

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE TERZA

Sollecitazioni semplici

Corsi di Laurea triennali in
Ingegneria Civile ed Ambientale curr. Ambientale, Civile, Edile
Ingegneria Industriale curr. Materiali, Meccanica
Ingegneria Navale

Trieste, 20 agosto 2007

Indice

1 Tensioni normali	3		
1.1 Distribuzione delle tensioni normali sulla sezione retta . . .	3		
1.2 Criteri di snervamento	5		
2 Forza normale centrata	7		
2.1 Condizioni di snervamento	7		
2.2 Sezione composta di più materiali	8		
2.3 Concentrazioni di sforzo	9		
2.4 Instabilità dell'equilibrio per inflessione laterale	11		
2.5 Verifica di sicurezza di aste metalliche snelle compresse . .	13		
2.5.1 Cenni al metodo omega	15		
2.5.2 Esercizio	15		
3 Flessione retta	19		
3.1 Condizioni di snervamento	20		
3.2 Esercizio su una trave IPE	21		
3.3 Sezione composta di più materiali	22		
3.3.1 Sezione rettangolare in cemento armato	23		
3.4 Cenni al calcolo a rottura	26		
4 Flessione deviata	29		
4.1 Formula binomia della flessione deviata	29		
4.2 Formule monomie della flessione deviata	32		
4.3 Esercizio (sezione rettangolare con un intaglio)	34		
5 Forza normale eccentrica	39		
5.1 Formula trinomia della tensione normale	39		
5.2 Asse neutro	40		
5.2.1 Significato cinematico	40		
5.2.2 Significato statico	41		
5.3 Antipolarità di inerzia	42		
5.3.1 Prime proprietà dell'antipolarità di inerzia	43		
		5.3.2 Teorema di reciprocità	43
		5.3.3 Polarità di inerzia	44
		5.4 Tensioni normali	45
		5.4.1 Diagramma delle tensioni normali nel caso omogeneo	45
		5.4.2 Formula binomia	46
		5.4.3 Formula monomia	47
		5.5 Esempio (sezione composta di due rettangoli)	48
		5.6 Nocciolo centrale di inerzia	52
		5.6.1 Contorno del nocciolo quale luogo di punti	52
		5.6.2 Contorno del nocciolo quale inviluppo di rette	53
		5.6.3 Corrispondenza tra vertici e segmenti	54
		5.6.4 Sezione rettangolare	55
		5.6.5 Convessità del nocciolo centrale di inerzia	57
		5.6.6 Sezione non reagente a trazione	58
		5.7 Sistema di masse-momenti statici	60
		5.7.1 Sezione rettangolare in cemento armato a doppia armatura	63
6 Tensioni tangenziali	66		
6.1 Formula di Jourawski binomia	67		
6.2 Formula di Jourawski monomia	70		
6.3 Criteri di snervamento	71		
6.4 Esempio (sezione a doppio T)	72		
7 Torsione	74		
7.1 La sezione circolare	74		
7.2 La sezione circolare cava	78		
7.2.1 Esempio (mensola di sezione circolare cava)	79		
7.3 La torsione nelle travi di sezione sottile chiusa	80		
7.3.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare) . .	82		
7.4 La torsione nelle travi di sezione sottile aperta	83		
7.4.1 La sezione rettangolare sottile	85		
7.4.2 La sezione sottile generica	87		
7.4.3 Esempio (sezione a C)	88		
8 Taglio	90		
8.1 Centro di taglio	90		
8.2 Il taglio nelle travi di sezione compatta simmetrica	91		
8.2.1 Sezione rettangolare	91		
8.2.2 Sezione circolare	92		
8.3 Il taglio nelle travi di sezione sottile aperta	95		

8.3.1	Andamento qualitativo del diagramma delle tensioni tangenziali su tratti rettilinei a spessore costante	98
8.3.2	Equilibrio in un nodo triplo	101
8.3.3	La sezione a doppio T	101
8.3.4	La sezione a L a lati uguali	103
8.3.5	La sezione a C	105
8.3.5.1	Taglio T_y passante per il centro di taglio . .	105
8.3.5.2	Centro di taglio	107
8.3.5.3	Taglio T_x passante per il centro di taglio . .	108
8.3.6	Sezione a Z	109
8.4	Il taglio nelle travi di sezione sottile chiusa simmetrica . . .	113
8.4.1	Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare) . .	115

Capitolo 1

Tensioni normali

1.1 Distribuzione delle tensioni normali sulla sezione retta

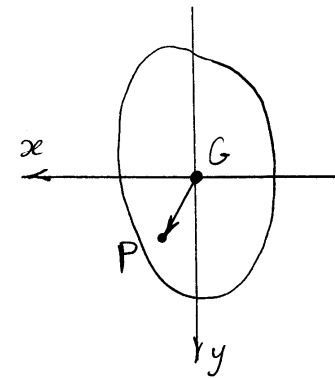
Si è visto a suo tempo che nelle ipotesi costitutive della trave inflessa la tensione normale σ_x che agisce sulla sezione retta soddisfa la seguente equazione vettoriale:

$$\sigma_x \underline{e}_x = E \varepsilon \underline{e}_x + E \underline{\kappa}_f \times (\underline{P} - \underline{G}), \quad (1)$$

dove $\underline{e}_x$ è il versore ortogonale alla sezione retta, ε è la dilatazione lineare della linea d'asse e $\underline{\kappa}_f$ è la curvatura flessionale.

Le equazioni costitutive relative a sforzo normale e momento flettente:

$$\varepsilon = \frac{N}{M}, \quad \underline{\kappa}_f = \underline{J}^{-1} \underline{M}_f, \quad (2)$$



trasformano la (1) nella:

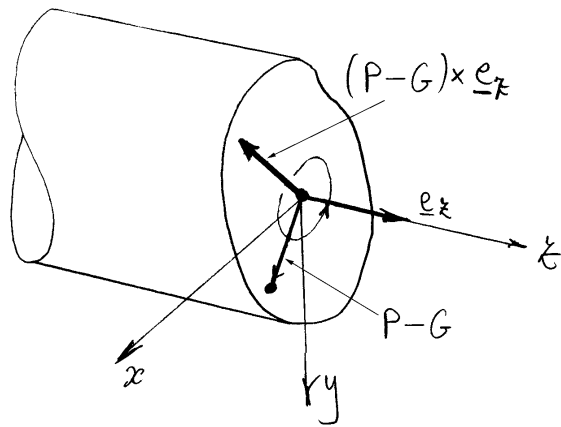
$$\sigma_x \underline{e}_x = E \frac{N}{M} \underline{e}_x + E (\underline{J}^{-1} \underline{M}_f) \times (\underline{P} - \underline{G}), \quad (3)$$

dove M è la massa totale, $\underline{J}$ il tensore di inerzia, N lo sforzo normale e $\underline{M}_f$ il momento flettente.

In forma scalare la (3) si scrive:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \frac{N}{M} + E \{ (\underline{J}^{-1} \underline{M}_f) \times (\underline{P} - \underline{G}) \} \cdot \underline{e}_x = \\ &= E \frac{N}{M} + E (\underline{J}^{-1} \underline{M}_f) \cdot \{ (\underline{P} - \underline{G}) \times \underline{e}_x \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Se si indica con $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ la rotazione di 90° in senso antiorario risulta:



$$(P-G) \times \underline{e}_z = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G), \quad (5)$$

e quindi la (4) diventa:

$$\sigma_z = E \frac{N}{M} + E (\underline{J}^{-1} \underline{M}_f) \cdot \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G). \quad (6)$$

Se la sezione è omogenea risulta:

$$M = EA, \quad \underline{J} = E \underline{J}_A, \quad (7)$$

dove A e $\underline{J}_A$ sono rispettivamente area totale e tensore d'inerzia della sola area, e la (6) diventa:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + (\underline{J}_A^{-1} \underline{M}_f) \cdot \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G). \quad (8)$$

In componenti nel riferimento principale Oxy risulta:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/J_x & 0 \\ 0 & 1/J_y \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\underline{M}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{J}^{-1} \underline{M}_f = \begin{Bmatrix} M_x/J_x \\ M_y/J_y \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

$$(P-G) = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G) = \begin{Bmatrix} y \\ -x \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

e quindi:

$$\underline{J}_A^{-1} \underline{M}_f \cdot \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G) = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x. \quad (12)$$

Sostituendo la (12) nella (6) si ha infine:

$$\sigma_z = E \frac{N}{M} + E \frac{M_x}{J_x} y - E \frac{M_y}{J_y} x. \quad (13)$$

Nel caso omogeneo la (13) prende il nome di formula di Navier e assume la forma:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x^A} y - \frac{M_y}{J_y^A} x, \quad (14)$$

dove ora J_x^A e J_y^A sono i momenti di inerzia della sola area (con distribuzione di massa $\mu = 1$).

Alla (13) si poteva arrivare più rapidamente tenendo conto che:

$$\underline{k}_p \times (P-G) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ k_x & k_y & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (k_x y - k_y x) \underline{e}_z. \quad (15)$$

La (2), assieme alla rappresentazione (10), inserita nella (15) e questa nella (1) fornisce la (13).

1.2 Criteri di snervamento

La distribuzione delle tensioni normali dedotta al paragrafo precedente dipende strettamente dall'assunzione di un legame costitutivo locale elastico lineare. È già stato detto a suo tempo come implementare altri tipi di legame costitutivo nell'ambito del modello della trave inflessa. Se si vogliono effettuare delle verifiche di resistenza agli stati limite ultimi può essere indispensabile mettere in conto lo sviluppo di deformazioni plastiche oppure di danneggiamenti del materiale. In tal caso occorre quindi valutare il livello di snervamento corrispondente al dato stato tensionale, livello a partire dal quale iniziano a svilupparsi le plasticizzazioni oppure i danneggiamenti del materiale. Se si assume un comportamento elastico lineare nella fase precedente lo snervamento del materiale, come è sempre lecito fare per es. nel caso di acciaio strutturale laminato a caldo, lo stato tensionale precedente il raggiungimento di tale limite è quello dedotto al paragrafo precedente.

Per quel che riguarda il limite di snervamento, si noti che sulla sezione retta della trave è presente la sola tensione normale. La tensione nell'intorno di un punto risulta quindi monoassiale, ovvero sia dello stesso tipo di quella che si ha in un provino soggetto a trazione o a compressione semplice. È allora naturale assumere che lo snervamento nell'intorno di un punto avvenga quando la tensione normale agente sulla sezione retta in corrispondenza del dato punto coincide con la tensione di snervamento. Se con σ_s^+ e σ_s^- si indicano i moduli della tensione di snervamento, rispettivamente a trazione e a compressione, lo snervamento viene quindi raggiunto quando la tensione normale σ soddisfa una delle due uguaglianze seguenti:

$$\sigma = \sigma_s^+, \quad \sigma = -\sigma_s^-, \quad (1)$$

mentre per la stretta appartenenza al dominio di elasticità si richiede che sia:

$$-\sigma_s^- < \sigma < \sigma_s^+. \quad (2)$$

Se il materiale presenta un uguale livello di snervamento σ_s a trazione e a compressione, come nel caso dei materiali metallici, è sufficiente confrontare con tale valore il modulo della tensione normale. Il criterio di snervamento e la stretta appartenenza al dominio di elasticità si esprimono quindi rispettivamente come segue:

$$|\sigma| = \sigma_s, \quad |\sigma| < \sigma_s. \quad (3)$$

La conoscenza del livello di snervamento del materiale e dello stato tensionale dedotto nell'ipotesi di materiale indefinitamente elastico, con la sola aggiunta di un “opportuno” coefficiente di sicurezza, permette anche di effettuare in modo molto semplice una verifica di resistenza alle tensioni ammissibili. Basta a tale scopo sfruttare la condizione (2) di appartenenza al dominio di elasticità, e richiedere quindi che la tensione normale σ soddisfi la condizione:

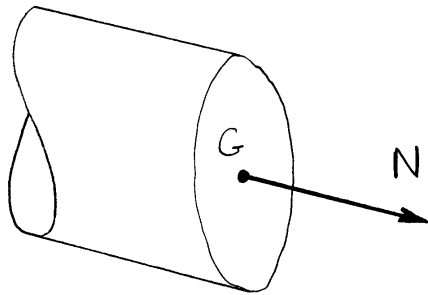
$$\frac{-\sigma_s^-}{\gamma} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_s^+}{\gamma}, \quad (4)$$

dove γ è un coefficiente di sicurezza maggiore dell'unità. È opportuno a questo punto ricordare che la semplicità della verifica (4) è figlia delle stesse ragioni che hanno reso obsoleto il metodo di verifica alle tensioni ammissibili.

Capitolo 2

Forza normale centrata

Si dice che una sezione è soggetta ad una forza normale centrata se l'unica caratteristica della sollecitazione che agisce nella sezione è la forza normale, avendo scelto quale polo di riduzione il baricentro.



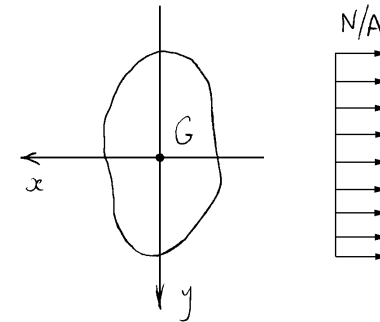
Nel caso di sezione omogenea, in virtù della formula di Navier, la tensione normale è costante sulla sezione:

$$\sigma_x = \frac{N}{A},$$

e rappresenta dunque la più semplice distribuzione di

tensioni sulla sezione retta.

Se la forza normale è positiva è detta di trazione, se negativa di compressione.



2.1 Condizioni di snervamento

La situazione statica è quella che si ha in un provino soggetto a trazione o a compressione semplice. Per tale motivo occorre quindi confrontare direttamente la tensione normale agente sulla sezione con quella di snervamento (tensione al limite di elasticità, effettiva o convenzionale).

Se il materiale presenta un diverso livello di snervamento a trazione e a compressione, a seconda che N

sia di trazione oppure di compressione occorre confrontarsi con la corrispondente tensione di snervamento, a trazione oppure a compressione. Le condizioni di appartenenza al dominio di elasticità risultano quindi:

$$\frac{N}{A} \leq \sigma_s^+ \quad \text{se} \quad N > 0,$$

$$\frac{N}{A} \geq -\sigma_s^- \quad \text{se} \quad N < 0,$$

dove σ_s^+ e σ_s^- sono le tensioni di snervamento a trazione e a compressione rispettivamente.

2.2 Sezione composta di più materiali

Se la sezione è composta di più materiali, la tensione normale nel materiale i -esimo vale:

$$\sigma_i = E_i \frac{N}{M},$$

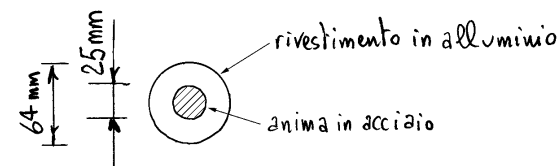
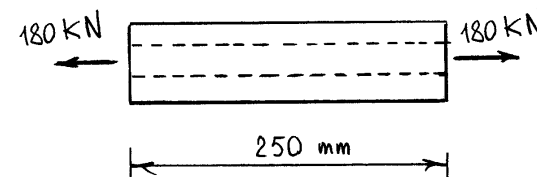
dove E_i è il modulo di Young dell' i -esimo materiale e la massa totale vale:

$$M = \sum_i E_i A_i,$$

dove A_i è l'area dell' i -esimo materiale.

Naturalmente, la condizione di snervamento va imposta per ogni materiale relativamente alla sua tensione di snervamento.

Come esempio, si consideri una barretta circolare



costituita da un'anima in acciaio e da un rivestimento in alluminio, di moduli di Young rispettivamente:

$$\begin{cases} E_{ac} = 210 \text{ GPa} = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ E_{al} = 70 \text{ GPa} = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2 \end{cases}.$$

Risulta :

$$\begin{cases} A_{ac} = \frac{\pi}{4} (25 \text{ mm})^2 = 491 \text{ mm}^2 \\ A_{al} = \frac{\pi}{4} (64 \text{ mm})^2 - A_{ac} = 2726 \text{ mm}^2 \end{cases},$$

e quindi :

$$M = E_{ac} A_{ac} + E_{al} A_{al} = 2.94 \times 10^8 \text{ N}.$$

Le tensioni normali σ_{ac} nell'acciaio e σ_{al} nell'alluminio valgono allora :

$$\begin{cases} \sigma_{ac} = E_{ac} \frac{N}{M} = 129 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{al} = E_{al} \frac{N}{M} = 42.9 \text{ N/mm}^2 \end{cases},$$

e le quote N_{ac} e N_{al} di forza normale assorbite rispettivamente dall'area di acciaio e da quella di alluminio valgono infine :

$$N_{ac} = \sigma_{ac} A_{ac} = 63131 \text{ N},$$

e

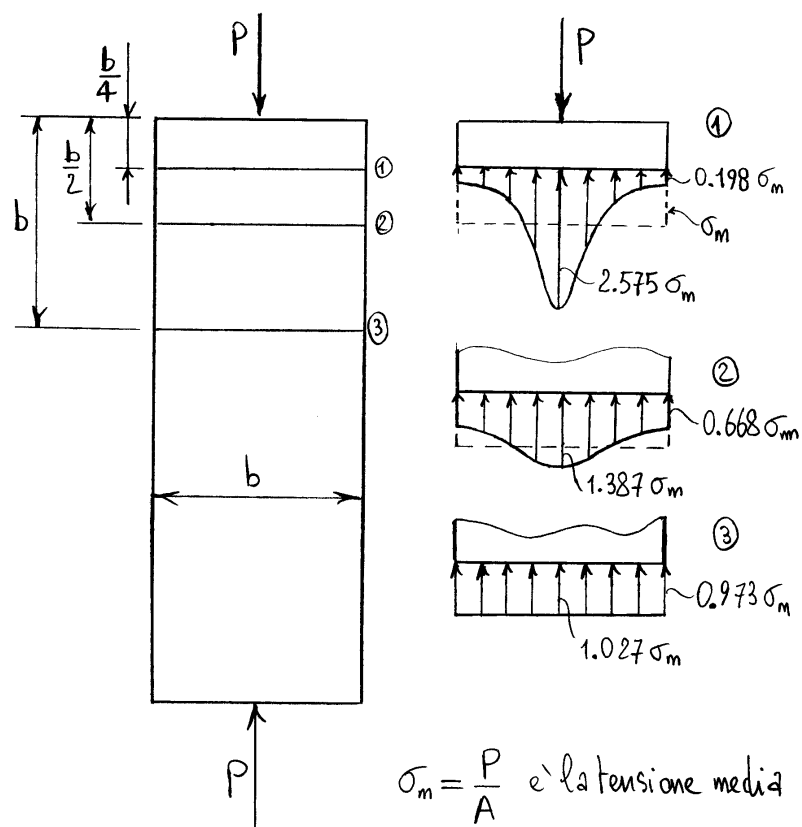
$$N_{al} = \sigma_{al} A_{al} = 116869 \text{ N}.$$

Si noti che a seguito della maggior rigidità, ovvero sia del modulo di Young più elevato, l'alluminio in acciaio assorbe una quota di carico più che proporzionale rispetto all'area.

2.3 Concentrazioni di sforzo

Gli sforzi vicino ai punti di applicazione di carichi concentrati possono superare anche di molto lo sforzo medio. Stessa cosa succede quando un elemento strutturale contiene una discontinuità, come un foro oppure una brusca variazione di sezione. Spesso sono proprio le concentrazioni di sforzo che innescano la propagazione di una frattura.

Per quel che riguarda i carichi concentrati, prendiamo quale esempio una lastra di larghezza b e soggetta ad una estremità ad un carico concentrato. Nella figura seguente sono illustrati gli andamenti degli sforzi agenti in tre sezioni poste a distanze crescenti dal punto di applicazione del carico concentrato, an=



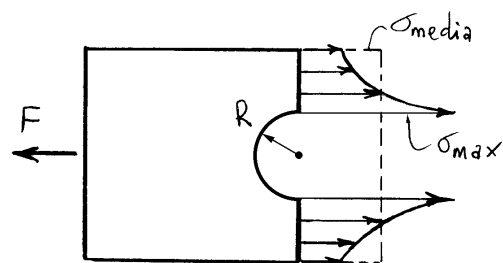
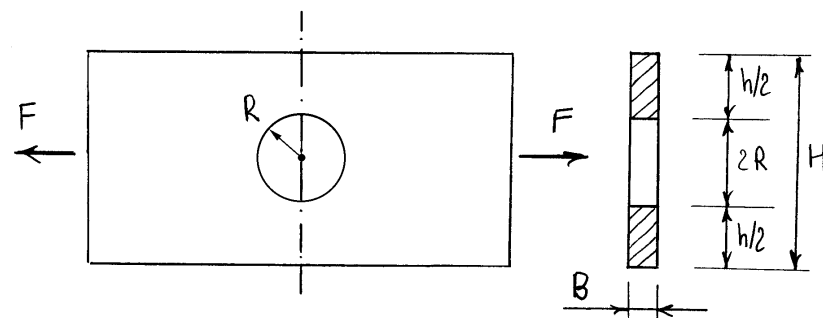
damenti dedotti nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità e confermati qualitativamente dall'analisi fotoelastica condotta su provini di materiale apposito. L'andamento tensionale illustrato è in accordo con il principio di Saint Venant:

"la distribuzione degli sforzi conseguente alla applicazione di carichi staticamente equivalenti è praticamente indipendente dalle effettive modalità di applicazione del carico, ad eccezione delle immediate vicinanze della zona di applicazione del carico."

E' la validità di tale principio che consente di fondare una teoria della trave sulle caratteristiche della sollecitazione.

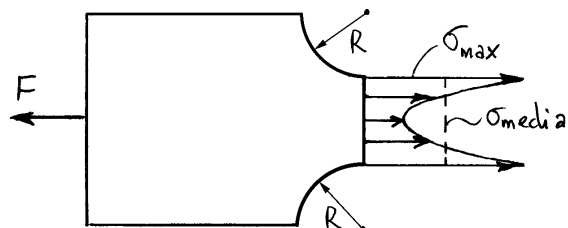
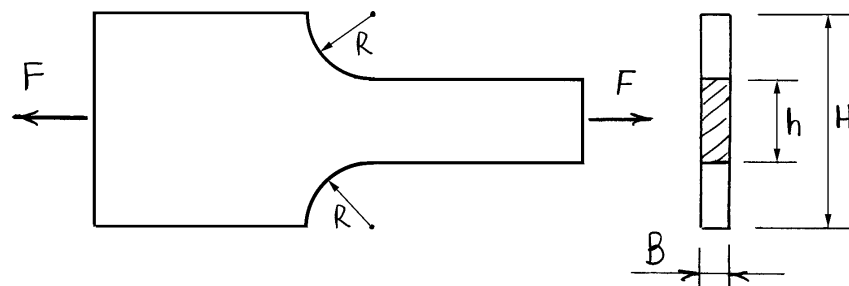
Nelle figure seguenti sono invece riportati gli andamenti tensionali in corrispondenza di un foro in una lastra e di una brusca variazione di sezione rispettivamente, dovuti all'applicazione di una forza normale centrata.

Per trattare questi casi di concentrazione di sforzo si



$$A = B h$$

$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$



$$A = B h$$

$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$

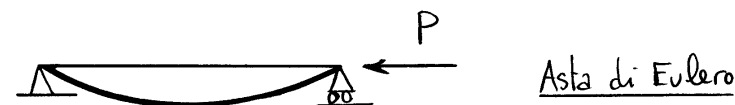
introduce il concetto di fattore di concentrazione degli sforzi:

$$S = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{media}},$$

che si ritrova tabellato in manuali o in testi sull'argomento.

2.4 Instabilità dell'equilibrio per inflessione laterale

E' esperienza comune che un'asta flessibile compressa subisce un'inflessione laterale. Questa inflessione compare fin dall'inizio dell'applicazione del carico e aumenta all'aumentare del carico.

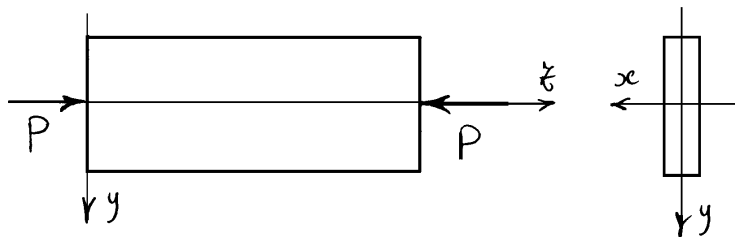


Asta di Eulero

Dal punto di vista teorico, se l'asta fosse perfettamente rettilinea e il carico perfettamente centrato sul baricentro della sezione, l'inflessione laterale inizia ad un livello

del carico P_{cr} detto carico critico euleriano. Il fatto che nella realtà l'inflessione inizi fin dalla prima applicazione del carico è giustificato dalle inevitabili imperfezioni.

L'inflessione laterale avviene in un piano principale di inerzia, e, se non ci sono impedimenti, avviene nel piano principale di minima resistenza flessionale, ovvero nel piano ortogonale all'asse di minimo momento di inerzia. Detto J il minimo momento di inerzia, se l'asta può inflettersi in uno qualunque dei piani principali, oppure il momento di inerzia relativo all'asse ortogonale al piano nel quale è consentito all'asta di inflettersi, il carico critico euleriano può



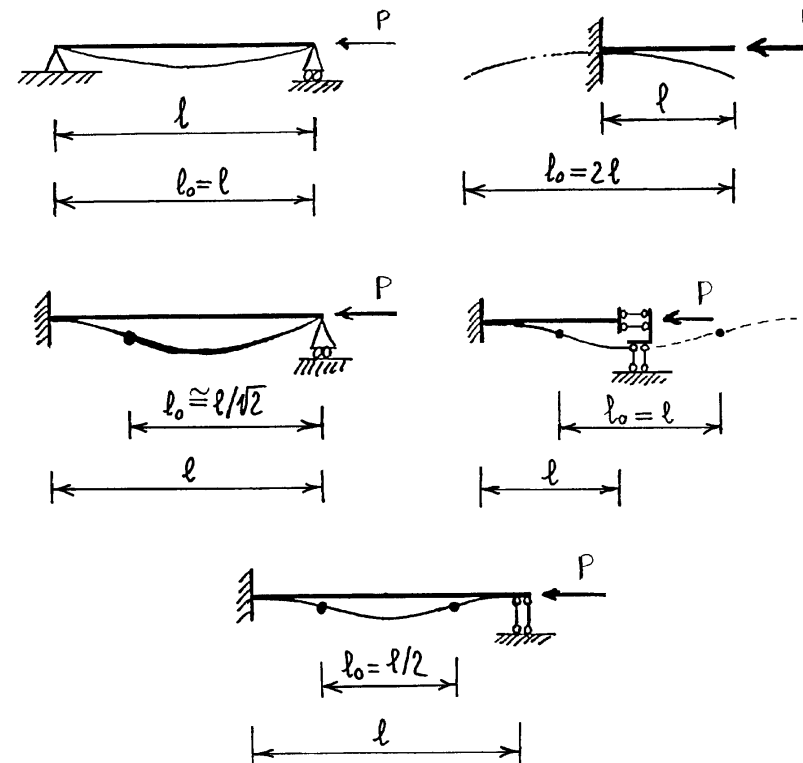
$J = J_y$ se può inflettersi in un piano qualunque

$J = J_x$ se può inflettersi nel solo piano $y-z$

essere messo nella forma :

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E J}{l_0^2},$$

dove l_0 è la luce libera di inflessione, ovvero la distanza tra due flessi consecutivi nella deformata critica. Il valore della luce libera di inflessione dipende dai vincoli, come illustrato negli schemi seguenti.



Più la luce libera di inflessione è grande e il momento di inerzia piccolo, più la trave tende a inflettersi. Per tale motivo il rapporto:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} ,$$

dove $\rho = \sqrt{J/A}$ è il raggio di inerzia, viene detto snellezza.

Il carico critico euleriano vale nell'ipotesi di elasticità lineare. Si può allora definire la snellezza limite λ_0 quale snellezza di un'asta il cui carico critico provoca nelle sezioni rette una tensione normale al limite di proporzionalità.

La condizione determinatrice della snellezza limite si scrive:

$$\frac{P_{cr}}{A} = \sigma_0 ,$$

dove σ_0 è la tensione al limite di proporzionalità.

Poiché:

$$\frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{E J}{A l_0^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} ,$$

si ottiene:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} .$$

2.5 Verifica di sicurezza di aste metalliche snelle compresse

Siano N_b il carico assiale massimo sopportabile da un'asta compressa e σ_b la corrispondente tensione normale, dove il pedice "b" è l'iniziale del termine inglese "buckling" che significa instabilità. La verifica di resistenza nei confronti della instabilità per flessione laterale richiede allora:

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_b}{\gamma} ,$$

dove N è la forza normale di progetto e γ un opportuno coefficiente di sicurezza. I carichi assiali massimi sono stati determinati da ricerche sperimentali. Per via delle inevitabili imperfezioni, il carico massimo sperimentale

risulta inferiore al carico critico euleriano.

I risultati della sperimentazione sono riportati nella normativa internazionale, tra cui quella italiana, e in particolare nella parte 1-1 "Regole generali e regole per gli edifici" dell'eurocodice 3 "UNI EN 1993 (2005) Progettazione delle strutture di acciaio", in termini del rapporto χ tra la tensione normale massima σ_b e la tensione di snervamento f_y (il simbolo f_y per tensione di snervamento è quello attualmente utilizzato dalla normativa):

$$\chi = \frac{\sigma_b}{f_y}.$$

Con tale definizione la verifica di sicurezza diviene:

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\chi f_y}{\gamma}.$$

I valori del rapporto χ vengono fatti dipendere dalla forma geometrica della sezione e da una variabile adimensionale $\bar{\lambda}$. Escluso il caso di sezioni di classe 4 (cioè di quelle sezioni in cui avviene una instabilità locale per imbozzamento prima che la sezione stessa inizi a plasticizzarsi), la variabile $\bar{\lambda}$ è definita dal rapporto:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1},$$

tra la snellezza dell'asta λ e la snellezza convenzionale

di proporzionalità λ_1 , calcolata utilizzando la tensione di snervamento f_y (che nel caso di acciaio per carpenteria metallica coincide praticamente con la tensione al limite di proporzionalità):

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}.$$

Ai vari tipi di sezione vengono fatte corrispondere, tramite un opportuno coefficiente numerico α , delle opportune curve di instabilità, cioè delle curve del tipo $\chi(\bar{\lambda})$:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}},$$

dove:

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \alpha \left(\bar{\lambda} - \frac{1}{5} \right) + \bar{\lambda}^2 \right\}.$$

Le curve di instabilità sono 5:

curva	a0	a	b	c	d
α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

Si noti che il rapporto $\gamma_i = \sigma_{cr}/\sigma_b$ tra tensione critica euleriana e tensione massima sperimentale può essere interpretato come un coefficiente di sicurezza, richiesto dalle inevitabili imperfezioni, rispetto al valore ideale σ_{cr} .

2.5.1 Cenni al metodo omega

Il metodo omega non è altro che la precedente verifica di sicurezza di aste metalliche snelle compresse, però rivista in modo tale da essere applicabile in un contesto di verifica di sicurezza alle tensioni ammissibili.

Posto :

$$\omega = \frac{1}{\chi} = \frac{f_y}{\sigma_b} ,$$

la verifica di sicurezza impone :

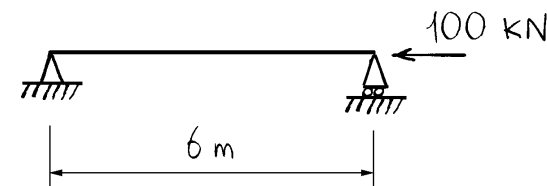
$$\omega \frac{N}{A} \leq \frac{f_y}{\gamma} = \sigma_{adm} ,$$

dove σ_{adm} indica la tensione ammissibile.

2.5.2 Esercizio

Eseguire la verifica di una trave composta da due profilati UPN 120, accoppiati in modo da avere i due momenti principali coincidenti, di lunghezza 6 m, incernierata alle estremità e soggetta ad un carico normale di compressione pari a 100 kN.

