  e  $J_\eta$  rappresentano l'uno il massimo e l'altro il minimo momento di inerzia nel fascio di sostegno  $O$ .

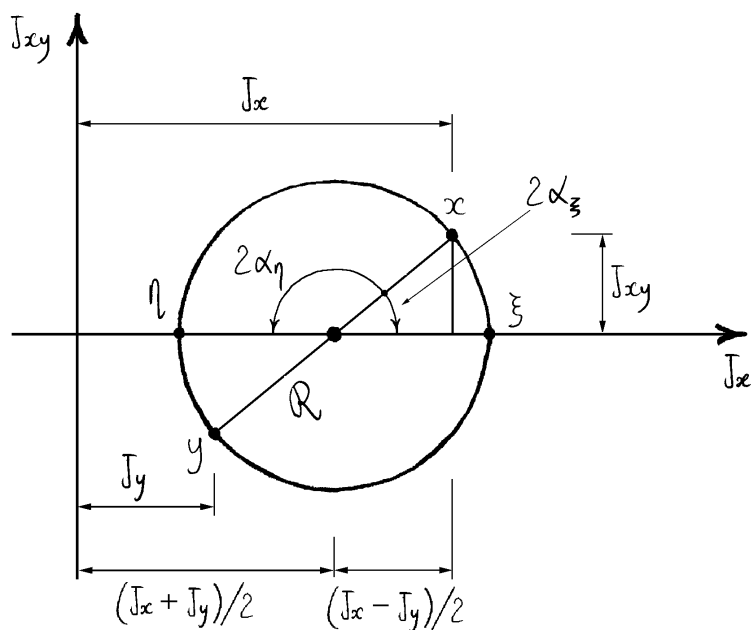
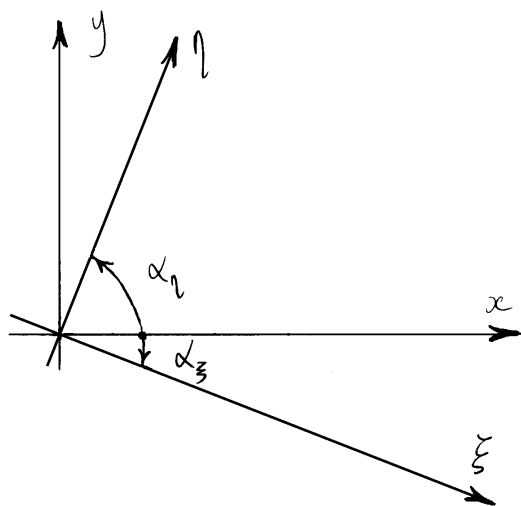


$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{xy} > 0$$



Se l'asse  $x$  è individuato da un angolo  $\alpha$  compreso nell'intervallo  $(0, \frac{\pi}{2})$  gli corrisponde un punto  $x$  sulla circonferenza posto dalla parte positiva delle ordinate e individuato dall'angolo  $2\alpha$ . Ne risulta che i punti sulla circonferenza formano angoli doppi e di verso concorde rispetto agli angoli che formano nel piano delle masse gli assi corrispondenti.

L'asse  $y$  di un sistema  $Oxy$  è individuato dall'angolo  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ , se  $\alpha$  individua l'asse  $x$ . Ne risulta che i punti  $x$  e  $y$  sulla circonferenza formano un angolo di  $\pi$  radianti, cioè sono opposti in diametro. Questa proprietà permette di costruire la circonferenza a partire dai momenti di inerzia  $J_x$  e  $J_y$  e dal momento centrifugo  $J_{xy}$  relativi ad un generico sistema  $Oxy$ . Infatti il punto  $x$  è individuato dalla coppia  $(J_x, J_{xy})$  mentre il punto  $y$  dalla coppia  $(J_y, -J_{xy})$ . Unendo i due punti si ottiene un diametro, la sua intersezione con l'asse delle ascisse determina il centro e infine l'intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse



individua i punti  $\xi$  e  $\eta$  corrispondenti degli assi principali. Tenendo poi conto che le rotazioni nel piano delle masse sono concordi in segno e pari alla metà di quelle nel piano di Mohr, è possibile individuare le direzioni principali  $\xi$  e  $\eta$  a partire dagli assi  $x$  e  $y$ .

Dalla circonferenza si ottiene inoltre che:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ c = \frac{I_x + I_y}{2} \end{cases},$$

e si riottengono i momenti principali di inerzia:

$$\left. \begin{matrix} I_\xi \\ I_\eta \end{matrix} \right\} = c \pm R.$$

Sempre dalla circonferenza si ottiene infine che:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y},$$

dove  $\alpha_0$  indica uno qualsiasi dei due angoli che individuano le direzioni principali di inerzia.



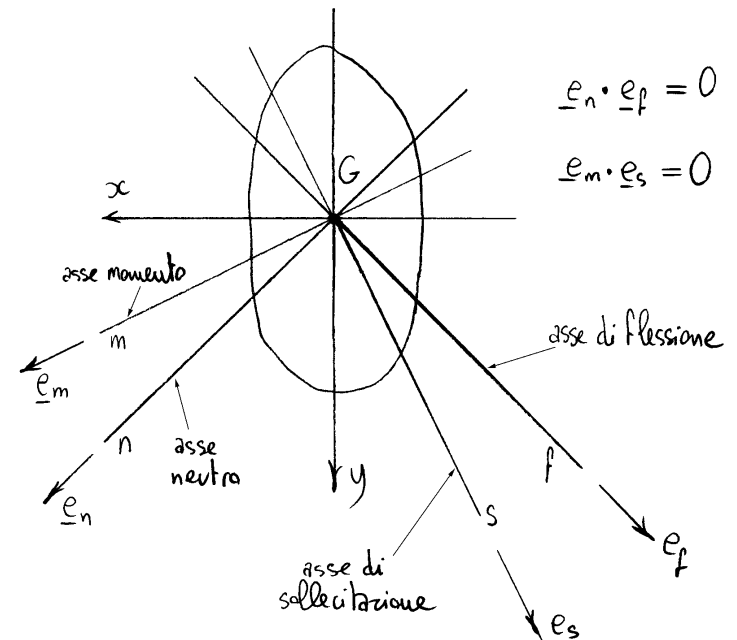
## Capitolo 7

### Assi coniugati

L'equazione costitutiva che lega momento flettente e curvatura flessionale :

$$\underline{M} = J \underline{K}_f, \quad (1)$$

istituisce una corrispondenza tra la direzione di  $\underline{K}_f$  e quella di  $\underline{M}$ , ovvero istituisce una corrispondenza tra l'asse momento  $m$ , avente la direzione di  $\underline{M}$ , e l'asse neutro  $n$ , avente la direzione di  $\underline{K}_f$ . Poiché  $\underline{K}_f$  è il vettore della rotazione relativa, la rotazione relativa della sezione avviene attorno all'asse neutro e ne risulta che le fibre longitudinali individuate da tale asse hanno dilatazione nulla, il che giustifica il nome di asse neutro. Si tenga anche conto che dalla relazione  $\sigma = E \varepsilon$  consegue che lungo l'asse neutro si annulla anche la tensione normale, proprietà



che fornisce il significato statico dell'asse neutro. Il piano ortogonale all'asse neutro è detto piano di flessione e la sua intersezione  $f$  con il piano della sezione è detto asse di flessione. Il piano ortogonale all'asse momento è invece detto piano di sollecitazione e la sua intersezione  $s$  con il piano della sezione retta è detto asse di sollecitazione.

Siano  $\underline{e}_m, \underline{e}_s, \underline{e}_n, \underline{e}_f$  i versori delle direzioni degli assi momento, di sollecitazione, neutro e di flessione rispettivamente. L'equazione costitutiva può dunque scriversi:

$$M \underline{e}_m = K_f \underline{J} \underline{e}_n, \quad (2)$$

dove  $M$  e  $K_f$  sono le componenti di  $\underline{M}$  e  $\underline{K}_f$  rispetto ai versori  $\underline{e}_m$  e  $\underline{e}_n$ . Se  $n$  è un asse principale di inerzia, allora  $m$  e  $n$  coincidono e l'asse di sollecitazione  $s$  è ortogonale a  $n$  ed è quindi principale di inerzia. Ricordiamo che  $s$  e  $n$  sono principali se e solo se sono ortogonali e:

$$I_{sn} = 0. \quad (3)$$

Si mostrerà nel seguito che la relazione (3) è generale, ovvero sia che vale anche nel caso in cui  $n$  non è principale di inerzia. Due assi che soddisfano la relazione (3) sono detti assi coniugati.

## 7.1 Relazione tra asse neutro e asse di sollecitazione

Dalla relazione (2), tenendo conto che:

$$\underline{J} = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{J} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}, \quad (4)$$

dove  $\underline{J}$  è il tensore di Eulero e  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$  la rotazione antioraria di ampiezza  $90^\circ$ , si ottiene:

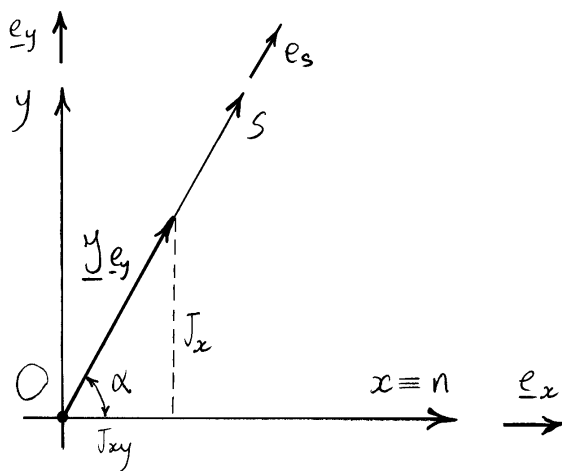
$$M (\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_m) = K_f \underline{J} (\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_n). \quad (5)$$

Poiché  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_m = \underline{e}_s$  si ha infine:

$$M \underline{e}_s = K_f \underline{J} (\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_n). \quad (6)$$

Dato l'asse neutro, si ottiene dunque la direzione dell'asse di sollecitazione prendendo la direzione ortogonale all'asse neutro e trasformandola tramite il tensore di Eulero.

