

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE QUARTA

Sistemi di travi deformabili

Corsi di Laurea triennali in
Ingegneria Civile ed Ambientale curr. Ambientale, Civile, Edile
Ingegneria Industriale curr. Materiali, Meccanica
Ingegneria Navale

Trieste, 27 agosto 2006

Indice

1	Calcolo di spostamenti in sistemi isostatici	3
1.1	Deformata della linea d'asse	3
1.1.1	Momento flettente	3
1.1.2	Forza normale	5
1.2	Metodo cinematico (o composizione cinematica degli spostamenti)	6
1.2.1	Sistemi di travi prevalentemente inflesse	7
1.2.2	Mensola soggetta ad un carico ripartito	8
1.2.3	Trave appoggiata soggetta a forza normale	9
1.2.4	Arco circolare soggetto ad un carico ripartito	9
1.3	Integrazione dell'equazione della linea elastica	11
1.4	Analogia di Mohr	12
1.4.1	Mensola soggetta ad una coppia	13
1.4.2	Trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato	14
1.4.3	Trave IPE270 appoggiata soggetta ad un carico concentrato	15
1.5	Strutture con uguale deformazione	16
1.5.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito	16
1.5.2	Trave appoggiata soggetta a due coppie concentrate simmetriche	17
1.5.3	Trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata	17
1.6	Coefficienti elastici	19
1.6.1	Mensole	19
1.6.2	Travi appoggiate	19
1.7	Esercizio (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)	20
1.8	Calcolo di spostamenti con il principio dei lavori virtuali	24
1.8.1	Applicazione del principio dei lavori virtuali al calcolo di spostamenti (e rotazioni) in strutture isostatiche	25
1.8.2	Mensola soggetta ad una forza di tipo assiale	26
1.8.3	Portale zoppo soggetto ad un carico ripartito	27

1.8.4	Telaio soggetto ad una forza concentrata	29
1.8.5	Esercizio 1 (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)	30
1.9	Esercizio 2 (struttura soggetta ad un carico ripartito)	33

2	Sistemi di travi iperstatici	37
2.1	Metodo delle forze	37
2.1.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale	37
2.1.2	Trave appoggiata soggetta a carichi di tipo flessionale	39
2.2	Simmetria ed emisimmetria	40
2.2.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale emisimmetrico	40
2.2.2	Cavalletto iperstatico soggetto ad un carico simmetrico	41
2.3	Travi incastro-appoggio	43
2.3.1	Trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia in corrispondenza dell'appoggio	43
2.3.2	Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza concentrata in mezzeria	44
2.3.3	Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita	44
2.4	Travi incastro-incastro	45
2.4.1	Trave incastro-incastro soggetta ad una forza concentrata in mezzeria	45
2.4.2	Trave incastro-incastro soggetta ad una forza distribuita	45
2.5	Travi continue	46
2.5.1	Esempio di trave continua	47
2.6	Esercizio (telaio soggetto ad una coppia)	48
3	Cedimenti vincolari e distorsioni	53
3.1	Cedimenti vincolari elastici	53
3.1.1	Esempio 1 (trave appoggiata con un appoggio cedevole)	54
3.1.2	Esempio 2 (trave incastro-appoggio con incastro cedevole angolarmente)	55
3.1.3	Esempio 3 (trave continua con un appoggio cedevole)	56
3.2	Cedimenti vincolari anelastici	58
3.3	Distorsioni concentrate	60
3.4	Distorsioni distribuite	63

3.5	Distorsioni termiche	64	6	Telai piani	95
3.5.1	Esempio 1 (trave appoggio-carrello soggetta ad una variazione termica uniforme)	66	6.1	Esempio di un telaio a un nodo spostabile	98
3.5.2	Esempio 2 (trave appoggio-appoggio soggetta ad una variazione termica uniforme)	66	6.2	Soluzione col metodo dei telai	102
3.5.3	Esempio 3 (trave appoggiata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)	67			
3.5.4	Esempio 4 (trave doppiamente incastrata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)	68			
3.6	Distorsioni plastiche	69			
3.6.1	Distorsione plastica distribuita di tipo assiale	69			
3.6.2	Distorsione plastica distribuita di tipo flessionale . .	70			
3.6.3	Distorsioni plastiche concentrate (cerniere plastiche)	72			
3.6.4	Esempio (calcolo a rottura di una trave in acciaio a sezione rettangolare, incastrata e soggetta ad un carico ripartito)	74			
4	Strutture simmetriche	75			
4.1	Azioni su strutture simmetriche	75			
4.1.1	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni simmetriche . .	76			
4.1.2	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche	76			
4.1.3	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni generiche . . .	77			
4.2	Sistemi assialsimmetrici	77			
4.2.1	Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni simme- triche	77			
4.2.2	Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni emisim- metriche	80			
4.2.3	Esecizio (anello con diaframma soggetto ad una distorsione termica)	83			
4.3	Sistemi polarsimmetrici	86			
4.3.1	Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polarsim- metriche	86			
4.3.2	Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polaremi- simmetriche	87			
5	Travature reticolari	89			
5.1	Esercizio su una travatura reticolare iperstatica	91			
5.1.1	Sovrapposizione degli effetti	92			
5.1.2	Soluzione flessionale	92			
5.1.3	Soluzione assiale	93			

Capitolo 1

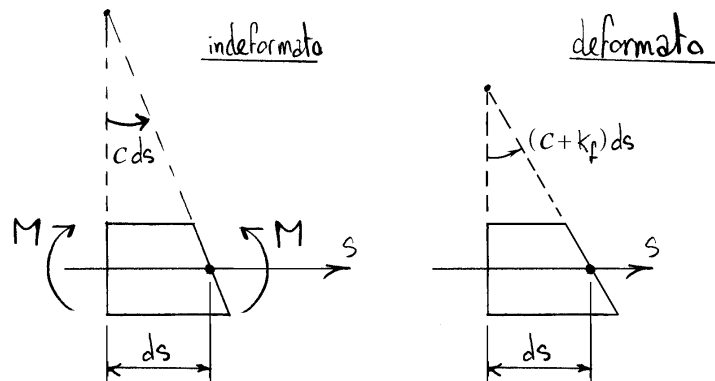
Calcolo di spostamenti in sistemi isostatici

1.1 Deformata della linea d'asse

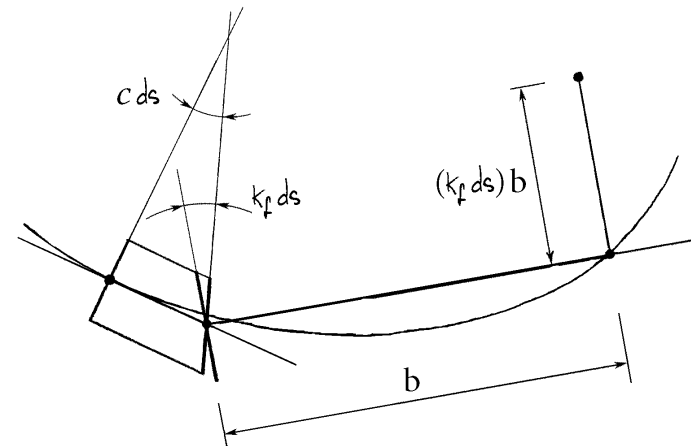
1.1.1 Momento flettente

Se una sezione è soggetta ad un momento flettente M si ha una rotazione relativa per unità di linea $k_f = M/EJ$ attorno all'asse neutro (baricentrico).

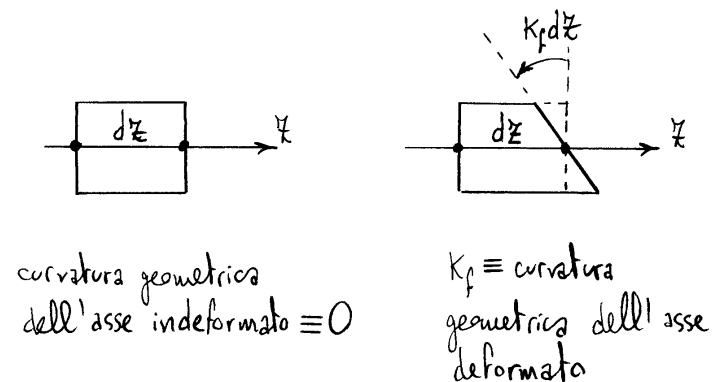
Se la curvatura geometrica della linea d'asse indeformata vale c , la curvatura geometrica della linea d'asse deformata vale $c + k_f$. La dilatazione della linea d'asse è invece nulla.



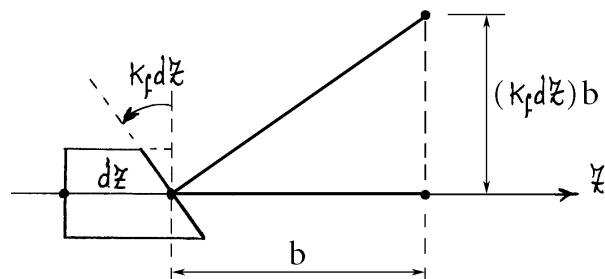
In tal caso lo spostamento di un punto dell'asse dovuto alla deformazione di un elemento di trave avviene in direzione perpendicolare alla retta che unisce tale punto con il baricentro della sezione di cui l'elemento di trave è intorno.



Nel caso di linea d'asse indeformata rettilinea la curvatura geometrica iniziale è nulla.

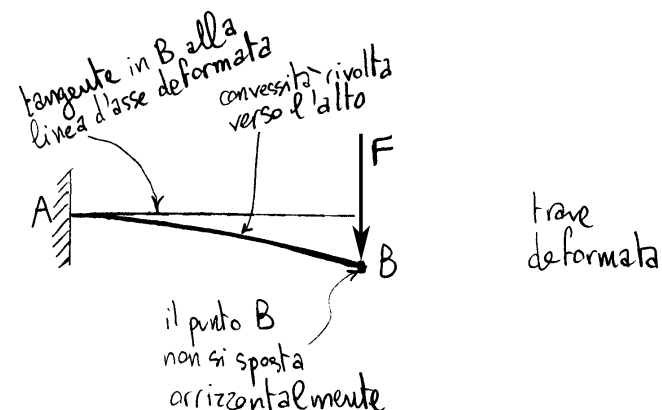
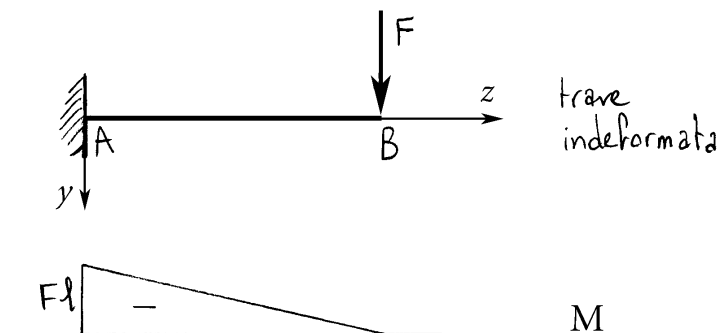


Inoltre, in tal caso, lo spostamento di un punto qualunque dell'asse dovuto alla deformazione di un qualunque elemento di trave avviene in direzione perpendicolare all'asse della trave.



Si noti anche che se la linea d'asse iniziale è rettilinea, la linea d'asse deformata ha la convessità dalla parte delle fibre che si allungano, cioè dalla parte delle fibre tese. Poichè è prassi disegnare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese allora la convessità è dalla parte in cui è tracciato il momento.

Si consideri quale esempio una mensola soggetta ad una forza concentrata all'estremità.



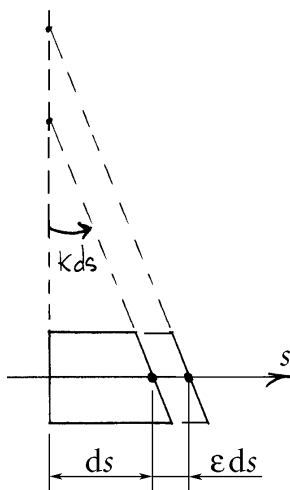
1.1.2 Forza normale

Se una sezione è soggetta ad una forza normale N , nell'elemento di trave si ha una traslazione relativa per unità di linea $\epsilon = N/EA$ nella direzione della tangente alla linea d'asse. La curvatura flessionale è invece nulla.

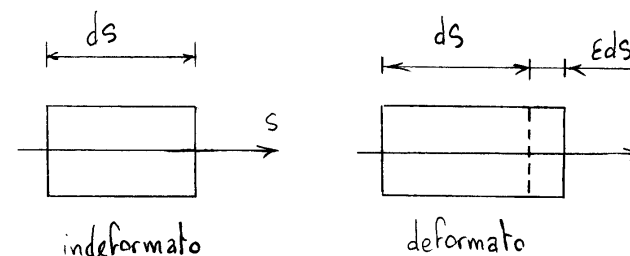
Se la curvatura geometrica iniziale vale k tale è anche la curvatura finale:

$$\frac{k ds}{(1 + \epsilon) ds} = \frac{k}{(1 + \epsilon)} \approx k(1 - \epsilon) \approx k,$$

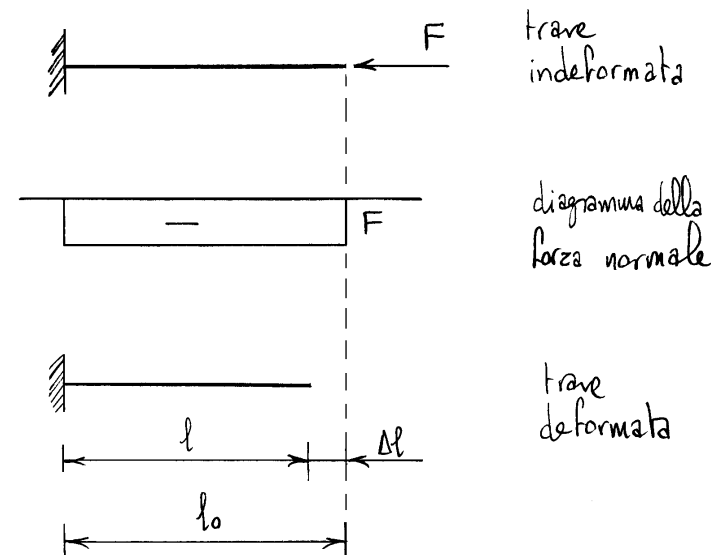
per l'ipotesi di piccoli spostamenti.



Se la linea d'asse indeformata è rettilinea, tale resta anche dopo la deformazione.



Si consideri quale esempio una mensola soggetta ad una forza concentrata all'estremità.

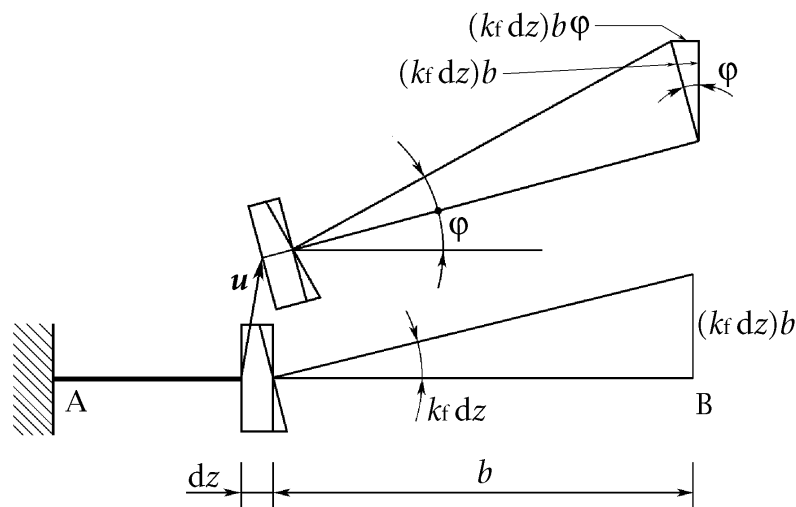


1.2 Metodo cinematico (o composizione cinematica degli spostamenti)

Si deforma un elemento di trave per volta, si calcola il suo effetto sullo spostamento che si vuole calcolare e si sommano i contributi di tutti gli elementi, cioè si integra sulla linea d'asse.