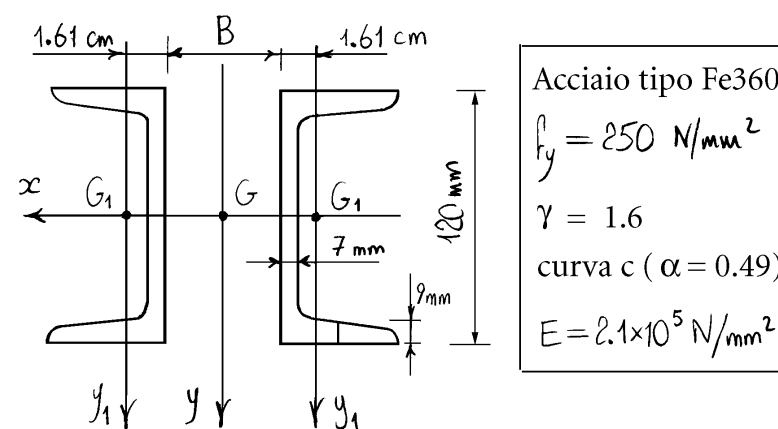
I profilati UPN sono di sezione sottile a C, che è la stessa cosa di una sezione sottile a U, da cui la iniziale della sigla UPN.



Il resto della sigla sta per profilo normale.

I dati inerziali relativi al singolo profilo, tratti dalle apposite tabelle riguardanti i profilati tipo UPN, sono:

$$\begin{cases} J_x = 364 \text{ cm}^4 \\ J_{y_1} = 43.1 \text{ cm}^4 \\ A = 17 \text{ cm}^2 \end{cases} .$$



Si ottengono quindi i dati dovuti ai due profilati accoppiati in funzione della distanza B tra gli estradossi.

delle due anime:

$$\begin{cases} J_x = 364 \text{ cm}^4 \times 2 = 728 \text{ cm}^4 \\ J_y = 2 \times \left\{ 43.1 \text{ cm}^4 + 17 \text{ cm}^2 \times \left(\frac{B}{2} + 1.61 \text{ cm} \right)^2 \right\} \\ A = 2 \times 17 \text{ cm}^2 = 34 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Volendo che sia $J_y = J_x = 728 \text{ cm}^4$ deve risultare:

$$2 \times \left\{ 43.1 \text{ cm}^4 + 17 \text{ cm}^2 \times \left(\frac{B}{2} + 1.61 \text{ cm} \right)^2 \right\} = 728 \text{ cm}^4,$$

e quindi:

$$\begin{cases} B = 2 \times \left(-1.61 \text{ cm} + \sqrt{\frac{364 \text{ cm}^4 - 43.1 \text{ cm}^4}{17 \text{ cm}^2}} \right) = 5.47 \text{ cm}, \\ J_y = 728 \text{ cm}^4. \end{cases}$$

L'ellisse centrale d'inertia si riduce ad una circonferenza. Il raggio di inertia, costante, vale:

$$I = \sqrt{\frac{728 \text{ cm}^4}{34 \text{ cm}^2}} = 4.63 \text{ cm}.$$

La luce libera di inflessione coincide con la luce della trave e quindi la snellezza vale:

$$\lambda = \frac{600 \text{ cm}}{4.63 \text{ cm}} = 130.$$

Si ottiene poi:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2}{250 \text{ N/mm}^2}} = 91.0520,$$

$$\bar{\lambda} = \frac{130}{91.0520} = 1.4241,$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + 0.49 \left(1.4241 - \frac{1}{5} \right) + 1.4241^2 \right\} = 1.8139,$$

$$\chi = \frac{1}{1.8139 + \sqrt{1.8139^2 - 1.4241^2}} = 0.3404.$$

Risulta quindi:

$$\frac{N}{A} = \frac{100000 \text{ N}}{3400 \text{ mm}^2} = 29.41 \text{ N/mm}^2.$$

$$\frac{\chi f_y}{\gamma} = \frac{0.3404 \times 250 \text{ N/mm}^2}{1.6} = 53.1932 \text{ N/mm}^2,$$

e la verifica è di conseguenza soddisfatta.

Il carico critico euleriano vale:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E J_x}{l^2} = \pi^2 \frac{2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \times 7.28 \times 10^6 \text{ mm}^4}{6^2 \times 10^6 \text{ mm}^2} =$$

$$= 419\,100 \text{ N} = 419.1 \text{ kN} ,$$

e quindi :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = 123.3 \text{ N/mm}^2 .$$

La tensione massima σ_b vale invece :

$$\sigma_b = \chi f_y = 0.3404 \times 250 \text{ N/mm}^2 = 85.1091 \text{ N/mm}^2 ,$$

e dunque il coefficiente di sicurezza rispetto alla σ_{cr} vale:

$$\gamma_i = \sigma_{cr} / \sigma_b = 1.45 .$$

Lo sforzo normale massimo a cui è assoggettabile l'asta risulta poi:

$$N_{max} = \frac{\chi f_y}{\gamma} A =$$

$$= 53.1932 \text{ N/mm}^2 \times 3400 \text{ mm}^2 = 180\,860 \text{ N} .$$

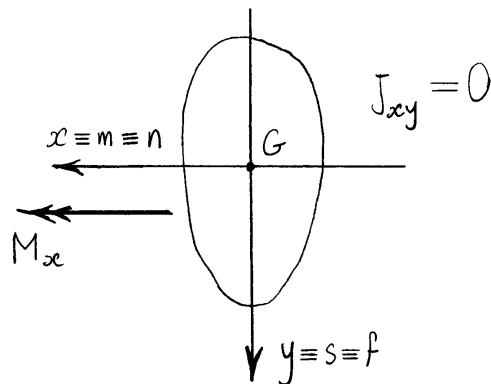
Infine, il coefficiente di sicurezza relativo al carico euleriano vale :

$$P_{cr} / N_{max} = \sigma_{cr} / \sigma_{max} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_b} \frac{\sigma_b}{\sigma_{max}} = \gamma_i \gamma = 2.32 .$$

Capitolo 3

Flessione retta

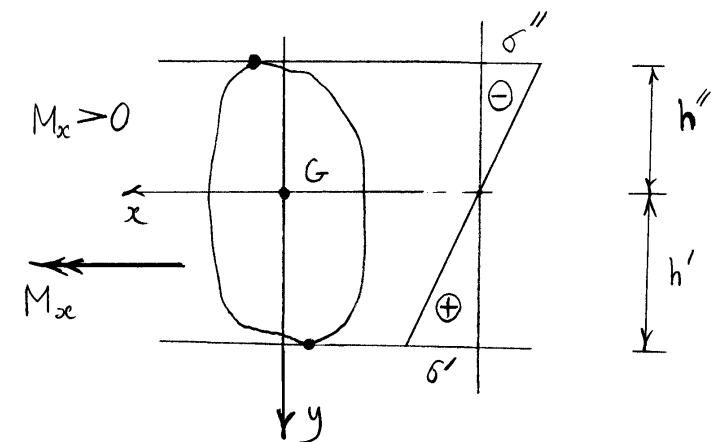
Si dice che una sezione è soggetta a flessione retta se l'unica caratteristica della sollecitazione che agisce nella sezione è un momento flettente di asse momento agente lungo una direzione principale di inerzia. Questo significa che un asse principale coincide con l'asse momento mentre l'altro coincide con l'asse di sollecitazione e di conseguenza l'asse momento coincide con l'asse neutro e l'asse di sollecitazione con l'asse di flessione.



Nel caso di sezione omogenea, applicando la formula di Navier, si ottiene:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y,$$

nel caso l'asse momento coincida con l'asse x e relativamente al sistema principale Gxy . L'andamento delle tensioni normali è lineare e queste si annullano sull'asse x . Se $M_x > 0$ le tensioni normali sono positive per $y > 0$ e negative per $y < 0$, viceversa se $M_x < 0$. Inevitabilmente ci saranno delle tensioni positive e delle tensioni negative. In corrispondenza dei



punti più lontani dall'asse x si avranno le massime tensioni (in modulo). Se h' e h'' indicano tali distanze nella direzione delle y positive e negative rispettivamente le corrispondenti tensioni, in modulo, valgono:

$$\sigma' = \frac{|M_x|}{J_x} h' = \frac{|M_x|}{W_x'},$$

$$\sigma'' = \frac{|M_x|}{J_x} h'' = \frac{|M_x|}{W_x''},$$

dove :

$$W_x' = \frac{J_x}{h'}, \quad W_x'' = \frac{J_x}{h''},$$

sono detti moduli di resistenza della sezione.

Si osservi che la dimensione di un modulo di resistenza, nell'attuale contesto di sezioni omogenee, è di una lunghezza al cubo (L^3).

3.1 Condizioni di snervamento

La condizione di appartenenza al dominio di elasticità richiede che le massime tensioni a trazione e a compressione non superino, in modulo, le corrispondenti tensioni di snervamento:

$$\begin{cases} \frac{M_x}{W_x'} \leq \sigma_s^+ \text{ e } \frac{M_x}{W_x''} \leq \sigma_s^- & \text{se } M_x > 0 \\ -\frac{M_x}{W_x''} \leq \sigma_s^+ \text{ e } -\frac{M_x}{W_x'} \leq \sigma_s^- & \text{se } M_x < 0 \end{cases}.$$

Se il materiale presenta lo stesso livello di snervamento a trazione e compressione si confronterà semplicemente la massima tensione in modulo con la tensione di snervamento:

$$\max \left\{ \frac{|M_x|}{W_x'}, \frac{|M_x|}{W_x''} \right\} \leq \sigma_s.$$

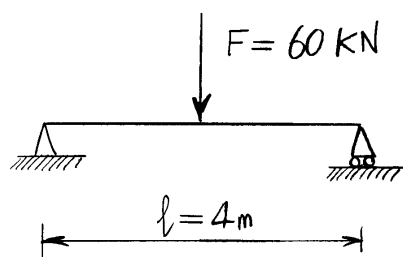
Se poi la sezione è simmetrica rispetto all'asse x , ovvero se $W_x' = W_x'' = W_x$, le tensioni massime a trazione e compressione sono uguali in modulo

e occorre richiedere che:

$$\frac{|M_x|}{W_x} \leq \sigma_s.$$

3.2 Esercizio su una trave IPE

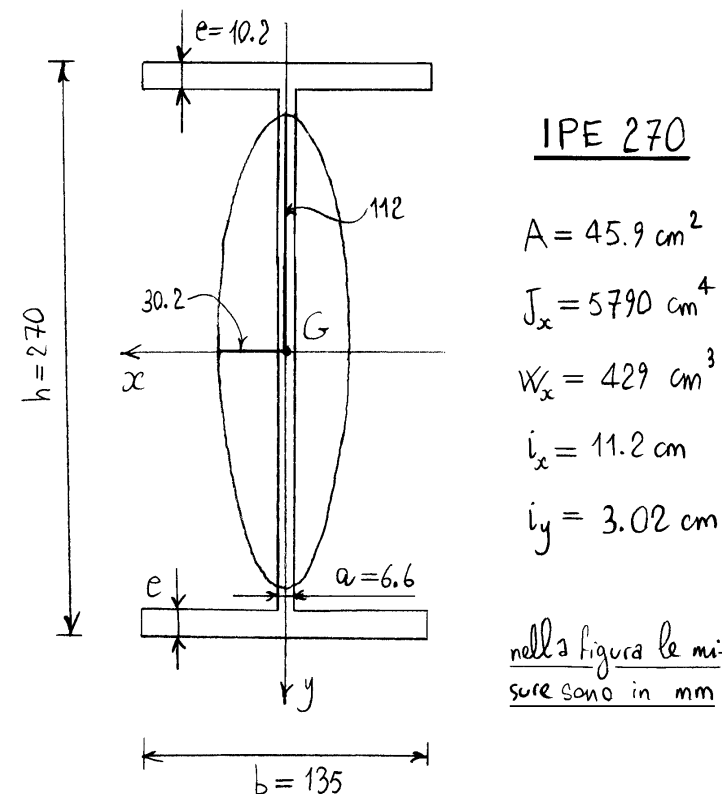
Sia data una trave appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico concentrato in mezzera di 60 kN.



La trave sia realizzata per il tramite di un profilato commerciale in acciaio tipo IPE 270. I profilati IPE sono di sezione sottile a doppio T allungata, cioè di altezza prevalente rispetto alla base, e sono adatti ad assorbire le sollecitazioni dovute ad un momento flettente.

Una sezione sottile a doppio T è la stessa cosa di una sezione sottile a I, il che spiega la iniziale della sigla IPE. Il resto della sigla sta per profilo europeo.

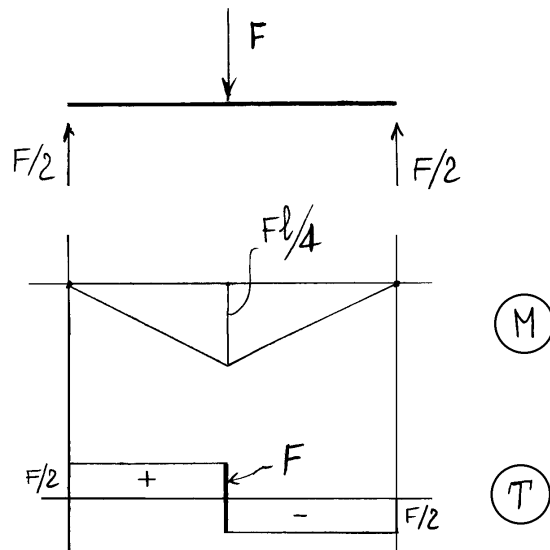
Le misure riportate nella figura seguente sono tratte dalle apposite tabelle riguardanti i profilati tipo IPE. In tali tabelle è consuetudine indicare i raggi di inerzia con il simbolo i .



nella figura le misure sono in mm

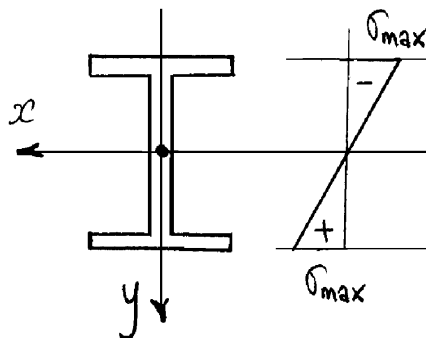
Il massimo momento flettente agisce nella sezione di mezzera e vale:

$$M_{\max} = \frac{F l}{4} = \frac{60 \text{ kN} \times 4 \text{ m}}{4} = 60 \text{ kN m}.$$



La massima tensione normale vale quindi:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} \\ &= \frac{60 \times 10^6 \text{ N/mm}}{429 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 140 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$



3.3 Sezione composta di più materiali

Se la sezione è composta di più materiali, la tensione normale nell' i -esimo materiale vale:

$$\sigma_x = E_i \frac{M_x}{J_x} y,$$

essendo E_i variabile da materiale a materiale e J_x , di dimensione FL^2 , vale:

$$J_x = \sum_i E_i J_{xi},$$

dove il contributo J_{xi} dell'area A_i dell' i -esimo materiale è calcolato a meno della massa:

$$J_{xi} = \int_{A_i} y^2 dA.$$

In alternativa è possibile omogeneizzare l'area rispetto a uno dei materiali, per esempio il primo di modulo di Young E_1 .

Si definiscono allora i coefficienti di omogeneizzazione n_i degli altri materiali:

$$n_i = \frac{E_i}{E_1},$$

l'area omogeneizzata A^* :

$$A^* = A_1 + \sum_i n_i A_i,$$

e il momento di inerzia omogeneizzato J_x^* :

$$J_x^* = J_{x1} + \sum_i n_i J_{xi},$$

dove le somme sono estese agli altri materiali.

Con queste definizioni, il momento di inerzia della sezione vale:

$$J_x = E_1 J_x^*.$$

In un punto di coordinata y appartenente all'area A_1 del materiale rispetto al quale è fatta l'omogeneizzazione la tensione normale vale allora:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x^*} y,$$

mentre in un punto di coordinata y appartenente all'area A_i dell' i -esimo materiale si ha:

$$\sigma_x = n_i \frac{M_x}{J_x^*} y.$$

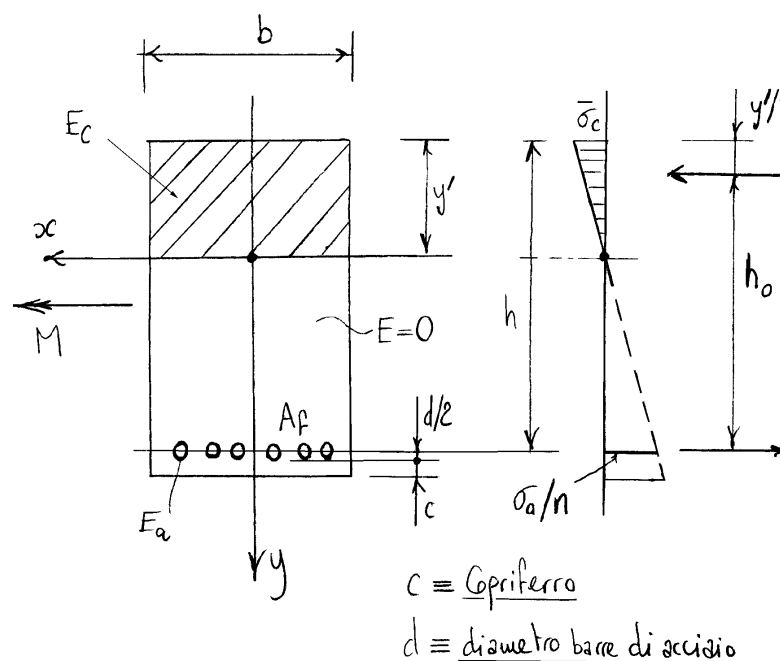
3.3.1 Sezione rettangolare in cemento armato

Come esempio di sezione composta di più materiali, si considera una sezione rettangolare in cemento armato a semplice armatura.

Per il calcolo degli spostamenti, e quindi anche delle incognite iperstatiche, una struttura in cemento armato è equiparata ad una struttura omogenea resistente anche a trazione e con modulo di Young pari al modulo del calcestruzzo. Le barre di armatura, assorbendo le tensioni di trazione che il calcestruzzo non è in grado di assorbire e limitando od eliminando, in tal modo, lo sviluppo delle fessurazioni, assicurano tale comportamento.

Il discorso cambia quando si voglia verificare, oppure progettare, una struttura in cemento armato.

In tal caso non si può prescindere dalla presenza delle armature e dallo sviluppo di eventuali fessurazioni. Il modo più semplice per tenere conto della scarsa resistenza a trazione del calcestruzzo, ai fini della verifica di resistenza, è quello di trascurarla del tutto. Si fa allora riferimento ad un modello deformativo nel quale la sezione retta reagisce solo in corrispondenza delle fibre compresse del calcestruzzo e non di quelle tese. Ne risulta che l'asse neutro divide in due zone la sezione retta, ad una delle quali compete il modulo E_c del calcestruzzo mentre all'altra compete il modulo nullo ($E=0$). All'area di armatura, che può considerarsi concentrata nei baricentri delle singole barre, compete il modulo E_a dell'acciaio. La posizione y'



dell'asse neutro risulta un'incognita del problema. Naturalmente si suppone la perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo e, in accordo con le assunzioni cinematiche fatte, che le sezioni restino piane. Il momento statico rispetto all'asse neutro vale:

$$S_x = -E_c \frac{b y'^2}{2} + E_a A_f (h - y').$$

Nella flessione retta l'asse neutro deve essere baricentrico. Imponendo tale condizione si ottiene un'equazione di secondo grado in y' :

$$S_x = 0 \Rightarrow y'^2 + 2 \frac{n A_f}{b} y' - 2 \frac{n A_f}{b} h = 0,$$

dove $n = E_a/E_c$ è il coefficiente di omogeneizzazione dell'acciaio rispetto al calcestruzzo e h è l'altezza utile della sezione, cioè la distanza del baricentro delle barre di armatura dal lembo superiore del calcestruzzo compresso. Delle due soluzioni dell'equazione di secondo grado l'una, negativa, è priva di significato per il nostro problema mentre l'altra, positiva, vale:

$$y' = \frac{n A_f}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b h}{n A_f}} \right\}.$$

Se con J_x si indica il momento di inerzia omogeneizzato all'area di calcestruzzo:

$$J_x = \frac{b y'^3}{3} + n A_f (h - y')^2,$$

la distribuzione della tensione normale nella sezione retta vale:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y, \quad (y < 0),$$

in corrispondenza del calcestruzzo compresso,

$$\sigma = \sigma_a = n \frac{M}{J_x} (h - y'),$$

in corrispondenza delle barre di armatura, ed infine è nulla in corrispondenza del calcestruzzo teso. Se con σ_c si indica poi la tensione di compressione (in modulo) al lembo superiore del calcestruzzo compresso, risulta anche:

$$\sigma_c = \frac{M}{J_x} y'.$$

Il braccio della coppia interna (risultante nel calcestruzzo compresso — risultante nell'acciaio teso), vale:

$$h_0 = h - \frac{y'}{3}.$$

La coppia interna ha dunque il valore:

$$M = \frac{1}{2} \sigma_c b y' h_o = \sigma_a A_f h_o ,$$

da cui si ottiene, in alternativa:

$$\sigma_a = \frac{M}{A_f h_o} , \quad \sigma_c = \frac{2M}{b y' h_o} .$$

Uguagliando le due diverse espressioni di σ_a e di σ_c si ottiene:

$$\frac{M}{A_f h_o} = n \frac{M}{J_x} (h - y') \Rightarrow h_o = \frac{J_x}{n A_f (h - y')} ,$$

$$\frac{2M}{b y' h_o} = \frac{M}{J_x} y' \Rightarrow h_o = \frac{2 J_x}{b y'^2} .$$

Le due espressioni sono senz'altro equivalenti, poiché la condizione $S_x = 0$ può essere posta nella forma:

$$-\frac{b y'^2}{2} + n A_f (h - y') = 0 .$$

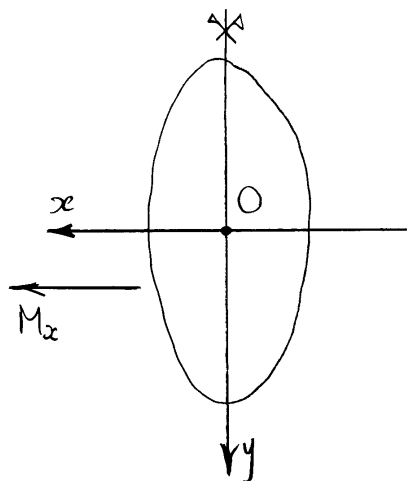
3.4 Cenni al calcolo a rottura

Quanto detto finora vale nell'ipotesi di legame costitutivo elastico lineare:

$$\sigma = E \varepsilon .$$

Come già detto tale legame lineare, sempre nell'ambito delle ipotesi cinematiche della trave inflessa, può essere sostituito da uno più generale in cui non solo l'elasticità può essere non lineare, ma il legame stesso può essere elastoplastico. È chiaro che generalizzazioni di questo tipo sono a volte indispensabili se si vogliono eseguire delle verifiche agli stati limite ultimi.

In tale contesto più generale, flessione retta significa asse neutro ortogonale all'asse di sollecitazione. Se la sezione ha un asse di simmetria e l'asse momento è ortogonale all'asse di simmetria (ovverossia la coppia agisce sul piano di simmetria) tale condizione è, per simmetria, senz'altro soddisfatta.



La condizione che individua l'asse neutro è $N=0$:

$$\int_A \sigma dA = 0.$$

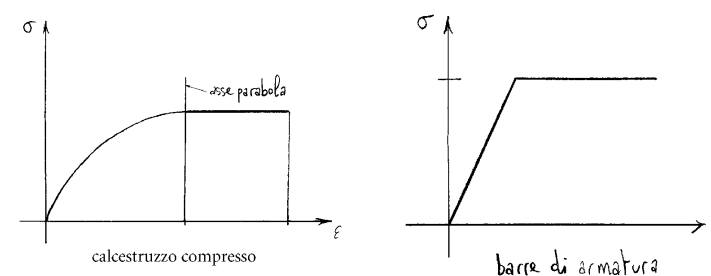
Si noti a tale proposito che i concetti di baricentro e di assi principali di inerzia sono strettamente connessi al legame lineare e non possono essere utilizzati in un contesto più generale. Assumendo un sistema di riferimento Oxy , con l'asse y coincidente con l'asse di simmetria, la coppia flettente risulta poi:

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

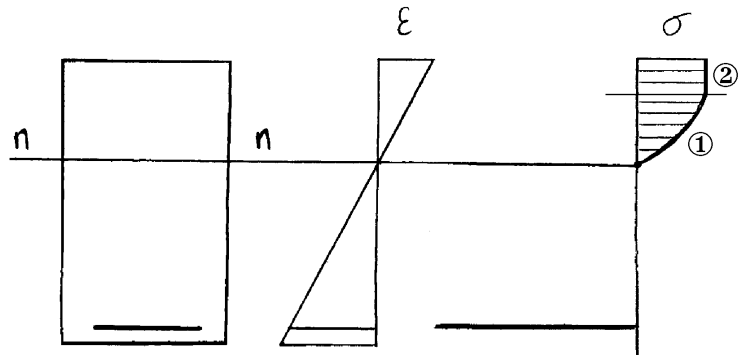
Inoltre, il legame tra la dilatazione ε della generica fibra longitudinale e le caratteristiche della deformazione ε_0 e K_x risulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + K_x y.$$

Per es., nel caso del calcestruzzo armato si può utilizzare, come già detto, un diagramma σ - ε parabolico nella parte elastica seguito da un tratto perfettamente plastico, per quel che riguarda il calcestruzzo compresso, mentre per le barre di armatura può essere scelto un diagramma bilineare.



La distribuzione delle tensioni normali nel calcestruzzo compresso è quindi non lineare nella parte di calcestruzzo in fase elastica e costante nella parte in fase plastica.



- ① fase elastica non lineare
- ② fase perfettamente plastica

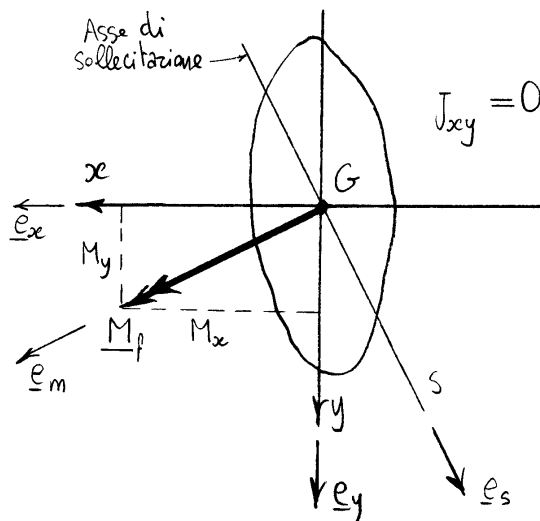
Capitolo 4

Flessione deviata

Si ha flessione deviata quando la sezione è soggetta a solo momento flettente, di asse momento non coincidente con un asse principale di inerzia:

$$\underline{M}_f = M \underline{e}_m,$$

$$\underline{M}_f = M_x \underline{e}_x + M_y \underline{e}_y.$$



Ricordiamo che l'asse s perpendicolare all'asse momento è l'asse di sollecitazione.

4.1 Formula binomia della flessione deviata

Nel caso di sezione omogenea la formula di Navier fornisce la seguente tensione normale:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x,$$

Formula binomia equivalente alla sovrapposizione di due flessioni rette, una secondo l'asse x e una secondo l'asse y.

Il segno meno del secondo addendo dipende dal fatto che invertendo l'ordine degli assi x e y, la coppia di assi diventa sinistra. D'altronde un M_y positivo comprime le fibre dalla parte delle x positive.

L'equazione di σ_z è lineare in x e y.

Annullando tale equazione:

$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0,$$

si individua l'asse neutro n tramite il suo significato statico.

Ricordiamo che l'asse neutro è il luogo dei punti dove si annulla la dilatazione ε_z delle fibre parallele all'asse della trave (significato cinematico) e quindi anche la tensione normale (significato statico).

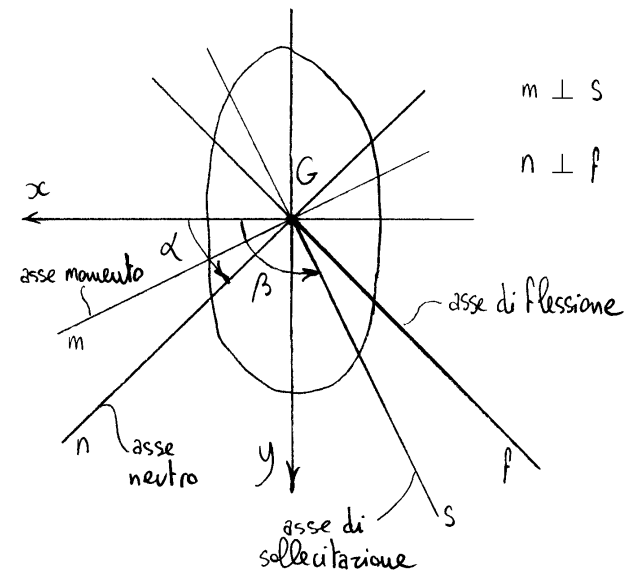
L'equazione dell'asse neutro può dunque scriversi:

$$y = \frac{J_x}{J_y} \frac{M_y}{M_x} x.$$

Detto α l'angolo di inclinazione dell'asse neutro dall'asse x risulta quindi:

$$\tan \alpha = \frac{J_x}{J_y} \frac{M_y}{M_x}.$$

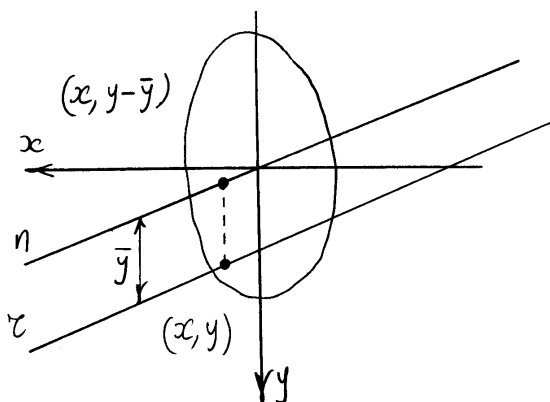
Questa formula è equivalente alla formula di coniugio, poiché se β è l'inclinazione dell'asse di sollecita-



zione, allora:

$$\frac{M_y}{M_x} = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \beta}.$$

Le tensioni normali sono costanti su linee parallele all'asse neutro, come discende dal fatto che l'espressione delle σ_z è lineare e si annulla in corrispondenza dell'asse neutro. D'altronde, se il punto di coordinate (x, y) sta sulla retta x posta alla distanza $\bar{y}$ dall'asse neutro in direzione y , allora



il punto di coordinate $(x, y - \bar{y})$ sta sull'asse neutro e risulta:

$$\frac{M_x}{J_x}(y - \bar{y}) - \frac{M_y}{J_y}x = 0 \Rightarrow$$

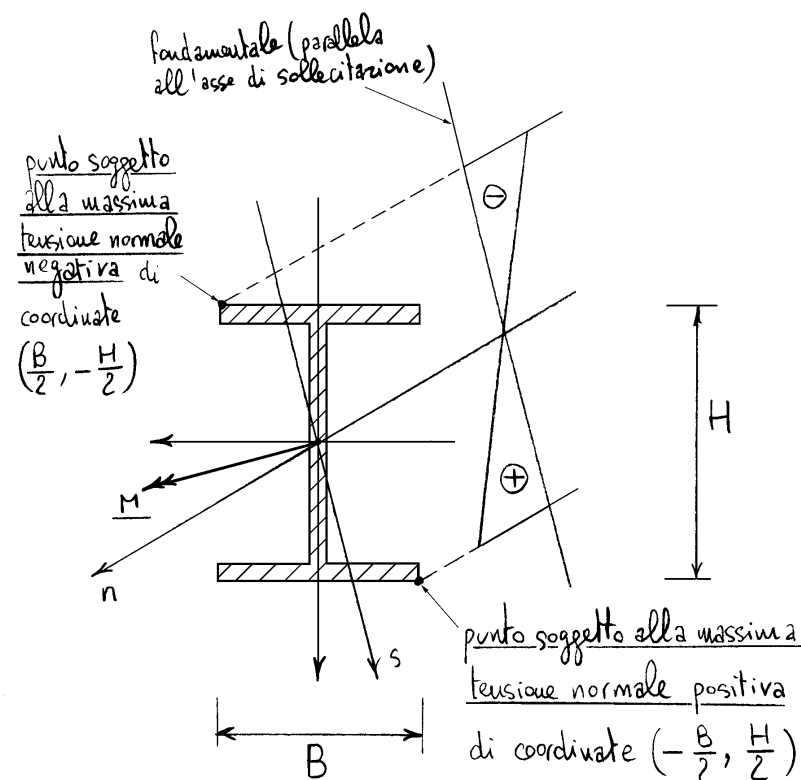
$$\Rightarrow \frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x = \frac{M_x}{J_x}\bar{y}.$$

Quindi la tensione sulla retta z è costante, dipendendo solo dalla sua distanza $\bar{y}$ dall'asse neutro.