Sia allora data una direzione  $n$  nel piano e



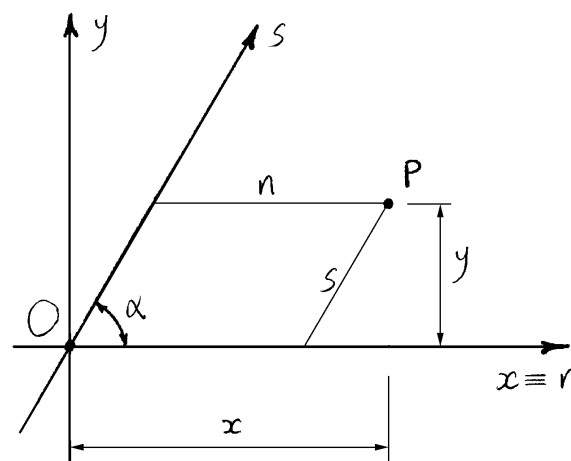
sia  $y$  la direzione ortogonale. Nel sistema carte= siano ortogonale  $Oxy$ , con  $x \equiv n$ , risulta:

$$\underline{y} \underline{e}_y \equiv \begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{xy} \\ J_x \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Se  $J_{xy} = 0$ , l'asse  $s$  coincide con l'asse  $y$ , ovverossia  $\alpha = \pi/2$ . Se invece  $J_{xy} \neq 0$ , l'inclinazione  $\alpha$  della retta  $s$  che corrisponde in tal modo a  $n$  vale:

$$\tan \alpha = \frac{J_x}{J_{xy}}. \quad (8)$$

Si vuole ora verificare che il problema precedente è equivalente a determinare la direzione dell'asse  $s$  in modo tale che sia  $J_{ns} = 0$ . Se  $J_{xy} = 0$ , con  $x$  coincidente con  $n$ , allora  $n$  è principale di inerzia e  $s$  coincide con  $y$ . Sia allora  $J_{xy} \neq 0$ . Poichè:



$$J_{ns} = \int_A E n s dA, \quad (9)$$

e dato che :

$$\begin{cases} n = x - \frac{y}{\tan \alpha} \\ s = \frac{y}{\sin \alpha} \end{cases},$$

si ottiene :

$$J_{ns} = \int_A E \left( x - \frac{y}{\tan \alpha} \right) \frac{y}{\sin \alpha} dA =$$

$$= \frac{J_{xy}}{\sin \alpha} - \frac{J_x}{\sin \alpha \tan \alpha} \quad (10)$$

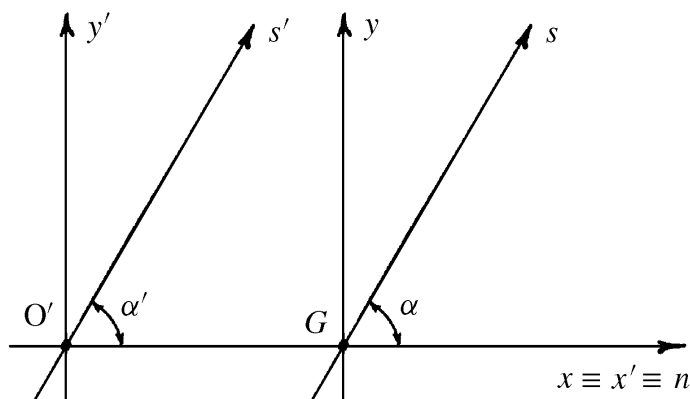
Ponendo  $J_{ns} = 0$  si riottiene la (8), come volevasi dimostrare.

È evidente da questa formulazione del problema che se  $s$  è coniugato di  $n$ , allora  $n$  è coniugato di  $s$ , cioè la relazione è reciproca.

Si noti che se la retta  $n$  è baricentrica allora le rette coniugate della retta  $n$  individuano un fascio di rette parallele. Infatti sia  $n$  una retta baricentrica e  $s$  la coniugata di  $n$  per  $G$ . Sia poi  $O'$  un punto di  $n$  e si considerino i due sistemi ortogonali  $Gxy$  e  $O'x'y'$  con gli assi  $x$  e  $x'$  coincidenti con  $n$ . Dette  $\alpha$  e  $\alpha'$  le inclinazioni di  $s$  e  $s'$  rispetto ad  $n$ , con  $s'$  retta coniugata di  $n$  per  $O'$ , risulta:

$$\tan \alpha = \frac{J_x}{J_{xy}} = \frac{J_{x'}}{J_{x'y'}} = \tan \alpha',$$

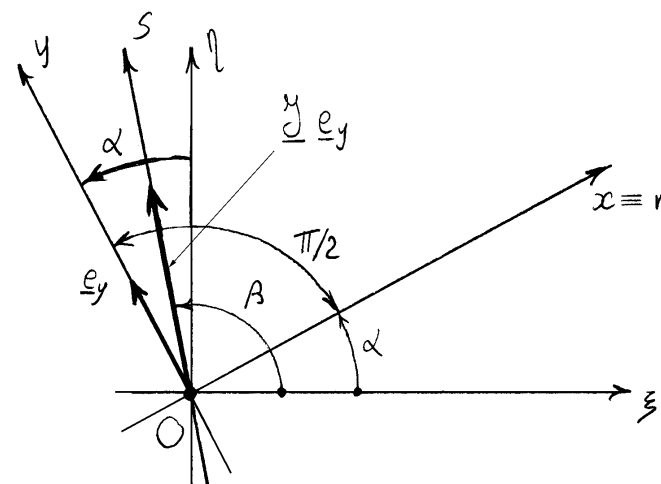
come volevasi dimostrare.



## 7.2 Assi coniugati nel riferimento principale

Sia ora  $O\xi\eta$  il riferimento principale di inerzia. Il tensore di Eulero si rappresenta in forma diagonale mentre il versore dell'asse  $y$ , ortogonale all'asse neutro  $n$ , ha componenti:

$$\underline{e}_y = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}.$$

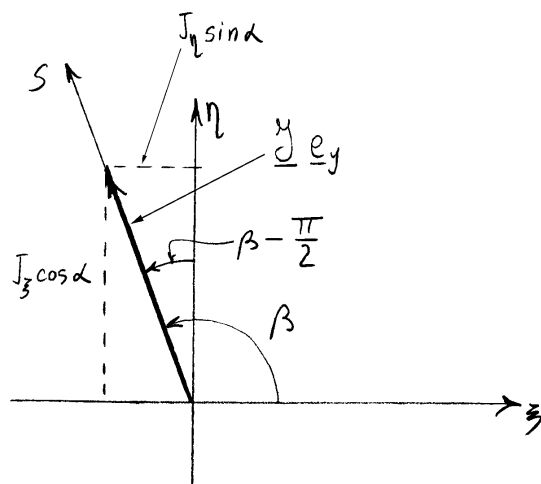


Risulta quindi :

$$\underline{y} \underline{e}_y \equiv \begin{bmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -J_\eta \sin \alpha \\ J_\xi \cos \alpha \end{Bmatrix},$$

e ne consegue :

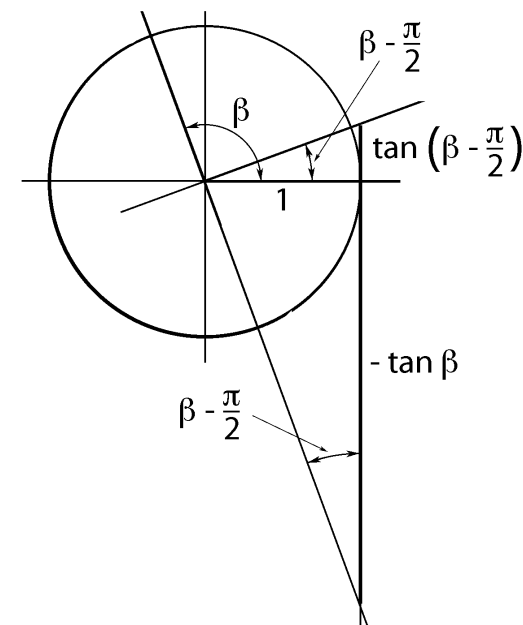
$$\tan \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{J_\eta \sin \alpha}{J_\xi \cos \alpha} = \frac{J_\eta}{J_\xi} \tan \alpha.$$



Come può essere facilmente verificato dallo schema seguen-

te, sussiste l'uguaglianza trigonometrica:

$$\tan \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{1}{\tan \beta}.$$



Ne consegue infine la relazione:

$$\tan \alpha \tan \beta = - \frac{J_\xi}{J_\eta} = - \frac{J_\xi^2}{J_\eta^2}.$$

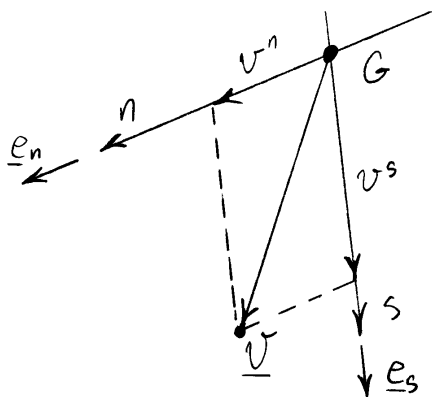
detta relazione di coniugio.

### 7.3 Sistema di riferimento coniugato

Dati due assi baricentrici coniugati  $n$  e  $s$ , non necessariamente principali, si consideri il sistema di riferimento cartesiano  $Gns$  in generale obliquo. Ci si propone nel seguito di rappresentare il tensore di Eulero  $\mathbf{J}$  utilizzando come base di vettori i versori  $\underline{e}_n$  e  $\underline{e}_s$  dei due assi coniugati, base in generale non ortonormale. A tale scopo, si darà innanzitutto una breve introduzione, limitata al caso piano, della rappresentazione dei vettori in una base non ortonormale.