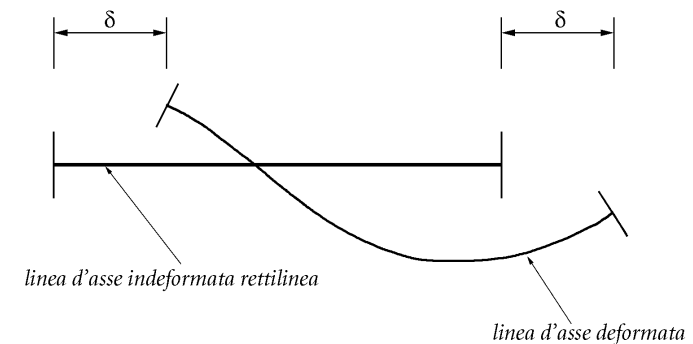
In generale, occorrerebbe sommare anche il contributo dovuto ai moti rigidi che ricompongono la continuità della deformata, ma tali contributi sono di un ordine superiore al primo negli spostamenti e vengono trascurati. In altre parole, per l'ipotesi di piccoli spostamenti il contributo di un elemento è indipendente dal fatto che gli altri elementi siano già deformati oppure no.

Per es., si verifichi tale fatto nel calcolo dello spostamento dell'estremità B della mensola AB di figura, supponendo che la mensola sia soggetta a solo momento flettente.



Si deformi la mensola partendo dall'incastro A e muovendosi verso l'estremità B. Per effetto della deformazione del tratto che precede un elemento generico, questi si trova traslato e ruotato e la sua deformazione viene ad agire in tale nuova configurazione. Nella figura sono riportati i contributi allo spostamento del punto B che si hanno deformando l'elemento sia nella configurazione deformata che in quella indeformata. Si può quindi facilmente verificare che i contributi allo spostamento del punto B nei due casi differiscono di termini di ordine superiore al primo negli spostamenti.

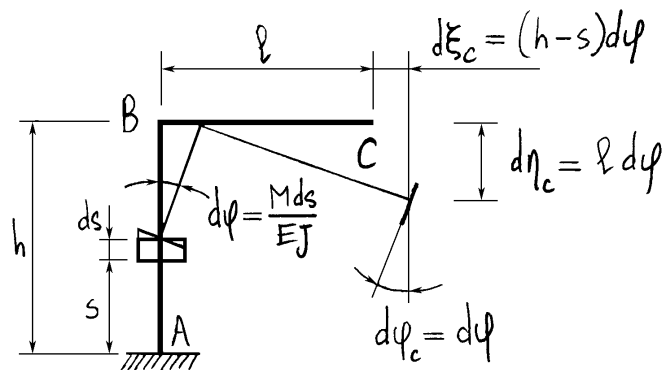
Si noti infine che se la trave è ad asse rettilineo e soggetta a solo momento flettente allora lo spostamento relativo tra due punti della linea d'asse avviene in direzione ortogonale alla linea d'asse. Infatti gli spostamenti dovuti alla deformazione degli elementi della trave avvengono perpendicolarmente alla linea d'asse mentre un moto rigido infinitesimo di tutta la trave provoca uno spostamento nella direzione della linea d'asse uguale per tutti i punti della trave. In nessun caso è quindi possibile generare uno spostamento relativo nella direzione della linea d'asse.



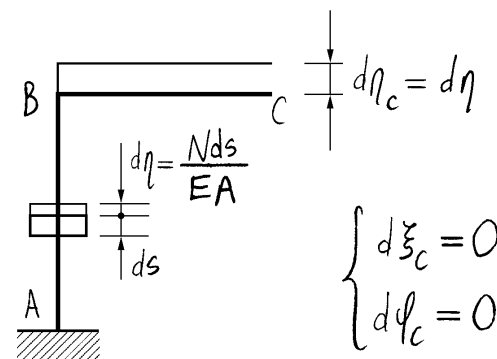
È chiaro che questa proprietà non vale per le travi ad asse curvo così come per le travi ad asse rettilineo soggette anche a forza normale.

1.2.1 Sistemi di travi prevalentemente inflesse

Se la curva delle pressioni si discosta "sufficientemente" (rispetto al problema in esame) dall'asse geometrico delle travi del sistema e se le travi sono "snelle", è possibile trascurare il contributo della forza normale al fine del calcolo di spostamenti e rotazioni. Infatti, il contributo ad uno spostamento dovuto alla deformazione di un elemento di trave



associata al momento flettente dipende dalla distanza dell'elemento dalla sezione di cui si sta valutando lo spostamento. Tale effetto amplificante è invece assente nel caso della deformazione associata alla forza normale.



Inoltre, il contributo della deformazione associata alla forza normale non dà alcun contributo alla rotazione di una sezione retta.

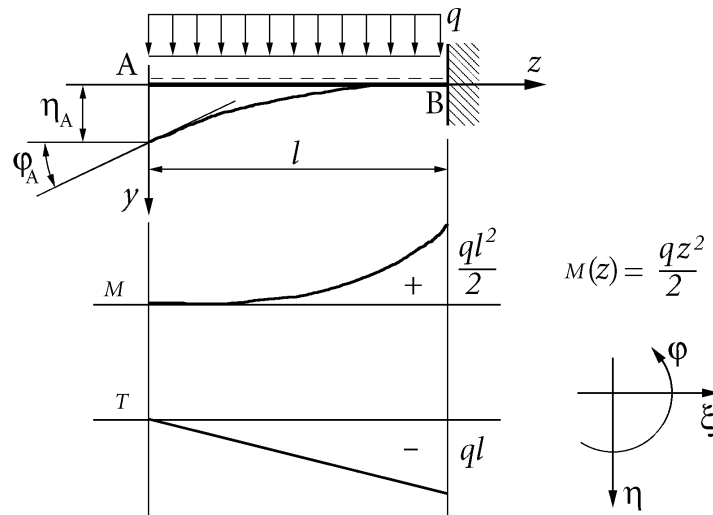
I sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente inflesse sono detti "telai" (telai piani

nel caso di travi piane). Per semplicità, nel seguito useremo tale denominazione quale sinonimo di sistema di travi prevalentemente inflesse.

I sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente soggetti a sforzo normale, quindi tali che la curva delle pressioni coincida o sia prossima alla linea d'asse del sistema, vengono invece detti *travature reticolari*.

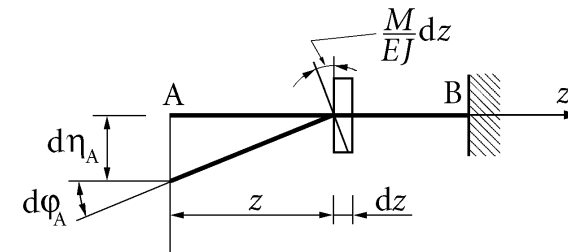
1.2.2 Mensola soggetta ad un carico ripartito

Le convenzioni di segno sugli spostamenti e sul momento flettente sono indicati in figura. Si noti che il segno del



momento, indicato dal tratteggio nella parte superiore (il momento positivo tende le fibre superiori), è stato sganciato dall'orientazione dell'asse z .

Per calcolare gli spostamenti relativi dell'estremità A rispetto alla estremità B occorre sommare (cioè integrare) i contributi di tutti gli elementi che compongono la trave, contributi valutati tenendo fissa l'estremità B. Tenendo conto che l'estremità B è incastrata, gli spostamenti relativi tra A e B forniscono direttamente gli spostamenti dell'estremità libera A.



Per quel che riguarda la rotazione globale ϕ_A dell'estremità A si ottiene:

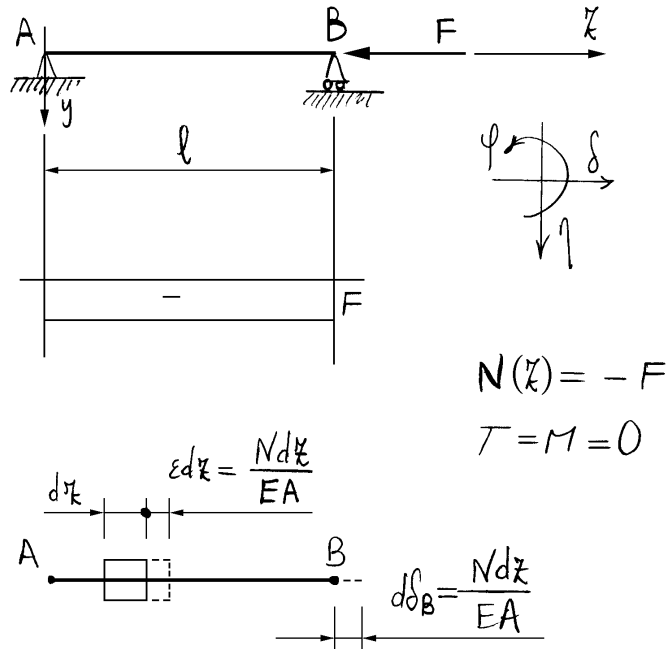
$$d\phi_A = \frac{M}{EJ} dz \Rightarrow \phi_A = \int_0^l \frac{qz^2}{2} \frac{dz}{EJ} = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Per lo spostamento verticale η_A dell'estremità A si ha invece:

$$d\eta_A = \left(\frac{M}{EJ} dz\right) z \Rightarrow \eta_A = \int_0^l \frac{qz^3}{2} \frac{dz}{EJ} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Si ricordi infine che, essendo la trave ad asse rettilineo, lo spostamento orizzontale ξ_A di A è nullo.

1.2.3 Trave appoggiata soggetta a forza normale



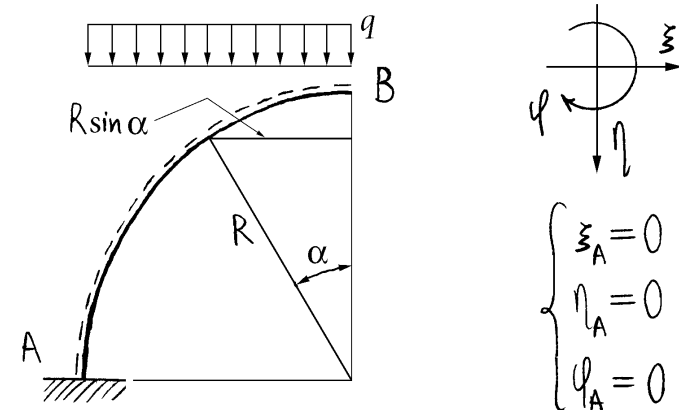
$$N(x) = -F$$

$$T = M = 0$$

$$\delta_B - \delta_A = \int_0^l \frac{N dx}{EA} = - \int_0^l \frac{F dx}{EA}$$

$$\delta_A = 0 \Rightarrow \delta_B = - \frac{Fl}{EA}$$

1.2.4 Arco circolare soggetto ad un carico ripartito



$$\begin{cases} \xi_A = 0 \\ \eta_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$$

Caratteristiche della sollecitazione:

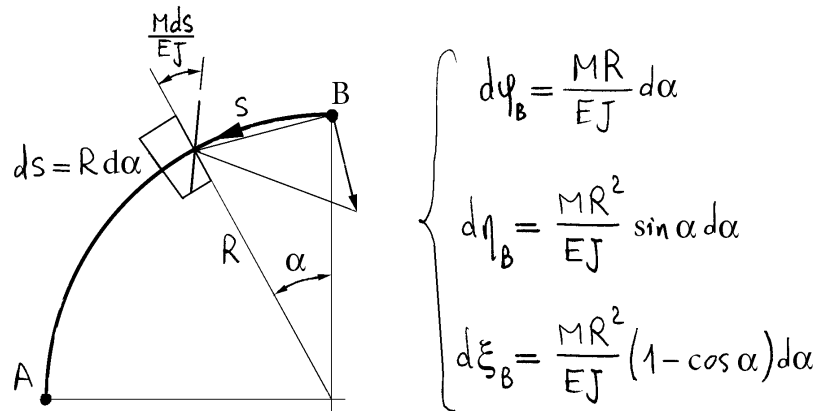
$$M(\alpha) = \frac{qR^2}{2} \sin^2 \alpha,$$

$$N(\alpha) = -qR \sin^2 \alpha,$$

$$T(\alpha) = qR \sin \alpha \cos \alpha.$$

Con riferimento allo schema di figura si ottiene:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_0^{\pi/2} \frac{MR}{EJ} d\alpha,$$



$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \varphi_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{2EJ} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8} \frac{qR^3}{EJ},$$

poiché:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Per quel che riguarda lo spostamento verticale di B si ottiene:

$$\eta_B = \eta_A + \varphi_A R + \int_0^{\pi/2} \frac{MR^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha,$$

$$\eta_A = 0, \varphi_A = 0 \Rightarrow \eta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{qR^4}{3EJ},$$

poiché:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \alpha d\alpha &= \int_0^{\pi/2} \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) d\alpha = \\ &= \left[-\cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Infine, lo spostamento orizzontale di B risulta:

$$\xi_B = \xi_A + \varphi_A R + \int_0^{\pi/2} \frac{MR^2}{EJ} (1 - \cos \alpha) d\alpha,$$

$$\xi_A = 0, \varphi_A = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_B &= \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \frac{qR^4}{EJ}, \end{aligned}$$

poiché:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha &= \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

1.3 Integrazione dell'equazione della linea elastica

Data una trave inflessa, omogenea nella sezione retta e ad asse rettilineo è possibile determinare il campo v degli spostamenti dei punti della linea d'asse integrando l'equazione costitutiva:

$$M = EJ\varphi', \quad (1)$$

dove al solito M è il momento flettente, E è il modulo di Young e J è il momento di inerzia.

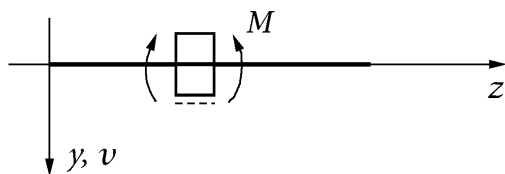
Si ricordi che il campo φ delle rotazioni delle sezioni rette dipende dal campo degli spostamenti v tramite il vincolo interno di trave inflessa:

$$\varphi = -v',$$

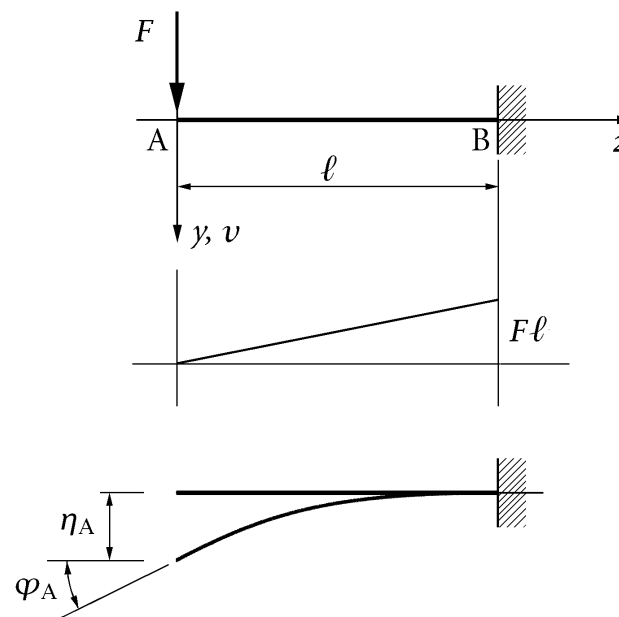
per cui l'equazione (1) diventa:

$$v'' = -\frac{M}{EJ},$$

detta *equazione della linea elastica*. Tale equazione va associata alle opportune condizioni cinematiche dovute ai vincoli.