Si usa disegnare il diagramma delle tensioni normali prendendo quale fondamentale una parallela all'asse di sollecitazione e mandando le parallele all'asse neutro. Le rette radenti la sezione parallele all'asse neutro individuano i punti dove le tensioni normali sono

massime e minime, mentre l'asse neutro individua i punti dove le tensioni sono nulle.

Il segno del momento stabilisce da quale parte rispetto all'asse neutro le tensioni normali sono positive. Nella figura è illustrato il caso di una sezione a doppio T. Data la doppia simmetria le tensioni normali massime e minime hanno lo stesso modulo e valgono:



$$\sigma_{x \max} = \frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} + \frac{M_y}{J_y} \frac{B}{2} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_{x \min} = -\frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} - \frac{M_y}{J_y} \frac{B}{2} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Se la sezione è in acciaio, avente uguale snervamento a trazione e compressione, la condizione che assicura alla tensione di essere interna al dominio di elasticità si scrive:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_s.$$

4.2 Formule monomie della flessione deviata

Ricordiamo l'equazione vettoriale che fornisce la tensione normale σ_z agente nella sezione retta:

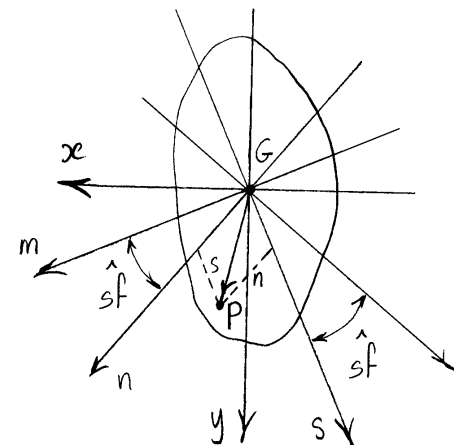
$$\sigma_z = E \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G) \cdot (\underline{J}^{-1} \underline{M}_f),$$

dove al solito $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ indica la rotazione di 90° in senso antiorario. Tenuto conto che:

$$\underline{M}_f = M \underline{e}_m,$$

si ottiene:

$$\sigma_z = E M (P-G) \cdot \left(\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{J}^{-1} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \right) \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_m,$$



e dunque:

$$\sigma_z = E M (P-G) \cdot \underline{Y}^{-1} \underline{e}_s,$$

dove $\underline{Y}$ è il tensore di Eulero.

Come già visto, il tensore $\underline{Y}^{-1}$ inverso del tensore di Eulero $\underline{Y}$ si rappresenta nella forma:

$$\underline{Y}^{-1} = \frac{1}{J_s} \underline{e}^n \otimes \underline{e}^n + \frac{1}{J_n} \underline{e}^s \otimes \underline{e}^s.$$

Ne consegue che la tensione normale σ_z può dunque mettersi nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E M (P-G) \cdot \left(\frac{1}{J_n} \underline{e}^s \right) \\ &= E \frac{M}{J_n} (P-G) \cdot \underline{e}^s. \end{aligned}$$

Il prodotto scalare $(P-G) \cdot \underline{e}^s$ rappresenta la componente controvariante di $P-G$ rispetto all'asse s , cioè coincide con la coordinata del punto P

lungo l'asse s , e quindi:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n} s.$$

Nel caso omogeneo si ha:

$$\sigma_z = \frac{M}{J_n^A} s.$$

dove J_n^A è il momento di inerzia, rispetto all'asse neutro, della sola area.

Infine il legame costitutivo:

$$\underline{M}_f = \underline{J} \underline{K}_f,$$

diviene:

$$M \underline{e}_s = K_f \underline{Y} \underline{e}_f = K_f J_n (\underline{e}_s \cdot \underline{e}_f) \underline{e}_s,$$

avendo tenuto conto che:

$$\underline{M}_f = M \underline{e}_m, \quad \underline{K}_f = K_f \underline{e}_n,$$

$$\underline{J} = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{Y} \underline{R}_{\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{e}_f = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_n, \quad \underline{e}_s = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{e}_m.$$

Si ha quindi:

$$M = J_n K_f \cos \hat{s}f,$$

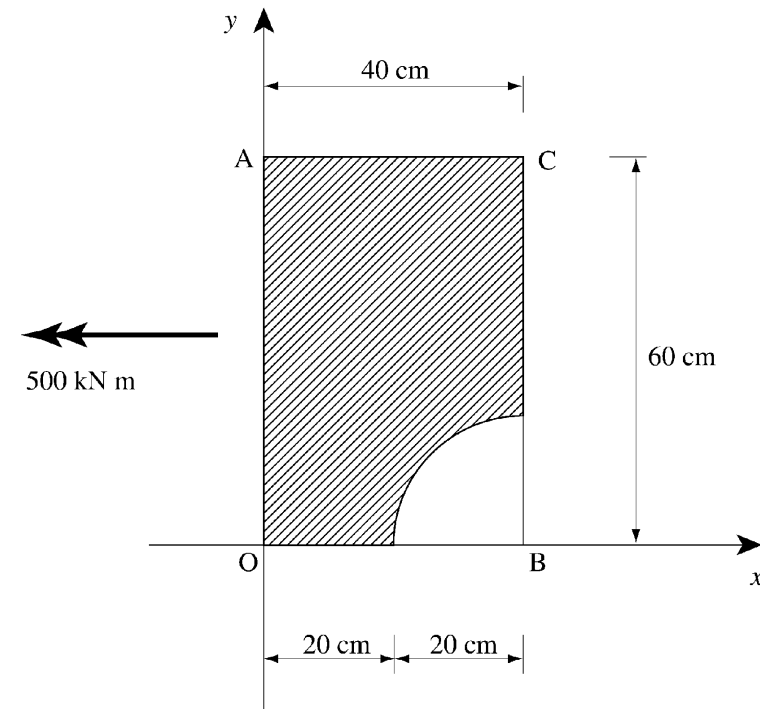
dove $\hat{s}f$ è l'angolo tra asse di sollecitazione e asse di flessione.

Nel caso omogeneo si ha infine:

$$M = E J_n^A K_f \cos \hat{s}f.$$

4.3 Esercizio (sezione rettangolare con un intaglio)

Si consideri la seguente sezione rettangolare con un intaglio in forma di settore circolare, già in precedenza risolta per quel che riguarda le sue proprietà inerziali. Si supponga agente una coppia flettente di 500 kNm di asse momento orizzontale.

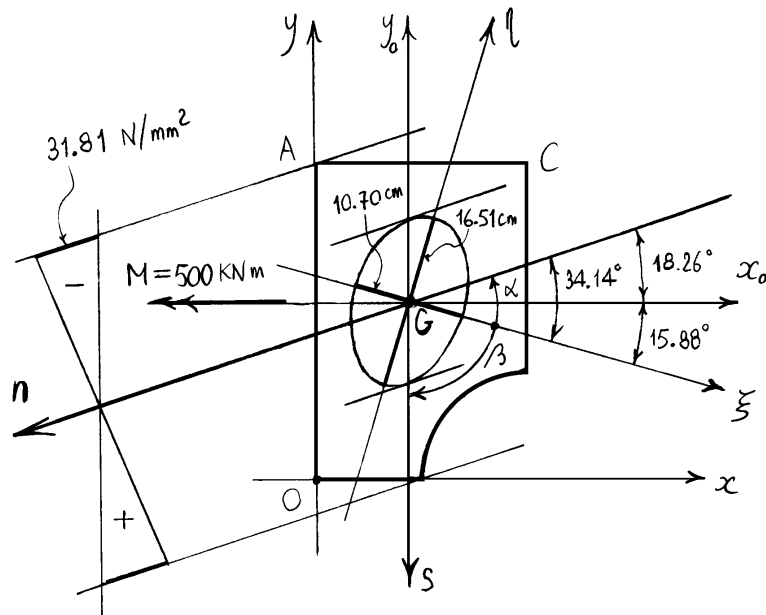


Poichè le direzioni principali sono inclinate rispetto alla orizzontale, la flessione è deviata.

L'asse di sollecitazione è verticale e la sua inclinazione β rispetto alla direzione principale ξ vale:

$$\beta = -(90^\circ - \hat{\xi}x_0) = -74.12^\circ,$$

essendo $\hat{\xi}x_0 = 15.88^\circ$. L'inclinazione α dell'asse neutro si ottiene allora applicando la formula di coniugio:



$$\tan \alpha \tan \beta = -\frac{J_{\xi}}{J_{\eta}} \Rightarrow \alpha = 34.14^\circ.$$

avendo tenuto conto che:

$$\begin{cases} J_{\xi} = 568\,660 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta} = 238\,600 \text{ cm}^4 \end{cases}.$$

Le componenti della coppia flettente nel riferimento principale valgono:

$$\begin{cases} M_{\xi} = -M \cos \hat{\xi}x_0 = -480.91 \text{ kNm} \\ M_{\eta} = -M \sin \hat{\xi}x_0 = -136.83 \text{ kNm} \end{cases}.$$

L'equazione della tensione normale si può scrivere nella forma:

$$\sigma_x = \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} \eta - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} \xi.$$

Uguagliando a zero si ottiene l'equazione dell'asse neutro e indi, in accordo con la formula di coniugio:

$$\tan \alpha = \frac{M_{\eta}}{M_{\xi}} \frac{J_{\xi}}{J_{\eta}} \Rightarrow \alpha = 34.14^\circ,$$

avendo tenuto conto che se il punto di coordinate (ξ, η) sta sull'asse neutro allora $\eta/\xi = \tan \alpha$.

Il punto con la massima tensione di compressione è il punto A, di coordinate:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 60 \text{ cm} \end{cases},$$

nel sistema di coordinate Oxy . Ricordando che le coordinate del baricentro, sempre nel sistema Oxy , valgono:

$$\begin{cases} x_G = 18.27 \text{ cm} \\ y_G = 33.24 \text{ cm} \end{cases}.$$

si ottengono immediatamente per traslazione le coordinate del punto A nel sistema baricentrico Gx_0y_0 :

$$\begin{cases} x_{0A} = x_A - x_G = -18.27 \text{ cm} \\ y_{0A} = y_A - y_G = 27.76 \text{ cm} \end{cases}.$$

Per determinare le coordinate del punto A nel sistema principale baricentrico si consideri il vettore $A - G$ di componenti:

$$\{A - G\} = \begin{Bmatrix} x_{0A} \\ y_{0A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18.27 \text{ cm} \\ 27.76 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

rispetto alla base $\mathbf{e}_i$ associata al sistema Gx_0y_0 . Detta $\mathbf{e}_i^*$ la base associata al sistema principale $G\xi\eta$ risulta:

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R}_{\alpha_\xi} \mathbf{e}_i,$$

dove $\mathbf{R}_{\alpha_\xi}$ è la rotazione di $\alpha_\xi = -15.88^\circ$ dal sistema Gx_0y_0 a quello principale $G\xi\eta$. Si ha allora:

$$(A - G) \cdot \mathbf{e}_i^* = (A - G) \cdot (\mathbf{R}_{\alpha_\xi} \mathbf{e}_i) = \left\{ \mathbf{R}_{\alpha_\xi}^T (A - G) \right\} \cdot \mathbf{e}_i,$$

e le coordinate di $A - G$ nel sistema principale coincidono, come già si sapeva, con quelle di $\mathbf{R}_{\alpha_\xi}^T (A - G)$ nel sistema Gx_0y_0 .

La matrice rotazione $\mathbf{R}_{\alpha_\xi}$ dal sistema Gx_0y_0 al sistema $G\xi\eta$ vale:

$$\mathbf{R}_{\alpha_\xi} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & -\sin \alpha_\xi \\ \sin \alpha_\xi & \cos \alpha_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9618 & 0.2737 \\ -0.2737 & 0.9618 \end{bmatrix}.$$

e dunque le coordinate (ξ_A, η_A) valgono:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.9618 & -0.2737 \\ 0.2737 & 0.9618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -18.27 \text{ cm} \\ 27.76 \text{ cm} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -24.89 \text{ cm} \\ 20.74 \text{ cm} \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

La tensione σ_A vale infine:

$$\sigma_A = \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} \eta_A - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} \xi_A = -31.81 \text{ N/mm}^2$$

Se si vuole invece applicare la formula monomia occorre calcolare il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro. Utilizzando le formule di rotazione si ottiene:

$$J_n = \frac{J_{\xi} \cos^2 \alpha + J_{\eta} \sin^2 \alpha}{\sin^2 \hat{n}s} = 515280 \text{ cm}^4,$$

con $\alpha = 34.14^\circ$ e dove si è tenuto conto che la formula di rotazione fornisce il momento di inerzia valutato con distanze ortogonali mentre nella formula monomia interviene il momento di inerzia valutato con distanze nella direzione dell'asse di sollecitazione. L'angolo $\hat{n}s$ tra asse di sollecitazione e asse neutro vale:

$$\hat{n}s = (90^\circ - \hat{x}_o n) = 71.74^\circ,$$

essendo:

$$\hat{x}_o n = \hat{\xi} \hat{n} - \hat{\xi} \hat{x}_o = 34.14^\circ - 15.88^\circ = 18.26^\circ.$$

La coordinata di A in direzione s nel sistema Gns vale:

$$s_A = -(60 \text{ cm} - y_G) - x_G \tan \hat{x}_o n = -32.79 \text{ cm}.$$

Risulta quindi:

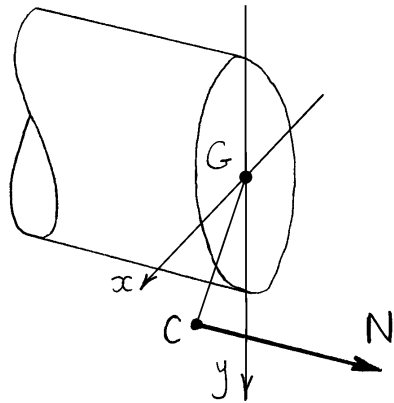
$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M}{J_n} s_A = - \frac{5 \times 10^8 \text{ Nmm}}{5.1528 \times 10^9 \text{ mm}^4} 327.9 \text{ mm} = \\ &= -31.81 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

in accordo con il risultato della formula binomia.

Capitolo 5

Forza normale eccentrica

Si ha forza normale eccentrica quando la sezione è soggetta ad una forza normale N con retta d'azione non baricentrica.



Il punto C intersezione tra sezione e retta d'azione di N è detto centro di sollecitazione.

Lo sforzo normale eccentrico si compone della somma di una forza normale centrata N e di una flessione, in generale deviata, dovuto al momento $\underline{M}_f$ di N rispetto al baricentro.

5.1 Formula trinomia della tensione normale

Il momento $\underline{M}_f$ associato alla forza normale eccentrica vale:

$$\underline{M}_f = (C - G) \times (N \underline{e}_x),$$

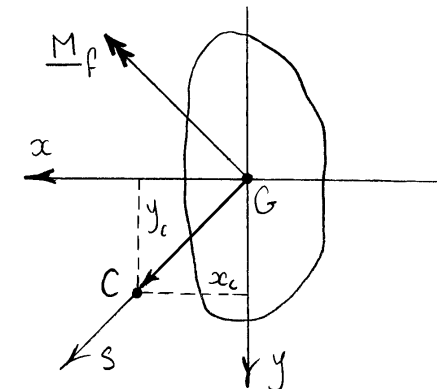
dove $\underline{e}_x$ è il solito il versore normale alla sezione.

In componenti risulta:

$$\underline{M}_f = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = N y_c \underline{e}_x - N x_c \underline{e}_y,$$

e quindi:

$$\begin{cases} M_x = N y_c \\ M_y = -N x_c \end{cases}.$$



Si noti che l'asse momento risulta ortogonale alla congiungente di C con G, congiungente che quindi rappresenta l'asse di sollecitazione della flessione associata alla forza normale eccentrica.

La tensione normale può quindi essere espressa, relativamente al sistema Gxy principale di inerzia, tramite la seguente formula trinomia:

$$\sigma_z = E \frac{N}{M} + E \frac{M_x}{J_x} y - E \frac{M_y}{J_y} x .$$

Questa può poi porsi nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \left(\frac{N}{M} + \frac{Ny_c}{J_x} y + \frac{Nx_c}{J_y} x \right) = \\ &= E \frac{N}{M} \left(1 + \frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x \right) , \end{aligned}$$

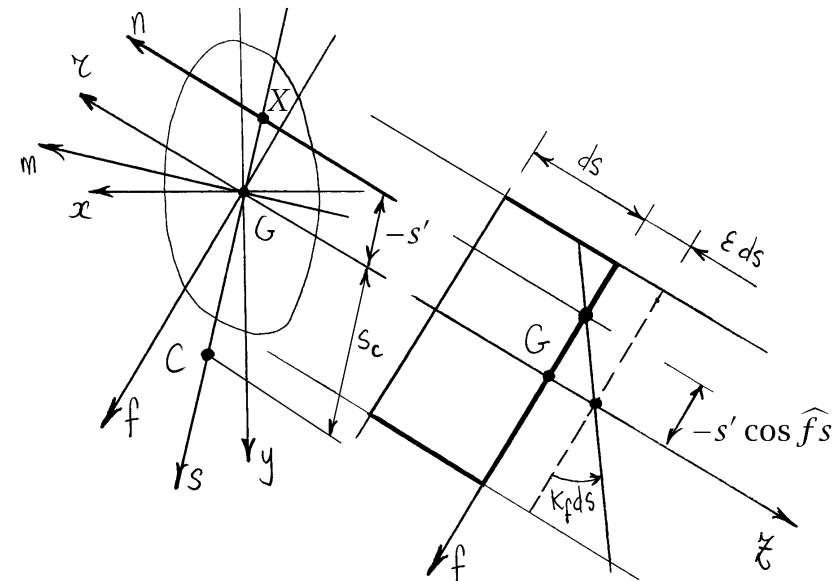
dove $\rho_x^2 = J_x/M$ e $\rho_y^2 = J_y/M$ rappresentano i quadrati dei raggi di inerzia principali.

5.2 Asse neutro

5.2.1 Significato cinematico

Il moto relativo della sezione retta rispetto ad una sezione vicina si compone di una traslazione nella direzione ortogonale z di ampiezza ϵds , con ϵ dilatazione della linea d'asse baricentrica, e di una rotazione $k_f ds$ attorno ad un asse baricentrico r , giacente nel piano della sezione e quindi ortogonale all'asse z . Si noti che l'asse r rappresenta l'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica. Globalmente la sezione risulta ruotata attorno ad un asse n non baricentrico parallelo al precedente e detto *asse neutro*.

Si assuma come riferimento il sistema baricentrico coniugato Grs . Se ϵ e k_f sono positivi, come nella figura, l'asse



neutro interseca l'asse di sollecitazione s in un punto X di coordinata s' negativa. Ne consegue che la distanza dell'asse neutro dal baricentro, valutata nella direzione dell'asse di sollecitazione, vale $-s'$ e che l'analoga distanza, valutata nella direzione dell'asse di flessione f , vale $-s' \cos \widehat{fs}$. Quest'ultima distanza vale anche il rapporto tra la traslazione ϵds e la rotazione $k_f ds$ della sezione, come appare evidente dalla figura. Se N e M sono rispettivamente la forza normale centrata e il momento flettente dovuti alla forza normale eccentrica, utilizzando i legami costitutivi relativi alla forza normale centrata e alla flessione deviata (formula monomia) si ottiene allora:

$$-s' \cos \widehat{fs} = \frac{\epsilon}{k_f} = \frac{N/M}{M/(J_r \cos \widehat{fs})},$$

dove $\mathcal{M}$ è la massa totale della sezione retta. Detta s_C la coordinata del centro di sollecitazione C , quindi tale che:

$$M = N s_C,$$

si ottiene infine:

$$s' = -\frac{\rho_r^2}{s_C}.$$

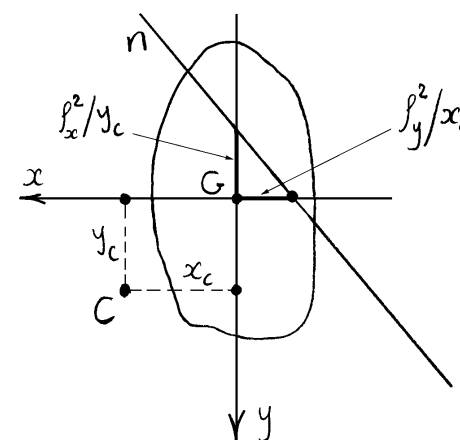
Si noti che il segno negativo a secondo membro dell'uguaglianza significa che il centro di sollecitazione e l'asse neutro sono da parte opposta rispetto al baricentro.

5.2.2 Significato statico

Poiché la rotazione relativa avviene attorno all'asse neutro, le fibre longitudinali individuate da tale asse sono caratterizzate dalla condizione cinematica $\epsilon = 0$ e quindi dall'equivalente condizione statica $\sigma_x = 0$. Quest'ultima condizione conduce alla seguente equazione segmentaria dell'asse neutro:

$$\frac{x}{-\rho_y^2/x_c} + \frac{y}{-\rho_x^2/y_c} = 1.$$

Le intersezioni x' e y' dell'asse neutro con gli assi



x (di equazione $y=0$) e y (di equazione $x=0$) rispettivamente, valgono:

$$\begin{cases} x' = -\frac{I_y^2}{x_c} \\ y' = -\frac{I_x^2}{y_c} \end{cases}.$$

5.3 Antipolarità di inerzia

Si noti che, data una retta n non baricentrica, è possibile ricavare le coordinate del centro di sollecitazione C al quale corrisponde n quale asse neutro:

$$\begin{cases} x_c = -\frac{I_y^2}{x'} \\ y_c = -\frac{I_x^2}{y'} \end{cases},$$

dove ancora x' e y' sono le intersezioni con gli assi x e y dell'asse n .

Si vede così che sussiste una relazione biunivoca fra tutte le rette non baricentriche del piano e tutti i punti del piano (escluso il baricentro).

Questa corrispondenza tra punti e rette è detta antipolarità di inerzia. La retta n corrispondente ad un punto

C è detta antipolare di C , mentre il punto C corrispondente di una retta n è detto antipolo o centro relativo della retta n .

5.3.1 Prime proprietà dell'antipolarità di inerzia

Una prima proprietà dell'antipolarità di inerzia si ha notando che le intersezioni x' e y' dell'asse neutro hanno sempre segno opposto rispetto alle coordinate x_c e y_c del centro di sollecitazione, per cui l'asse neutro è sempre situato dalla parte opposta di C rispetto al baricentro, come d'altronde era già stato stabilito in precedenza.

Inoltre, come già visto, l'asse neutro n corrispondente al centro di sollecitazione C ha la direzione dell'asse τ coniugato dell'asse di sollecitazione s (direzione fornita dal vettore $C-G$). D'altronde l'asse neutro

ha equazione:

$$\frac{N}{M} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

mentre la sua parallela τ per il baricentro risulta:

$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0,$$

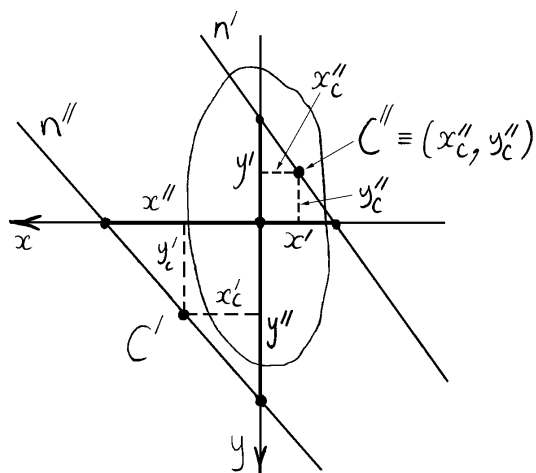
equazione dell'asse neutro nel caso in cui agisce il solo momento M_p .

Una conseguenza di questa proprietà è che tutte le rette parallele ad τ hanno centro di sollecitazione sull'asse s coniugato di τ .

5.3.2 Teorema di reciprocità

Si vuole poi mostrare che vale il teorema di reciprocità: "Se una retta n'' contiene il centro relativo C' di n' allora n' contiene il centro relativo C'' di n'' ".

Sia quindi n'' una generica retta passante per C' ed avente intersezioni x'' e y'' con gli assi x e y . La



sua equazione segmentaria vale :

$$\frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} = 1 ,$$

e quindi per ipotesi vale la condizione :

$$\frac{x_c'}{x''} + \frac{y_c'}{y''} = 1 ,$$

poiché n'' contiene C' . Il centro relativo C'' di n'' ha coordinate :

$$\begin{cases} x_c'' = - \frac{f_y^2}{x''} \\ y_c'' = - \frac{f_x^2}{y''} \end{cases} .$$

Poiché :

$$\frac{-f_y^2/x''}{-f_y^2/x_c'} + \frac{-f_x^2/y''}{-f_x^2/y_c'} = \frac{x_c'}{x''} + \frac{y_c'}{y''} = 1 ,$$

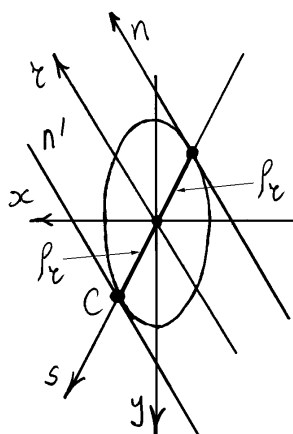
le coordinate del punto C'' soddisfano l'equazione di n' :

$$\frac{x}{-f_y^2/x_c'} + \frac{y}{-f_x^2/y_c'} = 1 ,$$

e la retta n' contiene C'' , come volevasi dimostrare.

5.3.3 Polarità di inerzia

Infine, la condizione $s' = -f_x^2/s_c$ mostra che se $s_c = f_x$, cioè se C si trova sull'ellisse centrale di inerzia, allora $s' = f_x$, ovvero la retta n è tangente all'ellisse nel punto opposto in diametro a C . Se al punto C facciamo corrispondere la retta n' simmetrica alla n rispetto al baricentro, la retta n' contiene il punto C . In questa nuova corrispondenza,



detta polarità di inerzia, i punti contenuti nella retta corrispondente individuano l'ellisse centrale di inerzia (che assume quindi il ruolo di conica fondamentale nella polarità di inerzia).

Non solo, ma la condizione $s' = -I_z^2/s_c$ ci informa anche del fatto che se $s_c > I_z$ (C esterno all'ellisse) allora $s' < I_z$ (n taglia l'ellisse) e viceversa.

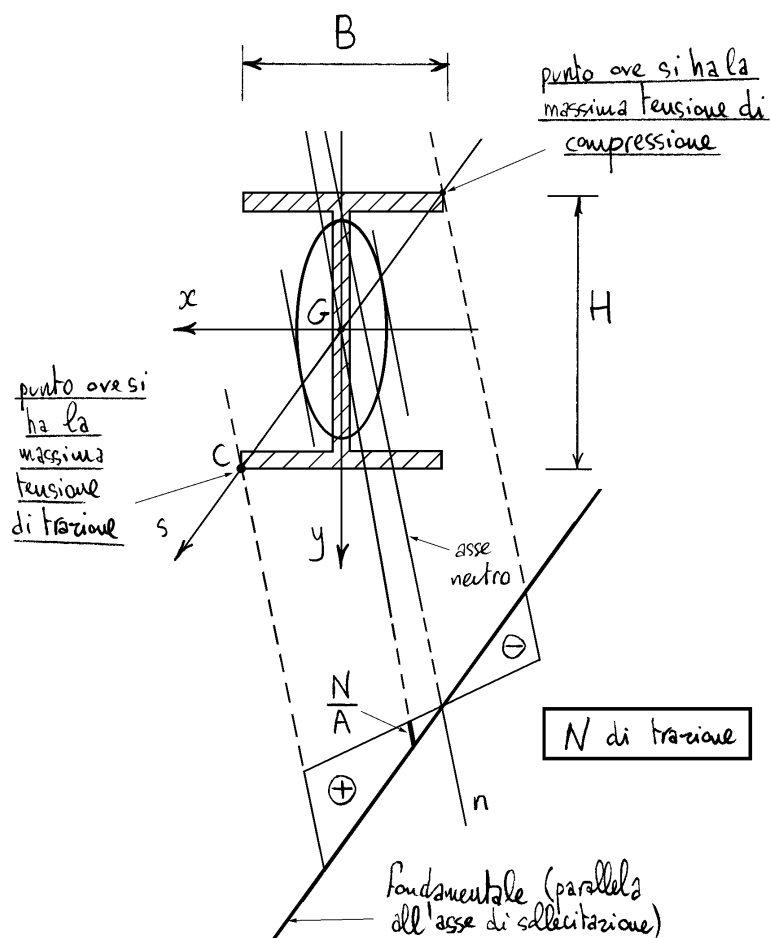
5.4 Tensioni normali

5.4.1 Diagramma delle tensioni normali nel caso omogeneo

Le tensioni normali si annullano sull'asse neutro e sono costanti su rette parallele all'asse neutro. È allora consuetudine di riportare tale valore costante nella direzione dell'asse neutro a partire da una retta parallela all'asse di sollecitazione, presa quale riferimento. Le rette radenti parallele all'asse neutro individuano i punti di massima tensione normale a trazione e a compressione, nel caso l'asse neutro tagli la sezione. Se invece l'asse neutro non taglia la sezione, allora le tensioni normali sono tutte dello stesso segno, positivo se lo sforzo normale è positivo e negativo nel caso opposto. In tal caso la tensione normale massima si ha in corrispondenza del punto (o dei punti) individuati dalla retta radente più lontana dall'asse neutro.

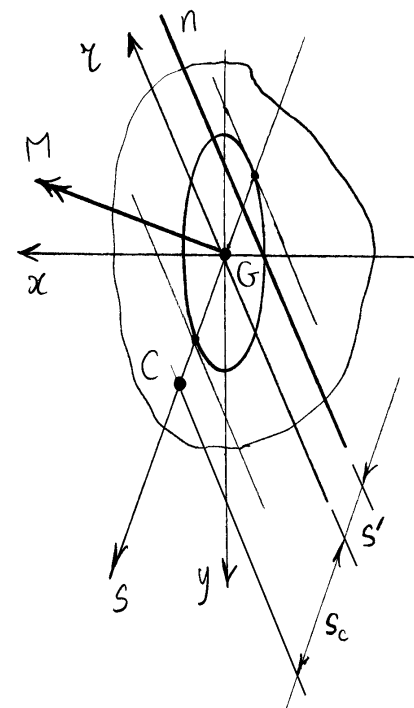
L'appartenenza al dominio di elasticità richiede alle massime

tensioni, di trazione e di compressione, di essere inferiori alle rispettive tensioni di snervamento.



5.4.2 Formula binomia

Si prenda come riferimento il sistema Grs obliquo, composto dall'asse di sollecitazione s e dal suo asse coniugato r (che, come sappiamo, è parallelo all'asse neutro). Utilizzando la formula binomia della flessione



derivato risulta:

$$\sigma_x = E \frac{N}{M} + E \frac{M}{J_x} s = E \frac{N}{M} + E \frac{N s_c}{M \rho_x^2} s ,$$

poichè $M = N s_c$. Posto $\sigma_x = 0$, si ottiene, in accordo con quanto già visto, l'intersezione s' dell'asse neutro n con l'asse di sollecitazione s nella forma:

$$s' = - \frac{\rho_x^2}{s_c} .$$

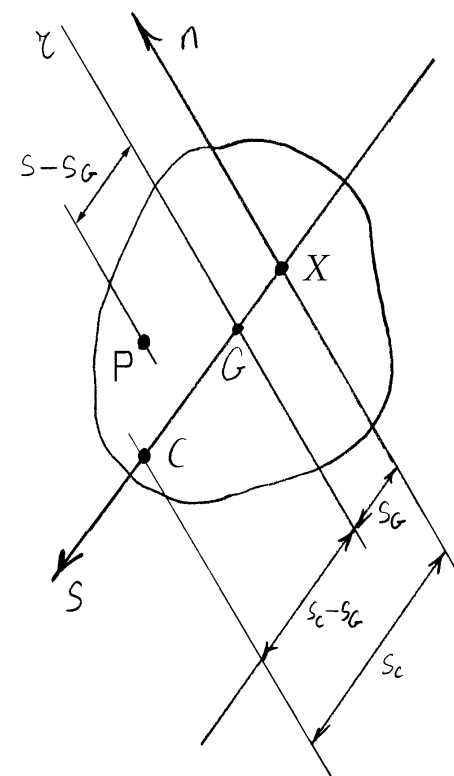
Ricordiamo che J_x è calcolato nel sistema GxS , ovvero con distanze valutate nella direzione di s :

$$J_x = \int_A E s^2 dA .$$

5.4.3 Formula monomia

Ci si riferisca ora al sistema Xns in luogo del sistema GxS , con X intersezione tra asse neutro e asse di sollecitazione. La relazione tra centro C di sollecitazione e asse neutro diventa:

$$\rho_x^2 = s_c(s_c - s_G) .$$



La tensione normale risulta quindi:

$$\sigma_x = E \frac{N}{M} + E \frac{N(s_c - s_G)}{M r_z^2} (s - s_G) =$$

$$= E \frac{N}{M} \left(1 + \frac{s - s_G}{s_G} \right) = E \frac{N}{M s_G} s,$$

e infine:

$$\sigma_x = E \frac{N}{S_n} s,$$

dove S_n rappresenta il momento statico rispetto all'asse neutro.