#### 7.3.1 Sistema di riferimento obliquo

In un sistema di riferimento obliquo  $Gns$  un qualunque vettore  $\underline{v}$  può scomporsi nella somma di due vettori paralleli agli assi coordinati obliqui. Le componenti  $v^n$  e  $v^s$  (che nel calcolo tensoriale



è consuetudine indicare con gli indici posti superiormente), sono dette componenti controvarianti:

$$\underline{v} = v^n \underline{e}_n + v^s \underline{e}_s.$$

È evidente che in tal caso i prodotti scalari  $\underline{v} \cdot \underline{e}_n$  e  $\underline{v} \cdot \underline{e}_s$  non forniscono le componenti controvarianti, come invece succede se la base è ortonormale. Occorre allora introdurre una seconda base  $\underline{e}^n, \underline{e}^s$  (con gli indici nella parte superiore) detta base duale e definita ponendo:

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j \equiv n, s.$$

Si ha infatti:

$$\begin{cases} \underline{v} \cdot \underline{e}^n = (v^n \underline{e}_n + v^s \underline{e}_s) \cdot \underline{e}^n = v^n, \\ \underline{v} \cdot \underline{e}^s = (v^n \underline{e}_n + v^s \underline{e}_s) \cdot \underline{e}^s = v^s. \end{cases}$$

Dalla definizione di base duale consegue:

$$\begin{cases} \underline{e}_s \cdot \underline{e}^n = 0 \\ \underline{e}_n \cdot \underline{e}^s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}^n = \alpha \underline{e}_m \\ \underline{e}^s = \beta \underline{e}_f \end{cases},$$

$$\begin{cases} \underline{e}_n \cdot \underline{e}^n = 1 \\ \underline{e}_s \cdot \underline{e}^s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\underline{e}_n \cdot \underline{e}_m} \\ \beta = \frac{1}{\underline{e}_s \cdot \underline{e}_f} \end{cases},$$

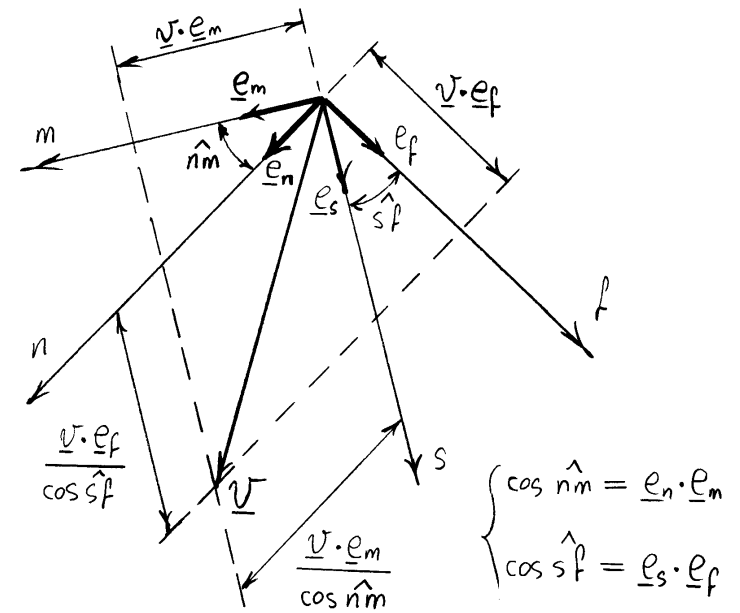
e infine:

$$\underline{e}^n = \frac{\underline{e}_m}{\underline{e}_n \cdot \underline{e}_m}, \quad \underline{e}^s = \frac{\underline{e}_f}{\underline{e}_s \cdot \underline{e}_f}.$$

Le componenti controvarianti di  $\underline{v}$  si ottengono dunque moltiplicando scalarmente il vettore  $\underline{v}$  per i vettori della base duale. Si ottiene quindi:

$$v^n = \frac{\underline{v} \cdot \underline{e}_m}{\underline{e}_n \cdot \underline{e}_m}, \quad v^s = \frac{\underline{v} \cdot \underline{e}_f}{\underline{e}_s \cdot \underline{e}_f}.$$

Queste due relazioni si giustificano geometricamente osservando che  $\underline{v} \cdot \underline{e}_m$  fornisce la proiezione di  $\underline{v}$  sull'asse  $m$ , proiezione in direzione parallela all'asse  $s$  ed analogamente  $\underline{v} \cdot \underline{e}_f$  fornisce la



proiezione di  $\underline{v}$  sull'asse  $f$ , proiezione nella direzione dell'asse  $n$ . Per ottenere le componenti cercate basta poi dividere per i coseni direttori dell'angolo tra gli assi  $n$  e  $m$  e rispettivamente dell'angolo tra gli assi  $s$  e  $f$ .

Si noti che, dualmente, un qualunque vettore  $\underline{v}$  può scomporsi nelle due direzioni individuate dalla base duale:

$$\underline{v} = v_n \underline{e}^n + v_s \underline{e}^s .$$

In tal caso le componenti di  $\underline{v}$  sono dette componenti covarianti (ed indicate con gli indici in basso).  
Risulta:

$$\begin{cases} \underline{v} \cdot \underline{e}_n = (v_n \underline{e}^n + v_s \underline{e}^s) \cdot \underline{e}_n = v_n \\ \underline{v} \cdot \underline{e}_s = (v_n \underline{e}^n + v_s \underline{e}^s) \cdot \underline{e}_s = v_s \end{cases} .$$

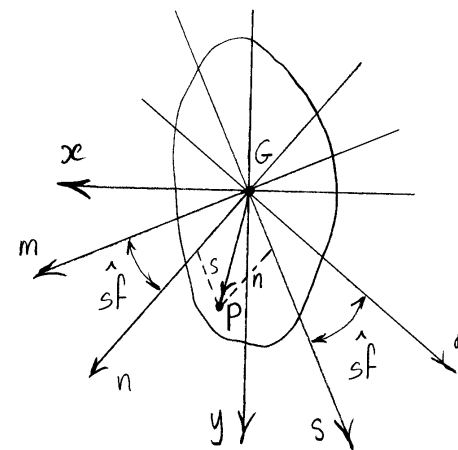
### 7.3.2 Rappresentazione del tensore di Eulero

Sia A una generica sezione retta e siano  $s$  ed  $n$  le coordinate del generico punto P della sezione. Allora si ha:

$$\underline{P-G} = n \underline{e}_n + s \underline{e}_s ,$$

e risulta:

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \int_A E (\underline{P-G}) \otimes (\underline{P-G}) dA = \\ &= \left( \int_A E n^2 dA \right) \underline{e}_n \otimes \underline{e}_n + \left( \int_A E s^2 dA \right) \underline{e}_s \otimes \underline{e}_s + \\ &+ \left( \int_A E s n dA \right) (\underline{e}_s \otimes \underline{e}_n + \underline{e}_n \otimes \underline{e}_s) . \end{aligned}$$



Poiché gli assi  $s$  ed  $n$  sono coniugati risulta:

$$J_{sn} = \int_A E s n dA = 0 ,$$

e quindi:

$$\underline{J} = J_s \underline{e}_n \otimes \underline{e}_n + J_n \underline{e}_s \otimes \underline{e}_s ,$$

dove  $J_n$  e  $J_s$  sono i momenti di inerzia relativi agli assi  $n$  ed  $s$  rispettivamente, calcolati valutando le distanze lungo le direzioni coniugate:

$$J_n = \int_A E s^2 dA , \quad J_s = \int_A E n^2 dA .$$

E' facile verificare che il tensore  $\underline{Y}^{-1}$  inverso del tensore di Eulero  $\underline{Y}$  si rappresenta nella forma :

$$\underline{Y}^{-1} = \frac{1}{J_s} \underline{e}^n \otimes \underline{e}^n + \frac{1}{J_n} \underline{e}^s \otimes \underline{e}^s .$$

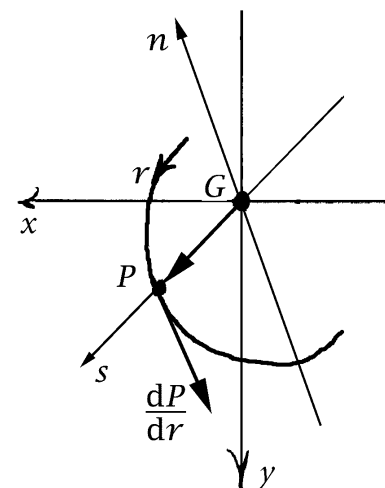
Infatti :

$$\begin{aligned} \underline{Y} (\underline{Y}^{-1} \underline{v}) &= \underline{Y} \left( \underline{Y}^{-1} (v^n \underline{e}_n + v^s \underline{e}_s) \right) = \\ &= \underline{Y} \left( \frac{v^n}{J_s} \underline{e}^n + \frac{v^s}{J_n} \underline{e}^s \right) = \\ &= v^n \underline{e}_n + v^s \underline{e}_s = \underline{v} . \end{aligned}$$

## 7.4 Ellisse centrale di inerzia (o ellisse di Culmann)

Ci si propone ora di determinare, se esiste, una curva piana regolare che racchiuda in sè le proprietà di coniugio e inerziali delle rette baricentriche. Sia allora data una curva regolare nel piano della sezione retta i cui punti siano individuati da un'ascissa curvilinea  $r$ . Si noti innanzitutto che un punto  $P$  della curva determina due direzioni, quelle dei vettori  $P - G$  e  $dP/dr$ , rispettivamente vettore posizione del punto  $P$  rispetto al baricentro  $G$  e vettore tangente alla curva in  $P$ . Affinché le rette baricentriche  $s$  e  $n$ , aventi le direzioni dei vettori  $P - G$  e  $dP/dr$  rispettivamente, siano coniugate occorre che:

$$\underline{Y} \frac{R}{2} \underline{\pi} (P-G) \propto \frac{dP}{ds} .$$



dove il simbolo  $\propto$  indica “proporzionale a” e  $\underline{J}^{-1}$  è l'inverso del tensore di Eulero relativo al baricentro. Ne consegue:

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \propto \underline{J}^{-1} \frac{dP}{ds}, \quad (1)$$

e infine:

$$(P-G) \cdot \underline{J}^{-1} \frac{dP}{ds} = 0, \quad (2)$$

poiché  $(P-G)$  e il suo ruotato di  $90^\circ$  sono ortogonali.

Per la simmetria di  $\underline{J}^{-1}$  si ha anche:

$$\frac{dP}{ds} \cdot \underline{J}^{-1}(P-G) = 0. \quad (3)$$

Sommando le (2) e (3) si ottiene allora:

$$\frac{d}{ds} \left\{ (P-G) \cdot \underline{J}^{-1}(P-G) \right\} = 0, \quad (4)$$

e infine:

$$(P-G) \cdot \underline{J}^{-1}(P-G) = c, \quad (5)$$

dove  $c$  è una costante. Si è così ottenuta una famiglia di curve soddisfacenti la proprietà di coniugio richiesta.

Allo scopo di imporre che la curva cercata rappresenti anche le proprietà inerziali degli assi baricentrici, si valuti il modulo del vettore posizione  $P-G$ , eseguendo i calcoli nel sistema coniugato  $Gns$ . Tenuto conto che in tale sistema risulta:

$$P-G = |P-G| \underline{e}_s, \quad (6)$$

si ottiene:

$$\underline{J}^{-1}(P-G) = \frac{|P-G|}{J_n} \underline{e}_s, \quad (7)$$

e infine:

$$(P-G) \cdot \underline{J}^{-1}(P-G) = \frac{|P-G|^2}{J_n}. \quad (8)$$

Dalle (5) e (8) si ha quindi:

$$|P-G|^2 = c J_n. \quad (9)$$

Se della famiglia di curve (5) si sceglie quella che si ottiene ponendo:

$$c = \frac{1}{M}, \quad (10)$$

risulta quindi:

$$|P-G| = J_n. \quad (11)$$

L'equazione:

$$M (P-G) \cdot \underline{J}^{-1} (P-G) = 1, \quad (12)$$

individua un'ellisse detta ellisse principale di inerzia o ellisse di Culmann.