Quale esempio si consideri la mensola inflessa di figura, a sezione costante e soggetta ad un carico concentrato nell'e-



stremità libera. Alla sezione incastrata è impedito sia lo spostamento che la rotazione e quindi le condizioni cinematiche al contorno si scrivono:

$$v(\ell) = 0, \quad \varphi(\ell) = -v'(\ell) = 0.$$

Poiché il momento flettente vale $M = -Fz$, integrando l'equazione della linea elastica si ottiene:

$$v' = \frac{Fz^2}{2EJ} + c_1,$$

$$v = \frac{Fz^3}{6EJ} + c_1z + c_2.$$

Le costanti di integrazione c_1 e c_2 si ottengono imponendo le condizioni al contorno:

$$v(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F\ell^3}{6EJ} + c_1\ell + c_2 = 0,$$

$$v'(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F\ell^2}{2EJ} + c_1 = 0,$$

da cui:

$$c_1 = -\frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad c_2 = \frac{F\ell^3}{3EJ}.$$

Si ottengono quindi i seguenti campi di spostamento:

$$v = \frac{F}{6EJ} (z^3 - 3\ell^2 z + 2\ell^3),$$

$$\varphi = \frac{F}{2EJ} (\ell^2 - z^2).$$

In particolare, la rotazione φ_A e lo spostamento verticale η_A dell'estremità libera della mensola valgono:

$$\varphi_A = \varphi(0) = \frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad \eta_A = v(0) = \frac{F\ell^3}{3EJ}.$$

1.4 Analogia di Mohr

Si è visto che il problema cinematico, nel caso di travi ad asse rettilineo, è retto dalle due seguenti equazioni differenziali:

$$v'' = -\frac{M}{EJ},$$

$$v' = -\varphi.$$

L'analogia di Mohr riguarda l'osservazione che la struttura di queste equazioni è analoga a quelle che reggono il problema statico di una trave ad asse rettilineo. Infatti si considerino le due equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione e alla traslazione ortogonale alla linea d'asse:

$$M^{*'} = T^*,$$

$$T^{*'} = -q^*,$$

dove l'asterisco in apice alle variabili serve a ricordare che queste riguardano il problema statico. Si derivi la prima di queste equazioni e si utilizzi la seconda per eliminare $T^{*'}$. All'equazione che così si ottiene si associ la prima delle precedenti ottenendo due equazioni analoghe a quelle del problema cinematico:

$$M^{*''} = -q^*,$$

$$M^{*'} = -(-T^*).$$

In tale analogia allo spostamento v ortogonale alla linea d'asse corrisponde il momento flettente M^* , al rapporto M/EJ corrisponde il carico ripartito q^* ortogonale alla linea d'asse

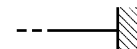
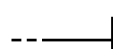
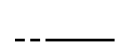
e alla rotazione φ corrisponde il taglio T^* cambiato di segno:

$$\begin{aligned} v &\Leftrightarrow M^*, \\ \frac{M}{EJ} &\Leftrightarrow q^*, \\ \varphi &\Leftrightarrow -T^*. \end{aligned}$$

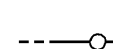
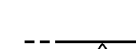
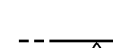
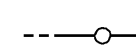
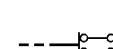
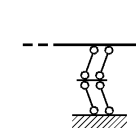
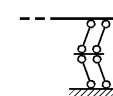
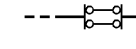
Risolvere un problema cinematico equivale quindi a risolvere un opportuno problema statico, con il vantaggio di potere utilizzare automaticamente tutte le tecniche sviluppate per risolvere i problemi statici.

Naturalmente, per passare dal problema cinematico al problema statico le condizioni al contorno cinematiche devono essere trasformate in condizioni al contorno sulle forze. Ai vincoli del problema cinematico vengono a corrispondere in tal modo opportuni vincoli del problema statico associato, come riportato nelle due tabelle seguenti, una per i vincoli di estremità ed una per quelli intermedi.

Vincoli di estremità:

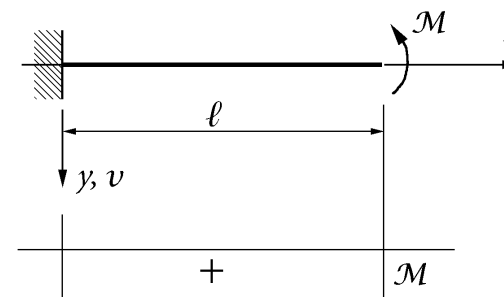
	$v \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* \neq 0$
	$v = 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* = 0$
	$v = 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* \neq 0$
	$v \neq 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* = 0$

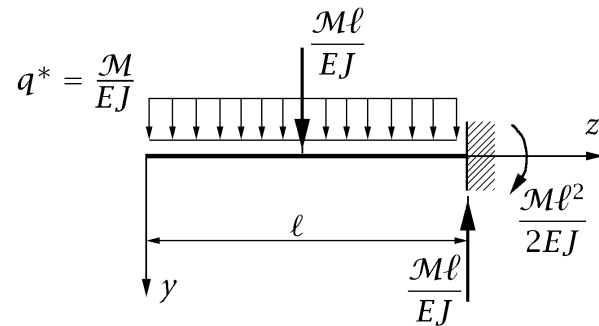
Vincoli intermedi:

	$\Delta v = 0$ $\Delta \varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$\Delta M^* = 0$ $\Delta T^* \neq 0$
	$v = 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* \neq 0$
	$\Delta v \neq 0$ $\Delta \varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$\Delta M^* \neq 0$ $\Delta T^* = 0$
	$v \neq 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* = 0$

1.4.1 Mensola soggetta ad una coppia

Come primo esempio, si consideri una mensola soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ nell'estremità libera, della quale si vogliono valutare lo spostamento e la rotazione dell'estremità libera. Nell'analogia di Mohr alla mensola del problema cinematico corrisponde una mensola nel problema statico, con estremità





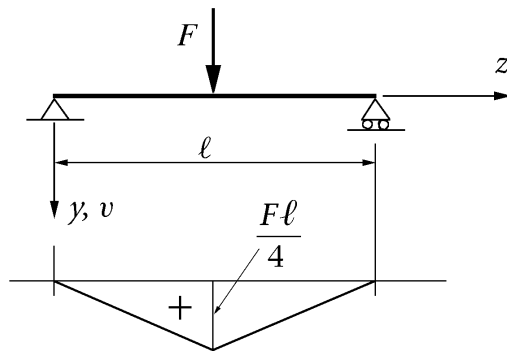
libera e incastro invertiti. Il momento del problema cinematico è costante ed uguale alla coppia applicata, e quindi il carico ripartito del problema statico vale $q^* = M/EJ$. Risulta quindi:

$$v(\ell) = M^*(\ell) = -\frac{M\ell^2}{2EJ},$$

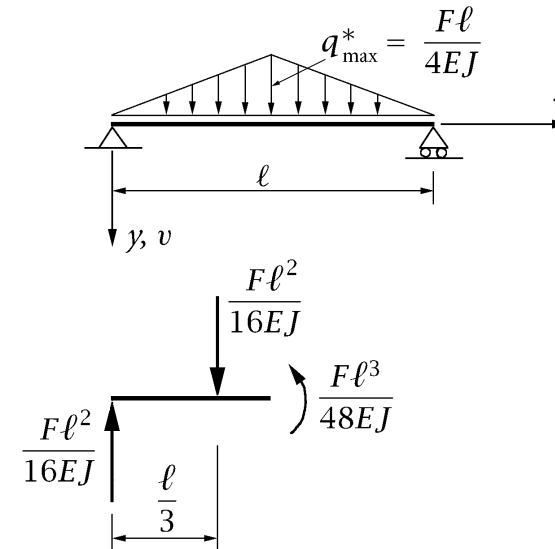
$$\varphi(\ell) = -T^*(\ell) = \frac{M\ell}{EJ}.$$

1.4.2 Trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato

Come secondo esempio si consideri invece una trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria F , della quale si vogliono valutare la freccia in mezzeria e le rotazioni



delle sezioni sugli appoggi. Nell'analogia di Mohr alla trave appoggiata del problema cinematico corrisponde un'analogia trave appoggiata nel problema statico. Il momento flettente del problema cinematico è lineare e ne risulta un carico ripartito triangolare simmetrico per il problema statico associato.



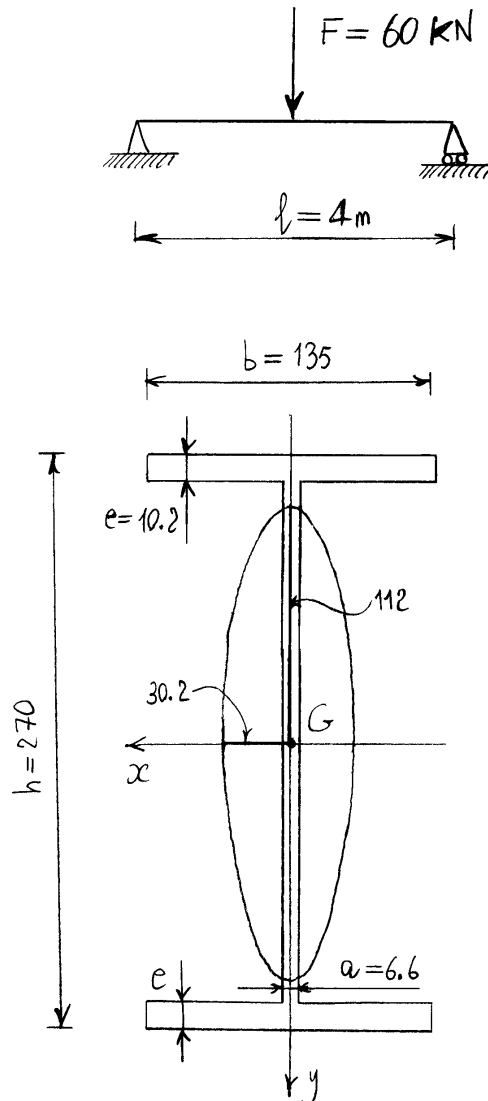
Ne consegue:

$$\varphi(0) = -T^*(0) = -\frac{F\ell^2}{16EJ},$$

$$\varphi(\ell) = -T^*(\ell) = \frac{F\ell^2}{16EJ},$$

$$v(\ell/2) = M^*(\ell/2) = \left(\frac{F\ell^2}{16EJ}\right) \frac{\ell}{3} = \frac{F\ell^3}{48EJ}.$$

1.4.3 Trave IPE270 appoggiata soggetta ad un carico concentrato



$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$J_x = 5790 \text{ cm}^4$$

nella figura le misure
sono in mm

Freccia in mezzeria della trave

$$f = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F l^3}{48 E J} =$$

$$= \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})^3}{48 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 6.58 \text{ mm}$$

$$\frac{f}{l} = \frac{6.58 \text{ mm}}{4 \times 10^3 \text{ mm}} = 0.001645 < 0.002 = \frac{1}{500}$$

Rotazione delle sezioni sugli appoggi

$$\varphi = \frac{F l^2}{16 E J} = \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})^2}{16 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} =$$

$$= 4.93 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.28^\circ$$

Curvatura flessionale massima

$$K_{\max} = \frac{M_{\max}}{E J} = \frac{F l}{4 E J} =$$

$$= \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})}{4 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} =$$

$$= 4.93 \times 10^{-6} \text{ rad/mm} \Rightarrow$$

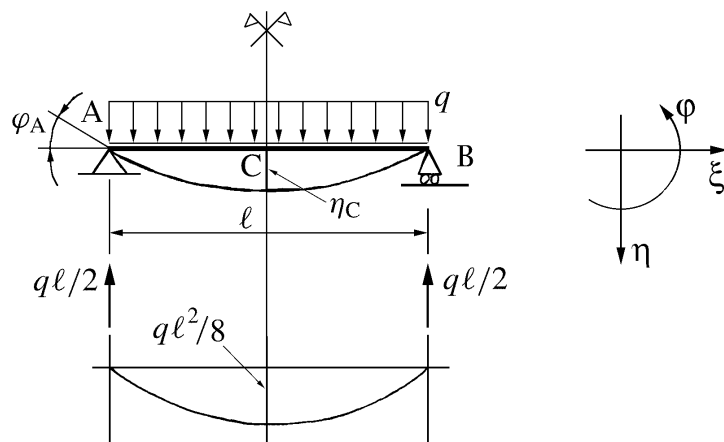
$\Rightarrow$ Raggio di curvatura minimo = 203 m

1.5 Strutture con uguale deformazione

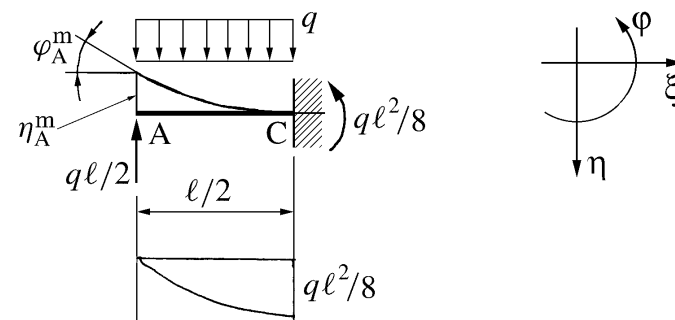
Si supponga che una trave, o una struttura senza sconnessioni interne, sia vincolata e caricata in due modi diversi ma conservando uguale deformazione. Uguale deformazione significa uguale curvatura, ed uguale dilatazione nel caso si tenga conto del contributo dello sforzo normale. Se la deformazione è uguale, i campi di spostamento corrispondenti ai due casi possono differire solo di un moto rigido. Se in uno dei due casi sono noti gli spostamenti (e le rotazioni), è sufficiente individuare il moto rigido differenza basandosi sul rispetto dei vincoli dell'altro caso, per determinarne gli spostamenti e le rotazioni.

1.5.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito

Come primo esempio si consideri la trave appoggiata di figura, soggetta ad un carico ripartito costante q . Se ne consideri il tratto AC incastrato nell'estremità C e soggetto, ol-



tre al carico ripartito, ad un carico concentrato $q\ell/2$ nell'estremità A. In tal modo il momento flettente della mensola coincide con quello del tratto AC della trave appoggiata e di conseguenza coincide anche la loro curvatura flessionale. Ne consegue che gli spostamenti nei due casi differiscono di un moto rigido. Poiché per simmetria la sezione C di mezzeria della trave appoggiata non può ruotare e né traslare orizzontalmente, in accordo con l'incastro della mensola, il moto rigido coincide con una traslazione verticale. L'ampiezza della traslazione deve essere tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola, poiché nella trave appoggiata tale spostamento è nullo.



Una traslazione non modifica le rotazioni e dunque la rotazione φ_A della sezione A nella trave appoggiata coincide con l'analoga rotazione $\varphi_A^{(m)}$ valutata nella mensola:

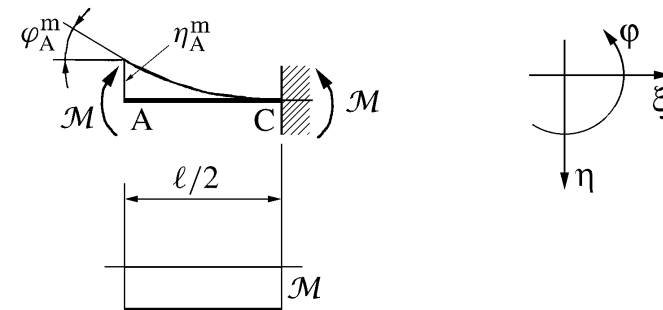
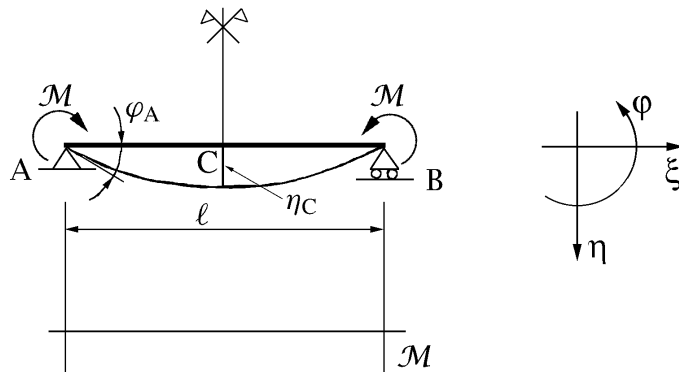
$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} = -\frac{\left(\frac{q\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2EJ} + \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{6EJ} = -\frac{q\ell^3}{24EJ}.$$

La freccia in mezzzeria η_C della trave appoggiata coincide invece con la traslazione rigida $\bar{\eta}$ che, come detto, annulla lo spostamento $\eta_A^{(m)}$ dell'estremità A della mensola:

$$\eta_C = \bar{\eta} = -\eta_A^{(m)} = \frac{\left(\frac{q\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3EJ} - \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

1.5.2 Trave appoggiata soggetta a due coppie concentrate simmetriche

Il secondo esempio è analogo al precedente, con la differenza che la trave appoggiata è soggetta a due coppie simmetriche $\mathcal{M}$ applicate alle due estremità. procedendo come prima, se ne consideri il tratto AC incastrato nell'estremità C e soggetto alla coppia concentrata $\mathcal{M}$ nell'estremità libera A. Ne consegue che gli spostamenti nei due casi differiscono di un moto rigido di traslazione verticale, di ampiezza tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola.