Alla stessa formula si arriva più semplicemente imponendo che la tensione normale sia proporzionale alla forza normale N applicata, alla distanza s dall'asse neutro e al modulo di Young:

$$\sigma_z = aENs,$$

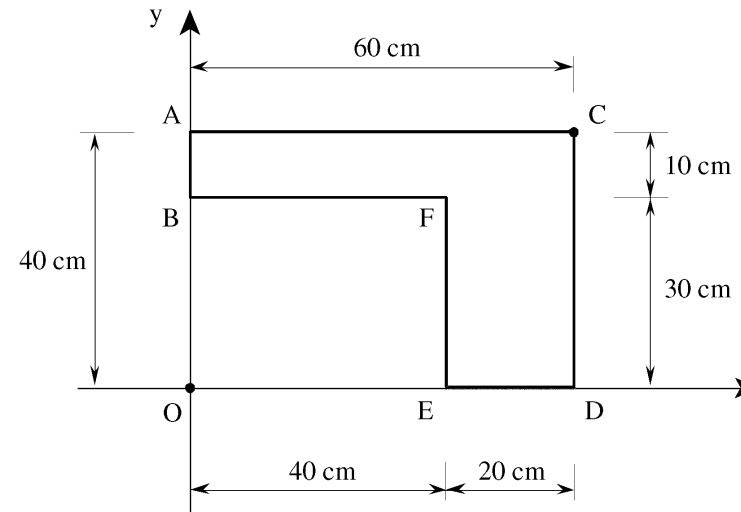
e che inoltre valga E^*N/M in corrispondenza di un punto P^* posto sull'asse baricentrico parallelo all'asse neutro:

$$aE^*Ns_G = E^* \frac{N}{M},$$

dove E^* è il modulo di Young nel punto predetto. Si noti anche che adottando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Xxy , con l'asse x coincidente con l'asse neutro n , si ottiene la formula:

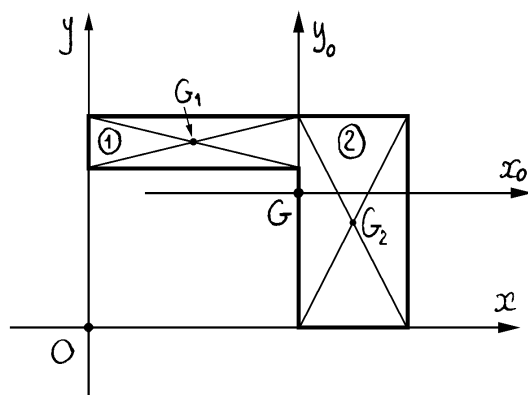
$$\sigma_z = E \frac{N}{S_x} y.$$

5.5 Esempio (sezione composta di due rettangoli)



La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 200 kN, applicato in corrispondenza del punto C .

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η ;
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
- 6) Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
- 7) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



Aree e momenti statici (sistema Oxy):

	A/cm^2	x_G/cm	y_G/cm	S_x/cm^3	S_y/cm^3
①	400	20	35	14 000	8 000
②	800	50	20	16 000	40 000
TOT	1200	40	25	30 000	48 000

Coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{48\,000 \text{ cm}^3}{1200 \text{ cm}} = 40 \text{ cm},$$

$$y_G = \frac{30\,000 \text{ cm}^3}{1200 \text{ cm}} = 25 \text{ cm}.$$

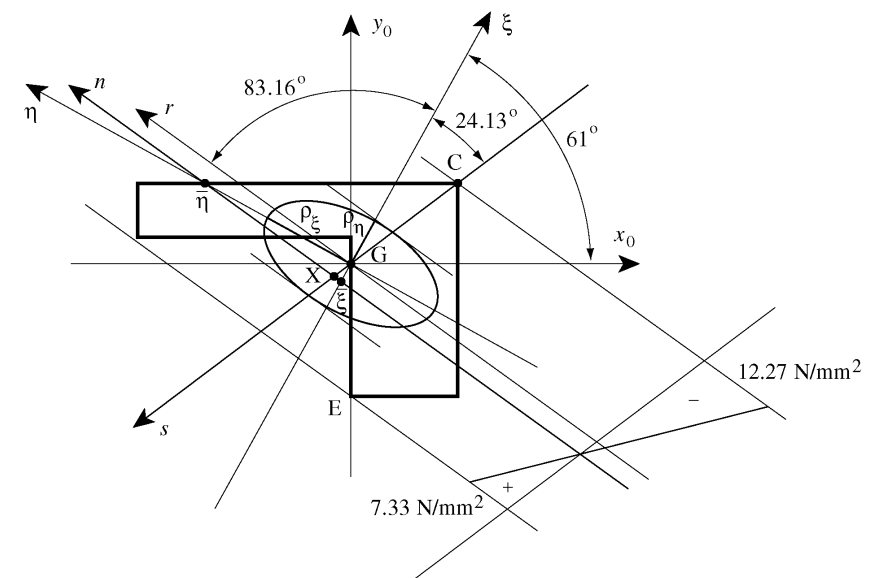
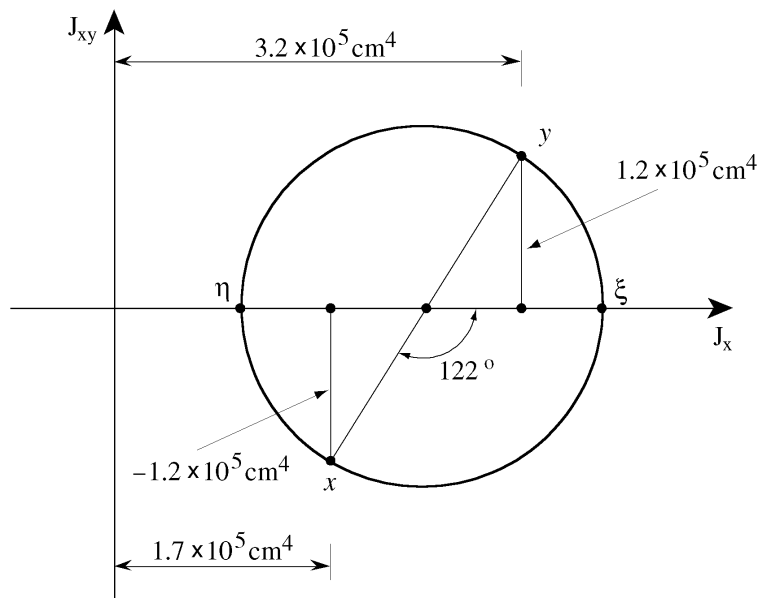
Momenti di inerzia e centrifugo rispetto agli assi x_0 e y_0 baricentrici:

$$\begin{cases} J_{x_0}^{①} = \frac{40 \text{ cm} \times (10 \text{ cm})^3}{12} + A^{①} (y_G - y_{G1})^2 \\ J_{x_0}^{②} = \frac{20 \text{ cm} \times (40 \text{ cm})^3}{12} + A^{②} (y_G - y_{G2})^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} J_{y_0}^{①} = \frac{10 \text{ cm} \times (40 \text{ cm})^3}{12} + A^{①} (x_G - x_{G1})^2 \\ J_{y_0}^{②} = \frac{40 \text{ cm} \times (20 \text{ cm})^3}{12} + A^{②} (x_G - x_{G2})^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} J_{x_0 y_0}^{①} = A^{①} (y_G - y_{G1}) (x_G - x_{G1}) \\ J_{x_0 y_0}^{②} = A^{②} (y_G - y_{G2}) (x_G - x_{G2}) \end{cases}.$$

	J_{x_0}/cm^4	J_{y_0}/cm^4	$J_{x_0 y_0}/\text{cm}^4$
①	43 333	213 333	-80 000
②	126 667	106 667	-40 000
TOT	170 000	320 000	-120 000



Momenti principali di inerzia:

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x0} + J_{y0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x0} - J_{y0})^2 + 4J_{x0y0}^2} = \begin{cases} 386\,510 \text{ cm}^4 \\ 103\,490 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Raggi principali di inerzia:

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}} = 17.95 \text{ cm},$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{J_{\eta}}{A}} = 9.29 \text{ cm}.$$

Posizione degli assi principali di inerzia:

$$\alpha_{\xi} = \arctan \left\{ \frac{J_{x0} - J_{\xi}}{J_{x0y0}} \right\} = 61.00^\circ.$$

Rotazione dal sistema Gx_0y_0 al sistema $G\xi\eta$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\xi} & -\sin \alpha_{\xi} \\ \sin \alpha_{\xi} & \cos \alpha_{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4848 & -0.8746 \\ 0.8746 & 0.4848 \end{bmatrix}.$$

Coordinate dei punti C, B, E nel sistema principale:

$$\{C - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 60 \text{ cm} - 40 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} - 25 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.81 \text{ cm} \\ -10.22 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

$$\{B - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 0 \text{ cm} - 40 \text{ cm} \\ 30 \text{ cm} - 25 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15.02 \text{ cm} \\ 37.41 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

$$\{E - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 40 \text{ cm} - 40 \text{ cm} \\ 0 \text{ cm} - 25 \text{ cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.87 \text{ cm} \\ -12.12 \text{ cm} \end{Bmatrix}.$$

Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\bar{\xi} = \frac{-\rho_{\eta}^2}{\xi_C} = -3.78 \text{ cm},$$

$$\bar{\eta} = \frac{-\rho_{\xi}^2}{\eta_C} = 31.51 \text{ cm}.$$

Caratteristiche della sollecitazione nel sistema principale:

$$N = -200 \text{ kN},$$

$$M_{\xi} = N\eta_C = 2\,044 \text{ kN cm},$$

$$M_{\eta} = -N\xi_C = 4\,563 \text{ kN cm},$$

Tensioni normali nei punti C, B, E:

$$\sigma_C = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_C - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_C = -12.27 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_B - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_B = 6.93 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_E - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_E = 7.33 \text{ N/mm}^2.$$

Inclinazione dell'asse di sollecitazione nel sistema principale:

$$\alpha_s = \arctan \left\{ \frac{\eta_C}{\xi_C} \right\} = -24.13^\circ.$$

Inclinazione dell'asse neutro nel sistema principale (due calcoli alternativi):

$$\alpha_n = \arctan \left\{ -\frac{J_{\xi}}{J_{\eta} \tan \alpha_s} \right\} = 83.16^\circ,$$

$$\alpha_n = \arctan \left\{ -\frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} \right\} = 83.16^\circ.$$

Angolo compreso tra l'asse di sollecitazione e l'asse neutro:

$$\hat{s}\hat{n} = 180^\circ - (\alpha_n - \alpha_s) = 72.71^\circ.$$

Momento e raggio di inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione):

$$J_r = \frac{J_{\xi} \cos^2 \alpha_n + J_{\eta} \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 \hat{s}\hat{n}} = 117\,920 \text{ cm}^4,$$

$$\rho_r = \sqrt{\frac{J_r}{A}} = 9.91 \text{ cm}.$$

Intersezione tra asse neutro e asse di sollecitazione:

$$\overline{CG} = \sqrt{\xi_C^2 + \eta_C^2} = 25 \text{ cm},$$

$$\overline{GX} = \frac{\rho_r^2}{\overline{CG}} = 3.93 \text{ cm}.$$

Momento statico rispetto all'asse neutro e tensione normale nel punto C (coordinate riferite al sistema Xns):

$$S_n = As_G = -4\,717 \text{ cm}^3, \quad \text{dove} \quad s_G = -\overline{GX},$$

$$\sigma_C = \frac{N}{S_n} s_C = -12.27 \text{ N/mm}^2, \quad \text{dove} \quad s_C = -(\overline{CG} + \overline{GX}).$$

5.6 Nocciolo centrale di inerzia

Il nocciolo centrale di inerzia rappresenta il luogo dei centri di sollecitazione il cui asse neutro non taglia la figura.

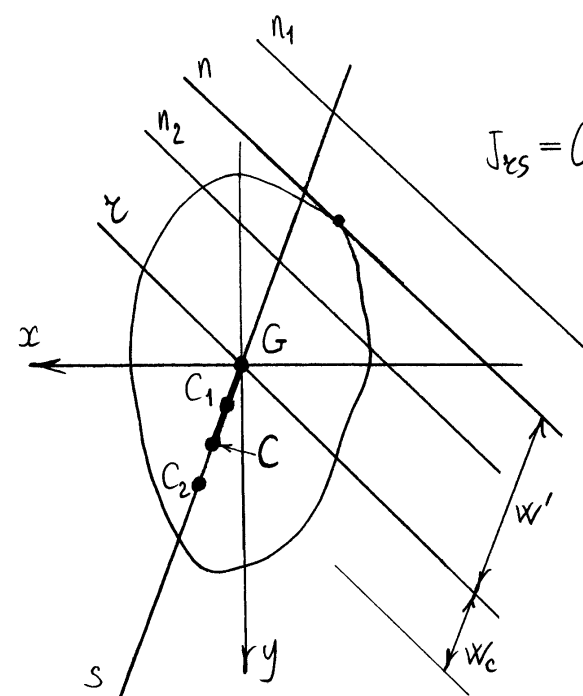
Ne consegue che se la forza normale eccentrica è di compressione ed applicata in un punto del nocciolo centrale di inerzia allora la sezione è tutta compressa (viceversa, se la forza normale è di trazione, allora la sezione è tutta tesa).

La conoscenza del nocciolo centrale di inerzia è importante nel caso di materiali che hanno scarsa resistenza a trazione. Infatti, se il dimensionamento di una struttura è eseguito in modo tale da far cadere il centro di sollecitazione (detto centro di pressione nel caso di strutture compresse) all'interno del nocciolo centrale di inerzia, allora si ha la certezza che non si sviluppano sollecitazioni di trazione.

5.6.1 Contorno del nocciolo quale luogo di punti

Il contorno del nocciolo è costituito dai centri relativi alle rette che toccano la figura senza tagliarla (rette radenti).

Infatti, sia n una retta radente e sia r la parallela a n per il baricentro G . Detta s la retta coniugata



di ϵ allora il centro relativo C di n si trova su s dalla parte opposta di n rispetto al baricentro. Se la retta n viene allontanata dalla figura il punto C percorre il segmento CG e quindi tale segmento appartiene al nocciolo poichè se n si allontana dalla figura allora non la taglia. Viceversa, se n si muove verso il baricentro, tagliando quindi la figura, C si muove su s allontanandosi dal baricentro generando un tratto di s che non appartiene al nocciolo. Quindi il punto C è sul contorno del nocciolo, come volevasi dimostrare.

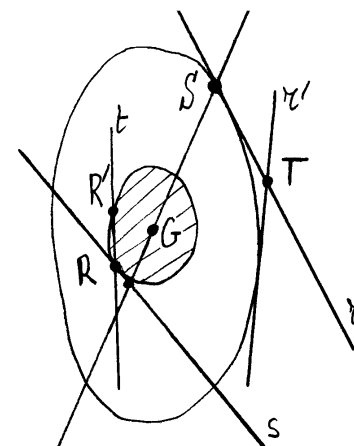
La lunghezza w_c del segmento CG è detta raggio di nocciolo. Se w' è la distanza, nella direzione dell'asse di sollecitazione s , della retta radente n dal baricentro, risulta:

$$w_c = \frac{J_z^2}{w'}$$

5.6.2 Contorno del nocciolo quale inviluppo di rette

Il nocciolo centrale di inerzia rappresenta anche l'inviluppo delle antipolari dei punti dell'inviluppo delle rette radenti la figura, ovvero se S è un punto dell'inviluppo delle rette radenti la figura allora la sua antipolare s è tangente al nocciolo.

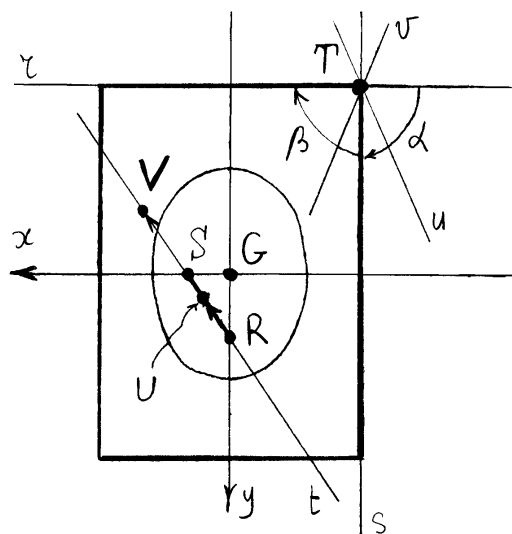
Infatti sia ϵ una retta per S radente la figura e sia R il suo antipolo. Si prenda una seconda retta radente ϵ' e siano T la sua intersezione con ϵ e R' il suo antipolo. Per costruzione, R e R' stanno sul contorno del nocciolo e la loro congiungente t , per



reciprocità, è l'antipolare del punto T . Si faccia tendere τ' a τ . Allora T tende ad S e quindi la retta t tende all'antipolare s di S . Ma poiché risulta anche che R' tende ad R , la retta t tende alla tangente al nocciolo in R , come volevasi dimostrare.

5.6.3 Corrispondenza tra vertici e segmenti

Si supponga che sul contorno della figura di cui si vuole determinare il nocciolo centrale di inerzia vi sia un vertice T e siano r e s le due tangenti in corrispondenza del vertice. Con riferimento alla figura seguente, che senza perdita



di generalità rappresenta un rettangolo, siano R e S i centri relativi delle rette r e s rispettivamente. Nel caso del rettangolo di figura i due centri relativi precedenti sono posti rispettivamente sugli assi y e x rispettivamente, ma ciò è inessenziale.

I punti R ed S individuano, per reciprocità, la retta t coniugata del vertice T . Sempre per reciprocità, ogni retta contenente il vertice T ha antipolo che giace su t . Muovendo allora con continuità una retta u all'interno dell'angolo α individuato dalle rette per T che non tagliano la figura a partire dalla retta τ , il punto U centro relativo alla retta u si muove, a partire dal punto R , in direzione del punto S . Tale movimento è continuo poiché il baricentro appartiene all'involuppo delle rette secanti e quindi una retta v per T che non taglia la figura non conterrà mai il baricentro.

Si tenga conto che l'unica discontinuità si ha quando la retta passa per il baricentro, poiché in tal caso la distanza della retta dal baricentro si annulla e quindi la distanza del suo antipolo dal baricentro diventa infinita.

Una retta v che invece si muove all'interno dell'angolo β contenente il baricentro ha centro relativo v che si muove, a partire da S' fino a tendere all'infinito quando la retta tende a divenire baricentrica, poiché in tal caso la distanza di v dal baricentro tende a zero. Superato il baricentro, il punto V compare dall'altra parte della retta t e tende al punto R al tendere di v alla retta τ .

Se ne conclude che il segmento RS' appartiene al contorno del nocciolo.

Si è quindi ottenuto il risultato generale che ogni volta che l'involuppo delle rette radenti presenta un vertice, a tale vertice corrisponde un segmento sul nocciolo.

Poiché vale anche il risultato reciproco, e cioè che a un segmento sul contorno della figura corrisponde un vertice sul contorno del nocciolo, come può facilmente verificarsi, ne consegue che ad una figura poligonale corrisponde un nocciolo centrale di inerzia poligonale.

5.6.4 Sezione rettangolare

Si consideri un rettangolo di base b e di altezza h . Poiché risulta:

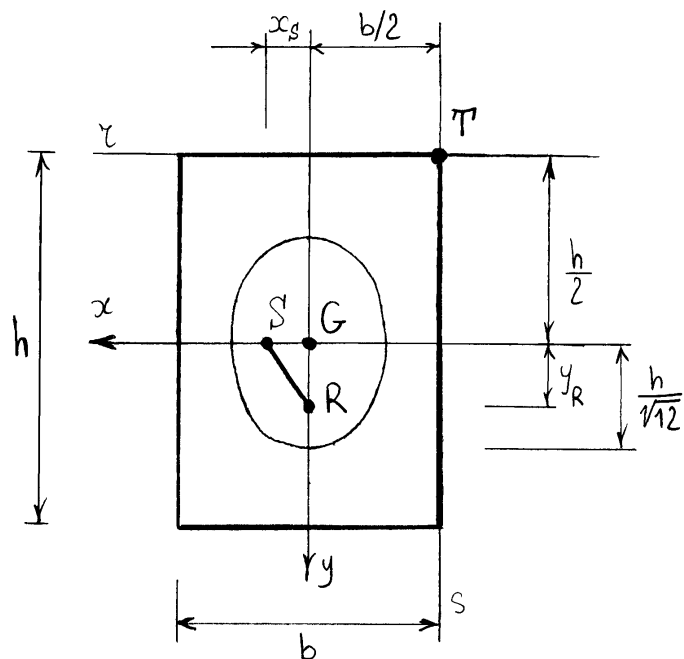
$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{b^3h}{12}, \quad A = bh,$$

i raggi di inerzia principali valgono:

$$l_x = \frac{h}{\sqrt{12}}, \quad l_y = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Alle rette τ ed s che contengono due lati

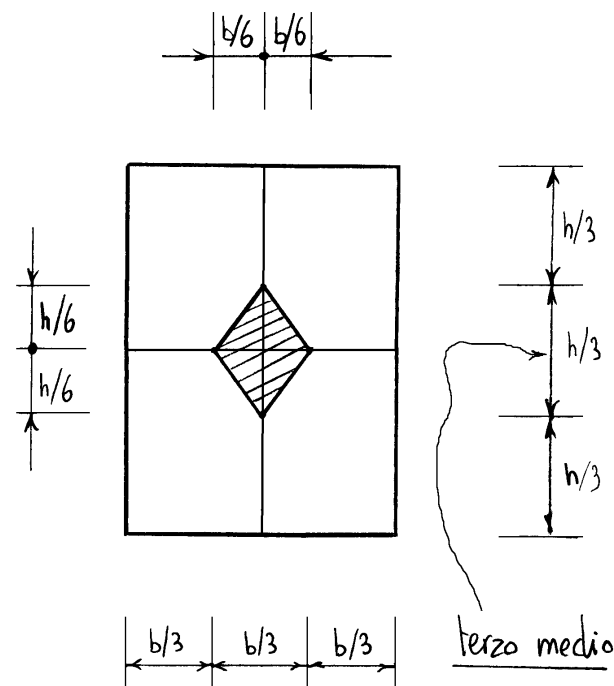
del rettangolo uscenti dal vertice T corrispondano
i centri relativi R , posto sull'asse y ed S , posto



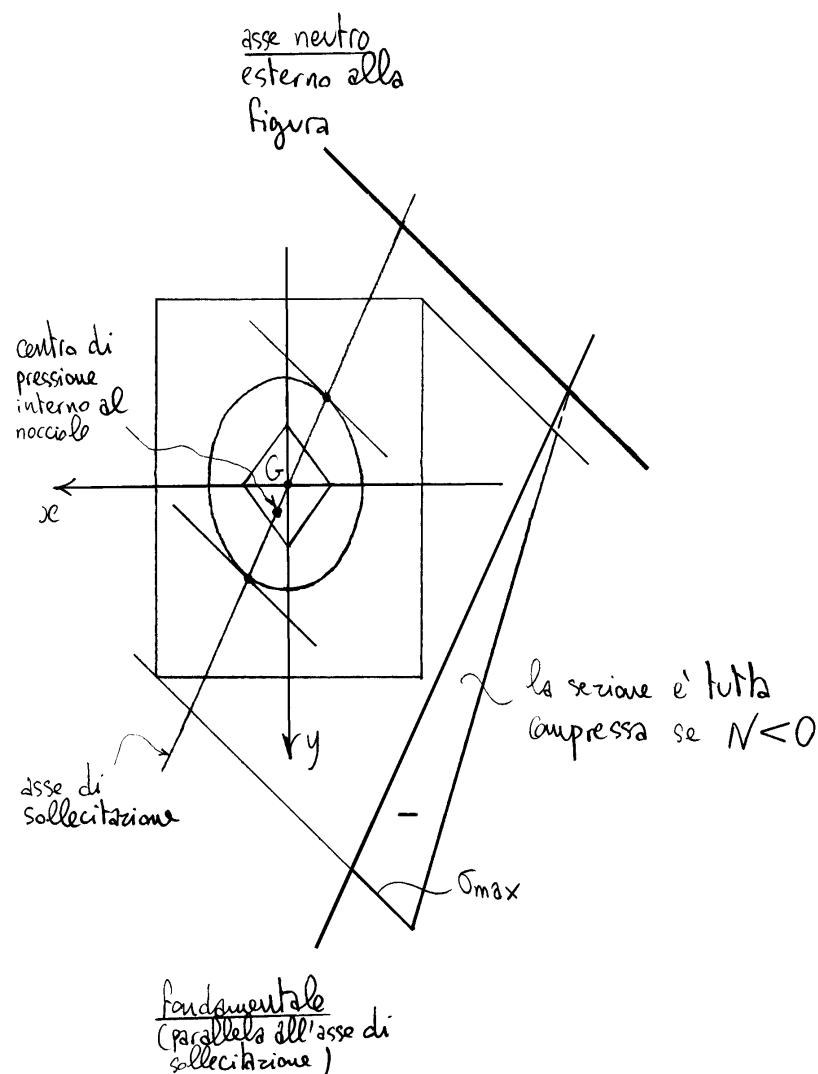
sull'asse x . Risulta:

$$\begin{cases} y_R = -I_x^2 / (-\frac{h}{2}) = \frac{h}{6}, \\ x_s = -I_y^2 / (-\frac{b}{2}) = \frac{b}{6}. \end{cases}$$

Per via della doppia simmetria, il nocciolo
centrale di inerzia del rettangolo è un rombo.



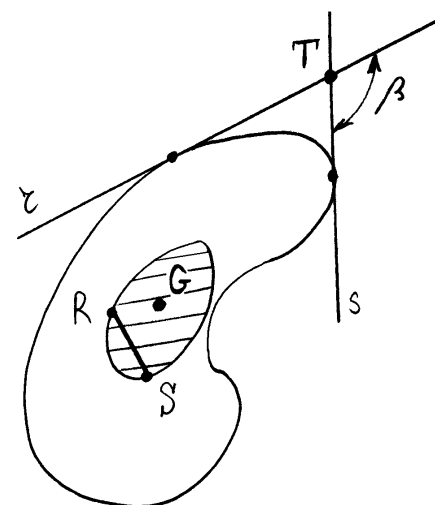
Come detto, se il centro di pressione appartiene al nocciolo
allora tutta la sezione risulta compressa come indicato
nella figura seguente.



5.6.5 Convessità del nocciolo centrale di inerzia

Un'ulteriore proprietà del nocciolo centrale di inerzia è che esso rappresenta una figura convessa. Ricordiamo che una figura è convessa se, dati due punti R ed S sul suo contorno, il segmento RS è tutto interno alla figura.

Siano allora R ed S due punti sul contorno del nocciolo centrale di inerzia e siano τ ed s le rispettive antipolari radenti la figura. Sia poi T il punto intersezione di τ e s . Le rette per T che non tagliano la figura definiscono l'angolo β che non contiene il



L'asse che separa le due parti deve soddisfare l'equazione $\sigma_z = 0$ e quindi rappresenta l'asse neutro. Tale asse deve dunque essere l'antipolare del punto C, nella corrispondenza individuata dalla sola area reagente. Per tale area, l'asse neutro rappresenta una retta radente e dunque C deve appartenere al contorno del nocciolo centrale di inerzia della sola area reagente.

Per esempio, se, data una sezione rettangolare, il centro di pressione giace sull'asse y alla distanza $h/4$ dal lato più vicino, allora $h/4$ deve uguagliare la terza parte dell'altezza totale della sezione reagente che risulta dunque essere $\frac{3}{4}h$.

Le caratteristiche della sezione reagente sono:

$$\begin{cases} A^* = \frac{3}{4}bh \\ J_x^* = \frac{1}{12}b\left(\frac{3}{4}h\right)^3 = \frac{9}{4 \times 64}bh^3 \end{cases},$$

ed inoltre il momento (rispetto al baricentro della sezione reagente) vale:

$$M_x^* = -\frac{1}{8}Nh,$$

dove N è la forza di compressione ($N > 0$).

La tensione $\sigma_{\max}$ vale dunque:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^*}{J_x^*} y^{**}.$$

dove:

$$y^{**} = \frac{3}{8}h,$$

è la distanza del baricentro (della sezione reagente) dal lembo compresso. Risulta quindi:

$$\sigma_{\max} = -\frac{4}{3} \frac{N}{bh} - \frac{4 \times 64}{9 \times 8} \frac{3}{8} \frac{N}{bh} = -\frac{8}{3} \frac{N}{bh},$$

Se la sezione fosse reagente anche a trazione risulterebbe invece:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{bh} - \frac{N \frac{h}{4}}{\frac{1}{12} bh^3} \frac{h}{2} = -\frac{5}{2} \frac{N}{bh}.$$

Si poteva più velocemente valutare la tensione massima facendo riferimento alla formula monovaria:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{S_n^*} s'',$$

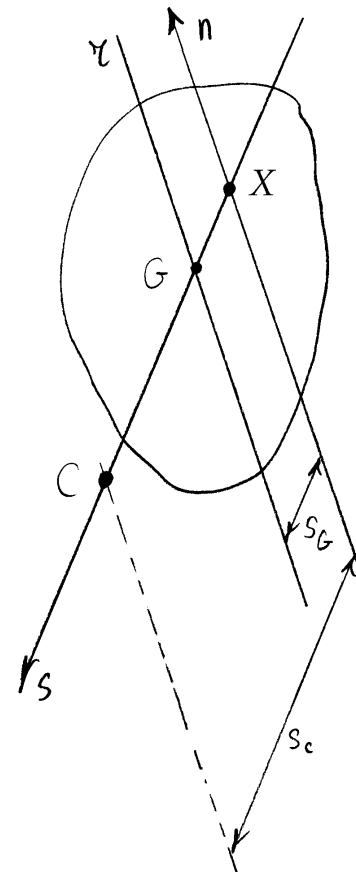
dove:

$$S_n = \left(b \frac{3}{4} h\right) \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} h\right) = \frac{9}{32} b h^2,$$

$$s'' = \frac{3}{4} h.$$

5.7 Sistema di masse-momenti statici

Si consideri la sezione retta della trave soggetta a sforzo normale eccentrico e siano n ed s l'asse neutro e l'asse di sollecitazione, rispettivamente.



Preso come riferimento il sistema Xns , e dette s_G ed s_c le coordinate del baricentro e del centro di pressione in tale sistema, la relazione tra la posizione della retta n e del suo centro relativo C risulta:

$$s_G (s_c - s_G) = \int_{\chi}^2 ,$$

dove χ è la retta parallela ad n per G .

Si ottiene:

$$s_G s_c = \int_{\chi}^2 + s_G^2 = \int_n^2 ,$$

avendo tenuto conto delle formule di trasposizione relative ai raggi di inerzia. Moltiplicando per la massa totale della sezione retta (l'area, nel caso omogeneo) si ottiene:

$$M s_G s_c = J_n ,$$

da cui:

$$S_n s_c = J_n ,$$

dove S_n rappresenta il momento statico rispetto all'asse neutro.