Infatti, in componenti nel sistema principale  $Gxy$  risulta:

$$[J^{-1}] \equiv \begin{bmatrix} 1/J_y & 0 \\ 0 & 1/J_x \end{bmatrix}, \quad \{P-G\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

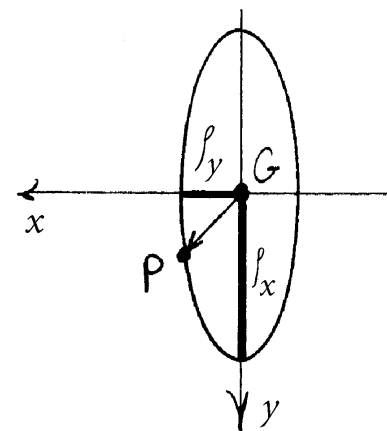
e l'equazione (12) diviene:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/J_y & 0 \\ 0 & 1/J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 1. \quad (13)$$

Poiché  $M/J_y = 1/\rho_y^2$  e  $M/J_x = 1/\rho_x^2$  si ottiene infine:

$$\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1. \quad (14)$$

Tale relazione rappresenta l'equazione di un'ellisse,



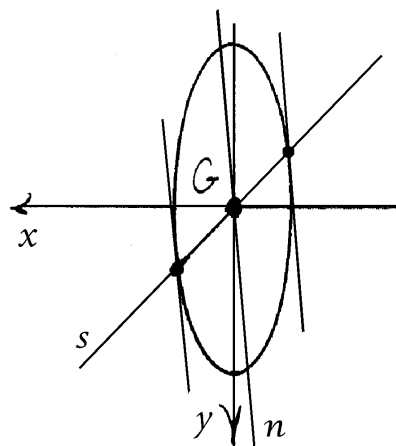
che ha quali semidiametri  $\rho_y$  lungo l'asse  $x$  e  $\rho_x$  lungo l'asse  $y$ , in accordo con la (11).

#### 7.4.1 Proprietà dell'ellisse centrale di inerzia

Riassumiamo nel seguito le due proprietà fondamentali dell'ellisse centrale di inerzia.

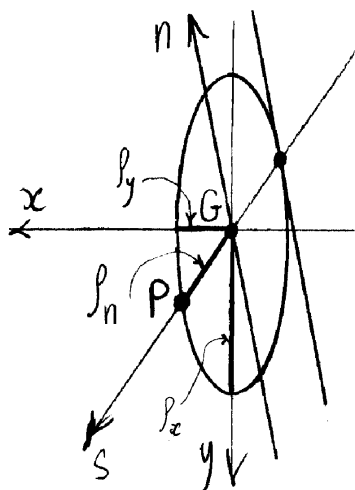
##### Proprietà delle tangenti.

La direzione  $n$ , coniugata di una retta  $s$  che interseca l'ellisse nei punti  $P$  e  $Q$ , è fornita dalle tangenti all'ellisse nei punti  $P$  e  $Q$  (che, per la simmetria dell'ellisse rispetto ai propri assi, sono parallele fra loro).



### Proprietà dei semidiametri.

Il generico semidiametro dell'ellisse, individuato dal generico punto  $P$ , ha quale valore il raggio di inerzia  $I_n$  relativo all'asse  $n$  coniugato dell'asse  $s$  contenente il semidiametro, raggio di inerzia calcolato con distanze valutate nella direzione  $s$ .

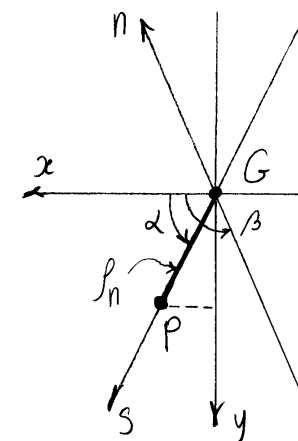
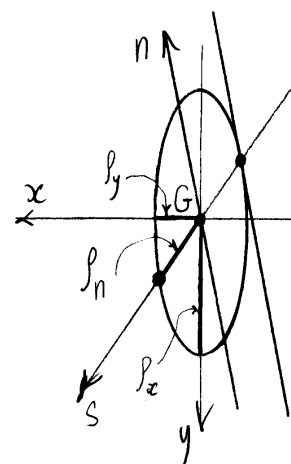


### 7.4.2 Esercizio: dimostrazione algebrica della proprietà dei semidiametri

Sia  $s$  un asse baricentrico inclinato di  $\alpha$  rispetto all'asse principale di inerzia  $x$ . Sia poi  $n$  l'asse coniugato di  $s$ . Se  $\beta$  è l'inclinazione di  $n$  rispetto all'asse  $x$  vale quindi la formula di coniugio:

$$\tan \alpha \tan \beta = -\frac{I_x^2}{I_y^2}.$$

Se a partire da  $G$  si stende sull'asse  $s$  un



segmento di lunghezza  $\rho_n$ , calcolato con distanze valutate nella direzione coniugata  $s$ , si individua il punto  $P$  di coordinate  $(\rho_n \cos \alpha, \rho_n \sin \alpha)$ .  
Vogliamo mostrare che  $P$  si trova sull'ellisse centrale di inerzia, cioè che è soddisfatta l'uguaglianza:

$$\rho_n^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_x^2} \right) = 1.$$

Innanzitutto, si determina  $\rho_n$  in funzione di  $\rho_x$  e  $\rho_y$  utilizzando la formula di rotazione (a partire dal sistema principale):

$$\bar{J}_n = J_x \cos^2 \beta + J_y \sin^2 \beta,$$

dove  $\bar{J}_n$  è valutato con distanze ortogonali ad  $n$ , e quindi tale che:

$$\bar{J}_n = J_n \sin^2(\beta - \alpha).$$

Dividendo la formula di rotazione per la massa totale  $M$  si ottiene:

$$\rho_n^2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \alpha)} (\rho_x^2 \cos^2 \beta + \rho_y^2 \sin^2 \beta).$$

Tenendo poi conto che la relazione di coniugio si può mettere nella forma:

$$\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} = - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta},$$

e che risulta:

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha,$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_n^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_x^2} \right) &= \\ &= \frac{1}{\sin^2(\beta - \alpha)} \left\{ \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \frac{\rho_y^2}{\rho_x^2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \right\} = \end{aligned}$$

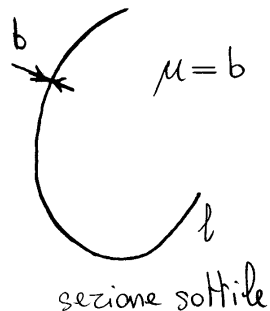
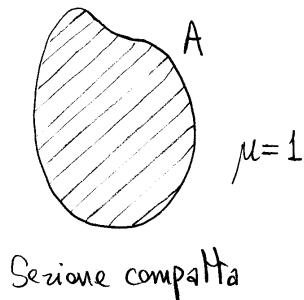
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sin^2(\beta-\alpha)} \left\{ -\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\alpha \sin^2\beta - \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta \right\} \\ &= \frac{1}{\sin^2(\beta-\alpha)} \left\{ -\sin\alpha \cos\beta (\sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta) \right. \\ &\quad \left. + \sin\beta \cos\alpha (\sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta) \right\} \\ &= \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)} = 1 \quad . \end{aligned}$$

## Capitolo 8

### Sezioni omogenee

Nel seguito si considerano delle sezioni omogenee. Questo significa che i calcoli vengono fatti a meno del modulo di Young, che nel nostro caso rappresenta la distribuzione di massa. In definitiva si considera una "geometria delle aree", in cui la "massa" è costituita dalla stessa area e la distribuzione di massa è adimensionale e vale 1. Ne risulta che i momenti statici hanno dimensione  $L^3$  e i momenti di inerzia, centrifughi e polari  $L^4$ .

Nel caso delle sezioni sottili la lunghezza della generica corda si concentra, approssimativamente, sulla



linea media. Ne risulta che tale caso viene studiato come quello di una massa distribuita su di una linea piana  $\ell$  con distribuzione di massa pari allo spessore  $b$ . Quindi la distribuzione di massa, in tal caso su una linea, ha la dimensione di una lunghezza.

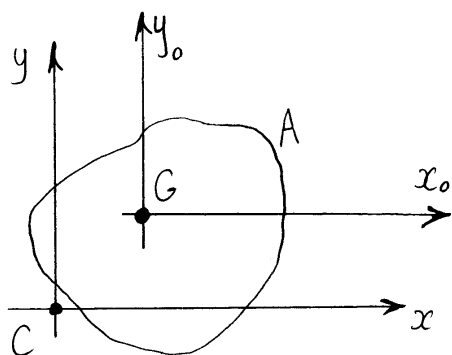
Scopo dello studio di una sezione è innanzitutto quello della determinazione del baricentro, del sistema principale di inerzia baricentrico e del calcolo dei momenti principali di inerzia baricentrici.

La conoscenza del baricentro e della massa totale permette di determinare il momento statico rispetto ad un qualunque asse, grazie al teorema di Varignon. La conoscenza del sistema e dei momenti principali di inerzia permette di determinare i momenti di inerzia e centrifughi di coppie di assi ortogonali generici, grazie alle formule di rotazione e del trasporto.