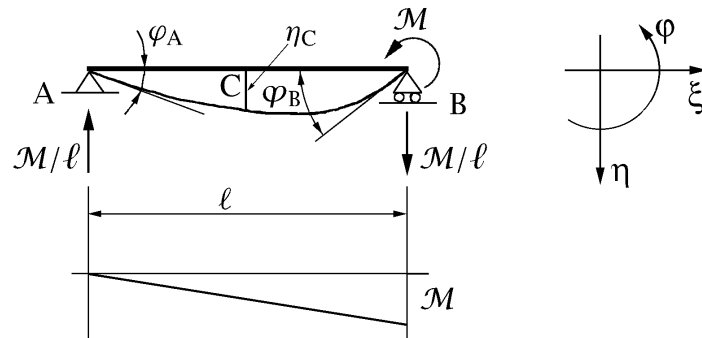
La rotazione φ_A della sezione A e la freccia in mezzzeria η_C della trave appoggiata valgono quindi:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} = -\frac{\mathcal{M}\frac{\ell}{2}}{EJ} = -\frac{\mathcal{M}\ell}{2EJ},$$

$$\eta_C = \bar{\eta} = -\eta_A^{(m)} = \frac{\mathcal{M}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2EJ} = \frac{\mathcal{M}\ell^2}{8EJ}.$$

1.5.3 Trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata

Come terzo esempio si consideri la trave appoggiata di figura, soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ applicata alla estremità B. In tal caso non vi è simmetria. Si consideri allora l'intera trave AB incastrata nell'estremità B e soggetta ad un carico concentrato $\mathcal{M}/\ell$ nell'estremità A, in modo tale che il momento flettente della mensola coincide con quello della trave appoggiata e di conseguenza coincide anche la loro curvatura flessionale. Gli spostamenti nei due casi differiscono quindi di un moto rigido. Poiché la sezione B di estremità della trave appoggiata non può traslare, in accordo con l'incastro della mensola, il



moto rigido differenza deve coincidere con una rotazione attorno al punto B. L'ampiezza della rotazione deve essere tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola, poiché nella trave appoggiata tale spostamento è nullo.

La traslazione dell'estremità A della mensola vale:

$$\eta_A^{(m)} = -\frac{\left(\frac{M}{\ell}\right) \ell^3}{3EJ} = -\frac{M\ell^2}{3EJ},$$

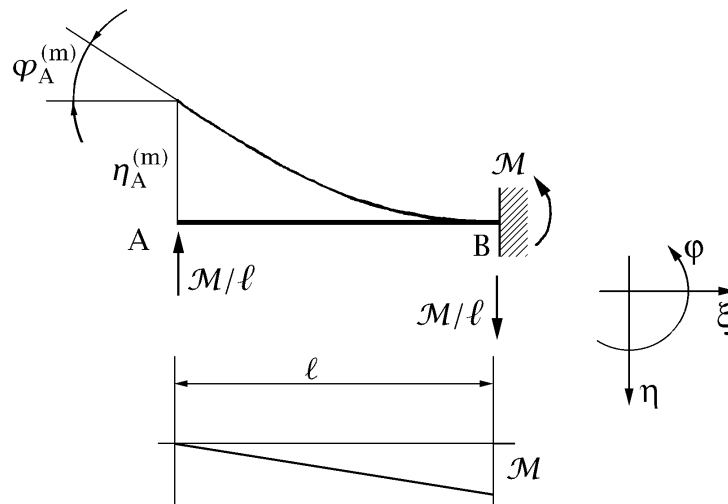
e di conseguenza la rotazione rigida $\bar{\varphi}$ vale:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\eta_A^{(m)}}{\ell} = \frac{M\ell}{3EJ}.$$

Sovrapponendo i contributi della rotazione rigida a quelli valutati nella mensola si ottiene la rotazione φ_A dell'estremità A della trave appoggiata, mentre la rotazione φ_B dell'estremità B coincide con la rotazione rigida $\bar{\varphi}$:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} + \bar{\varphi} = -\frac{\left(\frac{M}{\ell}\right) \ell^2}{2EJ} + \frac{M\ell}{3EJ} = -\frac{M\ell}{6EJ},$$

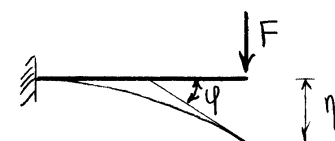
$$\varphi_B = \bar{\varphi} = \frac{M\ell}{3EJ}.$$



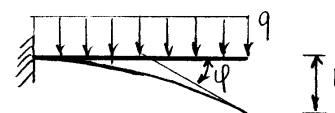
Per calcolare infine la freccia in mezzeria è sufficiente sommare i due casi simmetrici con la coppia applicata prima ad una estremità e poi nell'altra ottenendo così il caso della trave appoggiata soggetta, nelle estremità, a due coppie simmetriche. Poiché le due soluzioni devono essere l'una la simmetrica dell'altra e poiché la sezione di mezzeria si trova sull'asse di simmetria, la freccia in mezzeria coincide nei due casi. Sovrapponendo gli effetti si ottiene quindi:

$$\eta_C + \eta_C = \frac{M\ell^2}{8EJ}, \quad \Rightarrow \quad \eta_C = \frac{M\ell^2}{16EJ}.$$

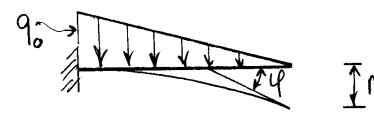
$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: Beam AB with pin at A, roller at B, moment M at B, and point C. Deflection at C is } \eta_C. \\
 & + \\
 & \text{Diagram 2: Beam AB with pin at A, roller at B, moment M at A, and point C. Deflection at C is } \eta_C. \\
 & = \\
 & \text{Diagram 3: Beam AB with pin at A, roller at B, moment M at A, moment M at B, and point C. Deflection at C is } \frac{M\ell^2}{8EJ}.
 \end{aligned}$$



$$\varphi = \frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad \eta = \frac{F\ell^3}{3EJ}$$



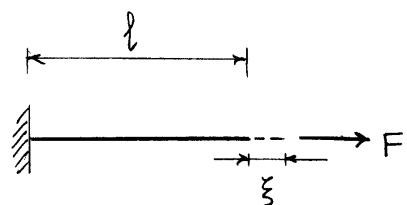
$$\varphi = \frac{q\ell^3}{6EJ}, \quad \eta = \frac{q\ell^4}{8EJ}$$

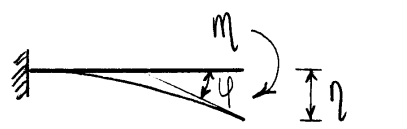


$$\varphi = \frac{q_0\ell^3}{24EJ}, \quad \eta = \frac{q_0\ell^4}{30EJ}$$

1.6 Coefficienti elastici

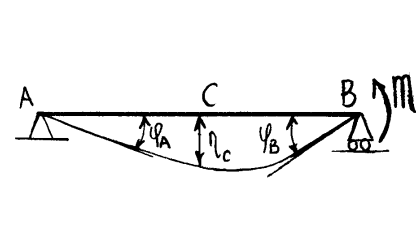
1.6.1 Mensole



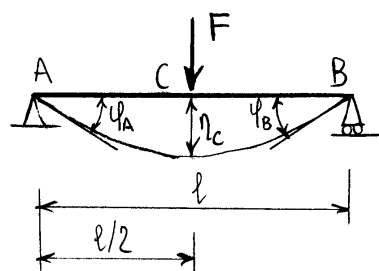
$$\xi = \frac{F\ell}{EA}$$


$$\varphi = \frac{M\ell}{EJ}, \quad \eta = \frac{M\ell^2}{2EJ}$$

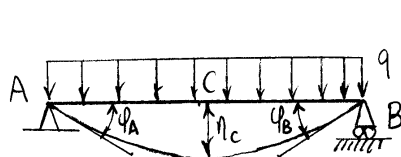
1.6.2 Travi appoggiate



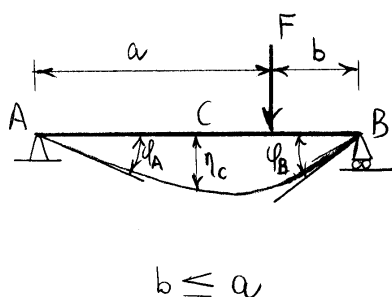
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{M\ell}{6EJ}, & \varphi_B &= \frac{M\ell}{3EJ}, \\ \eta_C &= \frac{M\ell^2}{16EJ} \end{aligned} \right.$$



$$\begin{cases} \varphi_A = \varphi_B = \frac{F l^2}{16 E J} \\ \eta_c = \frac{F l^3}{48 E J} \end{cases}$$

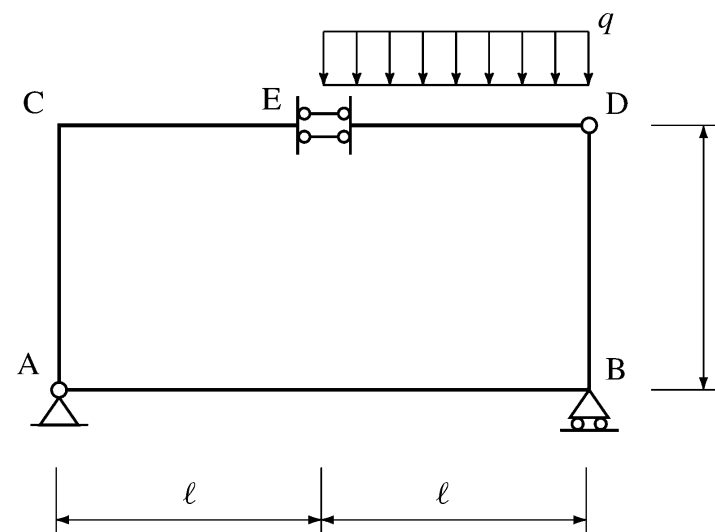


$$\begin{cases} \varphi_A = \varphi_B = \frac{q l^3}{24 E J} \\ \eta_c = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E J} \end{cases}$$



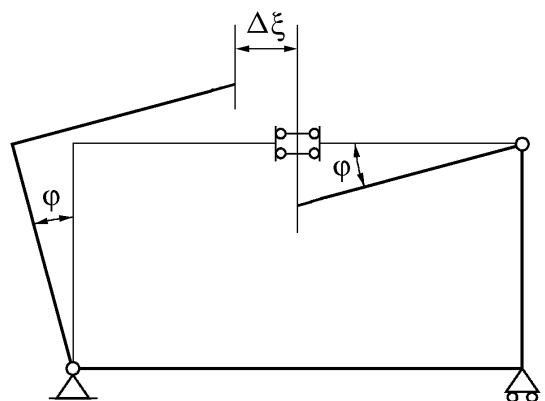
$$\begin{cases} \varphi_A = \frac{F b (l^2 - b^2)}{6 E J l} \\ \varphi_B = \frac{F a (l^2 - a^2)}{6 E J l} \\ \eta_c = \frac{F b}{48 E J} (3 l^2 - 4 b^2) \end{cases}$$

1.7 Esercizio (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)

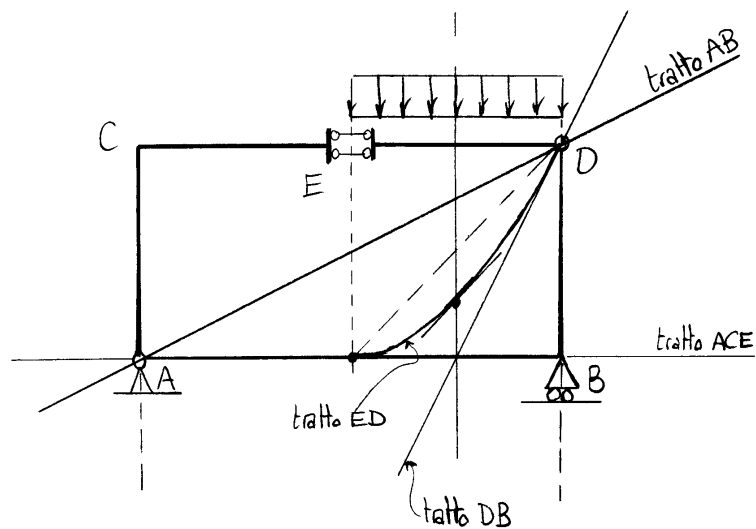


1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Disegnare la deformata della struttura.
5. Calcolare gli spostamenti e le rotazioni dei nodi e in particolare determinare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in E.

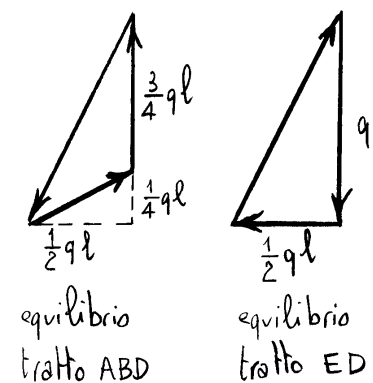
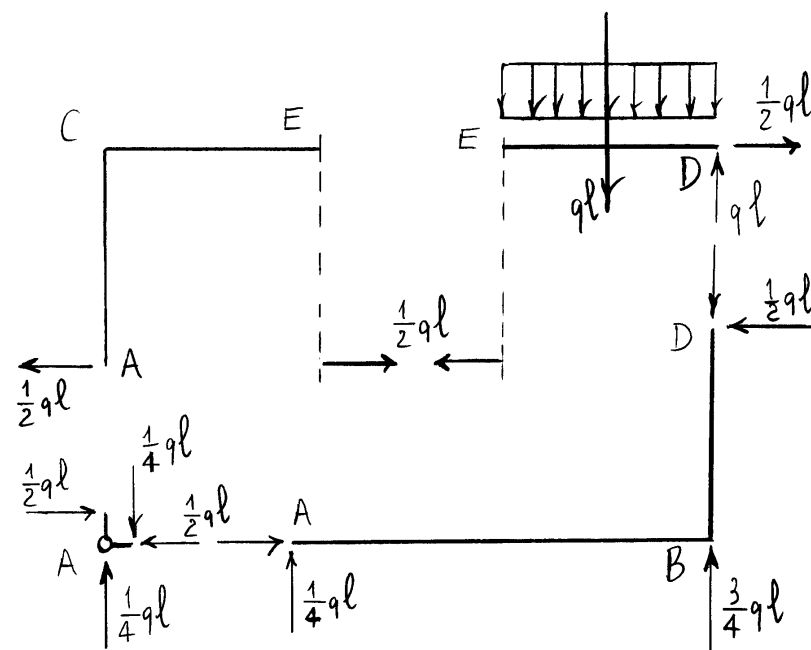
Verifica dell'isostaticità della struttura



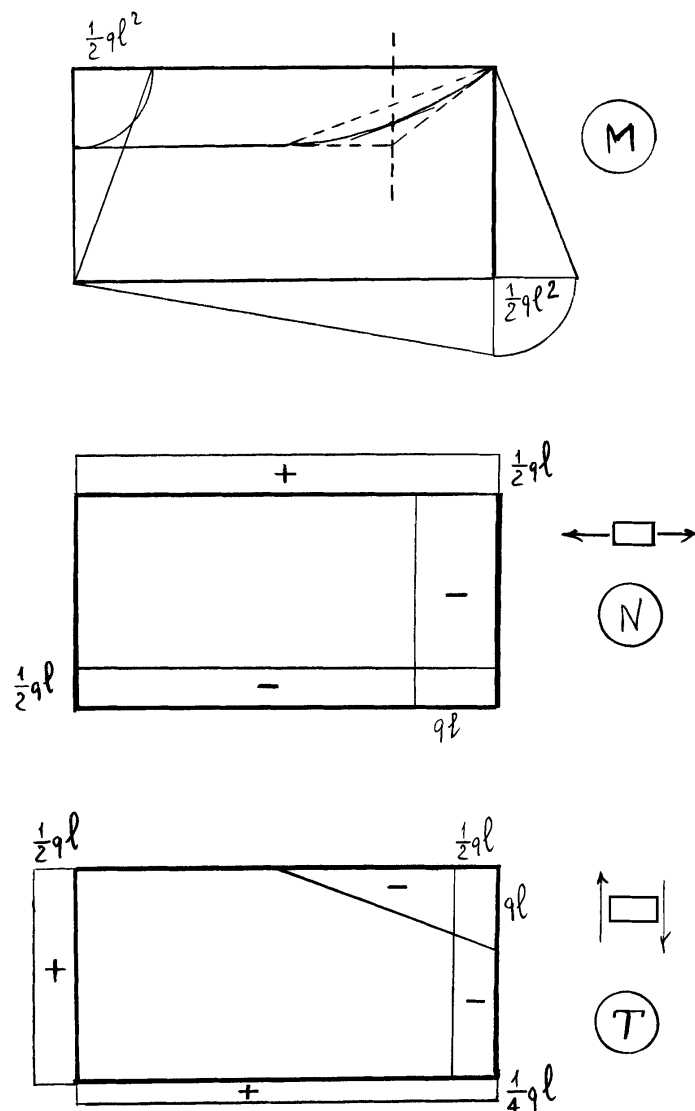
Curva delle pressioni



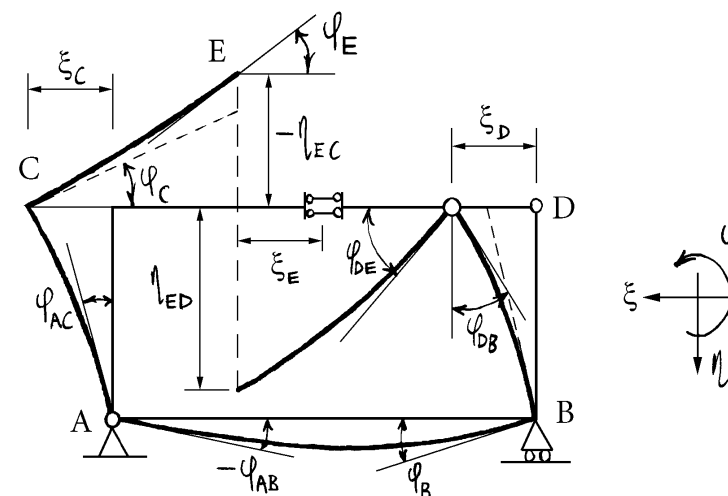
Reazioni interne e esterne



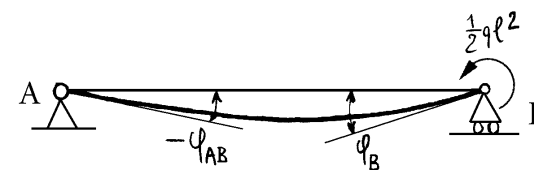
Diagrammi del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale



Spostamenti e deformata della struttura



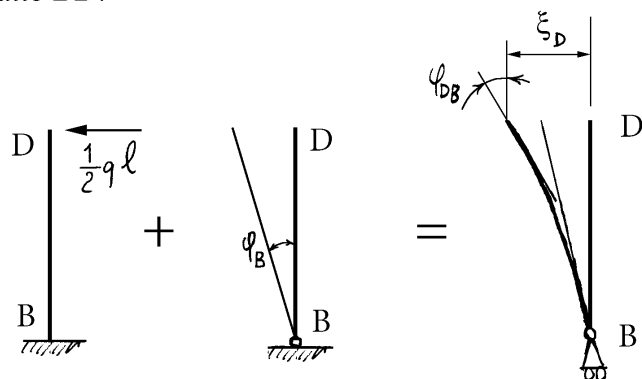
1. Tratto AB:



$$\varphi_{AB} = \frac{-\left(\frac{1}{2}ql^2\right)(2l)}{6EJ} = -\frac{ql^3}{6EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{\left(\frac{1}{2}ql^2\right)(2l)}{3EJ} = \frac{ql^3}{3EJ}$$

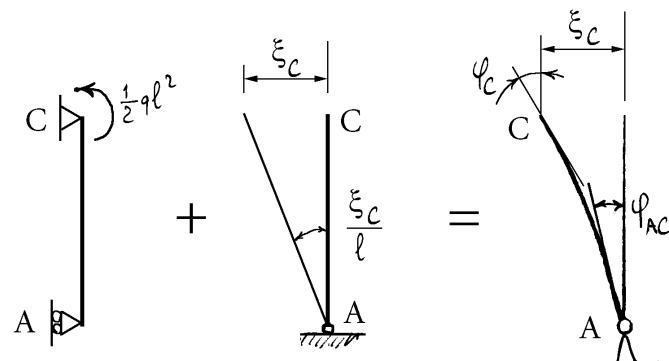
2. Tratto BD:



$$\xi_D = \xi_E = \xi_C = \frac{\left(\frac{1}{2}ql\right)l^3}{3EJ} + \varphi_B l = \frac{ql^4}{2EJ}$$

$$\varphi_{DB} = \frac{\left(\frac{1}{2}ql\right)l^2}{2EJ} + \varphi_B = \frac{7}{12} \frac{ql^3}{EJ}$$

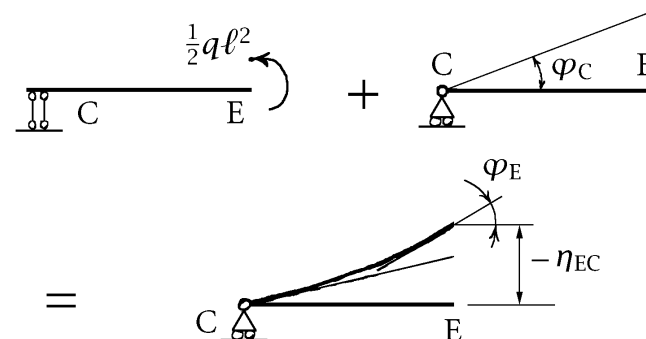
3. Tratto AC:



$$\varphi_{AC} = \frac{\xi_C}{l} - \frac{\left(\frac{1}{2}ql^2\right)l}{6EJ} = \frac{5}{12} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = \frac{\xi_C}{l} + \frac{\left(\frac{1}{2}ql^2\right)l}{3EJ} = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{EJ}$$

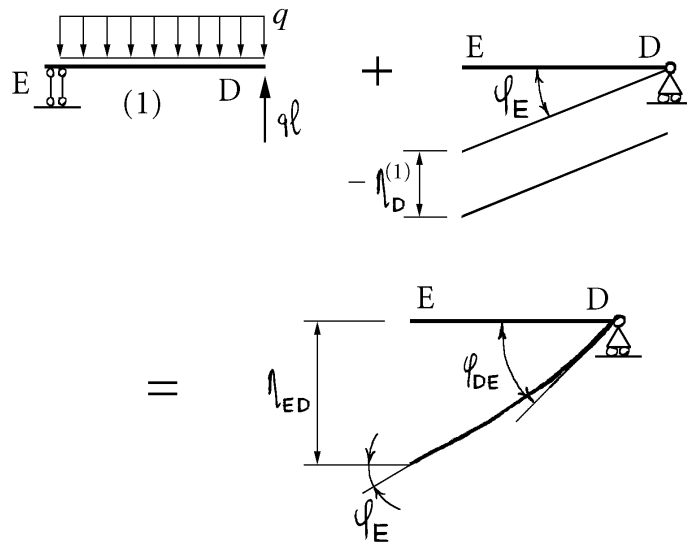
4. Tratto CE:



$$\varphi_E = \frac{\left(\frac{1}{2}ql^2\right)l}{EJ} + \varphi_C = \frac{7ql^3}{6EJ},$$

$$\eta_{EC} = -\frac{\left(\frac{1}{2}ql^2\right)l^2}{2EJ} - \varphi_C l = -\frac{11ql^4}{12EJ}.$$

5. Tratto ED:



$$\varphi_{DE} = \frac{(q\ell)\ell^2}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} + \varphi_E = \frac{3q\ell^3}{2EJ},$$

$$\eta_D^{(1)} = -\frac{(q\ell)\ell^3}{3EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} = -\frac{5q\ell^4}{24EJ},$$

$$\eta_{ED} = -\eta_D^{(1)} + \varphi_E \ell = \frac{11q\ell^4}{8EJ}.$$

6. Spostamento verticale relativo in E

$$\Delta\eta_E = \eta_{ED} - \eta_{EC} = \frac{55q\ell^4}{24EJ}.$$

1.8 Calcolo di spostamenti con il principio dei lavori virtuali

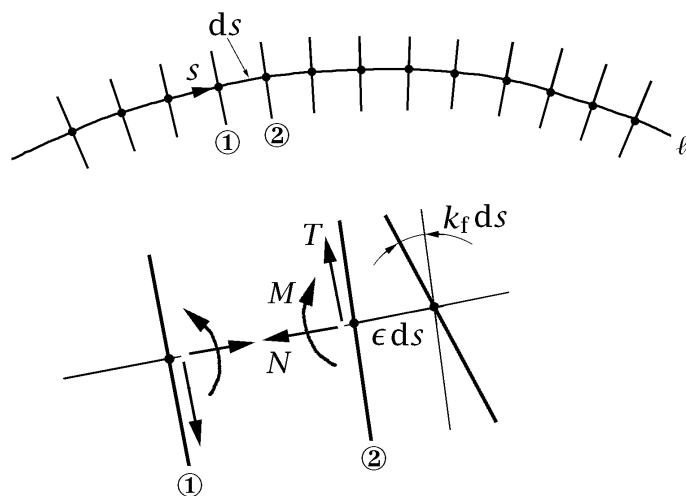
Con il termine di *spostamenti virtuali* oppure di *campo di spostamenti virtuali* si intende un campo di spostamenti (e rotazioni) infinitesimi possibili, ovverossia la parte prima di un campo di spostamenti (e rotazioni) che siano congruenti, cioè in accordo, con i vincoli sia interni che esterni del dato sistema di travi. Il lavoro di un sistema di forze per degli spostamenti virtuali viene poi detto *lavoro virtuale*.

Sotto l'ipotesi di vincoli rigidi bilaterali, privi di attrito e indipendenti dal tempo il *principio dei lavori virtuali* afferma che l'equilibrio di un sistema di travi, soggetto a date forze (esterne e interne), è equivalente all'annullarsi del lavoro virtuale L_v delle date forze per ogni campo di spostamenti virtuali:

$$L_v = 0.$$

Per rendere operativo il principio, occorre valutare il lavoro delle forze interne, che nel caso in esame sono fornite dalle caratteristiche della sollecitazione. Limitandosi al caso piano, si discretizzi una generica trave scegliendo un certo numero di punti sulla linea d'asse e le relative sezioni rette. Si consideri poi una di queste sezioni, individuata dall'ascissa curvilinea s , e la sezione immediatamente successiva, posta alla distanza ds sulla tangente alla linea d'asse (a meno di infinitesimi di ordine superiore a ds).

Le forze interne trasmesse sono la forza normale N , lo sforzo di taglio T e il momento flettente M . Siano allora dati un campo di spostamenti virtuali v , w e φ e un campo di deformazioni virtuali ϵ e k_f congruenti con tali spostamenti. Lo spostamento della seconda sezione relativamente alla prima



avviene nella direzione della tangente alla linea d'asse e vale ϵds . Poiché su tale sezione agisce una forza normale opposta a tale spostamento il contributo al lavoro virtuale vale $-N\epsilon ds$. Inoltre, la seconda sezione ruota rispetto alla prima di $k_f ds$. Ancora, poiché su tale sezione agisce un momento flettente opposto a tale rotazione il contributo al lavoro virtuale vale $-Mk_f ds$.

Il contributo globale al lavoro virtuale delle forze interne si ottiene sommando il contributo di tutte le coppie di sezioni, al limite per $ds \rightarrow 0$, per cui il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$L_{ve} - \int_{\ell} (N\epsilon + Mk_f) ds = 0,$$

dove L_{ve} , detto *lavoro virtuale esterno*, rappresenta il lavoro virtuale delle sole forze esterne. È consuetudine definire quale *lavoro virtuale interno* L_{vi} il lavoro virtuale delle forze interne cambiato di segno:

$$L_{vi} = \int_{\ell} (N\epsilon + Mk_f) ds.$$

Con tale convenzione, il principio dei lavori virtuali diventa:

$$L_{ve} = L_{vi}.$$

1.8.1 Applicazione del principio dei lavori virtuali al calcolo di spostamenti (e rotazioni) in strutture isostatiche

Data una struttura isostatica comunque caricata si vuole utilizzare il principio dei lavori virtuali per calcolare una componente di spostamento (oppure la rotazione) di una qualunque delle sue sezioni rette, sotto il dato sistema di forze.

A tal fine si osservi che in una struttura isostatica soggetta a un qualunque sistema di forze l'equilibrio è sempre soddisfatto, ovvero sono sempre determinabili (in modo unico) delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione equilibrate. Si osservi inoltre che per l'ipotesi di piccoli spostamenti, i campi degli spostamenti e delle deformazioni dovuti ai carichi applicati soddisfano le condizioni richieste ad un campo di spostamenti virtuali.

Se si vuole calcolare una componente di spostamento (o la rotazione) di una sezione, si scelga innanzitutto un sistema di forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrato ottenuto applicando una forza unitaria (una coppia unitaria) alla data sezione, forza avente la stessa direzione della componente di spostamento da determinare. Poiché l'equilibrio è soddisfatto ne consegue che $L_{ve} = L_{vi}$ per un qualunque campo di spostamenti virtuali, quindi anche per il campo di spo-

stamenti e deformazioni dovuti ai carichi applicati. Con tale scelta il lavoro virtuale esterno coincide con lo spostamento incognito (oppure la rotazione incognita) che quindi coincide con il lavoro virtuale interno.

Il sistema isostatico soggetto ai dati carichi e del quale vuole determinarsi lo spostamento (o la rotazione) di una sezione viene detto *sistema degli spostamenti e delle deformazioni*, poichè fornisce il campo degli spostamenti virtuali, ma viene anche detto *sistema reale*, poichè rappresenta il sistema che effettivamente interessa e che si vuole risolvere. Nel seguito tale sistema e, se del caso, le quantità ad esso legate saranno indicate con il simbolo (r).

Il sistema isostatico caricato da una forza (o da una coppia) unitaria viene invece detto *sistema delle forze e delle caratteristiche della sollecitazione*, poichè fornisce le forze e le caratteristiche della sollecitazione equilibrate, ma viene anche detto *sistema fittizio*, in quanto interessa solo quale mezzo per il calcolo del sistema reale. Nel seguito tale sistema e, se del caso, le quantità ad esso legate saranno indicate con il simbolo (f). Con le convenzioni indicate, il lavoro virtuale interno, che uguaglia lo spostamento (o la rotazione) incognita, si scrive:

$$L_{vi} = \int_{\ell} (N^{(f)} \epsilon^{(r)} + M^{(f)} k_f^{(r)}) ds.$$

Si vedrà nel seguito che le deformazioni reali $\epsilon^{(r)}$ e $k_f^{(r)}$ oltre che ai carichi possono essere dovute anche a delle *distorsioni*. Finchè le deformazioni reali sono dovute ai soli carichi, e quindi alle sole caratteristiche della sollecitazione reali $N^{(r)}$ e $M^{(r)}$:

$$\epsilon^{(r)} = \frac{N^{(r)}}{EA}, \quad k_f^{(r)} = \frac{M^{(r)}}{EJ},$$

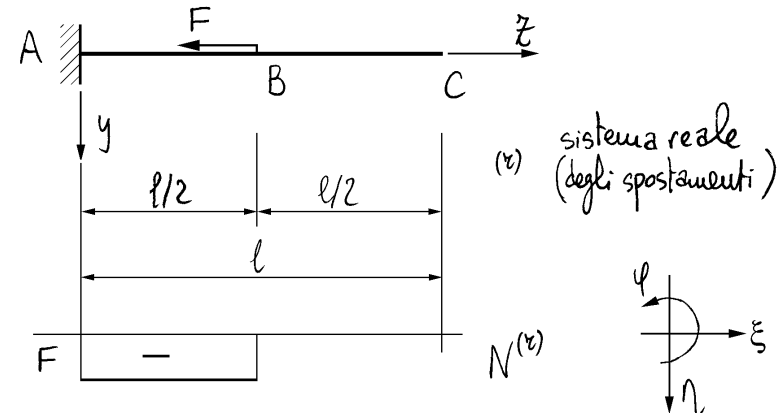
il lavoro virtuale interno diventa:

$$L_{vi} = \int_{\ell} \left(\frac{N^{(f)} N^{(r)}}{EA} + \frac{M^{(f)} M^{(r)}}{EJ} \right) ds.$$

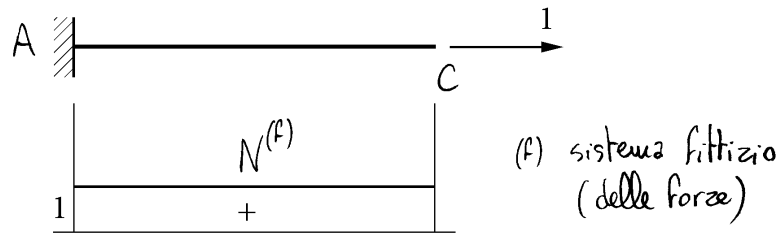
Infine, nel caso di strutture inflesse, ovverossia nel caso in cui sia trascurabile l'effetto della forza normale sulla deformazione, il termine $N^{(r)}/EA$ è trascurabile e il lavoro virtuale interno diventa:

$$L_{vi} = \int_{\ell} \frac{M^{(f)} M^{(r)}}{EJ} ds.$$

1.8.2 Mensola soggetta ad una forza di tipo assiale



Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale dell'estremità libera C della mensola. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nell'estremità C, ad una forza concentrata orizzontale e unitaria concorde con lo spostamento positivo.