Si consideri ora in luogo del sistema di masse originario, di distribuzione di massa μ ($\mu \equiv E$, dove E è il modulo di Young, nel caso della teoria delle travi), il sistema di masse momenti-statici che si ottiene moltiplicando le masse unitarie μ per le loro distanze s dall'asse neutro. Se si calcolano i momenti statici $S_n^{(n)}$ e $S_s^{(n)}$ di tale sistema di masse rispetto agli assi neutro e di sollecitazione rispettivamente, si ottiene:

$$S_n^{(n)} = \int_A (\mu s) s dA = J_n ,$$

$$S_S^{(n)} = \int_A (\mu s) n dA = J_{ns}.$$

Poiché $J_{ns} = 0$, il baricentro $G^{(n)}$ di tale sistema di masse – momenti statici, detto centro relativo della retta n , appartiene all'asse di sollecitazione s . Inoltre, la massa totale $M^{(n)}$ del nuovo sistema di masse risulta:

$$M^{(n)} = \int_A (\mu s) dA = S_n.$$

Quindi, la relazione tra C ed n si scrive:

$$M^{(n)} s_C = S_n^{(n)},$$

e tale relazione mostra che il centro di sollecitazione C coincide con il centro relativo della retta n , cioè con il baricentro del sistema di masse – momenti statici (relativi all'asse neutro).

Le masse – momenti statici sono distribuite sulla figura originaria.

Se la retta n è radente la figura le masse – momenti statici hanno tutte lo stesso segno e ne consegue che il centro relativo C , quale loro baricentro,

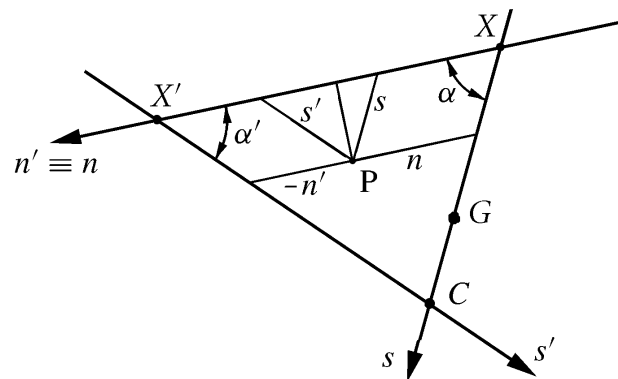
deve essere interno all'involuppo delle rette radenti.

Questo significa che il contorno del nocciolo centrale di inerzia, e quindi tutto il nocciolo, è interno all'involuppo delle rette radenti.

Inoltre, se n è una retta non baricentrica allora le rette coniugate della retta n passano per l'antipolo C di n , e viceversa se una retta s' passa per l'antipolo C di n allora s' è coniugata di n . In altre parole il fascio di rette di sostegno l'antipolo C di n individua tutte e solo le rette coniugate di n .

Infatti sia s' una retta per C . Il generico punto P ha coordinate (n, s) nel sistema Xns e (n', s') nel sistema $X'n's'$ (con $n' \equiv n$), come indicato in figura. Risulta $s' = s \sin \alpha / \sin \alpha'$ e quindi:

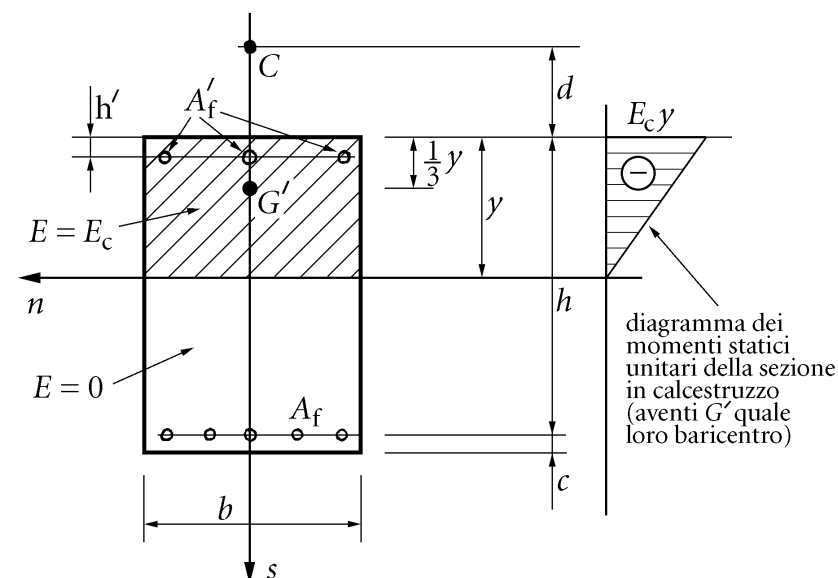
$$J_{n's'} = \int_A E n' s' dA = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \int_A (E s) n' dA = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} S_{s'}^{(n)} = 0,$$



poichè il momento statico $S_{s'}^{(n)}$ rispetto all'asse s' del sistema di masse momenti statici relativi all'asse n è nullo dato che la retta s' è baricentrica di tale sistema di masse.

5.7.1 Sezione rettangolare in cemento armato a doppia armatura

Se il centro di pressione è esterno al nocciolo centrale di inerzia dell'intera sezione omogeneizzata (ottenuta moltiplicando per $n = E_a/E_c$ le aree di acciaio), la sezione di calcestruzzo risulta parzializzata dall'asse neutro. Sia y la distanza dell'asse neutro dal lembo del calcestruzzo compresso, posto dalla parte del centro di pressione.



Allora risulta che la massa totale dei momenti statici rispetto a n dell'area di calcestruzzo reagente vale:

$$-\frac{1}{2}b(E_c y)y,$$

mentre la distanza del baricentro dalle masse momenti statici dell'area di calcestruzzo reagente dal centro di sollecitazione risulta:

$$\frac{1}{3}y + d.$$

Imponendo la condizione che C sia baricentrico del sistema di masse-momenti statici (relativi all'asse neutro stesso), si ottiene:

$$\left\{-\frac{1}{2}b(E_c y)y\right\}\left(\frac{1}{3}y + d\right) + E_a A_f(h-y)(h+d) - E_a A'_f(y-h')(h'+d) = 0.$$

Ne risulta la seguente equazione di terzo grado:

$$\frac{b}{6}y^3 + \frac{bd}{2}y^2 + n\{A_f(h+d) + A'_f(h'+d)\}y - n\{A_f h(h+d) + A'_f h'(h'+d)\} = 0.$$

Tale equazione ha una sola variazione di segno e

questo implica che ammette una sola radice reale.

Nota y , e nota la sezione reagente e può essere calcolato il momento statico rispetto all'asse neutro dell'area reagente, omogeneizzata all'area di calcestruzzo:

$$S_n = -\frac{by^2}{2} + nA_f(h-y) - nA'_f(y-h'),$$

senza altro negativo nel caso in esame poiché il baricentro della sezione reagente si deve trovare tra C e n .

La tensione massima nel calcestruzzo compresso risulta:

$$\sigma_c = -\frac{N}{S_n}y,$$

la tensione nell'acciaio teso risulta:

$$\sigma_a = n\frac{N}{S_n}(h-y),$$

ed infine la tensione nell'acciaio compresso risulta:

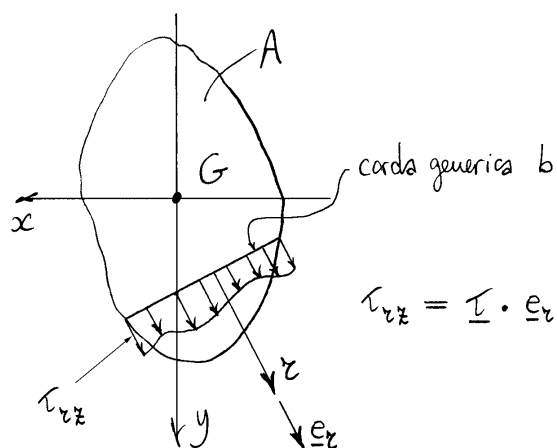
$$\sigma_a' = -n \frac{N}{S_n} (y - h').$$

Si noti che non è possibile risolvere il caso della forza normale eccentrica per una sezione in cemento armato sovrapponendo gli effetti di una forza normale centrata con quello di una (o due) flessioni rette, poi = che nei diversi casi le sezioni reagenti sono diverse.

Capitolo 6

Tensioni tangenziali

Per quel che riguarda le tensioni tangenziali, nel modello di trave inflessa non si ha a disposizione nessun legame costitutivo. Tenendo conto che il problema generale non può essere risolto in tale ambito, risulta però possibile ottenere delle informazioni parziali utilizzando il solo equilibrio. In particolare, può essere



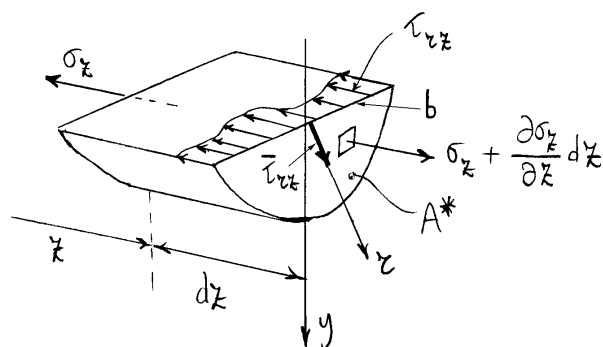
calcolata la tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{rz}$ su una corda generica, relativamente alla componente nella direzione z ortogonale alla corda:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{1}{b} \int_b \tau_{rz} db, \quad (1)$$

dove τ_{rz} è la componente puntuale, sempre ortogonale alla corda e b è la corda generica (di lunghezza b).

A tale scopo, ci si riferisce al caso particolare di trave ad asse rettilineo a sezione costante caricata solo alle due estremità (modello di Saint Venant).

Si consideri allora l'equilibrio alla traslazione in direzione dell'asse della trave della porzione di trave che si ottiene sezionando un elemento dz di trave (intorno della generica sezione di coordinata z) con un piano longitudinale passante per la corda b . Le componenti lungo l'asse z delle forze che agiscono sulla porzione



di trave sono:

— σ_z sulla porzione A^* della sezione di coordinata z ,

$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$ sulla porzione A^* della sezione di coordinata $z+dz$,

— τ_{xz} sulla sezione longitudinale,

avendo tenuto conto del teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali e supponendo z orientato verso l'interno dell'area A^* .

L'equilibrio si scrive pertanto:

$$-\int_{A^*} \sigma_z dA + \int_{A^*} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA - \int_b \tau_{xz} dz db = 0,$$

e cioè:

$$\int_b \tau_{xz} db = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA,$$

In virtù della (1), la tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{xz}$ risulta pertanto:

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b} \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA. \quad (2)$$

6.1 Formula di Jourawski binomia

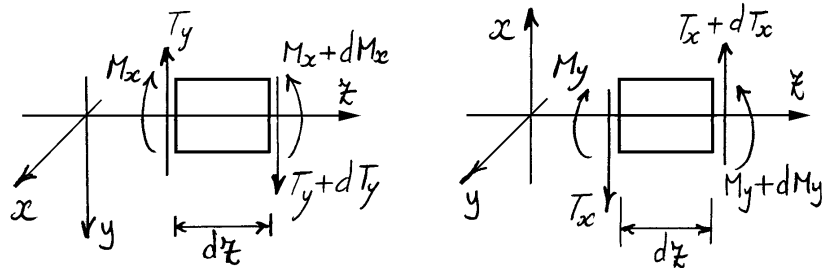
Derivando la formula di Navier si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{dM_x}{dz} \frac{y}{I_x} - \frac{dM_y}{dz} \frac{x}{I_y}. \quad (3)$$

poiché la forza normale, nel caso di trave caricata solo alle estremità, è costante.

Le equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione attorno agli assi x e y si scrivono:

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y, \quad \frac{dM_y}{dz} = -T_x. \quad (4)$$



Si noti che anche T_x e T_y sono costanti e che quindi è costante anche il taglio complessivo T di cui T_x e T_y sono componenti.

La (3), con le (4), diviene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{J_x} y + \frac{T_x}{J_y} x. \quad (5)$$

Sostituendo la (5) nella (2) si ottiene infine la formula di Jourawski:

$$\tau_{rz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} + \frac{T_x S_y^*}{b J_y}, \quad (6)$$

dove:

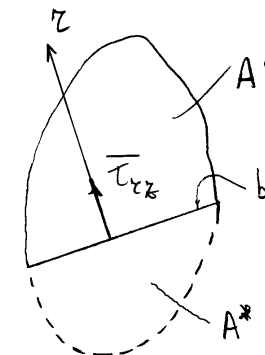
$$S_x^* = \int_{A^*} y dA, \quad S_y^* = \int_{A^*} x dA, \quad (7)$$

rappresentano i momenti statici rispetto agli assi x

e y rispettivamente della porzione A^* della sezione retta. Si noti che gli assi x e y sono baricentrici per l'intera sezione retta ma non, in generale, per una sua porzione.

Si noti anche che se τ_{rz} è positiva vuol dire che il suo verso è concorde con z , cioè vuol dire che τ_{rz} è entrante nella porzione A^* della sezione retta.

Se invece della porzione A^* della sezione retta si fosse scelta la porzione complementare A' si sarebbe pervenuti alla stessa formula, sotto la condizione di orientare z questa volta verso l'interno



di A' , e tenendo conto che ora i momenti statici da considerare sono quelli della porzione A' :

$$S'_x = \int_{A'} y dA, \quad S'_y = \int_{A'} x dA.$$

Tenendo conto che:

$$S'_x + S_x^* = \int_A y dA = 0,$$

$$S'_y + S_y^* = \int_A x dA = 0,$$

si ottiene:

$$\begin{cases} S'_x = -S_x^* \\ S'_y = -S_y^* \end{cases}.$$

Se ne deduce che utilizzando la porzione A^* , oppure la sua complementare A' , il risultato, a meno del segno, non cambia. Il cambiamento del segno è giustificato dal fatto che se τ_{xz} è entrante in A^* allora è positiva se τ è entrante

in A^* (come succede se si sceglie la porzione A^* dell'area) mentre è negativa se τ è uscente da A^* (come succede se si sceglie la porzione A' complementare di A^*).

La formula di Jourawski non fornisce la distribuzione puntuale delle tensioni tangenziali lungo la corda. Comunque, in tutti quei casi in cui si può ritenere che tale distribuzione sulla corda sia simmetrica e lo spessore della corda sia piccolo rispetto alle altre dimensioni della sezione, appare lecito confondere il valore puntuale della τ_{xz} con quello medio $\bar{\tau}_{xz}$.

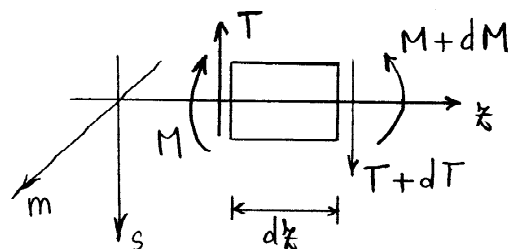
Inoltre, nel caso di travi snelle, le tensioni dovute al taglio sono più piccole di quelle dovute al momento flettente e pertanto la loro conoscenza puntuale non è sempre indispensabile da un punto di vista tecnico.

6.2 Formula di Jourawski monomia

Le ipotesi sono ancora quelle di trave ad asse rettilineo, omogenea e a sezione costante, caricata solo alle due estremità.

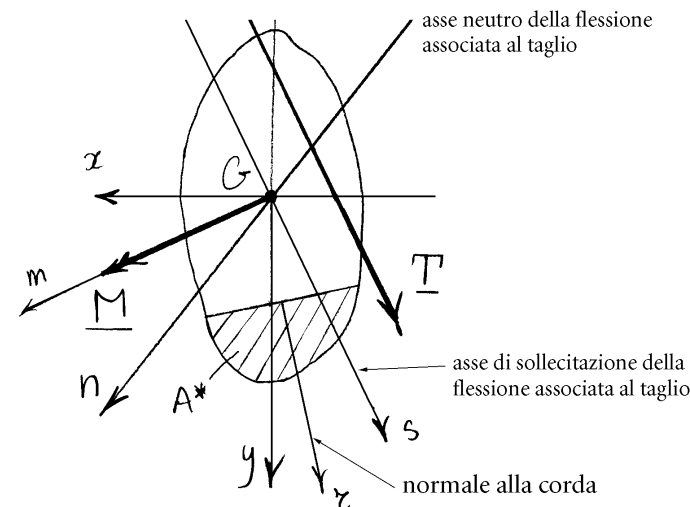
Si consideri allora la trave soggetta al taglio T costante. Si consideri poi l'asse s parallelo al taglio e passante per il baricentro. Nel piano sz , per equilibrio, deve agire un momento flettente M , di cui s rappresenta l'asse di sollecitazione, tale che:

$$\frac{dM}{dz} = T. \quad (8)$$



L'asse n coniugato di s rappresenta l'asse neutro della flessione associata al taglio T , flessione dovuta al momento flettente M che agisce nel piano sz . Questa è l'unica caratteristica della sollecitazione che varia con z e fornisce quindi tutta la variazione della σ_z con z . Poiché la tensione normale dovuta al momento flettente M vale:

$$\sigma_z = \frac{M}{J_n} s, \quad (9)$$



si ottiene infine:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{dM}{dz} \frac{s}{J_n} = \frac{T}{J_n} s. \quad (10)$$

Inserendo la (10) nella (2) si ottiene infine la versione monomia della formula di Jourawski:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{1}{b} \int_{A^*} \frac{T}{J_n} s dA = \frac{T S_n^*}{b J_n},$$

dove S_n^* e J_n sono valutati misurando le distanze nella direzione dell'asse di sollecitazione (della flessione associata al taglio).

6.3 Criteri di snervamento

Nel caso di taglio e torsione sono generate delle tensioni tangenziali sulla sezione retta. Non è quindi possibile confrontarsi direttamente con la tensione di snervamento, che è stata definita nel caso di uno stato di tensione monoassiale. Si può, a tale scopo, introdurre il concetto di tensione ideale quale tensione monoassiale equivalente ad uno stato di tensione generico. Se σ_i indica la tensione ideale e σ_s^+ e σ_s^- le tensioni di snervamento rispettivamente a trazione e compressione allora la condizione di appartenenza al dominio elastico richiede:

$$\sigma_s^- \leq \sigma_i \leq \sigma_s^+ .$$

Limitandosi al caso dei materiali metallici, ovvero sia dei materiali duttili, la tensione ideale può calcolarsi, utilizzando il criterio di Huber-von Mises, con la formula:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau ,$$

dove τ è il modulo della tensione tangenziale che agisce sulla sezione retta. Naturalmente la tensione

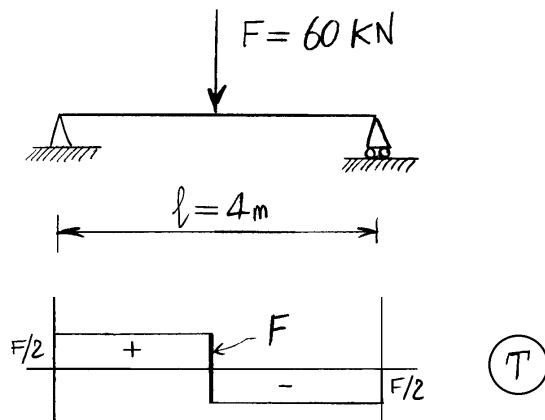
tangenziale varia da punto a punto e quindi la verifica del raggiungimento della condizione di snervamento va eseguita nei punti maggiormente sollecitati. Se oltre al taglio a al momento torcente agiscono anche dei momenti flettenti e delle forze normali nella sezione è anche presente una tensione normale σ . In tal caso la tensione ideale, sempre utilizzando il criterio di Huber-von Mises, si calcola come segue:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} .$$

Si noti che tale formula, come d'altronde la precedente, fornisce sempre un valore positivo, il che non è limitativo poiché i materiali metallici hanno uguale snervamento a trazione e compressione.

6.4 Esempio (sezione a doppio T)

Si consideri una trave IPE 270 appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico di 60 kN in mezzera.



Nella prima metà della trave il taglio è positivo e vale:

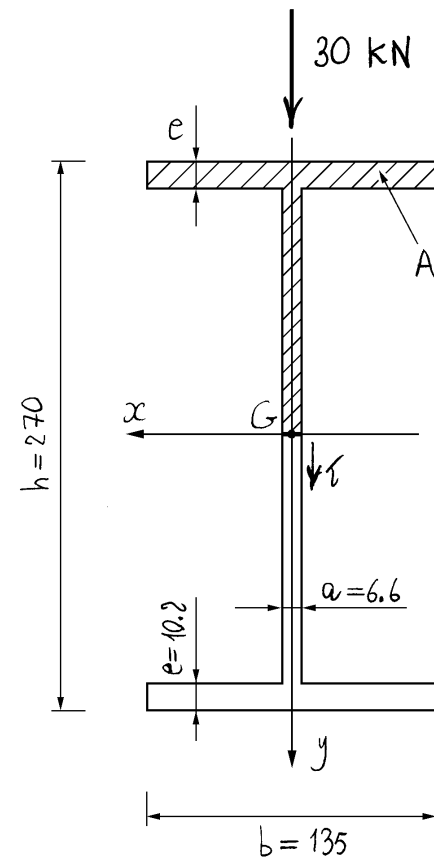
$$T = 30 \text{ kN}.$$

Si vuole calcolare la tensione tangenziale media lungo la corda baricentrica. Il taglio T agisce secondo l'asse y , che quindi coincide con l'asse di sollecitazione. L'asse neutro coincide con l'asse x e occorre quindi

valutare il momento statico di mezza sezione rispetto a tale asse:

$$S_x^* = - \left\{ b e \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) + a \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \right\}$$

$$= - \left\{ 13.5 \times 1.02 \times 12.99 + 0.66 \times \frac{(12.99)^2}{2} \right\} = -235 \text{ cm}^3.$$



IPE 270

$$J_x = 5790 \text{ cm}^4$$

nella figura le misure
sono in mm

La tensione tangenziale media lungo la corda baricentrica vale quindi:

$$\tau = \frac{\sum S_x^*}{a J_x} =$$

$$= - \frac{3 \times 10^4 \text{ N} \times 235 \times 10^3 \text{ mm}^3}{6.6 \text{ mm} \times 5.790 \times 10^7 \text{ mm}^4} = -18.45 \text{ N/mm}^2$$

Il segno negativo significa che la tensione tangenziale è uscente dall'area A^* prescelta.

Poichè la sezione è simmetrica rispetto all'asse y la tensione tangenziale può ritenersi costante lungo la corda e la tensione tangenziale media rappresenta dunque la tensione puntuale.

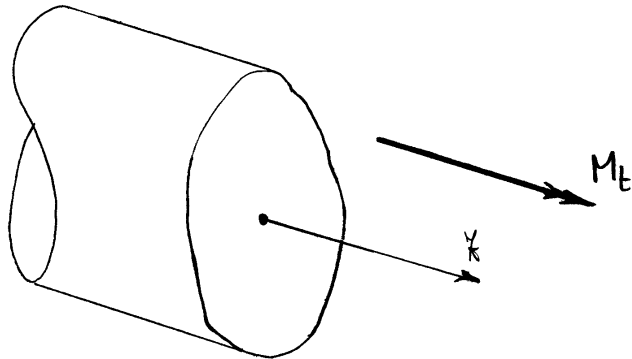
In corrispondenza della corda baricentrica la tensione normale è nulla. Lungo tale corda si ottiene quindi la seguente tensione ideale:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau = 31.96 \text{ N/mm}^2.$$

Capitolo 7

Torsione

Una sezione retta è soggetta a torsione se l'unica caratteristica della sollecitazione agente è un momento torcente, ovvero una coppia agente nel piano della sezione, con



asse momento ortogonale al piano della sezione. La soluzione generale del problema della torsione si ottiene nell'ambito del problema di Saint Venant. Qui ci limiteremo a discutere la torsione per le sezioni circolari e per le sezioni sottili, aperte e chiuse, utilizzando le sole equazioni di equilibrio ed eventualmente anticipando qualche risultato della soluzione del problema generale.

7.1 La sezione circolare

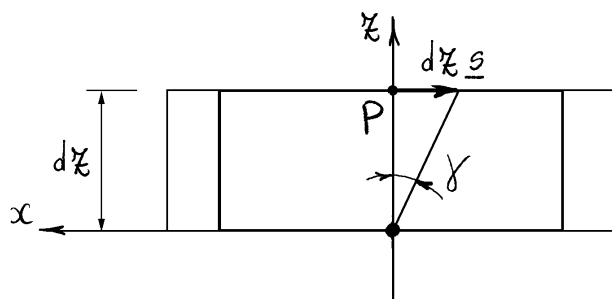
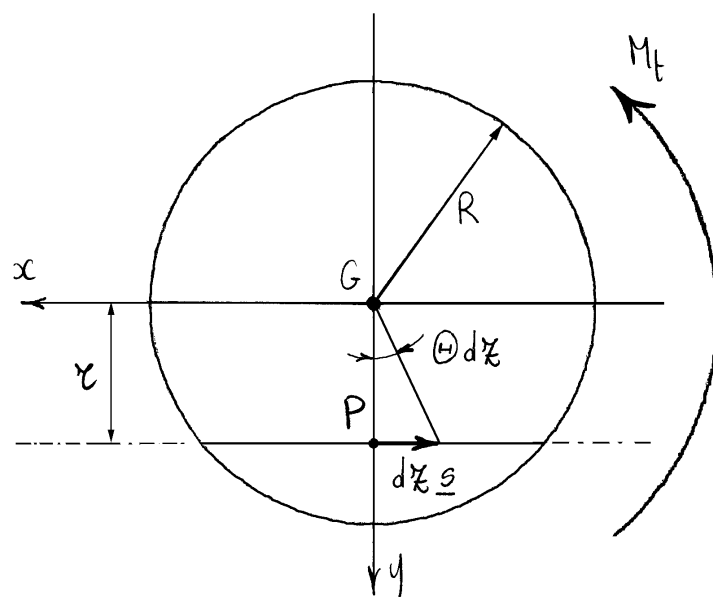
Si consideri un tronco di trave lungo dx . Se Θ indica l'angolo unitario di torsione, la rotazione relativa tra le due sezioni di estremità del tronco vale Θdx . Sia P un generico punto della sezione retta. Se la rotazione relativa avviene attorno al baricentro, lo spostamento $\underline{s}$ per unità di linea del punto P vale:

$$\underline{s} = \Theta \underline{e}_x \times (P-G) = \Theta \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G),$$

dove $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è la rotazione di 90° nel piano della sezione in senso antiorario. Si noti che il modulo di $\underline{s}$ coincide con lo scorrimento γ tra la fibra longitudinale per P e la linea ortogonale a $(P-G)$ nel piano della sezione:

$$\gamma = \Theta r,$$

dove r è il modulo di $(P-G)$, ovvero la distanza di P da G . Ricordando la relazione costitu-



l'ipotesi elastica-lineare tra tensione tangenziale e scorrimento dedotta nell'ambito della prova di torsione semplice:

$$\tau = G \gamma,$$

si può allora assumere la seguente relazione costitutiva locale:

$$\underline{\tau} = G \Theta \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (\underline{P} - \underline{G}).$$

Poiché:

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (\underline{P} - \underline{G}) = \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix},$$

in componenti in un sistema di riferimento Gxy , si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -G \Theta y \\ \tau_{yz} = G \Theta x \end{cases}.$$

Integrando nell'area il contributo locale al momento torcente si ottiene:

$$\begin{aligned} M_t \underline{e}_z &= \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \times \underline{\tau} dA = \\ &= G \Theta \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \times \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (\underline{P} - \underline{G}) dA. \end{aligned}$$

Risulta:

$$(P-G) \times \underline{R} \frac{\pi}{2} (P-G) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x & y & 0 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (x^2 + y^2) \underline{e}_z,$$

e quindi:

$$M_t = G \oplus \int_A (x^2 + y^2) dA = G \oplus J_G, \quad (1)$$

dove J_G è il momento di inerzia polare rispetto al baricentro. In funzione del momento torcente, l'angolo unitario di torsione vale:

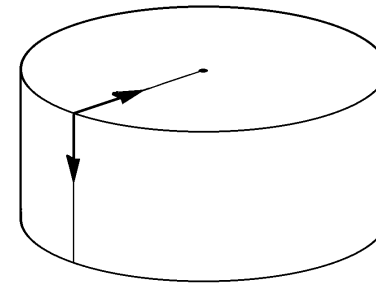
$$\oplus = \frac{M_t}{G J_G}, \quad (2)$$

e quindi la tensione tangenziale risulta:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_G} \underline{R} \frac{\pi}{2} (P-G) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{M_t}{J_G} y \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J_G} x \end{cases}. \quad (3)$$

Si noti che quanto sviluppato è valido solo per la

sezione circolare. Infatti, supponendo scarica la superficie laterale della trave, il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali richiede l'annullarsi, sul contorno, della componente ortogonale al contorno stesso della tensione tangenziale, poiché in caso contrario dovrebbe agire un'uguale componente tangenziale sulla superficie laterale della trave. Ne consegue che sul contorno la tensione tangenziale deve essere tangente al contorno stesso. In virtù della (3), la tensione tangenziale è invece ortogonale al vettore $P-G$. Poiché la direzione ortogonale al vettore $P-G$ è tangente al contorno in P , per ogni P sul contorno, se e solo se la sezione è circolare, ne risulta che la relazione (3) è accettabile



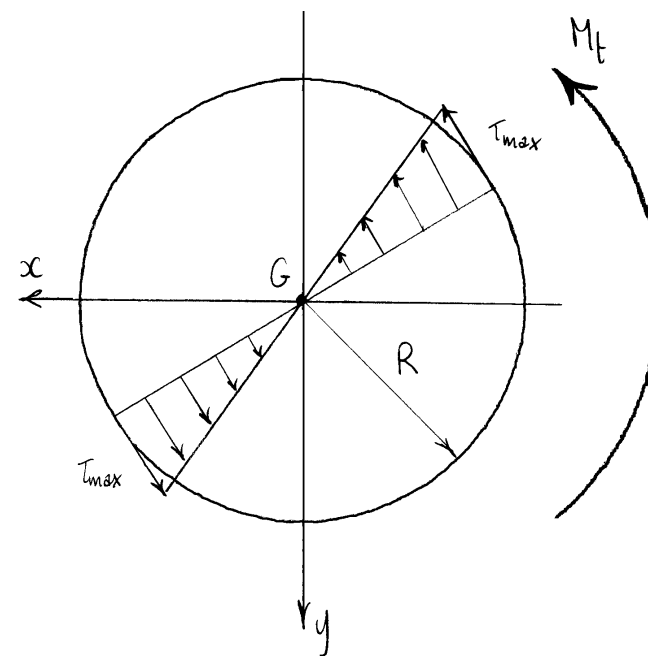
solo per la sezione circolare, come volevasi dimostrare.
Ricordiamo che nel caso della sezione circolare il momento di inerzia polare vale:

$$J_G = \frac{\pi}{2} R^4,$$

se R è il raggio della sezione.

Con riferimento ad un diametro della sezione circolare, la tensione tangenziale risulta in ogni punto ortogonale al diametro mentre il suo modulo è proporzionale alla distanza dal baricentro. Il diagramma rappresentativo lungo un diametro è dunque lineare, e risulta lo stesso per ogni diametro.

Indicando ancora con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza dal baricentro, il modulo $\tau = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2}$ della tensione tangenziale totale vale:



$$\tau = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r.$$

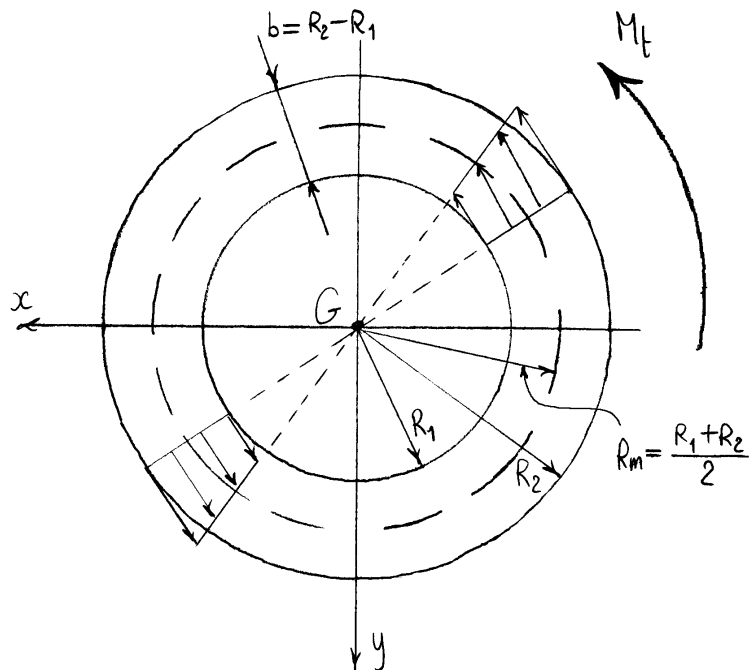
La tensione tangenziale massima è quella lungo il contorno dove $r = R$:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}.$$

7.2 La sezione circolare cava

La soluzione precedente resta valida nel caso di sezione circolare cava, poiché le condizioni al contorno sono soddisfatte anche lungo il contorno interno. In tal caso risulta:

$$J_G = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \pi (R_2^2 + R_1^2) \frac{R_1 + R_2}{2} (R_2 - R_1),$$



$$\tau = \frac{2 M_t}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} r, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t R_2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)}, \quad (r = R_2).$$

Notiamo che inoltre risulta:

$$\frac{\tau(R_2) - \tau(R_1)}{\tau\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)} = \frac{R_2 - R_1}{(R_1 + R_2)/2}.$$

La differenza $b = R_2 - R_1$ rappresenta lo spessore della sezione cava mentre $R_m = (R_1 + R_2)/2$ rappresenta il raggio della linea media della sezione cava.