Nell'applicare le formule del trasporto si tenga conto che il momento di inerzia diminuisce se da

assi non baricentrici si passa ad assi baricentrici mentre aumenta nel caso contrario. Si tenga poi conto che è indifferente riferirsi alle coordinate del baricentro  $(x_G, y_G)$  nel sistema  $Cxy$  non baricentrico oppure alle coordinate  $(x_C, y_C)$  del punto  $C$  nel sistema baricentrico  $Gx_0y_0$ , poiché tali coordinate sono uguali in modulo e opposte in segno e conducono pertanto agli stessi risultati:

$$x_G^2 = x_C^2, \quad y_G^2 = y_C^2, \quad x_G y_G = x_C y_C.$$



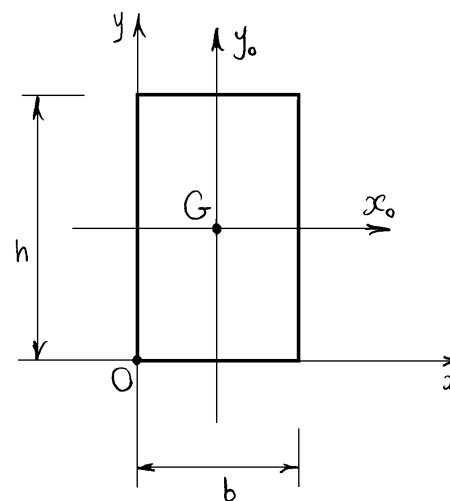
## 8.1 Sezioni tipiche

### 8.1.1 Rettangolo

Un rettangolo ha due assi di simmetria. Il baricentro coincide con la loro intersezione e i due assi sono principali di inerzia. Se  $x_0$  e  $y_0$  rappresentano gli assi principali di inerzia si ha quindi:

$$J_{x_0 y_0} = 0.$$

Si calcoli innanzitutto il momento di inerzia rispet=



$$A = bh$$

$$x_G = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_{y_0} = \frac{b^3h}{12}$$

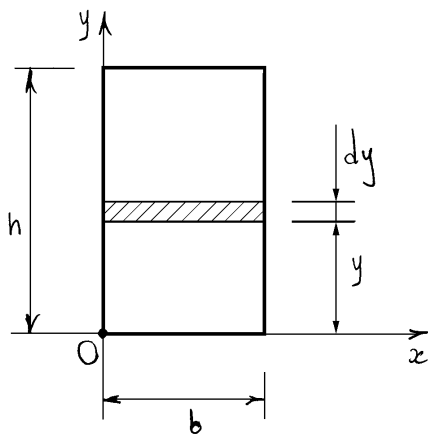
$$J_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$J_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

to ad una base :

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h b y^2 dy = \frac{b h^3}{3} .$$



Utilizzando le formule del trasporto e' poi possibile calcolare il momento principale di inerzia  $J_{x_0}$  e il momento centrifugo  $J_{xy}$  rispetto alle basi:

$$J_{x_0} = \frac{b h^3}{3} - (b h) \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12} ,$$

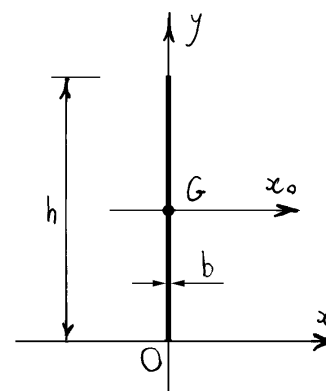
$$J_{xy} = 0 + (b h) \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2}{4} .$$

Invertendo infine il ruolo di base e altezza si hanno le analoghe formule per  $J_y$  e  $J_{y_0}$ :

$$J_y = \frac{b^3 h}{3} , \quad J_{y_0} = \frac{b^3 h}{12} .$$

### 8.1.2 Rettangolo sottile

Nel caso di un rettangolo sottile, il momento di inerzia  $J_y$ , relativo all'asse di simmetria che contiene la linea media, e' nullo, se si concentra lo spessore lungo



$$A = b h \quad J_{x_0} = \frac{b h^3}{12}$$

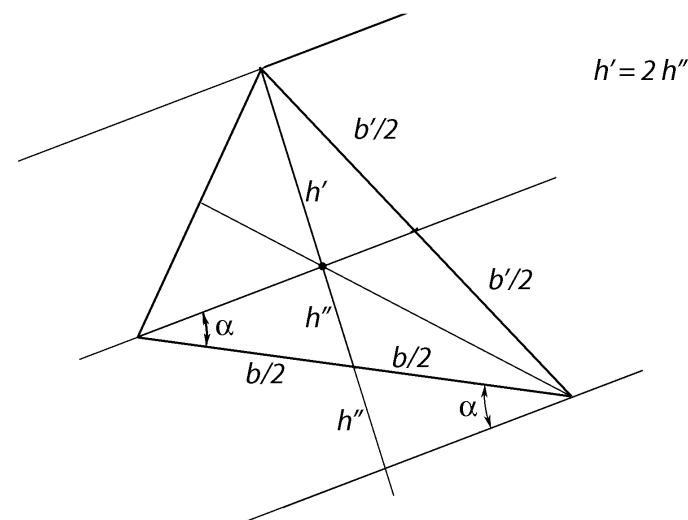
$$y_G = \frac{h}{2} \quad J_y = 0$$

$$J_x = \frac{b h^3}{3}$$

la linea media. E' chiaro che per un effettivo rettangolo sottile la quantità  $b^3h/12$ , anche se piccola, è l'unica che contribuisce al momento d'inerzia  $J_y$ . In tal caso si potrà ritenere  $J_y = 0$  solo se gli effetti flessionali che ne dipendono sono trascurabili. Se invece il rettangolo sottile fa parte di una sezione sottile complessa la quantità  $b^3h/12$  è solo una delle tante che contribuisce al calcolo delle quantità inerziali e come tale è trascurabile se  $b \ll h$ , indipendentemente dagli effetti che tale quantità avrebbe per il singolo rettangolo.

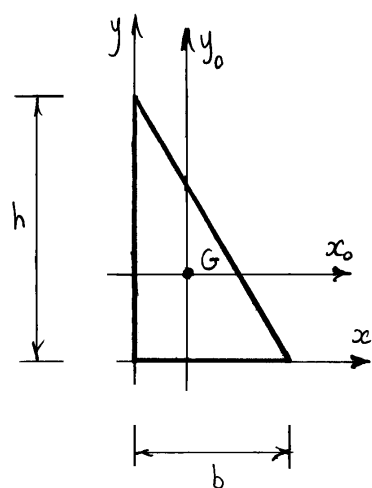
### 8.1.3 Triangolo rettangolo

Poiché le mediane di un triangolo sono assi di simmetria obliqua, nel loro punto di incontro si trova il baricentro. La mediana viene divisa nelle proporzioni  $1/3$  e  $2/3$ , come si può dedurre dallo schema seguente.



Ne consegue che nel sistema di riferimento  $Oxy$  individuato dalle basi, le coordinate del baricentro valgono:

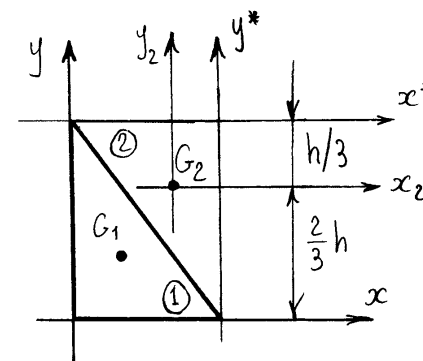
$$x_G = \frac{b}{3}, \quad y_G = \frac{h}{3}.$$



$$\begin{aligned} J_{x_0 y_0} &= -\frac{b^2 h^2}{72} & J_{x_0} &= \frac{bh^3}{36} \\ J_{xy} &= \frac{b^2 h^2}{24} & J_{y_0} &= \frac{b^3 h}{36} \\ A &= \frac{bh}{2} & J_x &= \frac{bh^3}{12} \\ x_G &= \frac{b}{3} & J_y &= \frac{b^3 h}{12} \\ y_G &= \frac{h}{3} \end{aligned}$$

Si tenga ora conto che dalla somma di due triangoli rettangoli di uguali dimensioni si ottiene un rettangolo di uguale base e altezza. Con le convenzioni di figura, si ha:

$$J_x^{(1)} = J_x^{(2)}, \quad J_{xy} = J_{x^* y^*}.$$



Tenendo allora conto che le quantità relative al rettangolo, già note, possono calcolarsi sommando i contributi dovuti ai due triangoli si ha:

$$\begin{aligned} \frac{bh^3}{3} &= 2J_x - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow J_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{4}{18} \right) bh^3 = \frac{bh^3}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b^2 h^2}{4} &= 2J_{xy} - \left(\frac{bh}{2}\right) \frac{b}{3} \frac{h}{3} + \left(\frac{bh}{2}\right) \frac{2}{3} b \frac{2}{3} h \Rightarrow \\ \Rightarrow J_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{4}{18} \right) b^2 h^2 = \frac{b^2 h^2}{24}, \end{aligned}$$

dove il trasporto del contributo del triangolo ② dagli assi  $x^*$  e  $y^*$  a quelli  $x$  e  $y$  è stato fatto per il tramite degli assi baricentrici  $x_2$  e  $y_2$  del triangolo ②.

Utilizzando le formule del trasporto è poi possibile calcolare i momenti  $I_{x_0}$  e  $I_{x_0 y_0}$  relativi ad assi baricentrici:

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36},$$

$$I_{x_0 y_0} = \frac{b^2 h^2}{24} - \left(\frac{bh}{2}\right)\frac{b}{3}\frac{h}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Poiché  $I_{x_0 y_0} \neq 0$ , gli assi  $x_0$  e  $y_0$  non sono principali di inerzia.

Infine, i momenti  $I_y$  e  $I_{y_0}$  si ottengono invertendo il ruolo di base e altezza:

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}, \quad I_{y_0} = \frac{b^3 h}{36}.$$

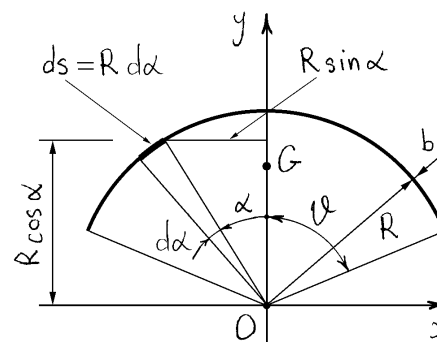
### 8.1.4 Arco circolare sottile

L'arco circolare sottile possiede un asse di simmetria che contiene quindi il baricentro ed è principale di inerzia. Per calcolare la posizione del baricentro si consideri il sistema di riferimento  $Oxy$ , con  $y$  coincidente con l'asse di simmetria e il punto  $O$  con il centro dell'arco. Detti  $\vartheta$  la semiapertura dell'arco, risulta:

$$A = 2bR\vartheta$$

$$S_x = 2 \int_0^\vartheta (b ds) R \cos \alpha =$$

$$2 \int_0^\vartheta b R^2 \cos \alpha d\alpha = 2bR^2 \sin \vartheta$$



$$A = 2\vartheta R b$$

$$y_G = R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

$$I_x = bR^3 \left( \vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

$$I_y = bR^3 \left( \vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

e dunque:

$$y_G = \frac{S_x}{A} = R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}.$$

Poichè è sempre  $\tan \vartheta > \vartheta$  (per  $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ) risulta:

$$\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} > \cos \vartheta \Rightarrow y_G > R \cos \vartheta,$$

e ne consegue che  $G$  è interno all'involuppo delle rette radenti, come deve essere.