$$N^{(f)} = \begin{cases} -F & \text{per } x < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{per } x > \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon^{(f)} = \begin{cases} -F/EA & \text{per } x < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{per } x > \frac{l}{2} \end{cases}$$

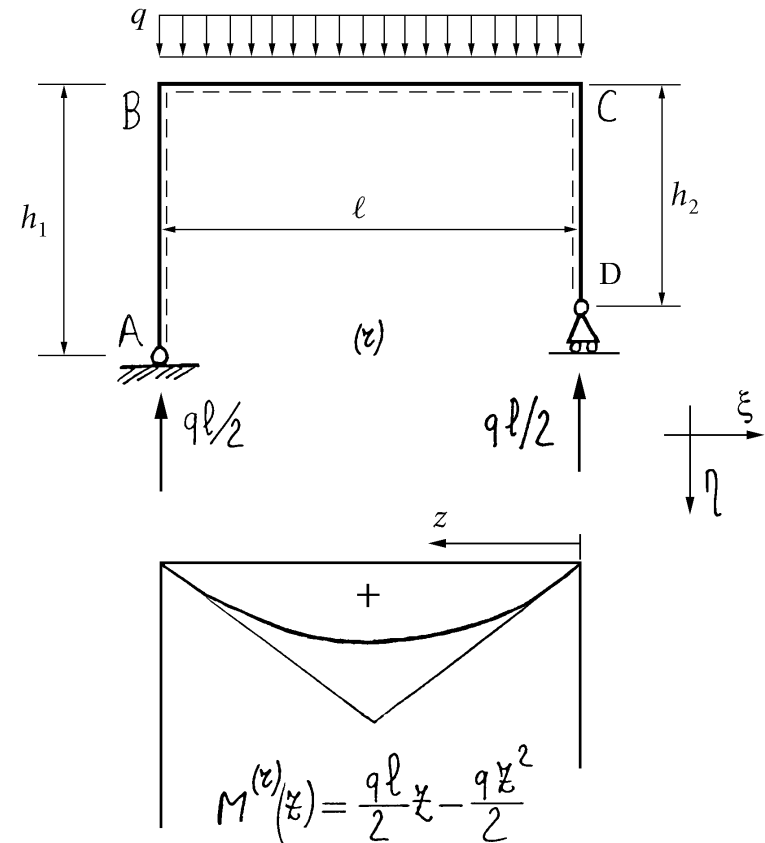
$$N^{(f)} = 1$$

$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_c$$

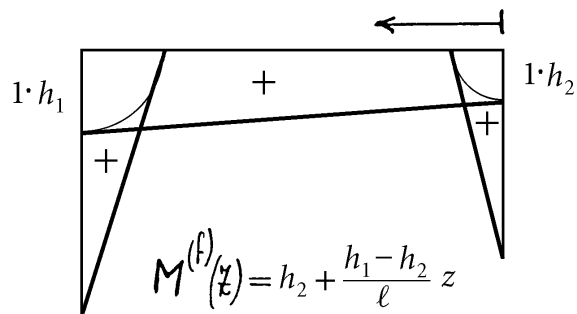
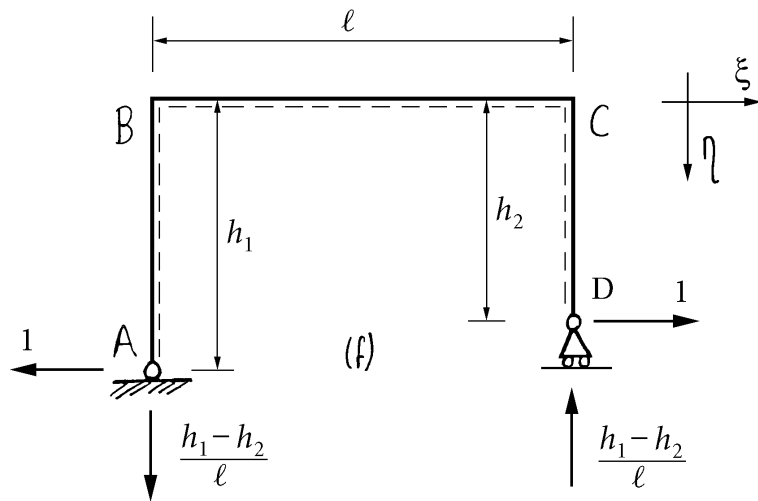
$$L_{vi} = \int_0^l N^{(f)} \varepsilon^{(f)} dx = - \int_0^{l/2} \frac{1 \cdot F}{EA} dx = - \frac{Fl}{2EA}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \xi_c = - \frac{Fl}{2EA}$$

1.8.3 Portale zoppo soggetto ad un carico ripartito



Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale della sezione D vincolata da un carrello a piano di scorrimento orizzontale. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nella sezione D, ad una forza concentrata orizzontale e unitaria concorde con lo spostamento positivo.



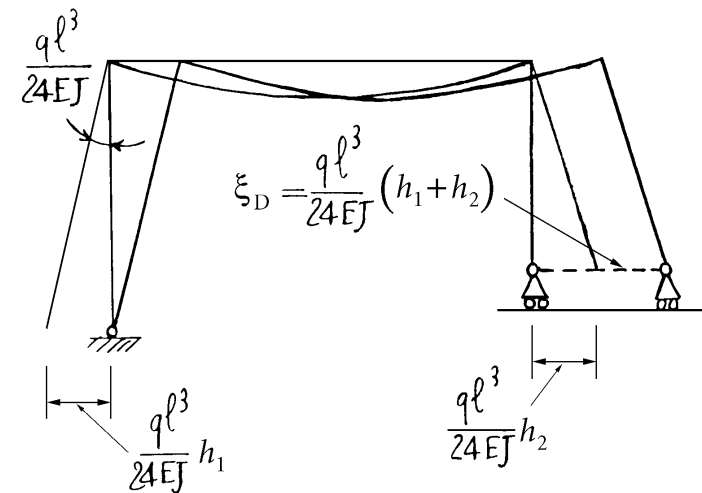
$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_D$$

$$L_{vi} = \int_0^l \left(h_2 + \frac{h_1 - h_2}{l} z \right) \left(\frac{q l}{2} z - \frac{q z^2}{2} \right) \frac{dz}{EJ} =$$

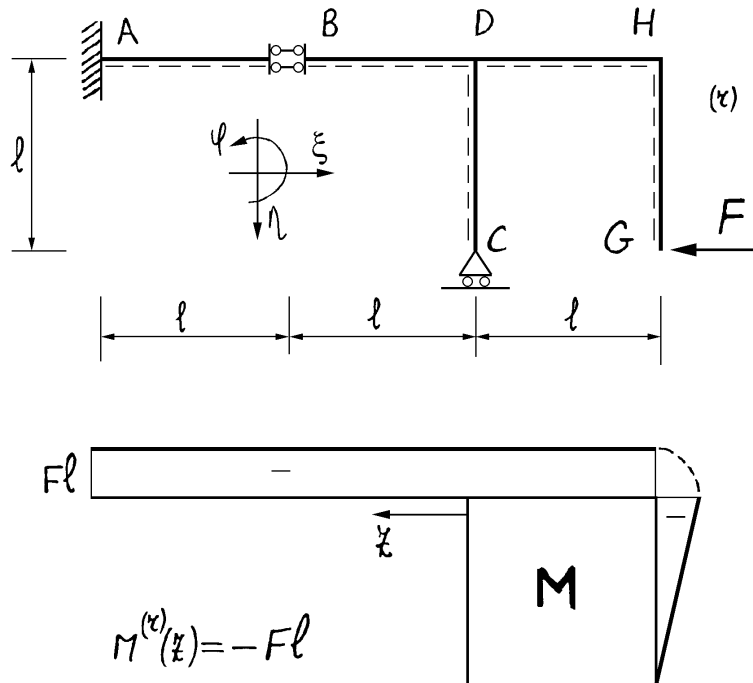
$$= \frac{q l^3}{4 E J} h_2 - \frac{q l^3}{6 E J} h_2 + \frac{q l^3}{6 E J} (h_1 - h_2) - \frac{q l^3}{8 E J} (h_1 - h_2) = \frac{q l^3}{24 E J} (h_1 + h_2)$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \xi_D = \frac{q l^3}{24 E J} (h_1 + h_2)$$

Verifica con la composizione cinematica degli spostamenti:

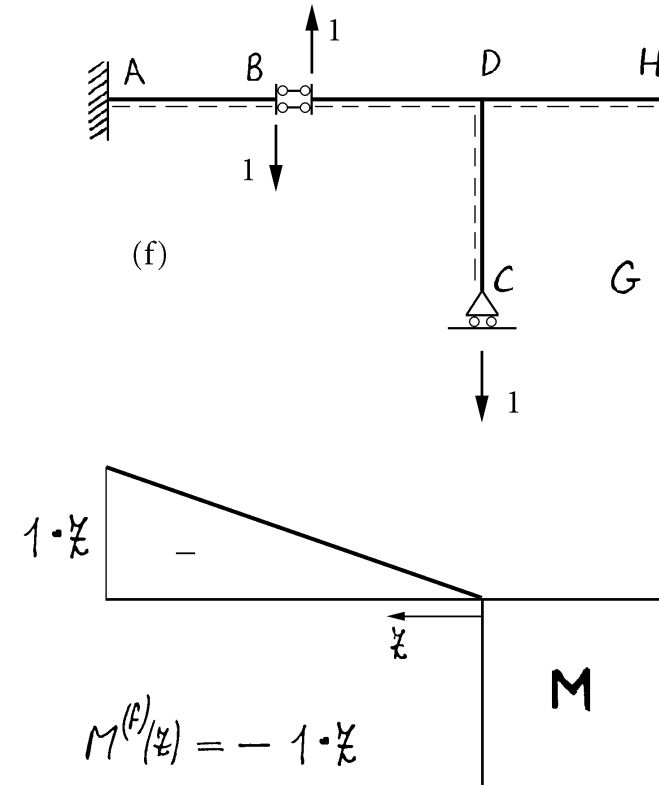


1.8.4 Telaio soggetto ad una forza concentrata



Si vuole calcolare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in B. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nelle due facce della sezione B, a due forze concentrate verticali, unitarie e di verso opposto, con quella di sinistra concorde con il verso positivo. In tal modo il lavoro virtuale esterno vale:

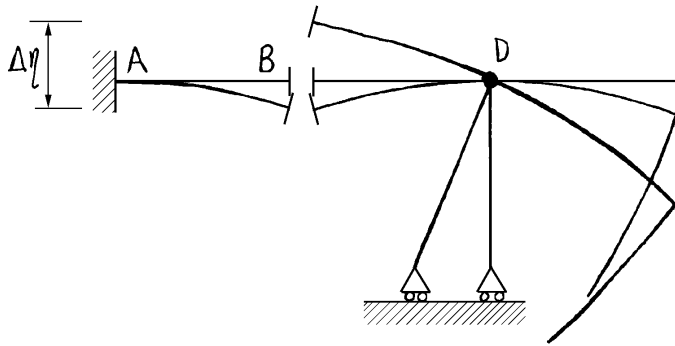
$$L_{ve} = 1 \cdot \Delta \eta_B = 1 \cdot (\eta_{BA} - \eta_{BD})$$



$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_0^{2\ell} \left\{ -1 \cdot \xi (-F\ell) \right\} \frac{d\xi}{EJ} = \\ &= \frac{F\ell}{EJ} \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_0^{2\ell} = 2 \frac{F\ell^3}{EJ} \end{aligned}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \quad \Rightarrow \quad \Delta \eta_B = 2 \frac{F \ell^3}{EJ}$$

Verifica con la composizione cinematica degli spostamenti:



$$\left. \begin{aligned} \eta_{BA} &= \frac{F \ell^3}{2EJ} \\ \varphi_{BA} &= -\frac{F \ell^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{mensole } AB$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{BD} &= \frac{F \ell^3}{2EJ} \\ \varphi_{BD} &= \frac{F \ell^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{Mensole } BD \text{ (nodo D fisso)}$$

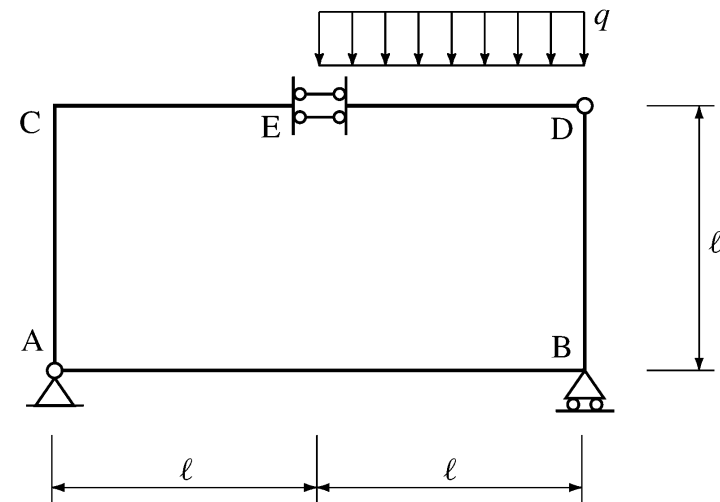
$$\varphi_{BD} + \varphi = \varphi_{BA} \Rightarrow \varphi = -2 \frac{F \ell^2}{EJ} \quad (\varphi \equiv \text{rotazione nodo D})$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{BD} &= -\frac{3}{2} \frac{F \ell^3}{EJ} \\ \varphi_{BD} &= -\frac{F \ell^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{tratto } BD \text{ (globale)}$$

$$\Delta \eta_B = \eta_{BA} - \eta_{BD} = 2 \frac{F \ell^3}{EJ}$$

1.8.5 Esercizio 1 (struttura chiusa soggetta ad un carico ripartito)

Si vuole determinare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in E della struttura chiusa riportata in figura e già risolta con la composizione cinematica degli spostamenti.

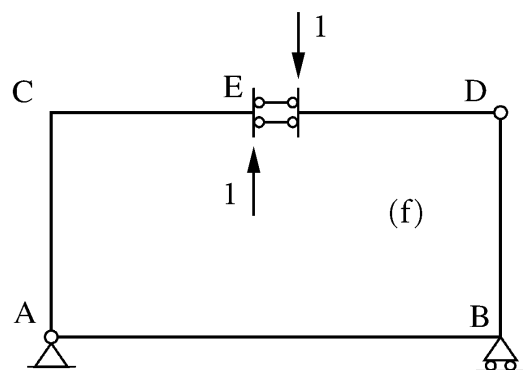


A Tale scopo la struttura fittizia viene caricata, nelle due facce della sezione E, da due forze concentrate verticali, unitarie e di verso opposto, con quella di destra concorde con il verso positivo. Ne consegue che il lavoro virtuale esterno vale:

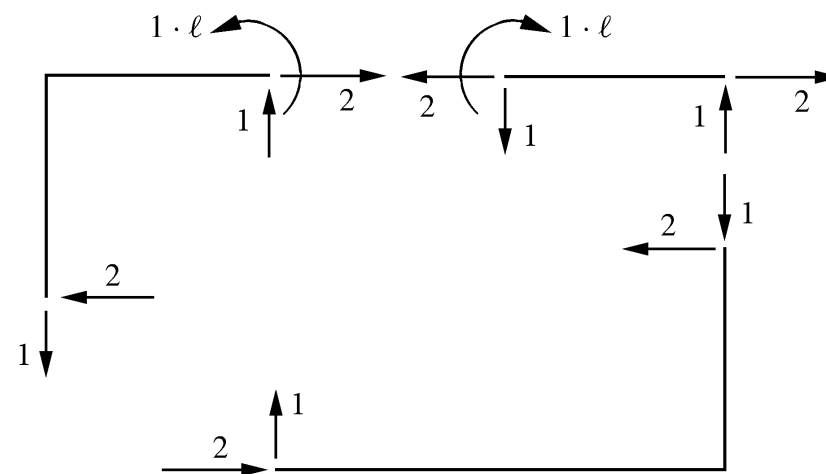
$$L_{ve} = 1 \cdot \eta_{ED} - 1 \cdot \eta_{EC} = 1 \cdot \Delta \eta_E.$$

Si noti che la struttura fittizia è soggetta a due forze autoequilibrate. Essendo tale struttura vincolata esternamente da tre vincoli semplici, le reazioni vincolari esterne sono nulle.