Dunque, se:

$$\frac{b}{R_m} \ll 1,$$

allora la tensione tangenziale risulta praticamente

costante nello spessore (sezione circolare sottile chiusa).

Sotto la validità di tale condizione risulta:

$$\begin{aligned} R_1^2 + R_2^2 &= \left(R_m - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R_m + \frac{b}{2}\right)^2 = \\ &= 2R_m^2 + \frac{b^2}{2} = 2R_m^2 \left(1 + \frac{b^2}{4R_m^2}\right) \approx 2R_m^2, \end{aligned}$$

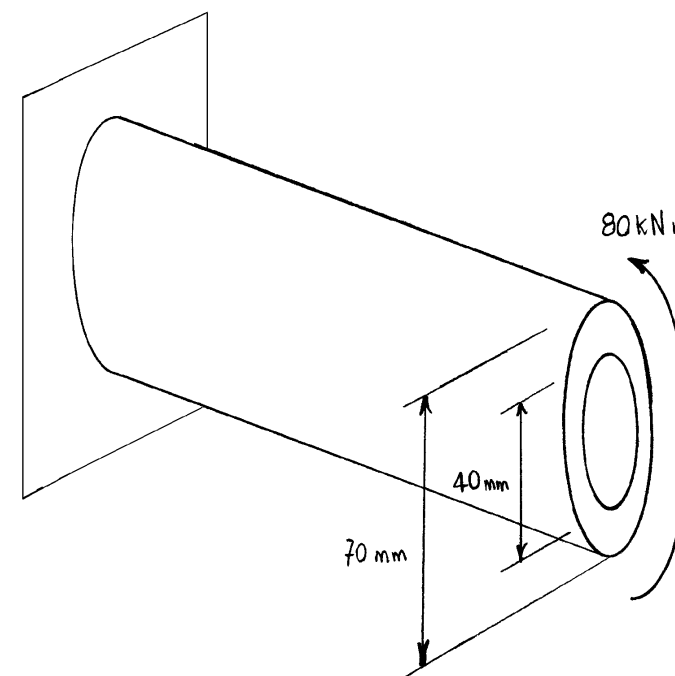
e dunque:

$$J_G \cong 2\pi b R_m^3,$$

che rappresenta il momento polare di una circonferenza di raggio R_m con distribuzione di massa per unità di linea pari allo spessore b .

7.2.1 Esempio (mensola di sezione circolare cava)

Si consideri la mensola in acciaio di sezione circolare cava illustrata in figura e soggetta ad una coppia torcente all'estremità di 80 kNm .



Il momento di inerzia polare vale:

$$J_G = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{70 \text{ mm}}{2}\right)^4 - \left(\frac{40 \text{ mm}}{2}\right)^4 \right\} = 3.369 \times 10^7 \text{ mm}^4,$$

e quindi la tensione tangenziale massima risulta:

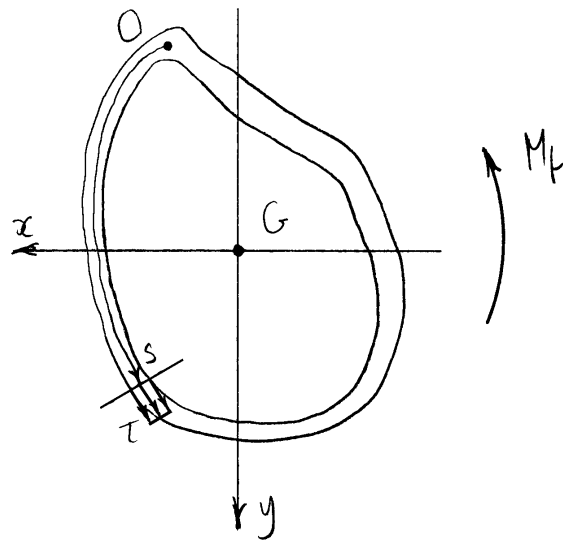
$$\tau_{\max} = \frac{8 \times 10^7 \text{ Nmm}}{3.369 \times 10^7 \text{ mm}^4} \frac{70 \text{ mm}}{2} = 83.10 \text{ N/mm}^2.$$

La tensione ideale massima vale:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_{\max} = 143.94 \text{ N/mm}^2.$$

7.3 La torsione nelle travi di sezione sottile chiusa

Si consideri una sezione sottile chiusa biconvessa.

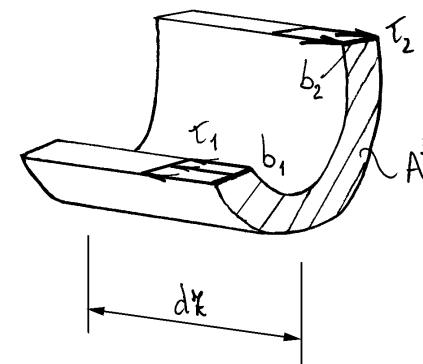
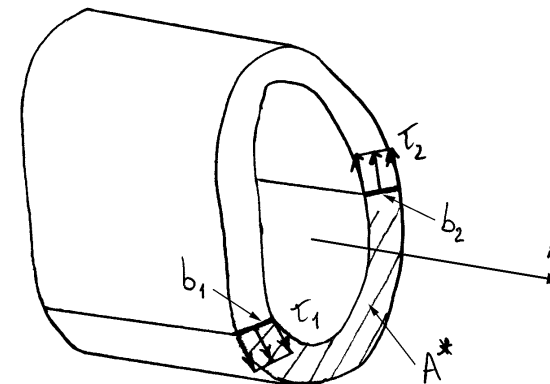


Se lo spessore è costante oppure “moderatamente” variabile si può assumere, senza grande errore, che le tensioni tangenziali lungo una corda siano parallele alla linea media. Infatti in tal caso il “flusso” delle tensioni sul contorno ha, almeno approssimativamente, la direzione del contorno stesso.

Inoltre ci si può aspettare, analogamente alla sezione circolare sottile, che le tensioni tangenziali si usino =

tengano costanti lungo una corda generica.

Si separi ora un pezzo di cilindro di lunghezza $d\zeta$ (intorno della generica sezione retta) e si eseguano due ulteriori sezioni con due piani paralleli all'asse ζ (piani longitudinali) e passanti per due corde generiche



di coordinate curvilinee (sulla linea media della sezione sottile chiusa) rispettivamente s_1 e s_2 .

Siano poi τ_1 e τ_2 le tensioni tangenziali agenti lungo le corde di coordinate s_1 e s_2 rispettivamente. Il segmento di trave che così si ottiene è soggetto, sulle due sezioni longitudinali, ad una tensione tangenziale due per il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali vale τ_1 nella sezione corrispondente alla corda s_1 e τ_2 nella sezione corrispondente alla corda s_2 .

L'equilibrio alla traslazione lungo la direzione z del segmento di trave richiede allora:

$$\tau_1 b_1 = \tau_2 b_2 ,$$

e cioè :

$$\tau b = \text{cost} ,$$

lungo la linea media.

Questo risultato è in accordo con la formula di Jourawski, poiché se agisce il solo momento torcente allora il taglio è nullo e la tensione tangenziale media lungo le due corde deve essere nulla :

$$\frac{\tau_1 b_1 - \tau_2 b_2}{b_1 + b_2} = 0 .$$

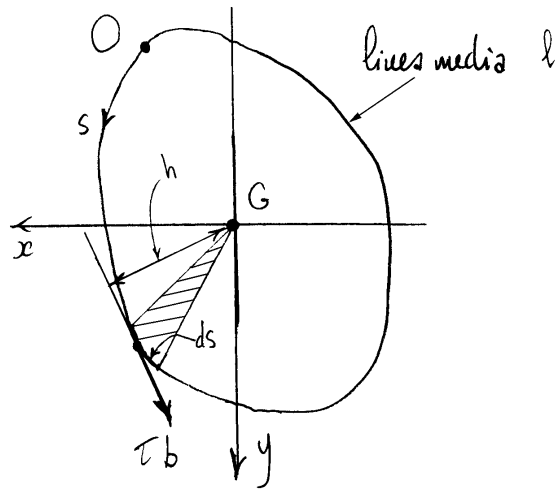
Si noti che la tensione τ_2 è uscente dall'area A^* e questo giustifica il segno negativo utilizzato.

L'equivalenza statica delle tensioni tangenziali con il momento torcente M_t applicato richiede poi:

$$M_t = \oint_l \tau b h ds = \tau b \oint_l h ds ,$$

poiché $\tau b = \text{cost}$. Si noti che, detta Ω l'area racchiusa dalla linea media l , risulta:

$$\Omega = \frac{1}{2} \oint_l h ds .$$



Si ottiene così la formula di Bredt :

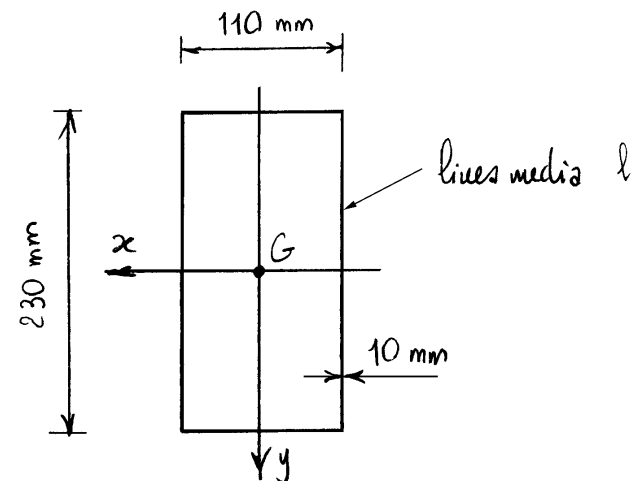
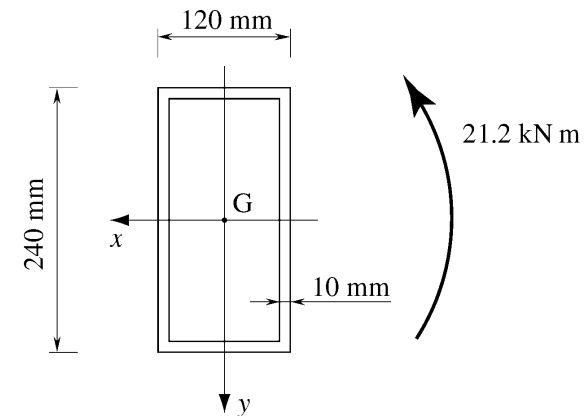
$$\tau = \frac{M_t}{2 \Omega b} .$$

La tensione tangenziale massima si raggiunge dunque quando lo spessore è minimo :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \Omega b_{\min}} .$$

7.3.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare)

Allo stesso esempio si consideri la sezione scatolare di figura, soggetta ad un momento torcente positivo di 21.2 kN/m.

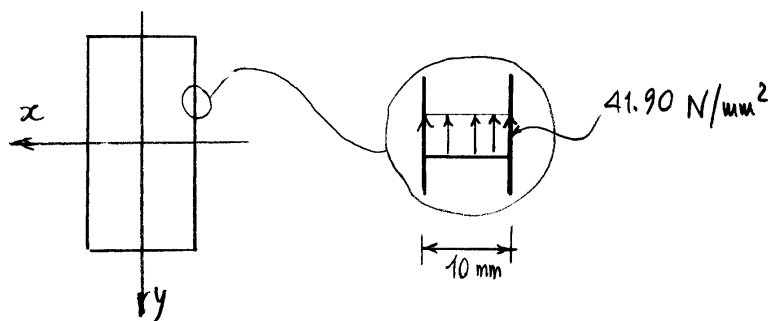


Estraendo la linea media, si ottiene il seguente valore dell'area racchiusa:

$$\Omega = 110 \text{ mm} \times 230 \text{ mm} = 25300 \text{ mm}^2.$$

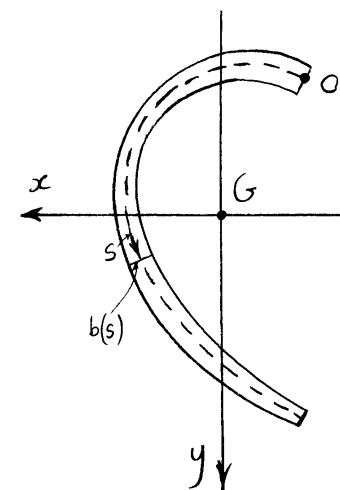
Poiché lo spessore è costante lungo tutta la linea media, la tensione tangenziale è pure costante e vale:

$$\tau = \frac{21.2 \times 10^6 \text{ N mm}}{2 \times 25300 \text{ mm}^2 \times 10 \text{ mm}} = 41.90 \text{ N/mm}^2.$$



7.4 La torsione nelle travi di sezione sottile aperta

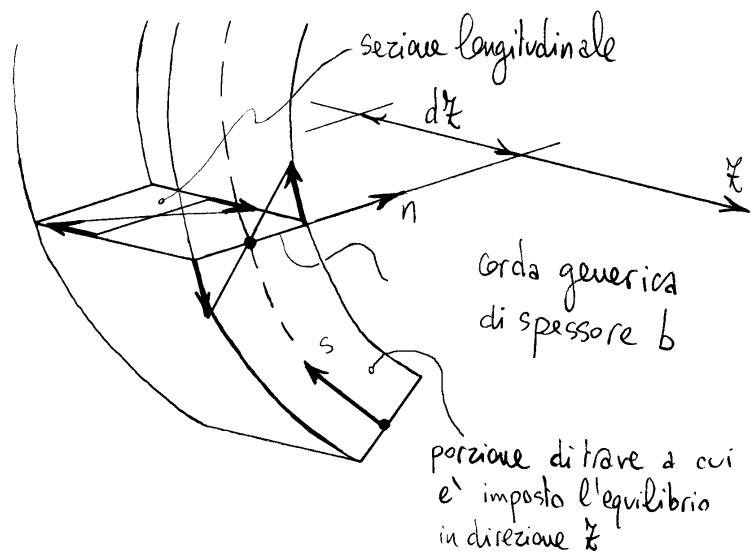
Si consideri una sezione sottile aperta generica. Come già per le sezioni sottili chiuse, le tensioni tangenziali lungo una corda possono assumersi parallele alla linea media per garantire che il “flusso” delle tensioni sul contorno abbia, almeno approssimativamente, la direzione del contorno stesso.



Inoltre, lungo una corda generica la tensione tangenziale media deve essere nulla:

$$\frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau \, dn = 0,$$

in conseguenza della formula di Jourawski. Ricordiamo che tale formula è ottenuta facendo l'equilibrio alla trazione nella direzione dell'asse x di una porzione di trave ottenuta sezionando un cuneo di trave di larghezza dx con una sezione longitudinale passante per la corda considerata. Ne consegue che la tensione tangenziale deve cambiare di segno lungo la corda e, nell'ipotesi di un andamento lineare, la tensione tangenziale lungo la corda deve essere emisimmetrica

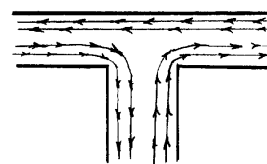


rispetto alla linea media.

Naturalmente, in prossimità dei bordi terminali della sezione oppure in corrispondenza di nodi della sezione o di brusche variazioni di spessore l'andamento delle tensioni tangenziali si discosterà anche notevolmente da quello illustrato. Ne consegue che la soluzione approssimata che andiamo ad illustrare ha validità solo ad una certa distanza da tali zone.



estremità



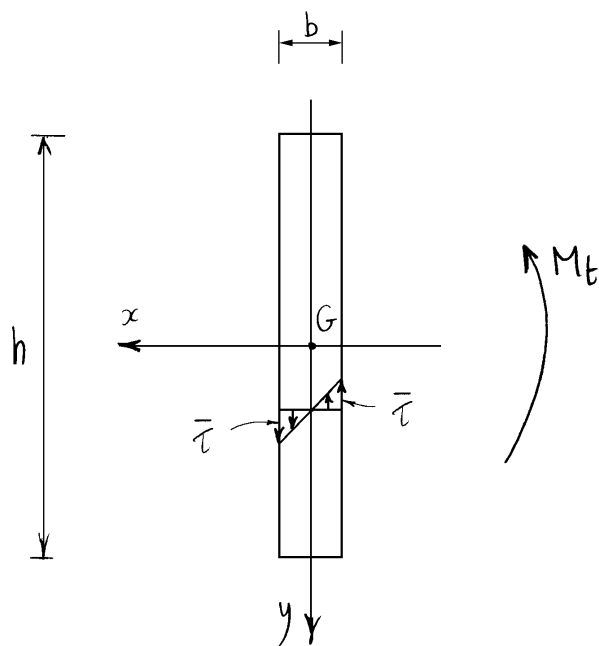
nodo



brusca variazione di spessore

7.4.1 La sezione rettangolare sottile

Si consideri innanzitutto una sezione rettangolare sottile e si consideri una distribuzione lineare emisimmetrica lungo una corda generica delle tensioni tangenziali. Si supponga inoltre che tali tensioni tangenziali siano costanti lungo la linea media. Il momento torcente per unità di linea generato dalle tensioni tan-



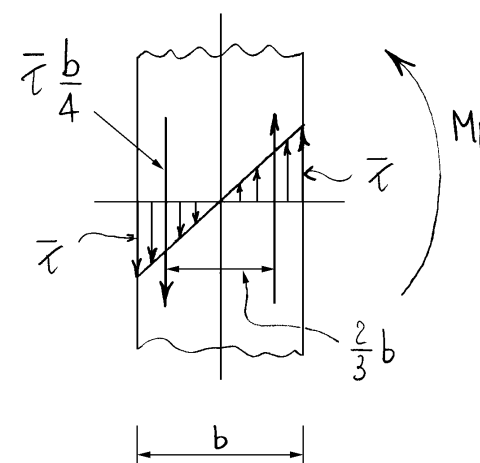
genziali agenti lungo una corda generica vale:

$$m_t = \left(\bar{\tau} \frac{b}{4} \right) \frac{2}{3} b = \frac{1}{6} \bar{\tau} b^2,$$

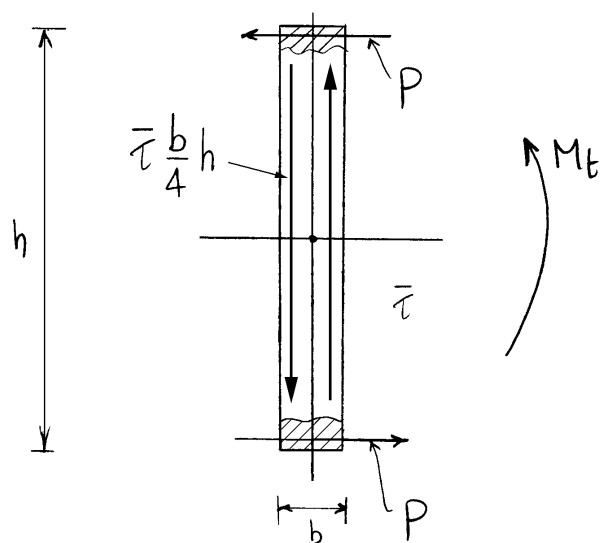
dove $\bar{\tau}$ è il valore della tensione tangenziale alle due estremità della corda. Il contributo globale $\bar{M}_t$ delle tensioni tangenziali agenti lungo le corde vale:

$$\bar{M}_t = \frac{1}{6} \bar{\tau} b^2 h,$$

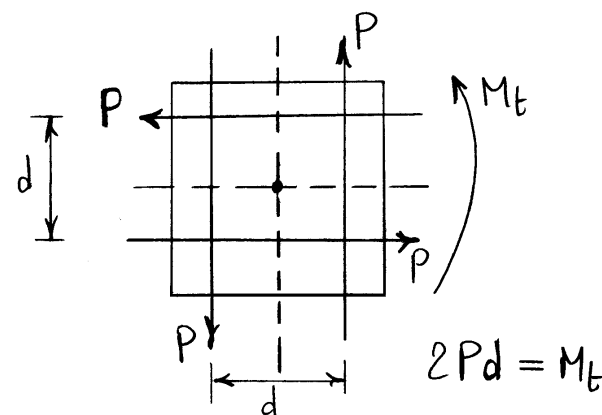
tenendo conto che i contributi m_t sono costanti lungo la linea media di lunghezza h .



Si consideri ora che sulle due basi del rettangolo sottile le tensioni tangenziali si devono disporre parallelamente alle basi stesse affinché, sul contorno, tali tensioni siano tangenti al contorno stesso. Ne consegue che in prossimità delle due basi vengono generate due forze compressive P parallele alle basi stesse costituenti una coppia di braccio h , cioè pari all'altezza del rettangolo. Queste due forze sono "piccole" ma hanno un braccio "grande", in opposizione alle due forze parallele all'altezza del rettangolo aventi un "grande" mo-



dulo ma un piccolo "braccio". Non deve quindi stupire che la coppia P generi approssimativamente un momento uguale a $\bar{M}_t$, cioè uguale al momento generato dalle tensioni tangenziali parallele all'altezza del rettangolo, come risulta dalla soluzione del problema di Saint-Venant. D'altronde ciò è senz'altro vero nel caso di una sezione quadrata per via della simmetria polare.



Tenendo conto di quanto detto deve dunque risultare:

$$2\bar{M}_t = M_t,$$

e quindi:

$$\bar{\tau} = 3 \frac{M_t}{b^2 h}.$$

La soluzione viene posta nella forma:

$$\bar{\tau} = \frac{M_t}{J_t} b,$$

dove J_t è detto fattore torsionale di rigidezza e vale:

$$J_t = \frac{1}{3} b^3 h.$$

Il nome di J_t dipende dal fatto che il legame costitutivo tra momento torcente ed angolo unitario di torsione, dedotto dalla soluzione del problema di Saint-Venant, può porsi nella forma:

$$M_t = G J_t \theta,$$

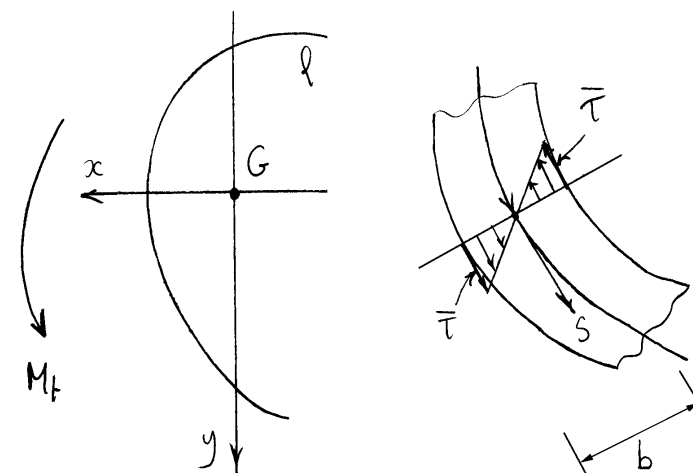
dove J_t , detto appunto fattore torsionale di rigidezza, nel caso di sezione rettangolare sottile assume l'espressione sopra riportata. Si noti inoltre che nel caso di sezione circolare coincide con il momento di inerzia polare.

7.4.2 La sezione sottile generica

La soluzione relativa alla sezione rettangolare sottile viene estesa alla sezione sottile generica ponendo:

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \frac{M_t}{J_t} b \\ J_t = \frac{1}{3} \int_A b^3 ds \end{cases}.$$

L'espressione riportata del fattore torsionale di rigidezza tiene conto della possibilità che la corda sia di spessore



variabile. L'integrale è esteso alla linea media l della sezione sottile. Se lo spessore è costante, il fattore torsionale di rigidezza è analogo a quello della sezione rettangolare sottile:

$$J_t = \frac{1}{3} b^3 l,$$

dove l è la lunghezza complessiva della linea media. Dato che M_t e J_t non dipendono da s , la tensione tangenziale massima $\tau_{\max}$ si ha in corrispondenza dello spessore massimo:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} b_{\max}.$$

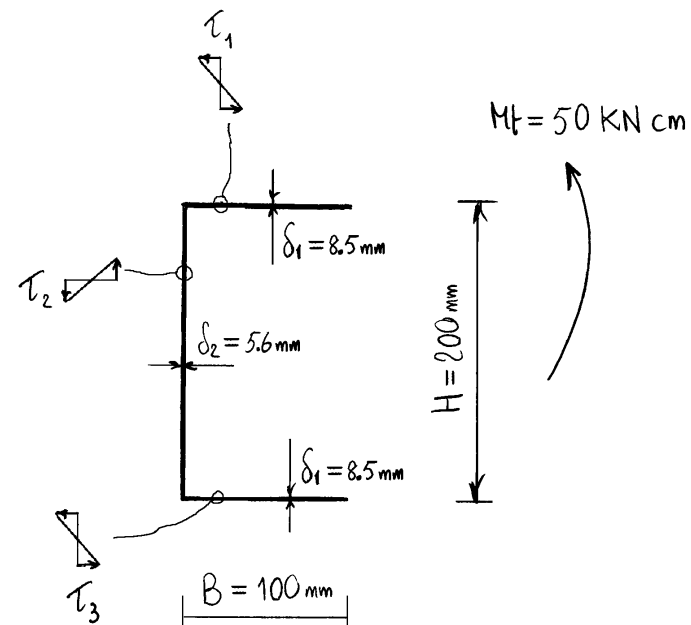
Nel caso di sezioni composte da elementi rettangolari sottili il fattore torsionale di rigidezza si scrive:

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 l_i,$$

dove b_i e l_i sono rispettivamente spessore e lunghezza del generico elemento rettangolare e la sommatoria è estesa a tutti gli elementi rettangolari.

7.4.3 Esempio (sezione a C)

Si consideri la sezione a C di figura, soggetta ad un momento torcente antiorario di 50 kN cm. Il fattore



torsionale di rigidezza vale:

$$J_t = \frac{2}{3} \delta_1^3 B + \frac{1}{3} \delta_2^3 H = 5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4 .$$

Lungo le ali la tensione tangenziale vale:

$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_3 &= \frac{M_t}{J_t} \delta_1 = \\ &= \frac{5 \times 10^5 \text{ Nmm}}{5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4} \times 8.5 \text{ mm} = 80.72 \text{ N/mm}^2 , \end{aligned}$$

mentre lungo l'anima risulta:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{M_t}{J_t} \delta_2 = \\ &= \frac{5 \times 10^5 \text{ Nmm}}{5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4} \times 5.6 \text{ mm} = 53.18 \text{ N/mm}^2 . \end{aligned}$$

Capitolo 8

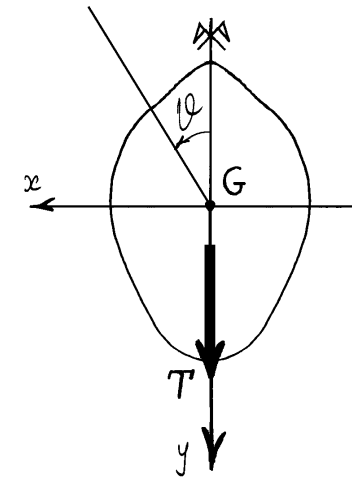
Taglio

8.1 Centro di taglio

Si definisce centro di taglio della sezione quel punto, se esiste, che disaccoppia l'effetto del taglio e del momento torcente. In altre parole, se un taglio passa per il centro di taglio l'angolo unitario di torsione è nullo (similmente al fatto che se lo sforzo normale è centrato sul baricentro la curvatura flessionale è nulla). Dunque, il centro naturale per descrivere le sollecitazioni dovute a taglio e momento torcente è il centro di taglio.

La rotazione torsionale dovuta ad un momento torcente deve inoltre avvenire intorno al centro di taglio per far sì che sia nullo lo scorrimento tra la linea dei centri di taglio e la sezione retta.

Se si considera un taglio passante per il centro di taglio, ne consegue che un momento torcente applicato non compie lavoro poiché la rotazione torsionale relativa

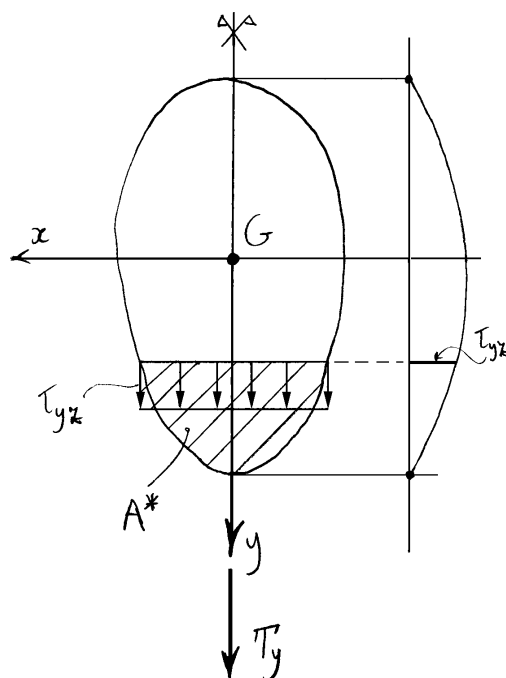


è nulla. Viceversa, la rotazione torsionale relativa $\Delta\varphi$ viene attorno al centro di taglio affinché un taglio passante per il centro di taglio non compia lavoro per effetto della rotazione torsionale.

Se la sezione ha un asse di simmetria, tale asse contiene il centro di taglio. Infatti, un taglio agente secondo l'asse di simmetria è simmetrico mentre una rotazione torsionale è emisimmetrica per cui un taglio agente secondo l'asse di simmetria non può provocare una rotazione torsionale.

8.2 Il taglio nelle travi di sezione compatta simmetrica

Si consideri una sezione compatta, simmetrica rispetto all'asse y e soggetta ad un taglio T_y avente quale retta d'azione (dunque passante per il centro di taglio). Per la simmetria del problema, la distribuzione delle tensioni tangenziali τ_{yz} , sulla generica corda ortogonale all'



l'asse y di simmetria, deve essere simmetrica. Utilizzando la formula di Jourawski e confondendo il valore puntuale con quello medio si ottiene:

$$\tau_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x},$$

dove al solito S_x^* rappresenta il momento statico di una delle due aree in cui la sezione viene divisa dalla corda.

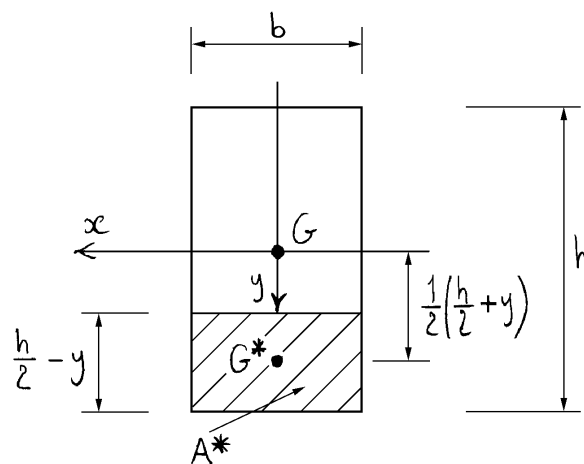
8.2.1 Sezione rettangolare

Nel caso della sezione rettangolare il momento statico dell'area A^* individuata dalla corda di coordinata y vale:

$$S_x^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Poiché:

$$J_x = \frac{bh^3}{12},$$

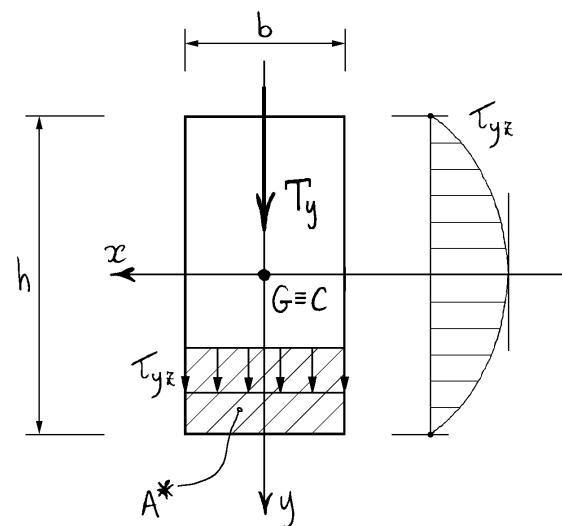


ne risulta infine:

$$\tau_{zy} = \frac{6 T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Se si riportano i valori della T_{yz} a partire da una retta parallela alla retta y nella direzione ortogonale a y si ottiene quindi un diagramma parabolico il cui asse coincide con l'asse x .