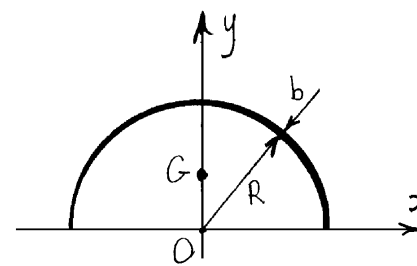
Infine risulta:

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\vartheta} b R^3 \cos^2 \alpha \, d\alpha = \\ &= 2 b R^3 \int_0^{\vartheta} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = b R^3 \left( \vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right), \end{aligned}$$

$$I_y = 2 \int_0^{\vartheta} b R^3 \sin^2 \alpha \, d\alpha =$$

$$= 2 b R^3 \int_0^{\vartheta} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = b R^3 \left( \vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right).$$

Come casi particolari si ottengono la semicirconferenza sottile ponendo  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ :

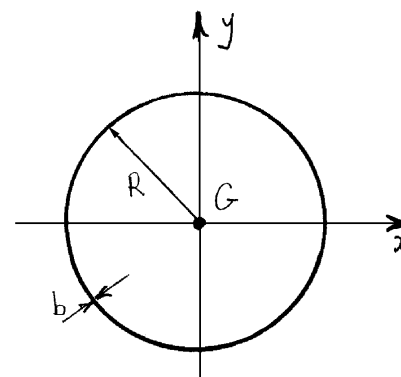


$$A = \pi R b$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi b R^3}{2}$$

e la circonferenza sottile ponendo  $\vartheta = \pi$ :



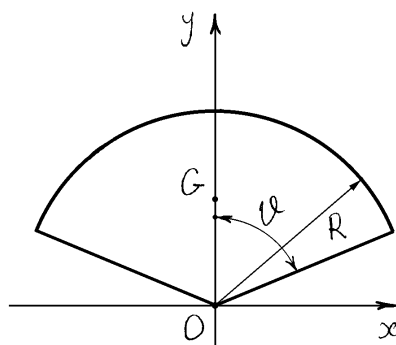
$$A = 2\pi R b$$

$$I_x = I_y = \pi b R^3$$

### 8.1.5 Settore circolare

Anche il settore circolare possiede un asse di simmetria, che risulta quindi principale di inerzia e contiene il baricentro. Tenendo conto che il settore può pensarsi suddiviso in triangoli infinitesimi che hanno baricentro a  $(2/3)R$  dal centro del settore, il suo baricentro può calcolarsi concentrando l'area dei triangoli nel loro baricentro ottenendo così un arco circolare di raggio  $(2/3)R$ :

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta},$$



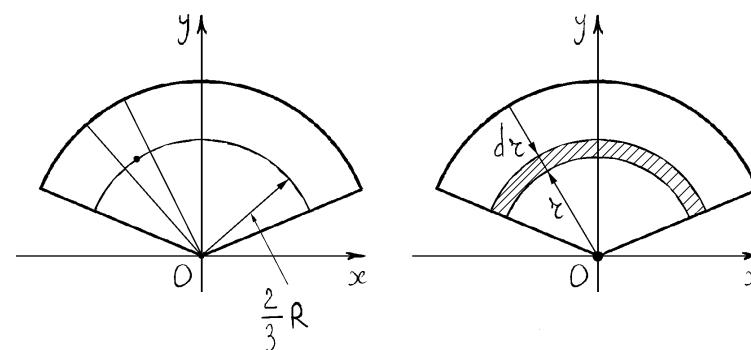
$$A = \vartheta R^2$$

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

$$I_x = \frac{R^4}{4} \left( \vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

$$I_y = \frac{R^4}{4} \left( \vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

dove  $\vartheta$  è ancora la semiampiezza e avendo anche in questo caso assunto un sistema di riferimento  $Oxy$  con l'asse  $y$  coincidente con l'asse di simmetria e il punto  $O$  con il centro del settore.

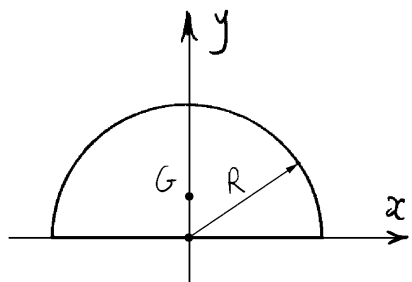


I momenti di inerzia  $I_x$  e  $I_y$  possono calcolarsi dividendo il settore in archi circolari di spessore  $dr$  e di raggio  $r$  variabile da  $0$  a  $R$ :

$$I_x = \int_0^R r^3 \left( \vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) dr = \frac{R^4}{4} \left( \vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right),$$

$$I_y = \int_0^R r^3 \left( \vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) dr = \frac{R^4}{4} \left( \vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right).$$

Come casi particolari si ottengono il semicerchio ponendo  $\vartheta = \pi/2$ :

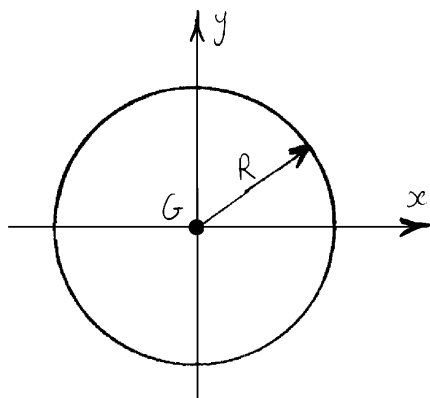


$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_G = \frac{4}{3\pi} R$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

e il cerchio ponendo  $\vartheta = \pi$ :



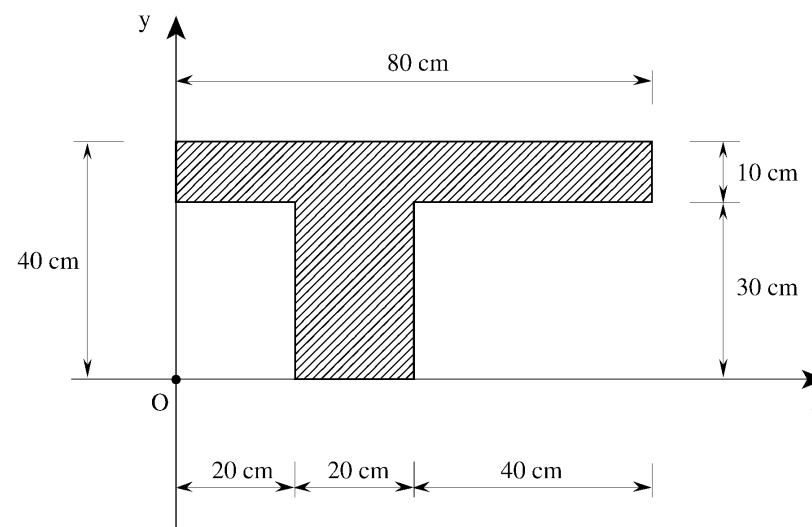
$$A = \pi R^2$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

## 8.2 Sezioni composte di parti semplici

Le quantità inerziali sono additive, ovvero si possono essere calcolate sommando i contributi delle singole parti che compongono la sezione. Se allora la sezione è composta di parti semplici, delle quali siano note le quantità inerziali, questa proprietà permette di calcolare le quantità inerziali di tutta la sezione.

### 8.2.1 Esempio 1: Sezione composta di due rettangoli



$$A^{①} = 10 \times 80 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A^{②} = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A = 1400 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{①} = A^{①} \times 35 = 28000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{②} = A^{②} \times 15 = 9000 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 37000 \text{ cm}^3$$

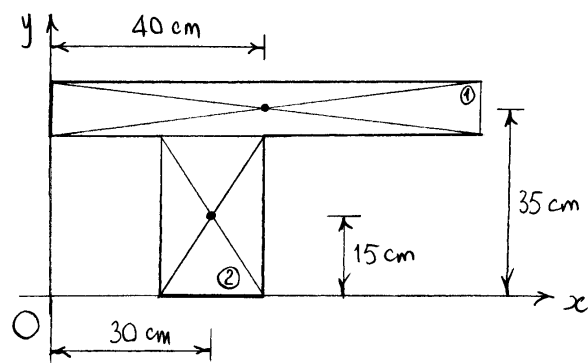
$$S_y^{①} = A^{①} \times 40 = 32000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{②} = A^{②} \times 30 = 18000 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 50000 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 26.43 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 35.71 \text{ cm}$$



$$J_{x_o}^{①} = \frac{80 \times 10^3}{12} + A^{①} (35 - y_G)^2 = 65442 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{②} = \frac{20 \times 30^3}{12} + A^{②} (15 - y_G)^2 = 123367 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o} = 188810 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{①} = \frac{10 \times 80^3}{12} + A^{①} (40 - x_G)^2 = 441361 \text{ cm}^4$$

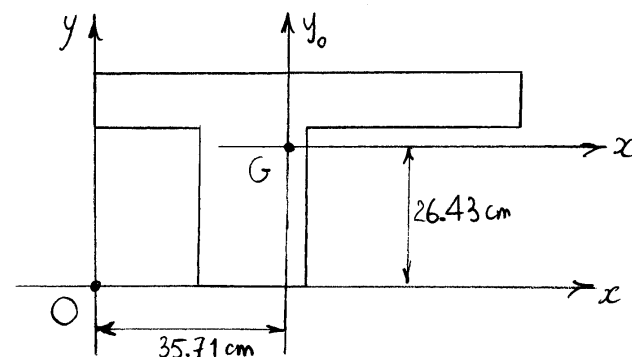
$$J_{y_o}^{②} = \frac{30 \times 20^3}{12} + A^{②} (30 - x_G)^2 = 39592 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o} = 480952 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{①} = A^{①} (35 - y_G)(40 - x_G) = 29388 \text{ cm}^4$$

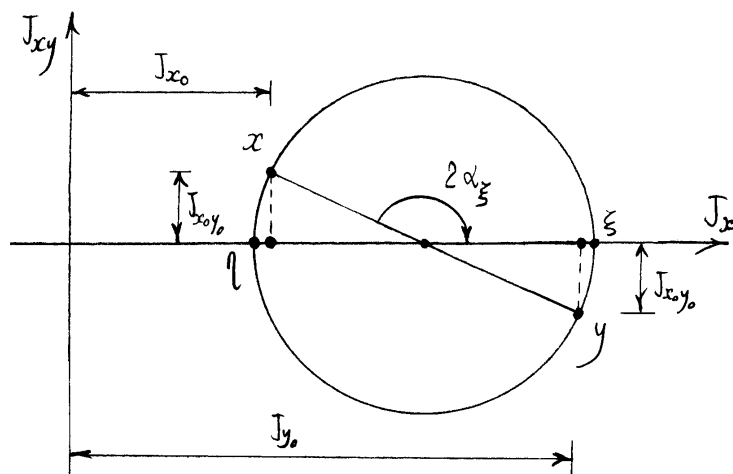
$$J_{x_o y_o}^{②} = A^{②} (15 - y_G)(30 - x_G) = 39184 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o} = 68571 \text{ cm}^4$$