Struttura fittizia:



Reazioni interne e esterne della struttura fittizia:



Curva delle pressioni della struttura fittizia:

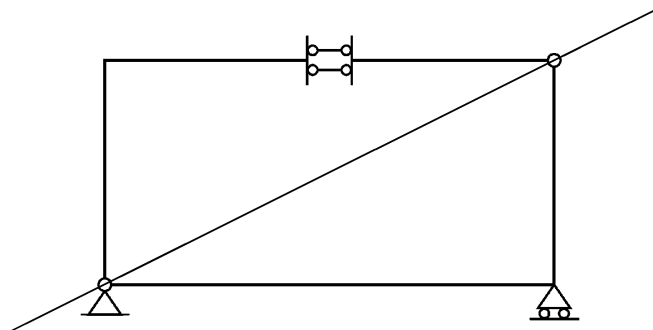
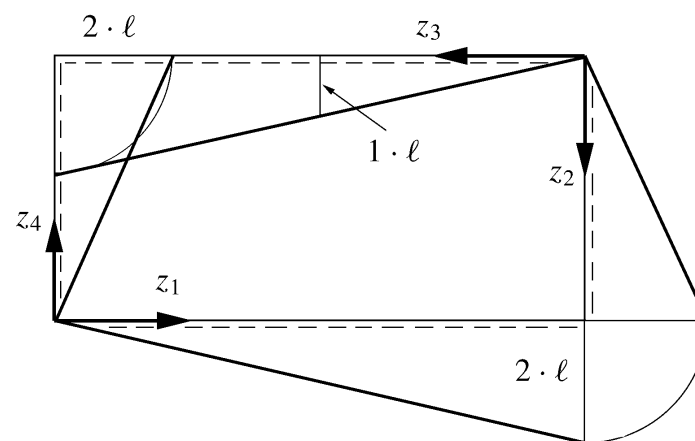


Diagramma del momento flettente della struttura fittizia:



Tenendo conto delle convenzioni indicate nel diagramma dei momenti, le equazioni dei momenti reale e fittizio risultano:

1. Tratto AB:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_1) = \frac{1}{4}q\ell z_1, \\ M^{(f)}(z_1) = 1 \cdot z_1, \end{cases} \quad 0 \leq z_1 \leq 2\ell;$$

2. Tratto BD:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_2) = \frac{1}{2}q\ell z_2, \\ M^{(f)}(z_2) = 2 \cdot z_2, \end{cases} \quad 0 \leq z_2 \leq \ell;$$

3. Tratto CD:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_3) = \begin{cases} q\ell z_3 - \frac{1}{2}qz_3^2, & 0 \leq z_3 \leq \ell, \\ \frac{1}{2}q\ell^2, & \ell \leq z_3 \leq 2\ell, \end{cases} \\ M^{(f)}(z_3) = 1 \cdot z_3, \quad 0 \leq z_3 \leq 2\ell; \end{cases}$$

4. Tratto AC:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_4) = \frac{1}{2}q\ell z_4, \\ M^{(f)}(z_4) = 2 \cdot z_4, \end{cases} \quad 0 \leq z_4 \leq \ell.$$

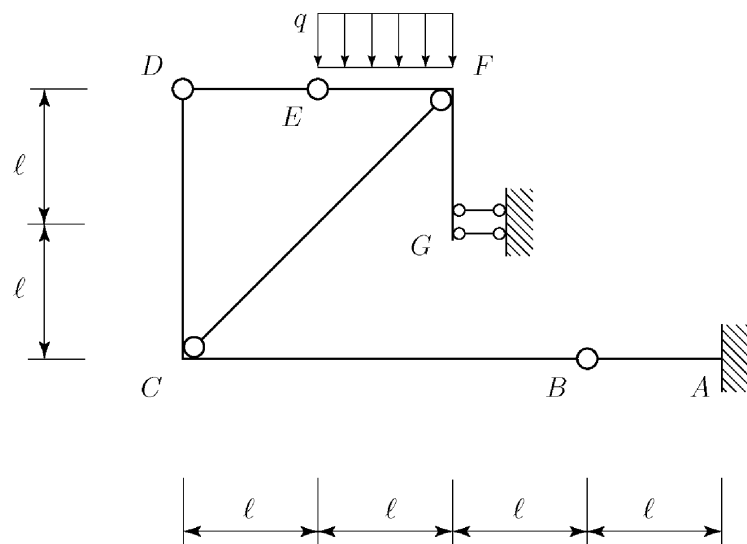
Il lavoro virtuale interno vale dunque:

$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_{\ell} \frac{M^{(r)}M^{(f)}}{EJ} ds = \\ &= \frac{1 \cdot q}{EJ} \left\{ \int_0^{2\ell} \frac{1}{4}\ell z_1^2 dz_1 + \int_0^{\ell} \ell z_2^2 dz_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{\ell} \left(\ell z_3^2 - \frac{1}{2}z_3^3 \right) dz_3 + \int_{\ell}^{2\ell} \frac{1}{2}\ell^2 z_3 dz_3 \right) + \int_0^{\ell} \ell z_4^2 dz_4 \right\} = \\ &= \left\{ \frac{8}{12} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \right\} \frac{1 \cdot q\ell^4}{EJ} = \\ &= \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{8} \right) \frac{1 \cdot q\ell^4}{EJ} = \frac{55}{24} \left(\frac{1 \cdot q\ell^4}{EJ} \right), \end{aligned}$$

e quindi:

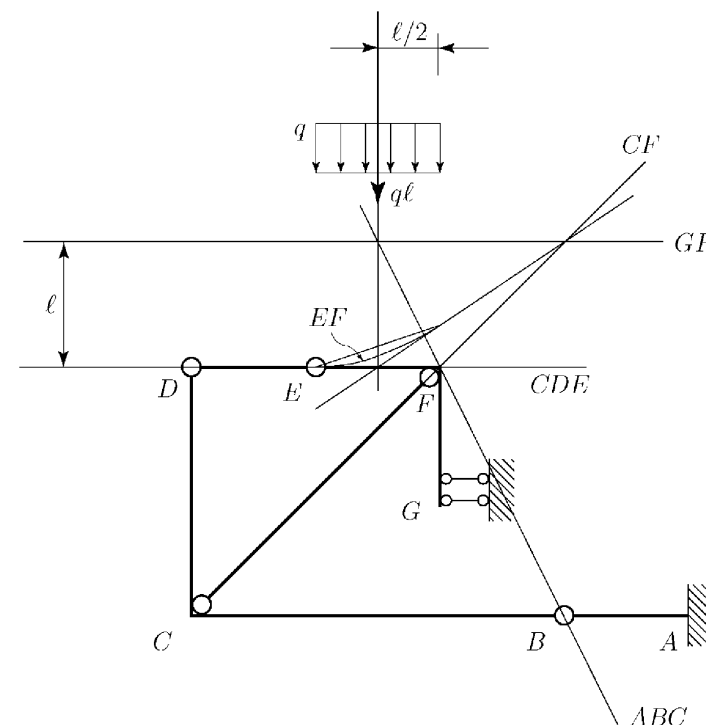
$$L_{ve} = L_{vi} \quad \Rightarrow \quad \Delta\eta_E = \frac{55q\ell^4}{24EJ}.$$

1.9 Esercizio 2 (struttura soggetta ad un carico ripartito)

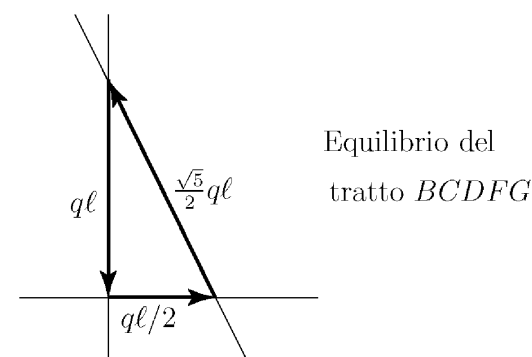


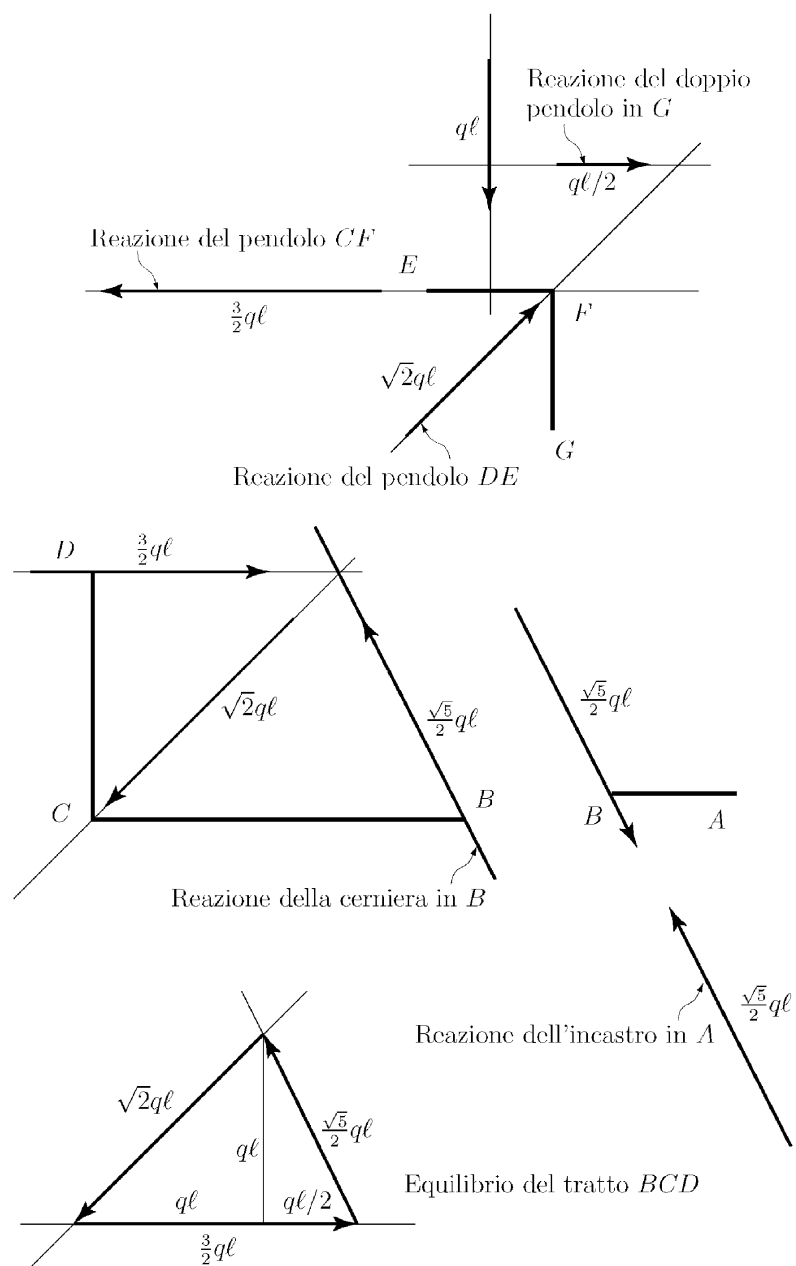
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Determinare graficamente le reazioni dei vincoli esterni ed interni e quantificarle;
- 4) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 5) Determinare lo sforzo normale nel pendolo CF utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 6) Determinare la rotazione del pendolo CF (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili nell'ipotesi che il pendolo CF sia deformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioni

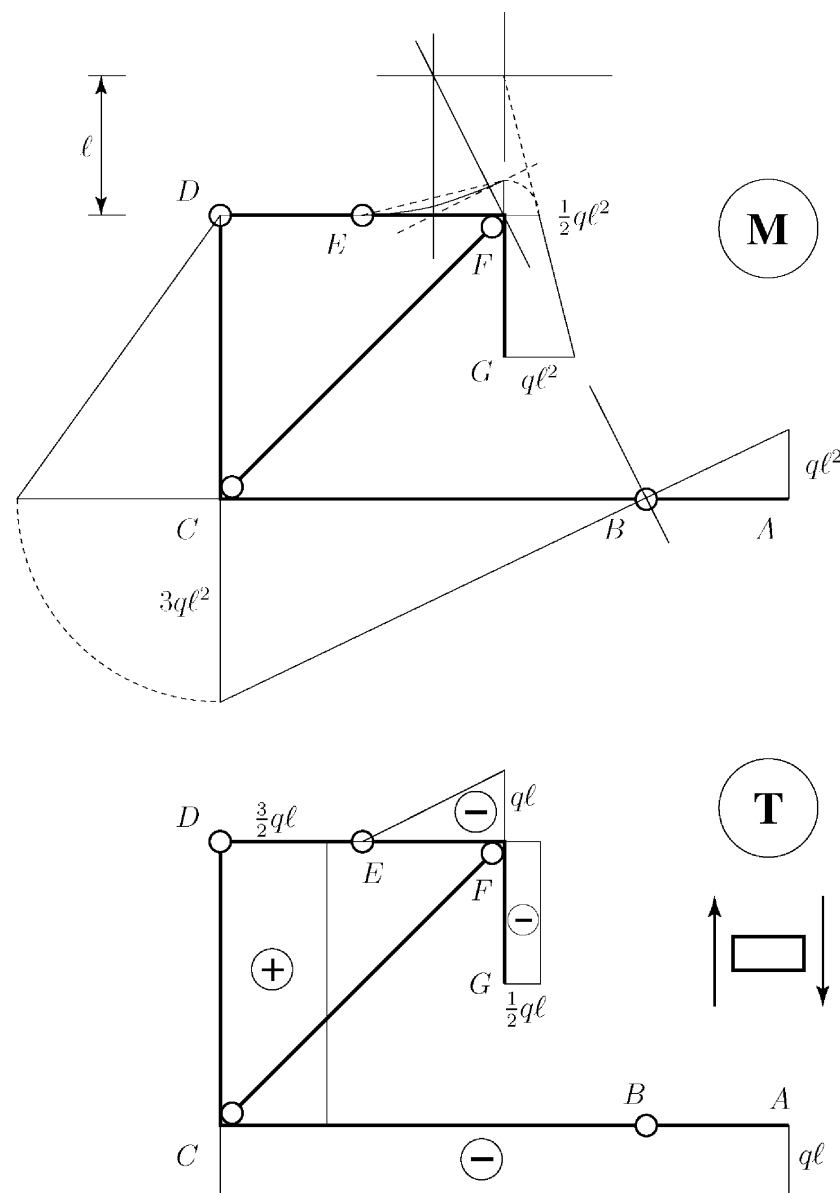


Reazioni interne ed esterne





Caratteristiche della sollecitazione



Capitolo 2

Sistemi di travi iperstatici

2.1 Metodo delle forze

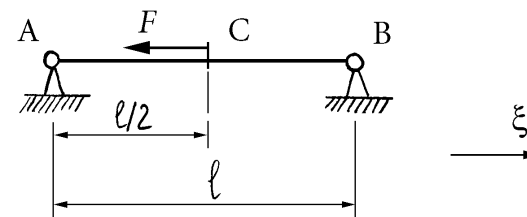
Un sistema iperstatico con grado di labilità nullo può essere reso isostatico togliendo un numero di vincoli semplici iperstatici pari al grado di iperstaticità. La struttura isostatica che così si ottiene, soggetta ai carichi applicati e alle reazioni iperstatiche staticamente indeterminate, e quindi incognite, viene detta *struttura principale*.

La struttura principale isostatica è determinata sia per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione che per il calcolo degli spostamenti. È così possibile calcolare, nella struttura principale, quegli spostamenti che nella struttura originale sono impediti o comunque limitati dai vincoli iperstatici rimossi, per poi imporre a tali spostamenti le condizioni imposte da tali vincoli. Le equazioni che così si ottengono e che sono in egual numero alle reazioni vincolari iperstatiche vengono dette *equazioni di congruenza*. Poiché le incognite che compaiono nelle equazioni di congruenza sono delle reazioni vincolari iperstatiche, e cioè delle forze, il metodo di soluzione illustrato viene detto *metodo delle forze*.