Si noti che la T_{yz} è tangente al contorno e come tale soddisfa le condizioni al contorno. La componente τ_{xz} è dunque nulla alle due estremità e si suppone, in via approssimata, che sia nulla ovunque. La componente T_{yz}

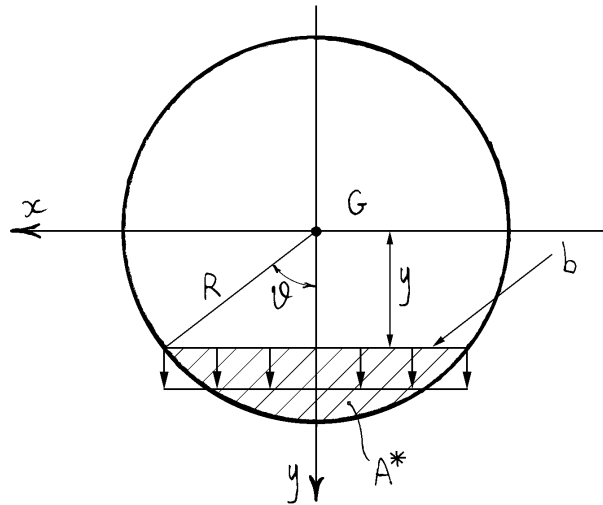


rappresenta quindi tutta la tensione tangenziale. La massima tensione tangenziale la si ha pertanto in corrispondenza della corda baricentrica dove $y=0$:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}.$$

8.2.2 Sezione circolare

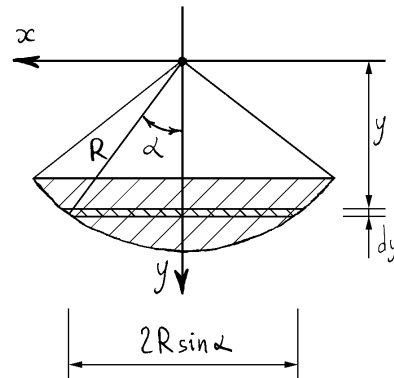
Si consideri ora una sezione circolare di raggio R . La corda generica è individuata dalla coordinata y . Detto ϑ l'angolo tra l'asse y e il raggio congiungente



una delle due estremità della corda risulta:

$$y = R \cos \vartheta.$$

Per valutare il momento statico relativo all'asse x dell'area A^* individuata dalla corda, si consideri l'elemento d'area generico individuato dall'angolo α , di lunghezza



$2R \sin \alpha$ e di altezza dy . Poiché:

$$y = R \cos \alpha,$$

risulta:

$$dy = -R \sin \alpha d\alpha.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} S_x^* &= \int_{\vartheta}^0 (2R \sin \alpha dy) y = - \int_{\vartheta}^0 2R^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= 2R^3 \int_0^{\vartheta} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta. \quad (1) \end{aligned}$$

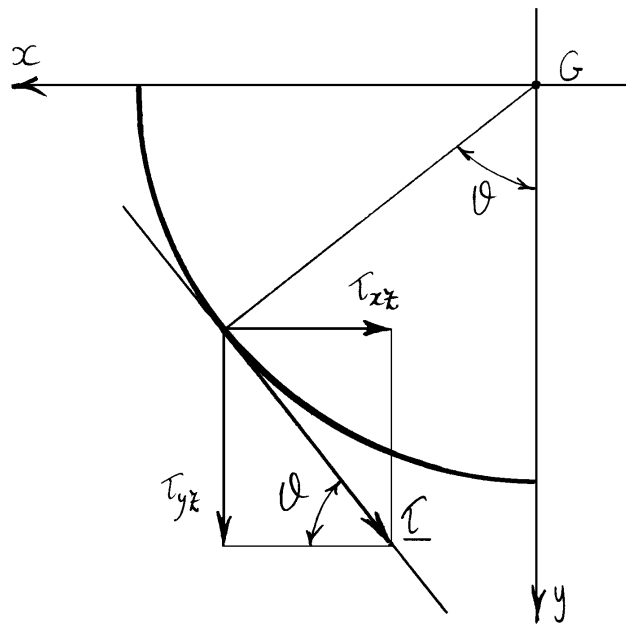
Tenuto conto che:

$$J_x = \frac{\pi}{4} R^4, \quad b = 2R \sin \vartheta,$$

si ha infine:

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin^2 \vartheta.$$

Si consideri ora che in generale la componente τ_{yz} non è tangente al contorno. È dunque necessaria una componente τ_{xz} che renda la tensione tangenziale totale tangente al contorno.



Risulta quindi:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{\tau_{yz}}{\tan \vartheta} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ |\tau| = \frac{|\tau_{yz}|}{\sin \vartheta} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta, \end{cases} \quad (2)$$

all'estremità della corda di coordinata $x = R \sin \vartheta$.
Nell'altra estremità la τ_{xz} ha lo stesso modulo e segno opposto. Ipotezzando una variazione lineare

di τ_{xz} lungo la corda, il valore massimo in modulo della tensione tangenziale lungo la corda lo si ha alle due estremità. La tensione tangenziale massima sulla sezione la si ha dunque nei punti intersezione del contorno con l'asse x , individuati dall'angolo $\vartheta = \pi/2$:

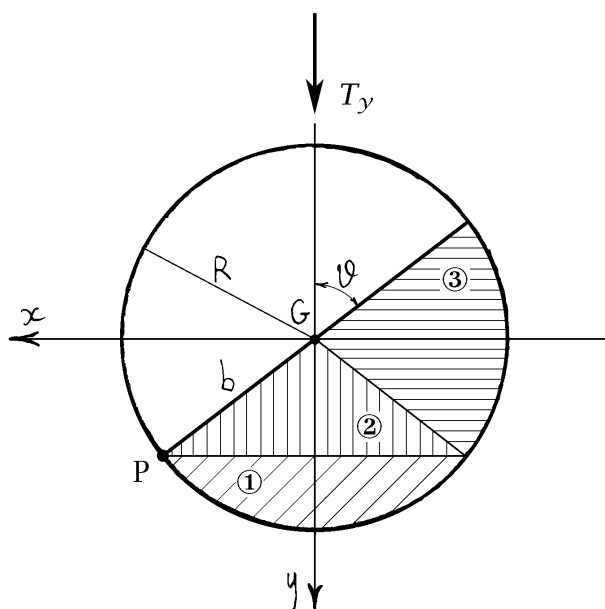
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2}.$$

Si vuole ora verificare la formula (2) che fornisce il modulo $|\tau|$ della tensione tangenziale totale nel punto P del contorno individuato dall'angolo ϑ . A tal fine si consideri quale corda il diametro per P, ortogonale a τ . Per valutare τ è dunque sufficiente calcolare il momento statico dell'area A^* individuata da tale diametro. Tale area può essere divisa nelle tre parti indicate in figura. Della prima parte il momento statico è già stato calcolato ed è fornito dalla (1):

$$S_x^{1*} = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta.$$

La seconda parte è un triangolo isoscele con vertice nel baricentro, di base $2R \sin \vartheta$ e di altezza $R \cos \vartheta$ per cui risulta, applicando il teorema di Varignon:

$$\begin{aligned} S_x^{2*} &= \left\{ \frac{1}{2} (2R \sin \vartheta) (R \cos \vartheta) \right\} \left\{ \frac{2}{3} R \cos \vartheta \right\} = \\ &= \frac{2}{3} R^3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta. \end{aligned}$$



Infine il contributo della terza parte è nullo, essendo tale parte simmetrica rispetto all'asse x . Si ha quindi:

$$S_x^* = S_x^{1*} + S_x^{2*} = \frac{2}{3} R^3 \sin \vartheta,$$

e ne risulta infine, per la formula di Jourawski:

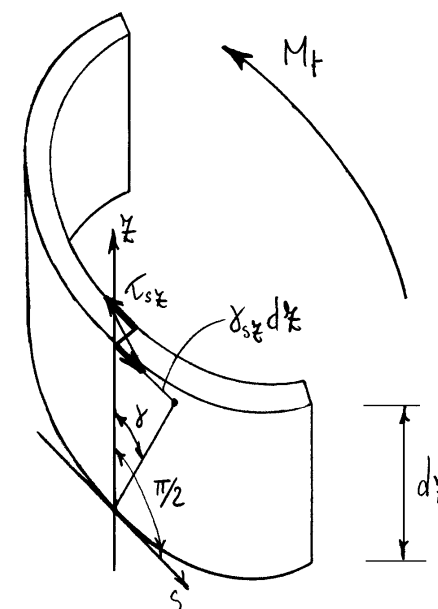
$$|\tau| = \frac{T_y S_x^*}{(2R) J_x} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta,$$

in accordo con la (2).

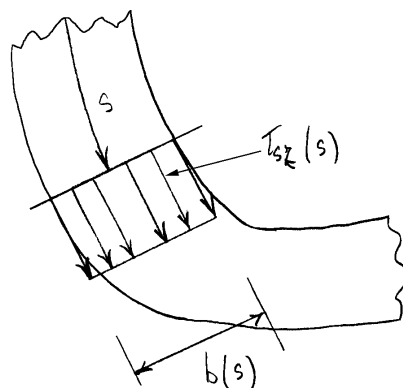
8.3 Il taglio nelle travi di sezione sottile aperta

Si faccia riferimento ad uno sforzo di taglio con retta d'azione passante per il centro di taglio C .

Si tenga conto che lo scorrimento associato alla tensione tangenziale τ_{sz} dovuta ad un momento torcente vale $\delta_{sz} = \tau_{sz} / G$. I punti di una corda, relativamente ad una sezione vicina, subiscono gli spostamenti $\delta_{sz} dz$, che, come le tensioni tangenziali, variano linearmente lungo la corda e sono



emisimmetrici rispetto alla linea media. Ne risulta che il lavoro mutuo delle tensioni tangenziali dovute al taglio T per gli scorrimenti γ_{sx} dovuti ad un momento torcente è nullo se le tensioni tangenziali dovute a T sono simmetriche lungo la corda. Inoltre, data la "piccolezza" dello spessore risulta accettabile supporre che la tensione tangenziale sia costante lungo la corda e quindi coincidente con il valore medio che può essere dedotto dalla formula di Jourawski, binomia:



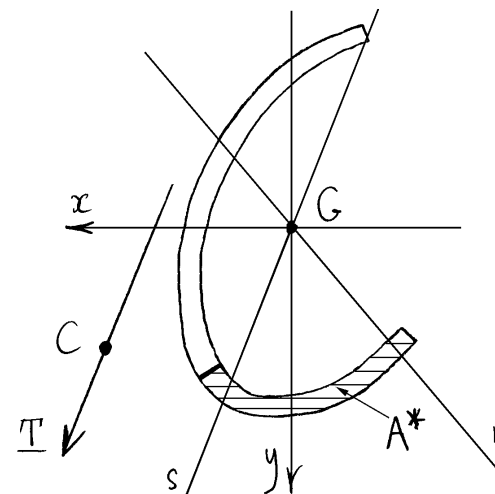
$$\tau_{sx} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} + \frac{T_x S_y^*}{b J_y} ,$$

oppure monomia:

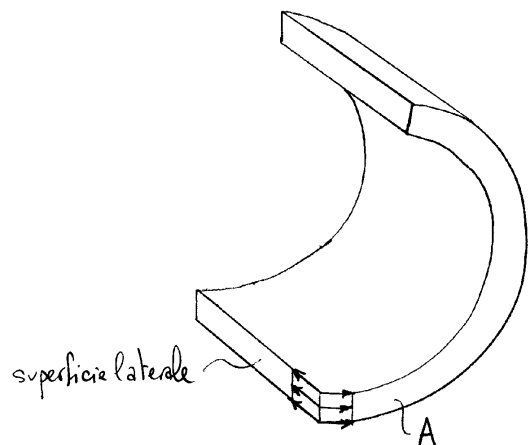
$$\tau_{sx} = \frac{T S_n^*}{b J_n} ,$$

dove al solito n è l'asse neutro della flessione associata al taglio T .

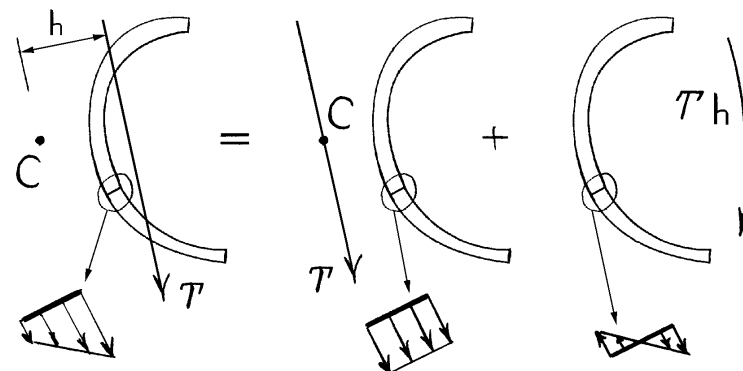
In una estremità libera la tensione tangenziale è nulla poiché l'area A^* o è nulla oppure coincide con tutta la sezione e quindi il momento statico S_n^* è nullo. Ciò è in accordo con il teorema di reciprocità delle ten=



sioni tangenziali. Infatti se le tensioni tangenziali non fossero nulle in una estremità libera allora per reciprocità dovrebbe essere presente una tensione tangenziale anche sulla superficie laterale della trave, come indicato in figura.



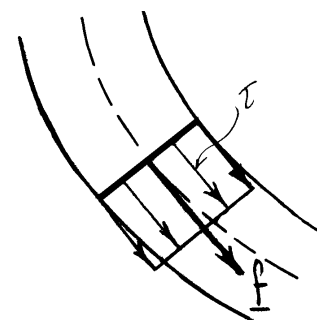
Si ribadisce che la tensione tangenziale può ritenersi costante, e quindi deducibile dalla formula di Jourawski se e solo se il taglio passa per il centro di taglio. In caso contrario la soluzione la si può ottenere per sovrapposizione delle soluzioni del taglio passante per il centro di taglio e del momento torcente rispetto al centro di taglio.



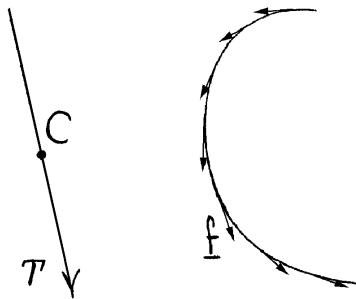
Se il taglio passa per il centro di taglio, la risultante $\underline{f}$ delle tensioni tangenziali agenti lungo una corda ha retta d'azione sulla linea media e vale:

$$\underline{f} = \frac{T S_n^*}{J_n}$$

Le forze per unità di linea $\underline{f}$ sono note, via formula di Jourawski, indipendentemente dalla conoscenza della po=

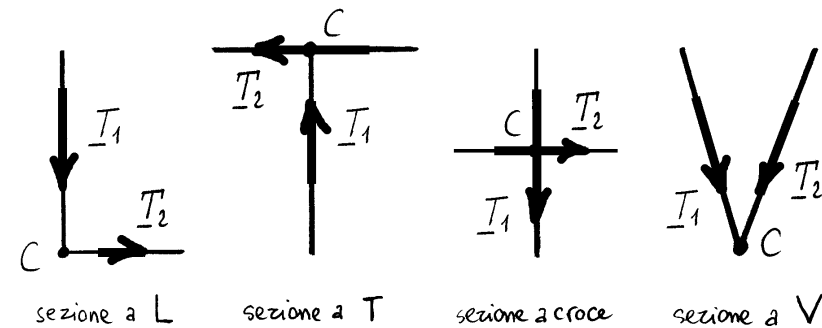


sizione del centro di taglio. Si consideri che la retta d'azione della risultante del sistema di forze $\underline{F}$ passa per il centro di taglio. Ne consegue che determinare tale retta d'azione equivale a determinare una retta che contiene il centro di taglio. Per determinare il centro di taglio è allora sufficiente determinare le rette d'azione delle risultanti di due distribuzioni di forze $\underline{F}$ corrispondenti a due tagli comunque inclinati tra loro.



In un eventuale tratto rettilineo, la distribuzione di forze $\underline{F}$ che gli compete ha risultante avente quale retta d'azione la linea media del tratto.

Ne consegue che se una sezione sottile è composta di due tratti rettilinei, il centro di taglio coincide con l'intersezione



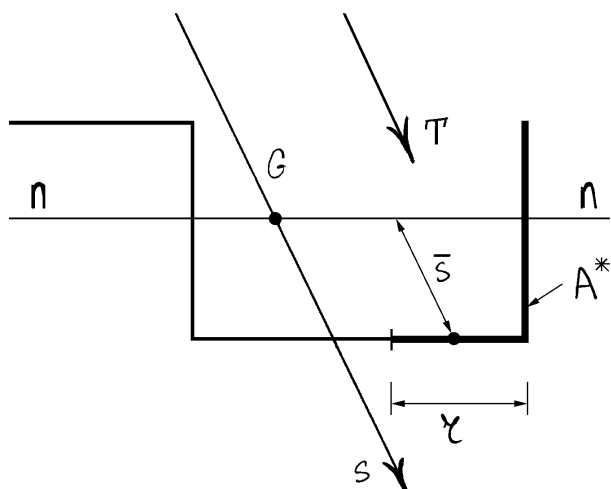
delle linee medie dei due tratti. In fatti, qualunque sia il taglio passante per il centro di taglio, le due risultanti $\underline{T}_1$ e $\underline{T}_2$ corrispondenti ai due tratti, che hanno, come detto, rette d'azione coincidenti con le linee medie dei due tratti, si combinano in un'unica forza con retta d'azione passante per l'intersezione delle due rette d'azione.

8.3.1 Andamento qualitativo del diagramma delle tensioni tangenziali su tratti rettilinei a spessore costante

Si riportino i valori delle tensioni tangenziali perpendicolarmente alla linea media prendendo come riferimento la linea media stessa. Si viene così a disegnare una curva di cui si vuole determinare l'andamento nel caso in cui

la sezione sottile è composta di tratti rettilinei a spessore costante. Su tali tratti la variazione della tensione tangenziale, al variare della corda, dipende solo dalla variazione del momento statico S_n^* dell'area A^* individuata dalla stessa corda.

Si consideri innanzitutto il caso in cui il tratto rettilineo è parallelo all'asse neutro della flessione associata al taglio, asse neutro rispetto al quale vengono valutati i momenti statici. Si assuma la distanza τ da una delle due estremità del tratto rettilineo per individuare la generica corda del tratto. L'area A^* individuata dalla corda

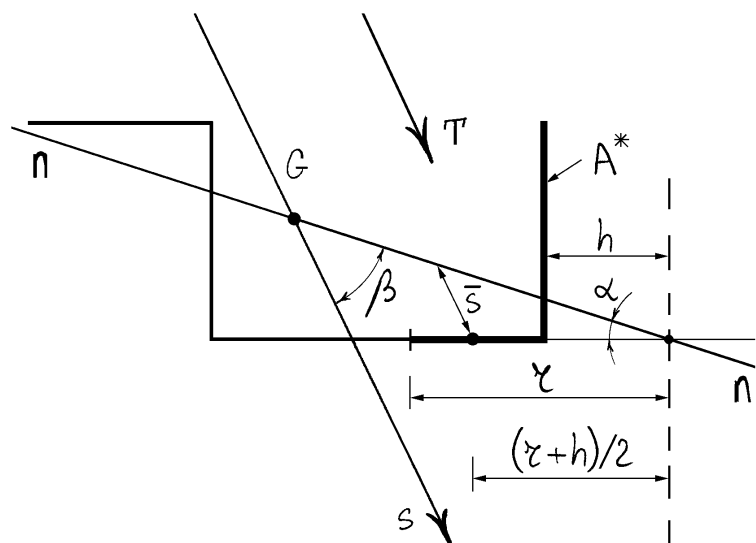


può scomporsi in due quote, $A(\tau)$ e $\bar{A}$, la prima delle quali, $A(\tau)$, coincide con la parte lunga τ del tratto rettilineo in questione mentre la seconda, $\bar{A}$, rappresenta la quota residua di A^* . Il momento statico dell'area A^* rispetto all'asse neutro vale dunque:

$$S_n^*(\tau) = b\tau\bar{s} + \bar{S}_n,$$

dove b è lo spessore del tratto, $\bar{s}$ è la distanza del baricentro dell'area $A(\tau)$ dall'asse neutro e $\bar{S}_n$ è il momento statico dell'area $\bar{A}$. Poiché la distanza $\bar{s}$ è indipendente da τ , tale equazione risulta essere lineare in τ e ne risulta che il diagramma delle tensioni tangenziali lungo un tratto rettilineo a spessore costante è lineare.

Si consideri ora un tratto rettilineo non parallelo all'asse neutro della flessione associata al taglio. In tal caso, per individuare la generica corda del tratto, si assuma la distanza τ di questa dall'intersezione della linea me-



dia del tratto con l'asse neutro. Detta h la distanza di tale intersezione dalla prima estremità del tratto, si ottiene:

$$S_n(x) = b(x-h)\bar{s} + \bar{S}_n,$$

avendo ancora scomposto l'area A^* nelle due quote $A(r)$ e $\bar{A}$ e dove $\bar{s}$ è la distanza del baricentro dell'area $A(r)$ dall'asse neutro.

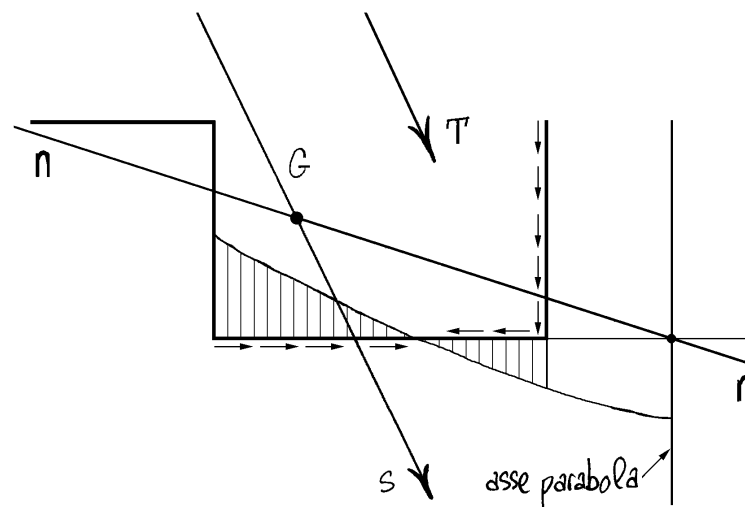
Se α è l'angolo tra la linea media del tratto e l'asse neutro e β è l'angolo tra asse neutro e asse di sollecitazione, risulta:

$$\bar{s} \sin \beta = \frac{x+h}{2} \sin \alpha \Rightarrow \bar{s} = \frac{x+h}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Si ha quindi infine:

$$S_n(x) = \frac{b}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (x^2 - h^2) + \bar{S}_n.$$

Tale equazione è quadratica in x e quindi il diagramma delle tensioni normali è parabolico. Mancando nell'equazione della parabola il termine lineare in x , ne risulta che l'asse della parabola passa per il punto $x=0$, ovvero sia per l'intersezione della linea media del tratto con l'asse neutro. In corrispondenza di tale punto, se appartiene al tratto, si ha

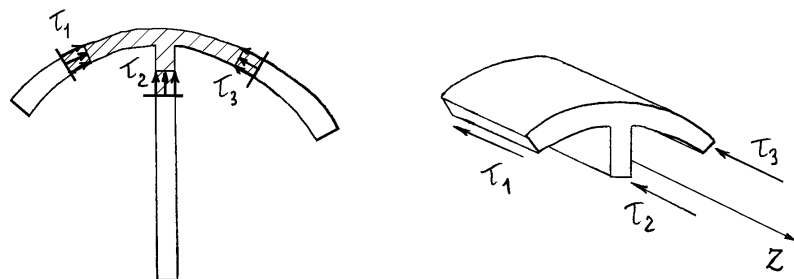


dunque un massimo relativo per la tensione tangenziale. Questo è in accordo col fatto che, attraversato tale punto, le aree successive hanno distanza dall'asse neutro di segno opposto e quindi il momento statico, in modulo, inizia a diminuire.

8.3.2 Equilibrio in un nodo triplo

Si consideri l'equilibrio alla Jouravski di un nodo in cui convergono tre tratti (nodo triplo). Seguendo le convenzioni illustrate in figura e tenendo conto che al limite l'area tende a zero e che quindi la presenza di eventuali tensioni normali non influenza l'equilibrio del nodo si ottiene:

$$-\tau_1 b_1 d\bar{x} - \tau_2 b_2 d\bar{x} - \tau_3 b_3 d\bar{x} = 0,$$



e quindi:

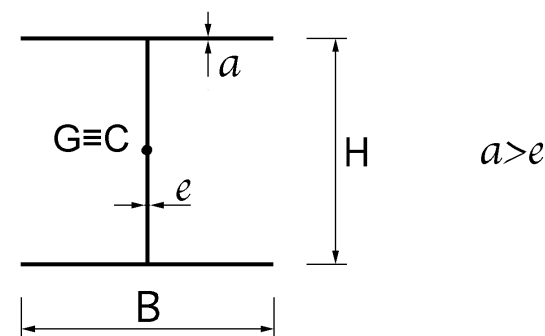
$$\tau_1 b_1 + \tau_2 b_2 + \tau_3 b_3 = 0.$$

Ci si riferisce alla risultante τb lungo una corda generica chiamandola "flusso" delle tensioni tangenziali attraverso la corda. Ne risulta che il flusso globale in ingresso in un nodo triplo è nullo.

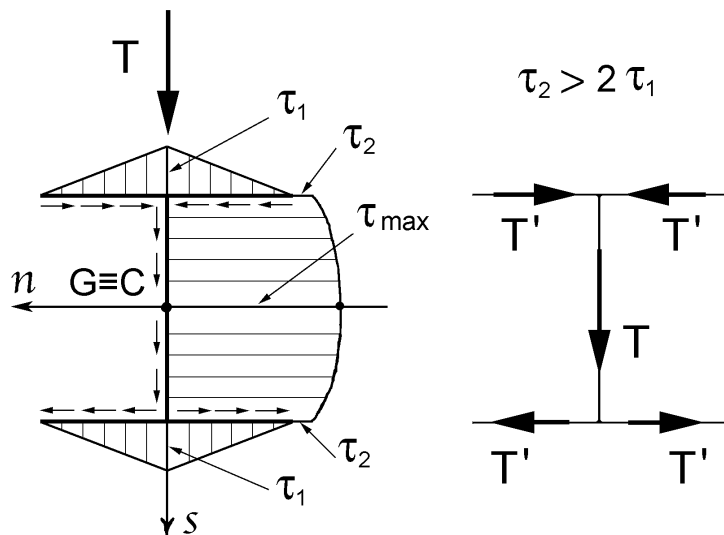
Naturalmente quanto detto per un nodo triplo vale per un qualunque altro nodo.

8.3.3 La sezione a doppio T

La sezione presenta due assi di simmetria e quindi il centro di taglio coincide con il baricentro. Nel caso il



taglio abbia quale retta d'azione la linea media dell'anima, tale linea media rappresenta l'asse di sollecitazione s mentre l'asse neutro n gli è ortogonale. Il taglio è simmetrico rispetto all'asse di sollecitazione ed emisimmetrico rispetto all'asse neutro. Il diagramma delle tensioni tangenziali è lineare lungo le ali e parabolico lungo l'anima con asse della parabola in corrispondenza del baricentro. Le tensioni tangenziali lungo l'anima devono avere come risultante il taglio applicato. Quindi il verso delle tensioni tangenziali lungo l'anima deve essere concorde al verso



del taglio. Tenendo conto che il flusso globale nei due nodi tripli deve essere nullo e che l'asse di sollecitazione è di simmetria si deduce automaticamente il verso delle tensioni tangenziali lungo le ali. Se τ_1 e τ_2 sono i moduli delle tensioni tangenziali, in vicinanza dei nodi tripli, rispettivamente nelle ali e nell'anima, l'equazione di flusso, con i versi di figura, richiede:

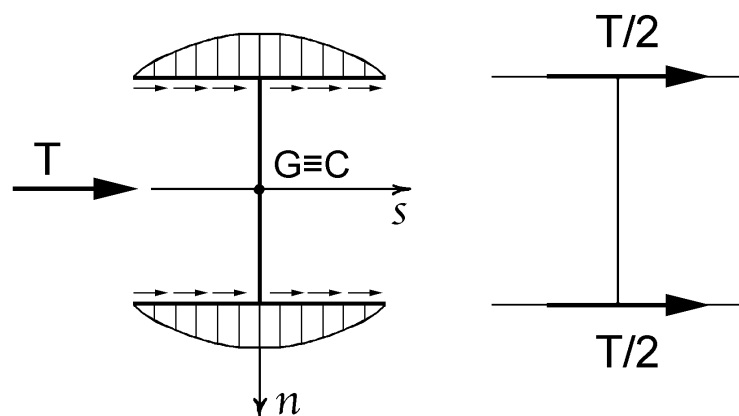
$$\tau_1 e + \tau_1 e - \tau_2 a = 0 \Rightarrow \tau_2 = 2 \frac{e}{a} \tau_1,$$

dove e ed a sono gli spessori delle ali e dell'anima rispettivamente. Se $e > a$, che è lo standard delle sezioni a doppio T, allora $\tau_2 > 2 \tau_1$.

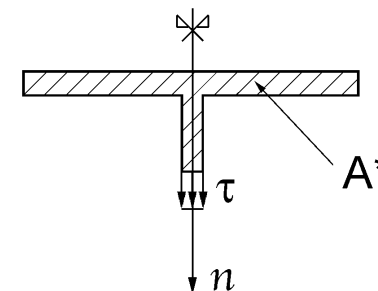
La massima tensione tangenziale τ_{max} la si ha in corrispondenza dell'intersezione tra asse neutro e linea media dell'anima, dove la parabola presenta il suo massimo.

In figura è anche riportato il quadro delle risultanti delle tensioni tangenziali nei vari tratti, avendo indicato con T' il modulo della risultante su mezza ala, che per simmetria ed emisimmetria è uguale per tutte e quattro le mezze ali.

Nel caso il taglio abbia invece quale retta d'azione la retta baricentrica parallela alle ali allora l'asse neutro coincide con la linea media dell'anima. Ancora, il taglio



è simmetrico rispetto all'asse di sollecitazione ed emisimmetrico rispetto all'asse neutro. Il diagramma delle tensioni è lineare lungo l'anima e parabolico sulle ali. In particolare, il diagramma lungo l'anima è nullo. Infatti l'asse neutro è asse di simmetria per qualunque area A^* individuata da una corda lungo l'anima e quindi il momento statico S_n^* è nullo. Alternativamente, le eventuali tensioni tangenziali lungo una corda dell'anima sono simmetriche rispetto all'asse neutro. Essendo tale asse di emisimmet-



tria, tali tensioni tangenziali devono essere nulle.

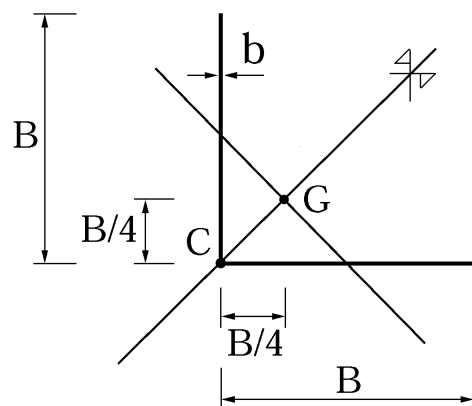
Gli assi delle due parabole coincidono entrambi con l'asse neutro. Il flusso lungo le ali, a differenza del caso precedente, ha sempre lo stesso verso, poiché il flusso lungo l'anima è nullo. Tale verso deve essere in accordo con il verso della forza di taglio.