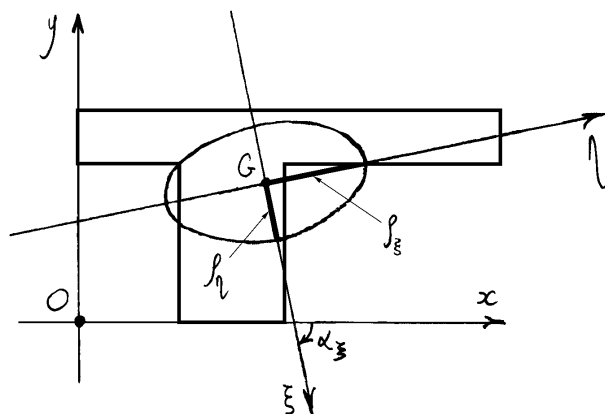
$$\left. \begin{array}{l} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{array} \right\} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_o} - J_{y_o})^2 + 4 J_{x_o y_o}^2}$$

$$= \begin{cases} 496247 \text{ cm}^4 \\ 173515 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



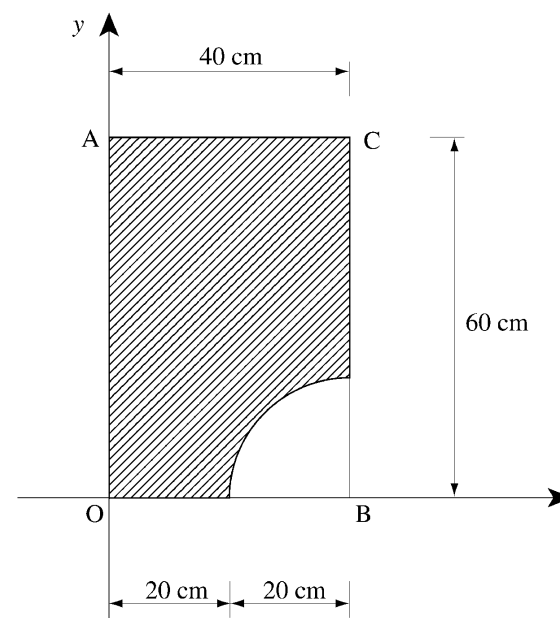
$$\begin{cases} l_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 18.83 \text{ cm} \\ l_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 11.13 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\alpha_{\xi} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x_0} - J_{\xi}}{J_{x_0 y_0}} \right\} = -77.43^{\circ}$$



### 8.2.2 Esempio 2: Sezione rettangolare con un intaglio

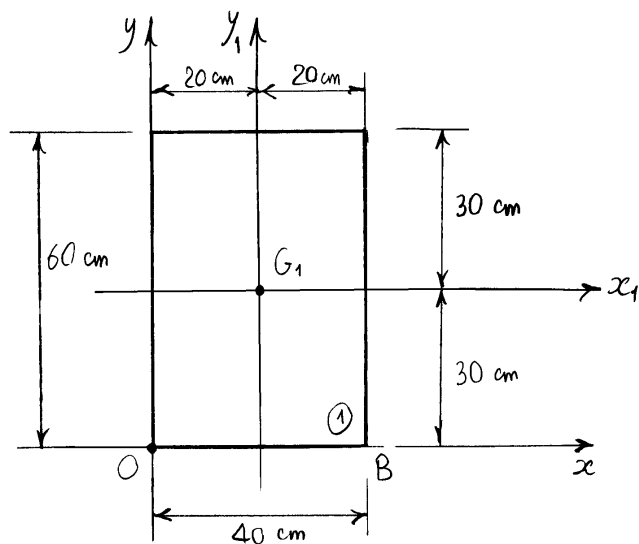
La sezione seguente non è la somma ma la differenza di due parti semplici, una rettangolare e una in forma di settore circolare di semiampiezza pari a  $\pi/4$  radianti. Quindi tutti i contributi del settore circolare



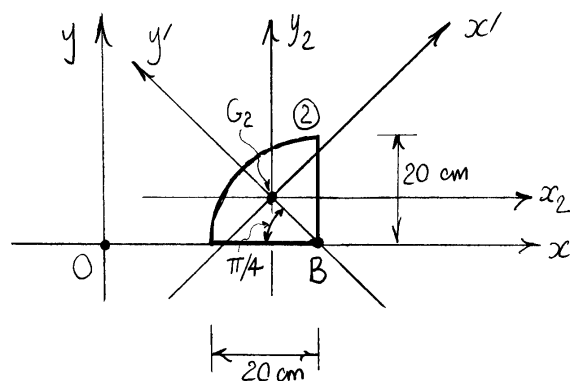
vanno sottratti da quelli del rettangolo. In tali casi a volte si parla di masse negative e i calcoli si svolgono, in conseguenza, associando una distribuzione di massa  $-1$  alla parte che va sottratta.

Questo ultimo modo di procedere è senz'altro indicato se si deve scrivere un programma di calcolo. Nel caso si debba manualmente risolvere un problema è più indicato sottrarre direttamente le quantità, come fatto nel seguito.

### Rettangolo



### Settore circolare (da sottrarre)



$$A^{①} = 40 \times 60 = 2400 \text{ cm}^2$$

$$A^{②} = \frac{\pi}{4} 20^2 = 314.16 \text{ cm}^2$$

$$A = A^{①} - A^{②} = 2085.8 \text{ cm}^2$$

$$\overline{BG}_2 = \frac{2}{3} 20 \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = 12.00 \text{ cm}$$

$$\begin{cases} x_{G1} = 20 \text{ cm} \\ y_{G1} = 30 \text{ cm} \end{cases}, \begin{cases} x_{G2} = 40 - \overline{BG}_2 \cos \frac{\pi}{4} = 31.51 \text{ cm} \\ y_{G2} = \overline{BG}_2 \cos \frac{\pi}{4} = 8.488 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_x^{①} = A^{①} y_{G1} = 72000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{②} = A^{②} y_{G2} = 2666.7 \text{ cm}^3$$

$$S_x = S_x^{①} - S_x^{②} = 69333 \text{ cm}^3 \Rightarrow y_G = \frac{S_x}{A} = 33.24 \text{ cm}$$

$$S_y^{①} = A^{①} x_{G1} = 48000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{②} = A^{②} x_{G2} = 9899.7 \text{ cm}^3$$

$$S_y = S_y^{①} - S_y^{②} = 38100 \text{ cm}^3 \Rightarrow x_G = \frac{S_y}{A} = 18.27 \text{ cm}$$

$$J_{x'}^{(2)} = \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \right\} - A^{(2)} \overline{BG}_2^2 = 6145.2 \text{ cm}^4$$

$$J_{y'}^{(2)} = \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \right\} = 11416 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{(1)} = \frac{40 \times 60^3}{12} + A^{(1)} (y_G - y_{G1})^2 = 745190 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{(2)} = J_{x'}^{(2)} \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + J_{y'}^{(2)} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (y_G - y_{G2})^2 = 201250 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o} = J_{x_o}^{(1)} - J_{x_o}^{(2)} = 543940 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{(1)} = \frac{60 \times 40^3}{12} + A^{(1)} (x_G - x_{G1})^2 = 327210 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{(2)} = J_{x'}^{(2)} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + J_{y'}^{(2)} \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (x_G - x_{G2})^2 = 63898 \text{ cm}^4$$

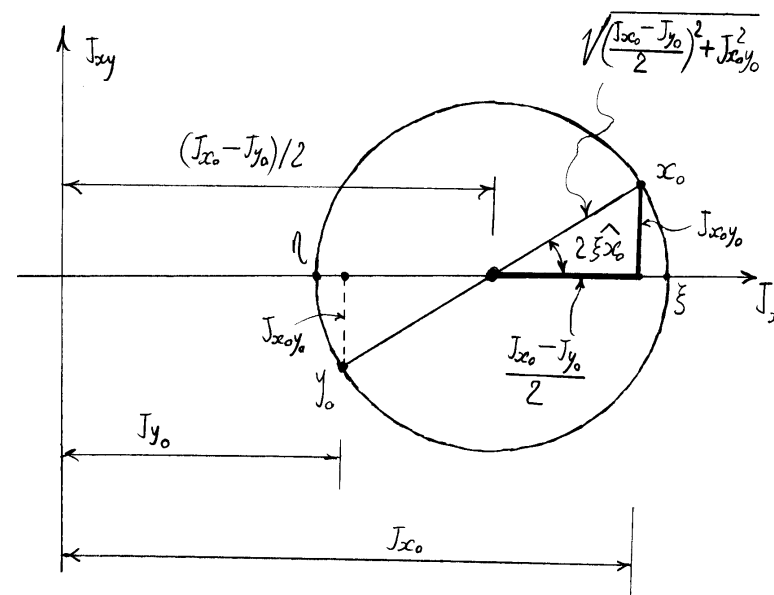
$$J_{y_o} = J_{y_o}^{(1)} - J_{y_o}^{(2)} = 263320 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{(1)} = A^{(1)} (x_G - x_{G1}) (y_G - y_{G1}) = -13482 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{(2)} = (J_{x'}^{(2)} - J_{y'}^{(2)}) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (x_G - x_{G2}) (y_G - y_{G2}) = -100360 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o} = J_{x_o y_o}^{(1)} - J_{x_o y_o}^{(2)} = 86880 \text{ cm}^4$$

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_o} - J_{y_o}}{2}\right)^2 + J_{x_o y_o}^2} = \begin{cases} 568660 \text{ cm}^4 \\ 238600 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



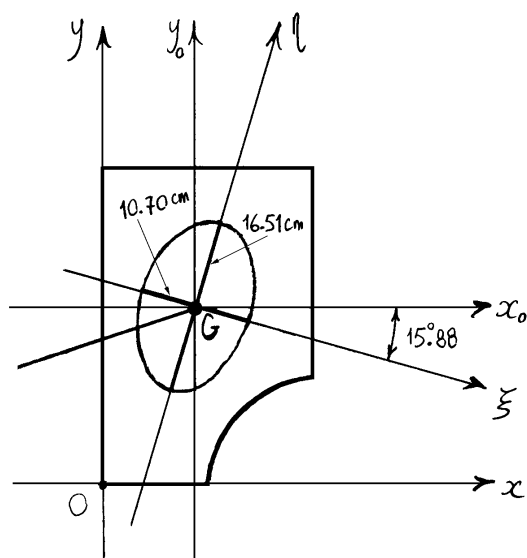
$$\tan(2\hat{\xi}_{x_o}) = \frac{J_{x_o y_o}}{(J_{x_o} - J_{y_o})/2} \Rightarrow \alpha_{\xi} = 15.88^\circ \text{ (orario)}$$

oppure :

$$\alpha_{\xi} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x_o} - J_{\xi}}{J_{x_o y_o}} \right\} = -15.88^\circ$$

$$I_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 16.51 \text{ cm}$$

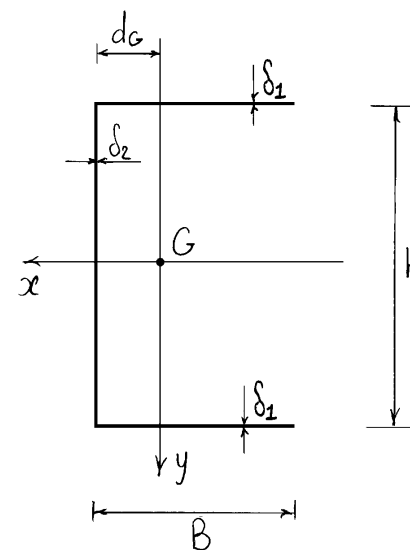
$$I_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 10.70 \text{ cm}$$



### 8.2.3 La sezione a C sottile

La sezione a C ha un asse di simmetria che contiene il baricentro ed è principale di inerzia.