8.3.4 La sezione a L a lati uguali

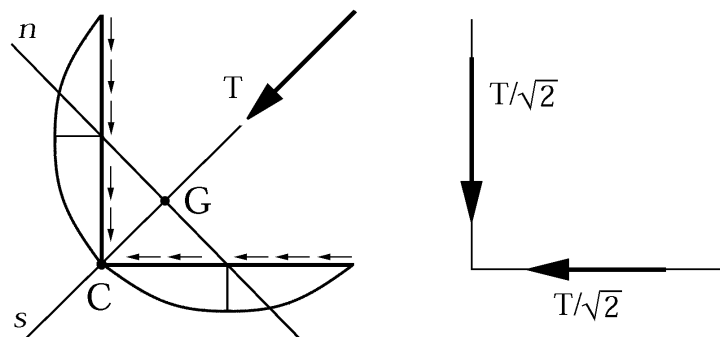
La sezione presenta un'asse di simmetria, inclinato di 45° rispetto ai lati, che contiene baricentro e centro di taglio.

Come già visto, il centro di taglio è situato alla intersezione dei lati. Il baricentro è invece posizionato alla intersezione tra l'asse di simmetria e l'allineamento dei baricentri dei due lati, e si trova quindi alla distanza $B/4$ dai lati, se B è la loro lunghezza.

Si consideri innanzitutto il caso di un taglio avente quale

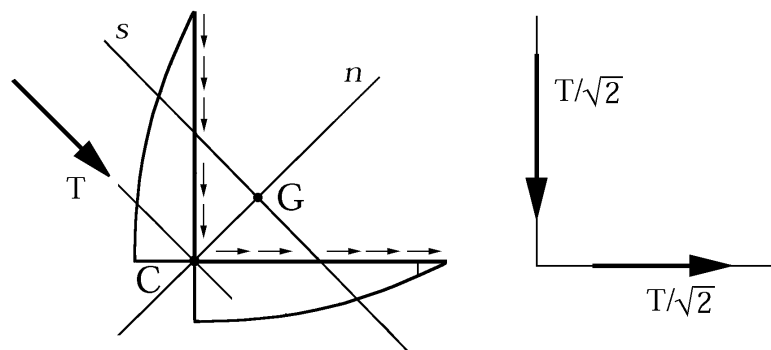


retta d'azione l'asse di simmetria, che risulta di simmetria anche per il taglio applicato. L'asse neutro è la retta che passa per i baricentri dei due lati. Poiché i lati sono inclinati rispetto all'asse neutro, i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono parabolici, con assi delle parabole in corrispondenza dei baricentri dei due lati.

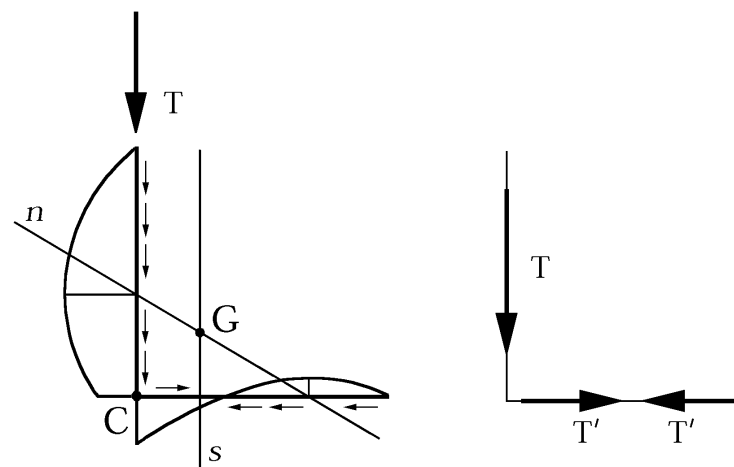


Si consideri poi il caso di un taglio avente quale retta d'azione la retta per il centro di taglio perpendicolare all'asse

di simmetria. L'asse neutro coincide con l'asse di simmetria, i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono ancora parabolici e gli assi delle parabole sono in corrispondenza del centro di taglio (dove i lati intersecano l'asse neutro).



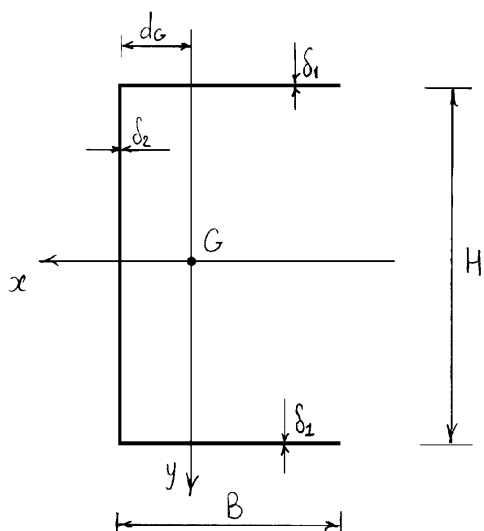
Si consideri infine il caso di un taglio avente quale retta d'azione la retta verticale per il centro di taglio. L'asse di sol-



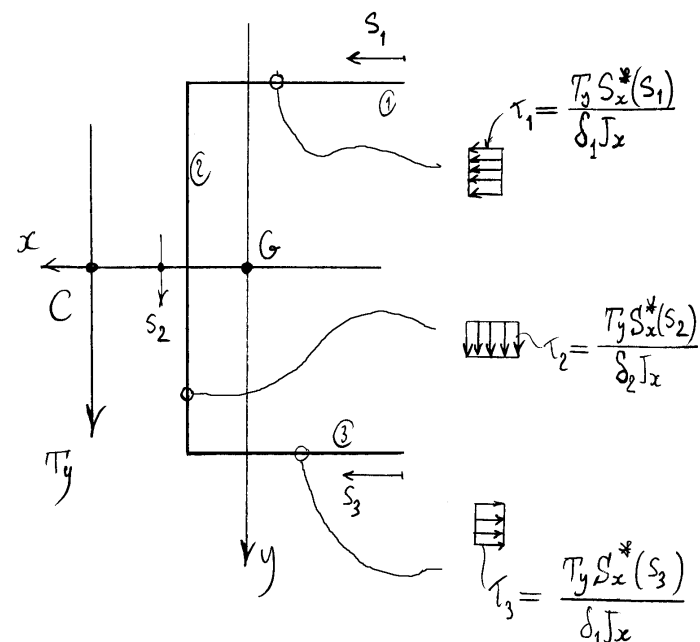
le citazione è la retta verticale per G e l'asse neutro è il coniugato di questo. Poichè l'asse verticale non è principale di inerzia il suo coniugato è inclinato rispetto alla verticale. Ne consegue che i due lati della sezione a L sono inclinati rispetto all'asse neutro e che quindi i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono parabolici, con gli assi delle parabole posti in corrispondenza delle intersezioni con l'asse neutro. Dovendo essere nulla la risultante orizzontale delle tensioni tangenziali, l'intersezione dell'asse neutro con il lato orizzontale della sezione deve essere situata necessariamente nella metà destra del lato.

8.3.5 La sezione a C

Si consideri la sezione a C di figura, di cui abbiamo già calcolato le caratteristiche inerziali.



8.3.5.1 Taglio T_y passante per il centro di taglio

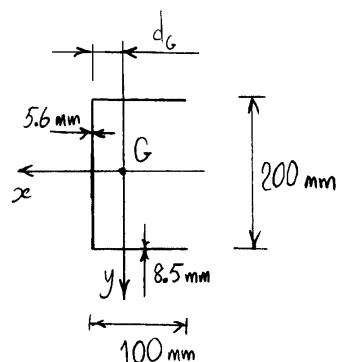


$$\begin{cases} S_x^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \frac{H}{2} \\ S_x^*(s_2) = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) - s_2 \right] \\ \quad = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - s_2^2 \right) \\ S_x^*(s_3) = \delta_1 s_3 \frac{H}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{T_y}{J_x} \underbrace{\left\{ \delta_1 B \frac{H^2}{2} + \delta_2 \frac{H^3}{12} \right\}}_{J_x} = T_y .$$

Per quel che riguarda i segni, si è tenuto conto che nell'anima $\tau_{xy} = -\tau_2$. Infatti τ_2 è positivo se diretto verso l'alto (se entrante nella sezione) mentre τ_{xy} è positivo se diretto verso il basso, data che questa è l'orientazione di y .

Si consideri ora l'esempio numerico sotto riportato, di cui si sono già calcolate le quantità inerziali.



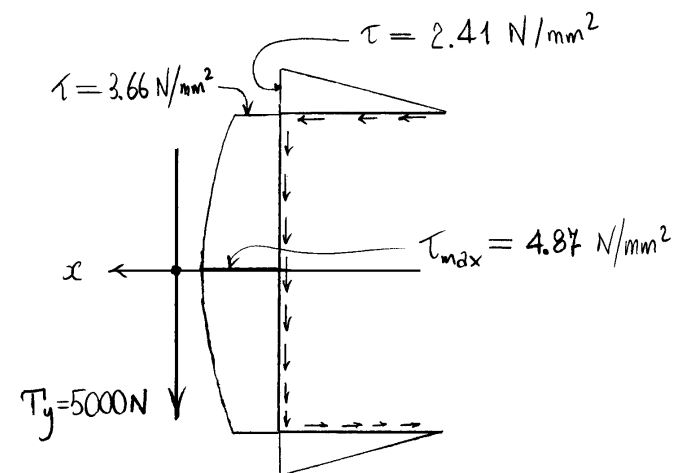
$$A = 2820 \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

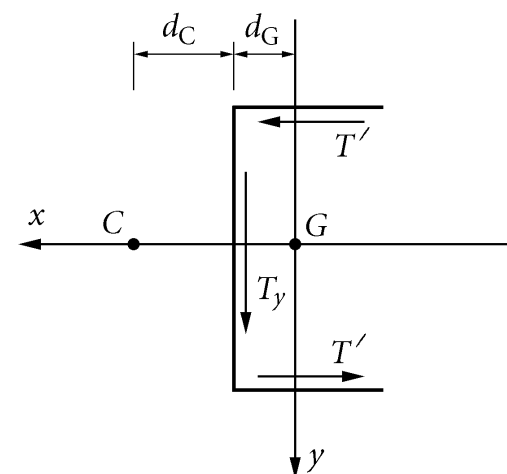
$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

I valori più significativi delle tensioni tangenziali, dovute ad un taglio $T_y = 5000 \text{ N}$, sono riportati nella figura seguente.



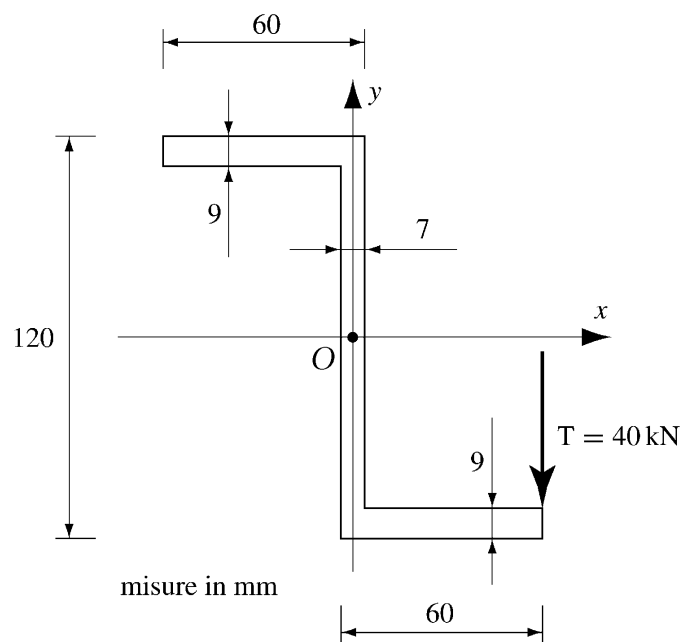
8.3.5.2 Centro di taglio

Si individua ora il centro di taglio C attraverso la risultante delle tensioni tangenziali dovute al taglio T_y passante per tale centro.



8.3.6 Sezione a Z

Si consideri la sezione a Z sotto riportata soggetta ad un taglio verticale $T = 40 \text{ kN}$.

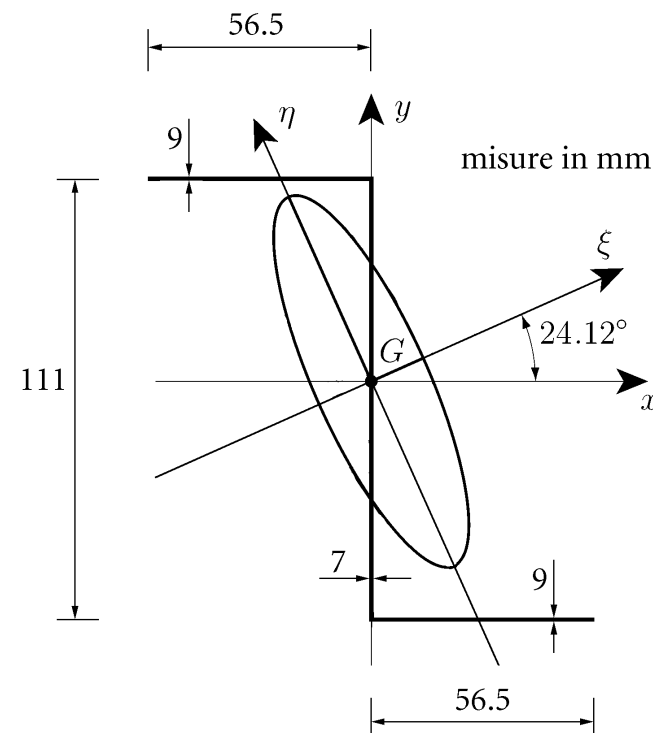


Di tale sezione sono già state calcolate le quantità inerziali:

$$\begin{cases} J_{\xi} = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta} = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases},$$

$$\alpha_{\xi} = 24.12^{\circ}.$$

Come già detto, la sezione presenta una simmetria polare, cioè è invariante per rotazioni di 180° attorno al punto O , punto che deve quindi coincidere con il baricentro. In tale

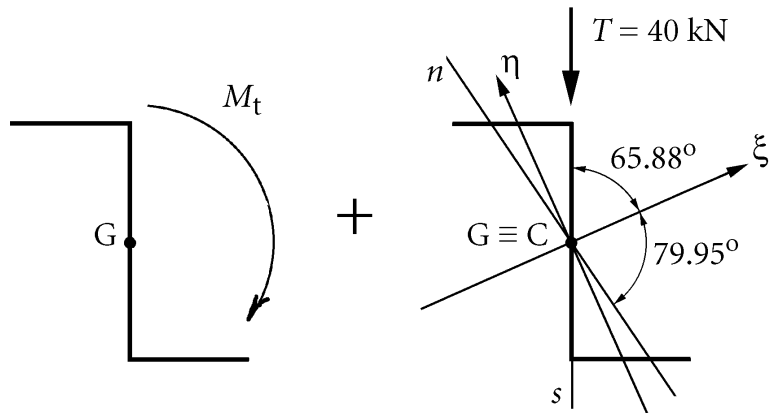


rotazione un taglio qualunque passante per O cambia di segno (cioè presenta una emisimmetria polare). Ne consegue che un tale taglio non può provocare una rotazione di tipo torsionale della sezione, essendo tale rotazione invariante e quindi simmetrica. Il polo O deve quindi coincidere con il centro di taglio C .

Il problema può quindi essere risolto sovrapponendo un problema di torsione con uno di taglio passante per il centro di taglio.

Il momento torcente M_t è orario e di modulo:

$$M_t = 40 \text{ kN} \times 56.5 \text{ mm} = 2260 \text{ kN mm},$$



Le tensioni tangenziali valgono quindi:

$$\tau_1 = \frac{2.26 \times 10^6 \text{ N mm}}{40150 \text{ mm}^4} \cdot 9 \text{ mm} = 506.60 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{2.26 \times 10^6 \text{ N mm}}{40150 \text{ mm}^4} \cdot 7 \text{ mm} = 394.02 \text{ N/mm}^2.$$

La forza di taglio può essere scomposta nelle due direzioni principali di inerzia:

$$T_\xi = -T \sin \alpha_\xi = -0.409 T = -16.36 \text{ kN},$$

$$T_\eta = -T \cos \alpha_\xi = -0.913 T = -36.52 \text{ kN}.$$

Si procede calcolando i soli moduli delle tensioni tangenziali. Nel caso della componente T_η si ottiene:

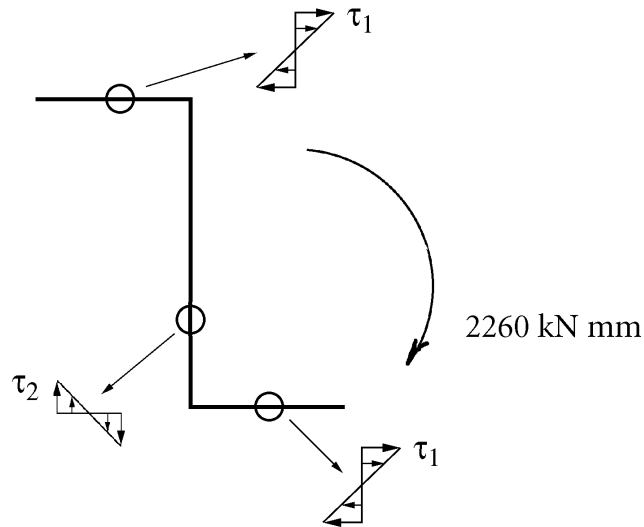
$$\begin{aligned} S^*_3 = S^*_4 &= (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \\ &\times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{2} \cos 24.12^\circ + \frac{56.5 \text{ mm}}{2} \times \sin 24.12^\circ \right\} = \\ &= 31628 \text{ mm}^3, \end{aligned}$$

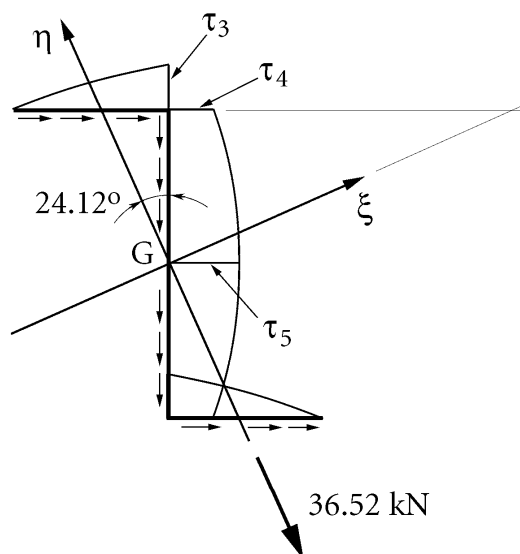
$$\tau_3 = \frac{36520 \text{ N} \times 31628 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 27.63 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_4 = \frac{36520 \text{ N} \times 31628 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 35.52 \text{ N/mm}^2,$$

mentre il fattore torsionale di rigidezza vale:

$$\begin{aligned} J_t &= \frac{1}{3} [2 \times 56.5 \text{ mm} \times (9 \text{ mm})^3 + 111 \text{ mm} \times (7 \text{ mm})^3] = \\ &= 40150 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$



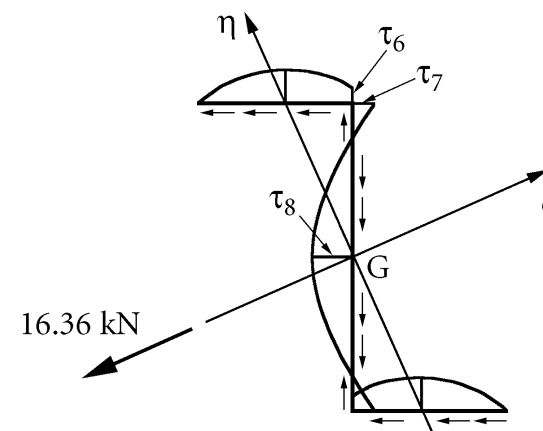


$$S_5^* = S_3^* + 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \left[\frac{111 \text{ mm}}{4} \times \cos 24.12^\circ \right] = 41468 \text{ mm}^3 ,$$

$$\tau_5 = \frac{36520 \text{ N} \times 41468 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 46.57 \text{ N/mm}^2 .$$

Per quel che riguarda la componente T_ξ si ottiene invece:

$$S_6^* = S_7^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \left\{ \frac{56.5 \text{ mm}}{2} \times \cos 24.12^\circ - \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \sin 24.12^\circ \right\} = 1581 \text{ mm}^3 ,$$



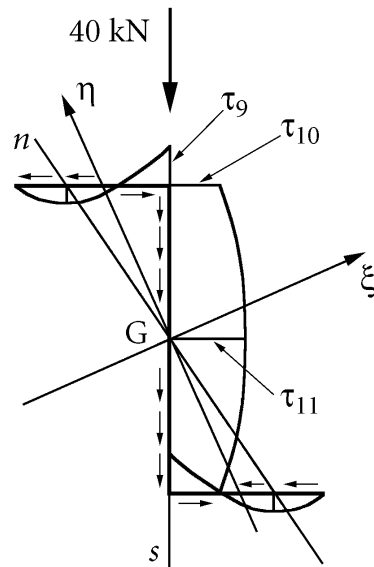
$$\tau_6 = \frac{16360 \text{ N} \times 1578 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 7.79 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\tau_7 = \frac{16360 \text{ N} \times 1578 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 10.02 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$S_8^* = 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \left[\frac{111 \text{ mm}}{4} \times \sin 24.12^\circ \right] - S_6^* = 2824 \text{ mm}^3 ,$$

$$\tau_8 = \frac{16360 \text{ N} \times 2827 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 17.90 \text{ N/mm}^2 .$$

Considerando invece la forza di taglio complessiva, l'asse di sollecitazione s della flessione associata al taglio coincide con l'asse



$$J_n = \frac{464.419 \text{ cm}^4 \times \cos^2(-79.95^\circ) + 36.838 \text{ cm}^4 \times \sin^2(-79.95^\circ)}{\sin^2 34.16^\circ} = 158.094 \text{ cm}^4.$$

I momenti statici valgono:

$$S_9^* = S_{10}^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{2} - \frac{56.5 \text{ mm}}{2 \times \tan 34.16^\circ} \right\} = 7055 \text{ mm}^3,$$

$$S_{11}^* = S_9^* + \left\{ 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \right\} \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{4} \right\} = 17836 \text{ mm}^3.$$

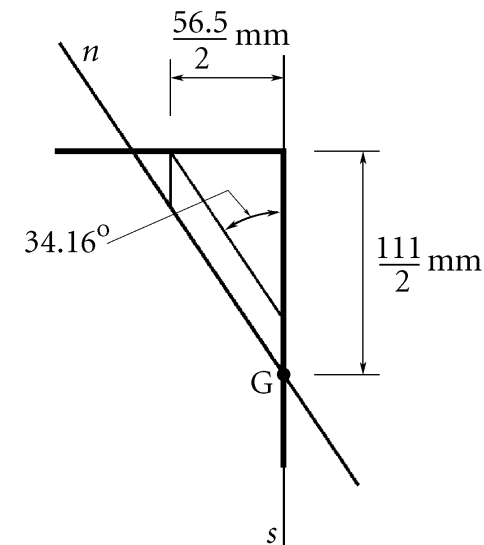
y verticale. Risulta quindi:

$$\widehat{\xi s} = 90^\circ - \alpha_\xi = 65.88^\circ.$$

Utilizzando la formula di coniugio, si ottiene allora l'inclinazione dell'asse neutro n:

$$\widehat{\xi n} = \tan^{-1} \left\{ - \frac{464.419 \text{ cm}^4}{36.838 \text{ cm}^4 \times \tan 65.88^\circ} \right\} = -79.95^\circ.$$

Tenendo conto che $\widehat{ns} = 180^\circ - (65.88^\circ + 79.95^\circ) = 34.16^\circ$, il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro risulta:



Si ottengono così le seguenti tensioni tangenziali:

$$\tau_9 = \frac{40000 \text{ N} \times 7055 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 19.83 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{10} = \frac{40000 \text{ N} \times 7055 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 25.50 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{11} = \frac{40000 \text{ N} \times 17836 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 64.47 \text{ N/mm}^2.$$

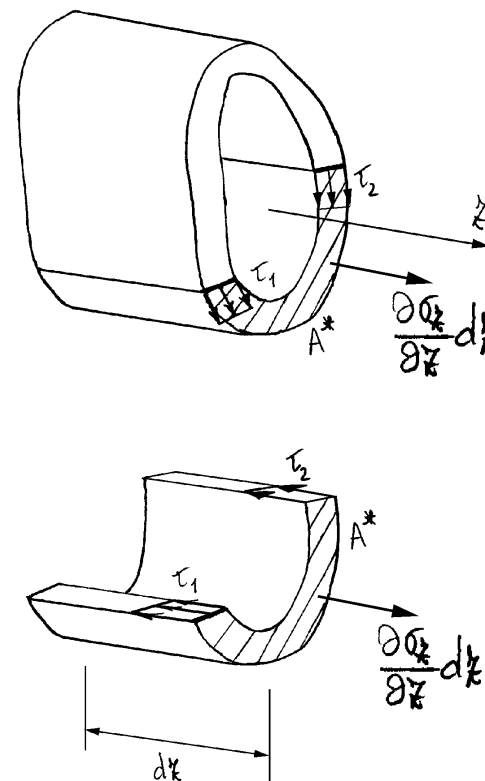
Si noti che, come deve essere, risulta:

$$\begin{aligned}\tau_9 &= \tau_3 - \tau_6 = (27.63 - 7.79) \text{ N/mm}^2 = 19.83 \text{ N/mm}^2, \\ \tau_{10} &= \tau_4 - \tau_7 = (35.52 - 10.02) \text{ N/mm}^2 = 25.50 \text{ N/mm}^2, \\ \tau_{11} &= \tau_5 + \tau_8 = (46.57 + 17.90) \text{ N/mm}^2 = 64.47 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

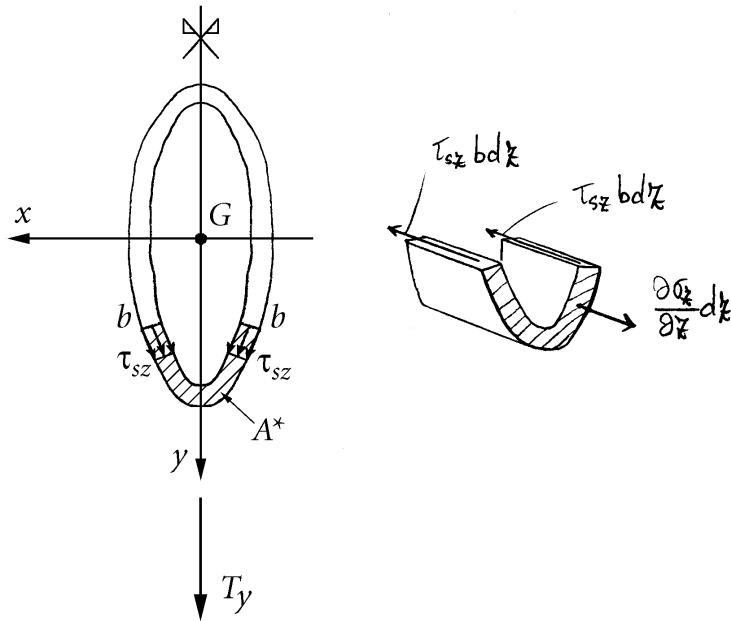
ATTENZIONE! Si tenga conto che i risultati numerici precedenti sono stati ottenuti operando in doppia precisione, con la successiva approssimazione a due cifre decimali. Questo rende apparentemente inconsistente la prima delle relazioni precedenti.

8.4 Il taglio nelle travi di sezione sottile chiusa simmetrica

Se la sezione sottile chiusa è biconnessa, occorrono due sezioni longitudinali in corrispondenza di due corde per isolare l'elemento di trave su cui imporre l'equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse della trave. Questo significa che si ha a disposizione una sola equazione per le due incognite che rappresentano le tensioni tangenziali in corrispondenza delle due corde.



Se la sezione presenta un asse di simmetria e il taglio è simmetrico è possibile scegliere due corde in posizione simmetrica, nelle quali agisce di conseguenza una tensione tangenziale simmetrica.



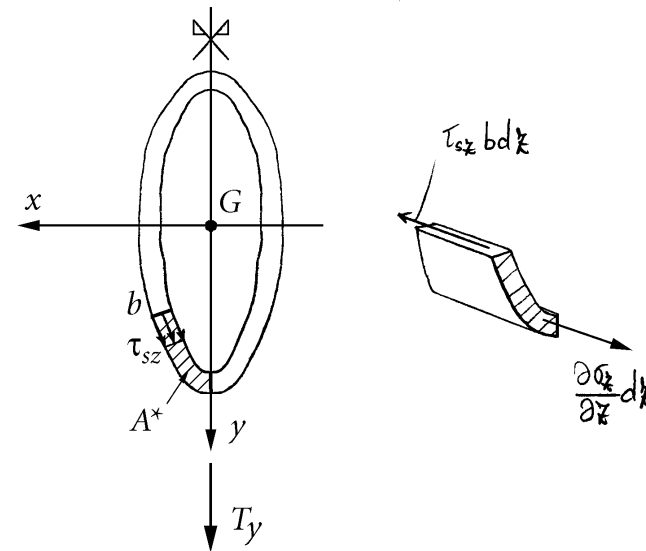
In tal modo le due incognite si riducono ad una sola e risulta:

$$2 \tau_{sx} b dz = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz dA \Rightarrow \tau_{sx} = \frac{T_y S_x^*}{2 b J_x},$$

dove S_x^* è il momento statico di una delle due parti in cui la sezione è divisa dalle due corde in posizione simmetrica.

Alternativamente, occorre considerare che in una corda posta sull'asse di simmetria la tensione tangenziale è emisimmetrica e quindi nulla. Ne consegue che una delle due corde può essere scelta sull'asse di simmetria, dove la tensione tangenziale è nulla e quindi nota, e ancora le due incognite si riducono ad una sola:

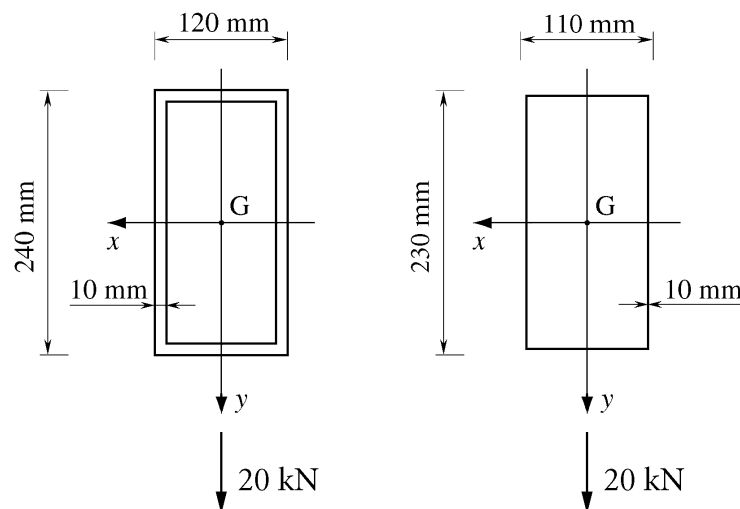
$$\tau_{sx} b dz = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz dA \Rightarrow \tau_{sx} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x}$$



Si osservi che in tal caso il momento statico S_x^* vale la metà di quello del caso precedente, in accordo col fatto che ora l'incognita compare solo una volta mentre nel caso precedente compariva due volte.

8.4.1 Esempio (sezione scatolare di forma rettangolare)

Quale esempio si consideri la sezione scatolare sottile di figura, già utilizzata in un esempio sul problema della torsione, soggetta ad una forza di taglio verticale di 20 kN.



Si utilizza la formula:

$$\tau_{sz} = \frac{T S_x^*}{2 b J_x},$$

relativa alla scelta di due corde in posizione simmetrica.

Risulta:

$$\begin{aligned} J_x &= 2 \times \left\{ \frac{10 \text{ mm}}{12} (230 \text{ mm})^3 + \right. \\ &\quad \left. + (10 \text{ mm} \times 110 \text{ mm}) \left[\frac{230 \text{ mm}}{2} \right]^2 \right\} = \\ &= 4.93733 \times 10^7 \text{ mm}^4, \end{aligned}$$

$$S_{x1}^* = (10 \text{ mm} \times 110 \text{ mm}) \frac{230 \text{ mm}}{2} = 126500 \text{ mm}^3,$$

$$\begin{aligned} S_{x2}^* &= S_{x1}^* + 2 \times (10 \text{ mm} \times \frac{230 \text{ mm}}{2}) \times \frac{230 \text{ mm}}{4} = \\ &= 258750 \text{ mm}^3, \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{20000 \text{ N} \times 126500 \text{ mm}^3}{2 \times 10 \text{ mm} \times (4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 2.56 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{20000 \text{ N} \times 258750 \text{ mm}^3}{2 \times 10 \text{ mm} \times (4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 5.24 \text{ N/mm}^2.$$