La sezione risulta inoltre composta di tre rettangoli sottili. Si fa riferimento alla linea media della sezione sottile dove viene concentrato lo spessore.



$$A = 2\delta_1 B + \delta_2 H$$

Determinazione del baricentro ( $S_y = 0$ ):

$$H\delta_2 d_G - 2B\delta_1 \left( \frac{B}{2} - d_G \right) = 0 \implies$$

$$\Rightarrow d_G = \frac{\delta_1 B^2}{2\delta_1 B + H\delta_2}.$$

Momenti di inerzia:

$$J_x = \frac{\delta_2 H^3}{12} + 2(\delta_1 B)\left(\frac{H}{2}\right)^2,$$

$$J_y = 2\left\{\frac{\delta_1 B^3}{12} + (\delta_1 B)\left(\frac{B}{2} - d_G\right)^2\right\} + \delta_2 H d_G^2,$$

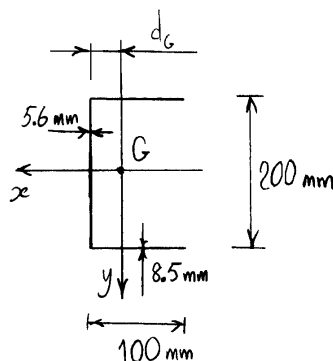
↓  
termine di trasporto

cioè:

$$J_x = \frac{\delta_1 B H^2}{2} + \frac{\delta_2 H^3}{12},$$

$$J_y = \frac{\delta_1 B^3}{6} + 2\delta_1 B\left(\frac{B}{2} - d_G\right)^2 + \delta_2 H d_G^2.$$

Per esempio:



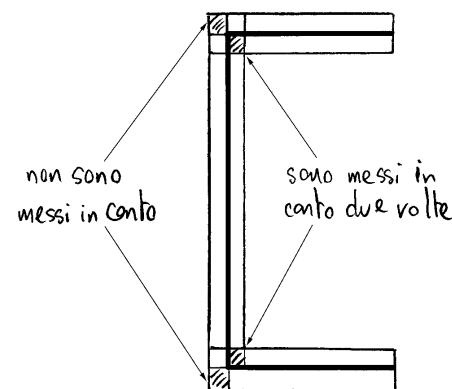
$$A = 2820 \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

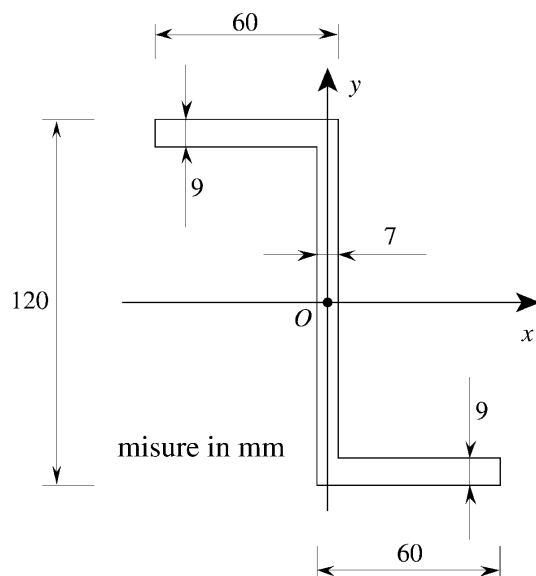
$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Si noti che l'approssimazione di sezione sottile ha condotto a tenere conto due volte di due rettangoli di dimensione  $\frac{\delta_1}{2} \times \frac{\delta_2}{2}$  e a non tenere conto di altri due rettangoli di uguali dimensioni. Inoltre nel calcolo dei momenti di inerzia si sono trascurati i momenti  $b\delta_1^3/12$  e  $H\delta_2^3/12$  relativi agli assi baricentrici dei singoli rettangoli, quantità che sono piccole rispetto ai termini di trasporto.

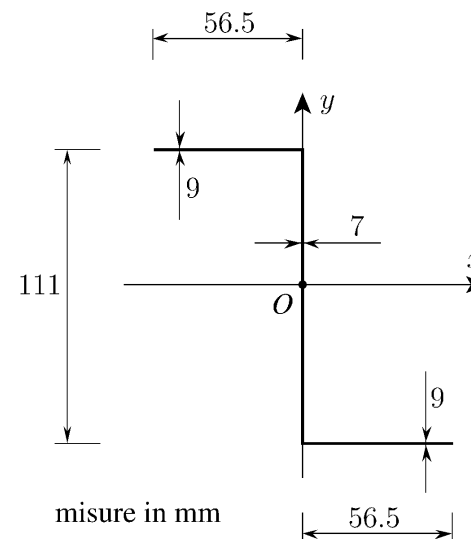


## 8.2.4 Sezione a Z



Si risolve la sezione concentrando lo spessore sulla linea media. La figura presenta una simmetria polare di polo O (invarianza per rotazioni di  $180^\circ$  attorno al punto O). Questa condizione è sufficiente per affermare che il baricentro coincide con il polo O, poiché il suo vettore dei momenti statici :

$$\underline{s}(O) = \int_A (\underline{P}-O) dA ,$$



è senz'altro nullo dato che ad ogni vettore posizione ( $\underline{P}-O$ ) ne corrisponde uno uguale ed opposto per la condizione di polar simmetria.

Quantità inerziali:

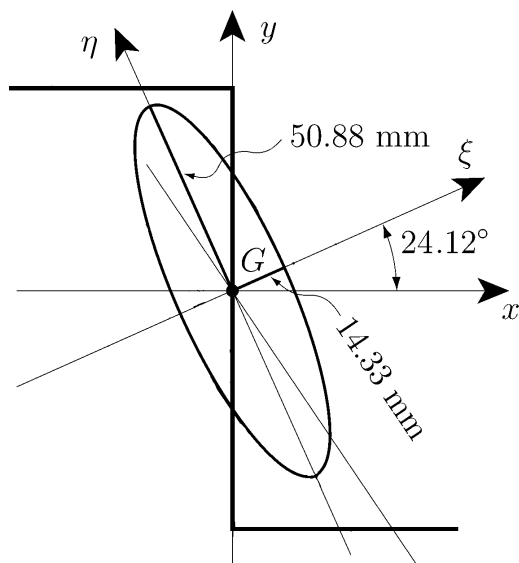
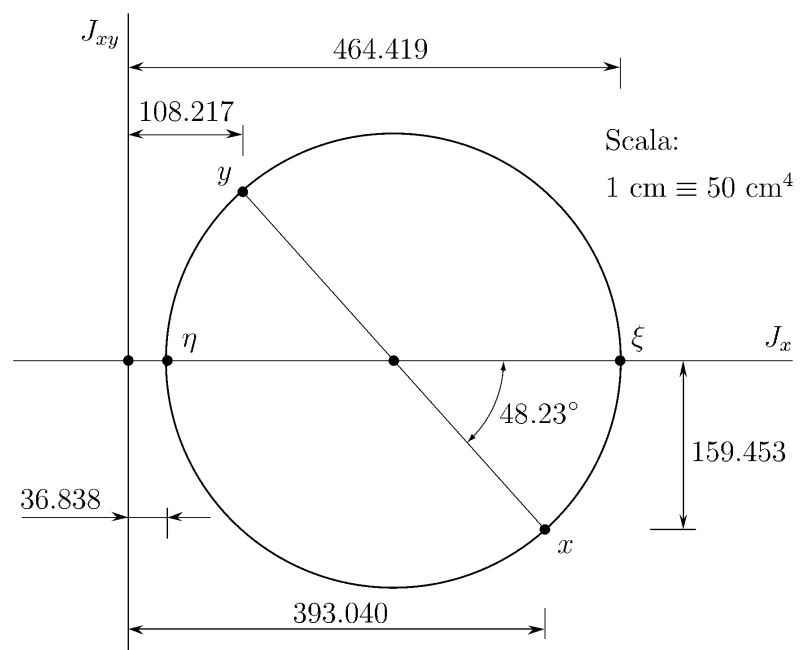
$$A = 17.94 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_\xi = 48^\circ.23 \\ \alpha_\xi = 24^\circ.12 \end{cases}$$





**Riferimenti bibliografici**

UNI EN 1992-1-1 (2005) Eurocodice 2 - Progettazione delle strutture in calcestruzzo. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici.

UNI EN 1993-1-1 (2005) Eurocodice 3 - Progettazione delle strutture di acciaio. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici.



# Indice analitico

carrello, 9  
centro  
    di pressione, 29n  
    di sollecitazione, 29  
curva  
    delle pressioni, 29  
doppio doppio pendolo, 9  
efficace  
    vincolo, 27  
equilibrato  
    sistema di travi, 28  
forze  
    poligono delle, 29  
grado  
    di iperstatico, 28  
    di labilità, 27  
inefficace  
    vincolo, 27  
iperstaticità  
    grado di, 28  
iperstatico  
    sistema di travi, 28  
    vincolo, 27  
isostatico  
    sistema di travi, 28  
labile

    sistema di travi, 28  
labilità  
    grado di, 27  
legami costitutivi, 66  
pendolo  
    doppio doppio, 9  
    improprio, 9  
    semplice, 9  
poligono  
    delle forze, 29  
pressione  
    centro di, 29n  
pressioni  
    curva delle, 29  
reazione del vincolo, 8  
sistema di travi  
    equilibrato, 28  
    iperstatico, 28  
    isostatico, 28  
    labile, 28  
    staticamente determinato, 28  
    staticamente indeterminato, 28  
snervamento caratteristico, 67n  
sollecitazione  
    centro di, 29  
staticamente determinato  
    sistema di travi, 28  
staticamente indeterminato  
    sistema di travi, 28

teoria tecnica delle travi, 65

trave

inflessa, 6

rigida, 5

vincolo di una, 8

travi

snelle, 4

teoria tecnica delle, 65

tozze, 4

vincolo, 8

di una trave, 8

efficace, 27

inefficace, 27

iperstatico, 27

reazione del, 8