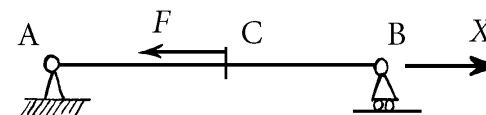
Notiamo subito che la struttura che si vuole risolvere può anche essere iperstatica e labile, purché equilibrata. In tal caso rimuovendo gli opportuni vincoli iperstatici si ottiene una struttura principale labile a grado di iperstaticità nullo, nella quale gli spostamenti necessari per la scrittura delle equazioni di congruenza sono sempre determinabili in modo univoco o, in altri termini, non sono influenzati dai possibili moti rigidi dovuti alla labilità del sistema principale.

2.1.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale

Struttura iperstatica:



Struttura principale isostatica:

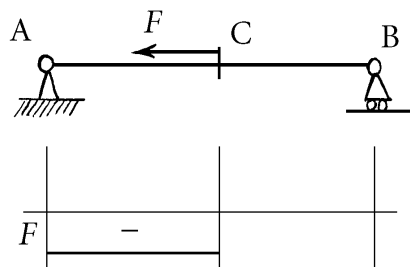
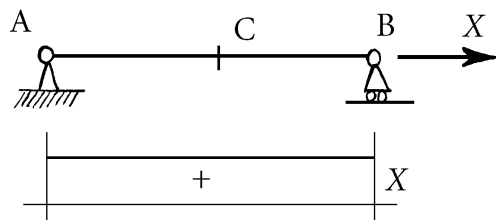


$X \equiv$ Reazione iperstatica incognita

Il punto B può subire, nella struttura principale, uno spostamento orizzontale ξ_B . Nella struttura originale iperstatica il punto B è fisso.

Lo spostamento ξ_B misura l'assenza di congruenza (incompatibilità) tra la struttura principale e quella originaria. Per ripristinare la congruenza occorre annullare l'incompatibilità tra le due strutture:

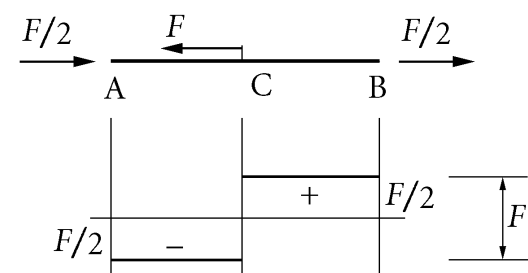
$$\xi_B = 0 \quad (\text{equazione di congruenza})$$



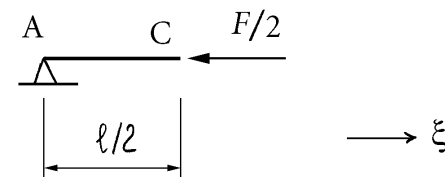
Si ottiene:

$$\xi_B = \frac{X\ell}{EA} - \frac{F(\ell/2)}{EA}$$

$$\xi_B = 0 \implies X = \frac{F}{2}$$



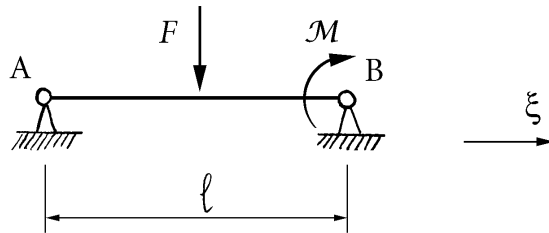
Calcolo di ξ_c :



$$\xi_c = - \frac{(F/2)(\ell/2)}{EA} = - \frac{F\ell}{4EA}$$

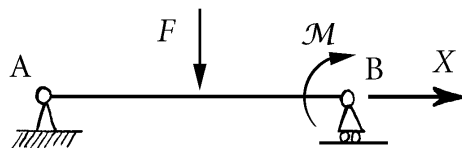
2.1.2 Trave appoggiata soggetta a carichi di tipo flessionale

Sia data una *trave appoggiata*, cioè una trave ad asse rettilineo appoggiata alle due estremità, soggetta a forze di tipo flessionale (forze ortogonali alla linea d'asse e coppie). Si scelga quale struttura principale la *trave appoggio-carrello*, cioè la trave con un appoggio ad una estremità e un carrello con piano di scorrimento orizzontale all'altra estremità.



La reazione iperstatica incognita è orizzontale ed origina tutto la forza normale della trave. Ne risulta che lo spostamento orizzontale del carrello nella struttura principale dipende dalla sola reazione iperstatica X :

$$\xi_B = \frac{X\ell}{EA}.$$



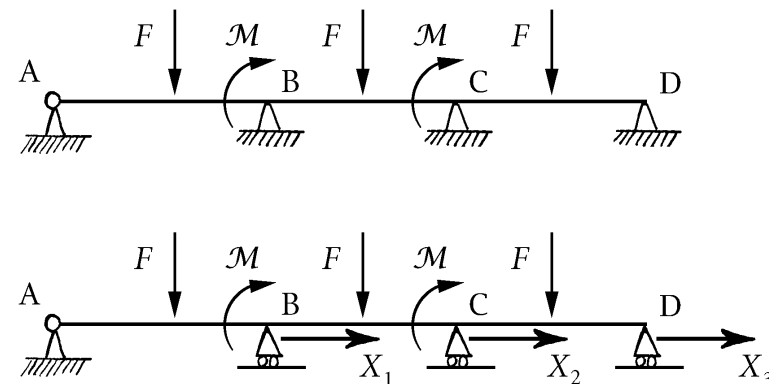
L'equazione di congruenza $\xi_B = 0$ impone quindi che la rea-

zione iperstatica sia nulla:

$$X = 0.$$

Se ne deduce così il seguente risultato generale: *Una trave appoggiata soggetta a forze di tipo flessionale è equivalente ad una trave appoggio-carrello.*

Si noti che tale risultato può essere generalizzato anche a travi ad asse rettilineo su n appoggi soggette a carichi di tipo flessionale. In tal caso infatti si consideri la trave su un appoggio e $n - 1$ carrelli a piano di scorrimento orizzontale. La forza normale, e quindi gli spostamenti orizzontali dei carrelli, dipende solo dalle reazioni iperstatiche orizzontali. Le equazioni di congruenza che impongono che gli spostamenti dei carrelli siano nulli sono dunque omogenee (non dipendono dai carichi di tipo flessionale). Ne consegue che le reazioni iperstatiche orizzontali degli appoggi sono nulle e che quindi: *Una trave ad asse rettilineo su n appoggi soggetta a forze di tipo flessionale è equivalente ad una trave su un appoggio e $n - 1$ carrelli.*



2.2 Simmetria ed emisimmetria

Simmetria significa invarianza rispetto ad una data trasformazione. Per il momento ci si limita alla simmetria rispetto alle *riflessioni*.

Una struttura piana è dunque simmetrica se resta invariata, geometricamente e materialmente, per riflessione rispetto ad un asse, mentre una struttura spaziale è simmetrica se resta invariata per riflessione rispetto ad un piano.

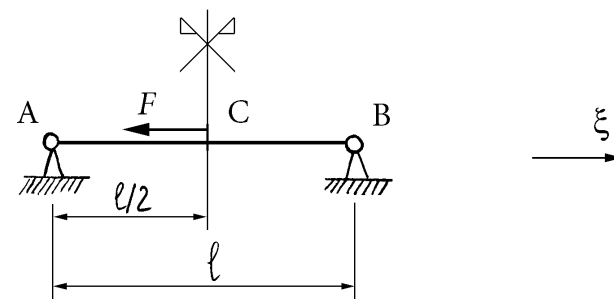
Se una struttura simmetrica è caricata da forze simmetriche ammette una soluzione non simmetrica, deve ammettere anche la soluzione simmetrica di questa. Ovverossia soluzioni non simmetriche si presentano sempre a coppie. Questo significa che nei problemi lineari, dove la soluzione è unica, questa deve essere simmetrica.

Per le ipotesi di piccoli spostamenti e di elasticità lineare, il nostro problema è lineare e quindi strutture simmetriche caricate simmetricamente ammettono una soluzione simmetrica.

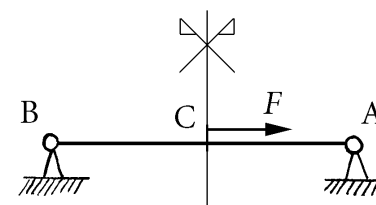
Si consideri ora il caso di una struttura simmetrica caricata da forze *antisimmetriche* o *emisimmetriche*, cioè da forze che cambiano di segno nella riflessione che lascia invariata la struttura. Se in un problema lineare si cambia il segno delle condizioni al contorno (nel nostro caso forze e vincoli) anche la soluzione cambia di segno. Quindi la riflessione deve cambiare il segno della soluzione e la soluzione deve essere *emisimmetrica*.

Il fatto che le soluzioni di strutture iperstatiche simmetriche caricate simmetricamente (emisimmetricamente) debbano essere simmetriche (emisimmetriche) semplifica la soluzione delle incognite iperstatiche.

2.2.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale emisimmetrico



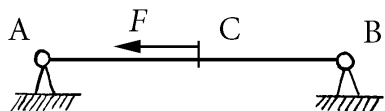
La trave è geometricamente e materialmente simmetrica rispetto all'asse verticale passante per il punto C di mezzeria. La forza F risulta invece antisimmetrica:



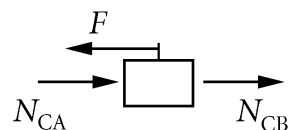
riflessione rispetto all'asse di simmetria
(situazione identica alla precedente, ma con le forze cambiate di segno)

È possibile risolvere il problema imponendo che la soluzione riflessa coincida con la soluzione originaria

cambiata di segno.

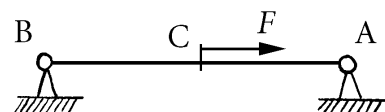


Struttura originaria

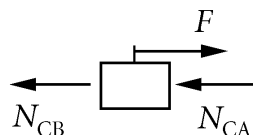


Equilibrio nodo C

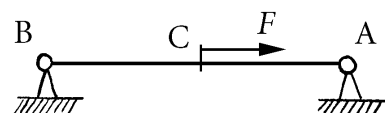
$$N_{CA} + N_{CB} = F$$



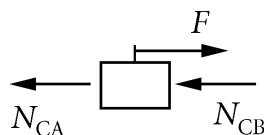
Struttura riflessa



Forze normali riflesse



Struttura soggetta alla forza cambiata di segno



Forze normali cambiate di segno

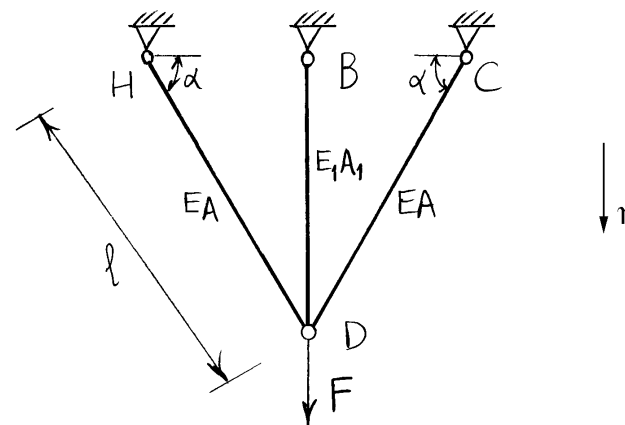
La struttura riflessa è indistinguibile dalla struttura originaria soggetta alle forze cambiate di segno e quindi deve risultare:

$$N_{CA} = N_{CB}.$$

L'equilibrio del nodo C impone infine che sia:

$$N_{CA} = N_{CB} = \frac{F}{2}.$$

2.2.2 Cavalletto iperstatico soggetto ad un carico simmetrico

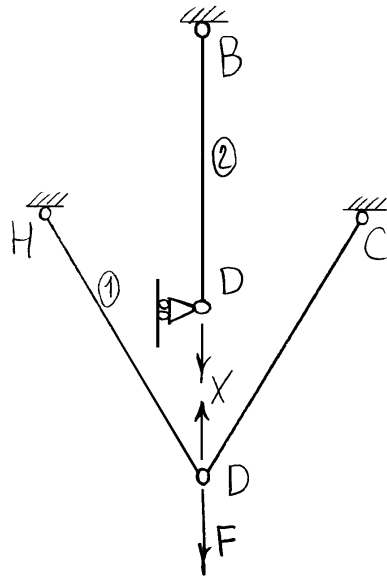


$$\begin{cases} g = 3 \times 3 = 9 \\ v = 5 \times 2 = 10 \\ i = 1 \end{cases}$$

oppure, considerando
il nodo D vincolato
dai pendoli:

$$\begin{cases} g = 2 \\ v = 3 \\ i = 1 \end{cases}$$

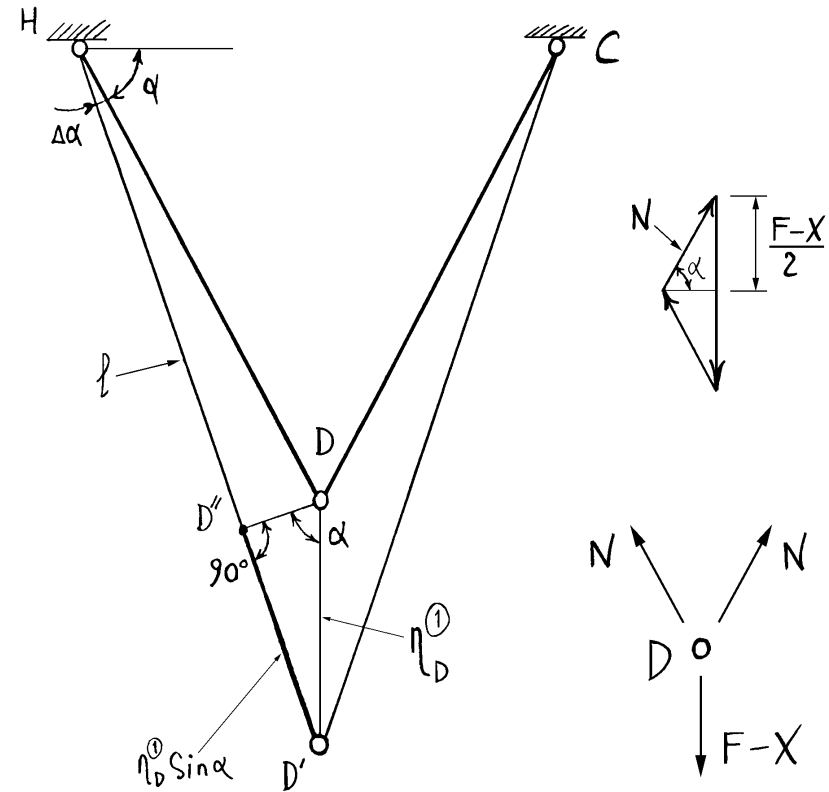
Struttura principale



Equazione di congruenza: $\eta_D^{(1)} = \eta_D^{(2)}$

$$\eta_D^{(2)} = \frac{X l \sin \alpha}{E_1 A_1}$$

$$\eta_D^{(1)} \sin \alpha = \frac{N l}{E A} \Rightarrow \eta_D^{(1)} = \frac{N l}{E A \sin \alpha}$$



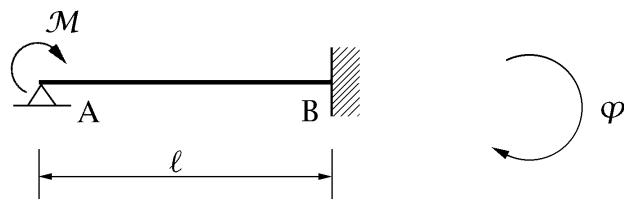
$$N = \frac{F - X}{2 \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_D^{(1)} = \frac{F l}{2 E A \sin^2 \alpha} - \frac{X l}{2 E A \sin^2 \alpha}$$

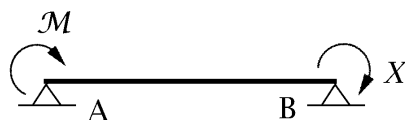
$$\eta_D^{(1)} = \eta_D^{(2)} \Rightarrow X = \frac{F / 2 E A \sin^2 \alpha}{1 / 2 E A \sin^2 \alpha + \sin \alpha / E_1 A_1}$$

2.3 Travi incastro-appoggio

2.3.1 Trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia in corrispondenza dell'appoggio



Struttura principale:



La rotazione della sezione B nella struttura principale vale:

$$\varphi_B = \frac{X\ell}{3EJ} - \frac{M\ell}{6EJ}.$$

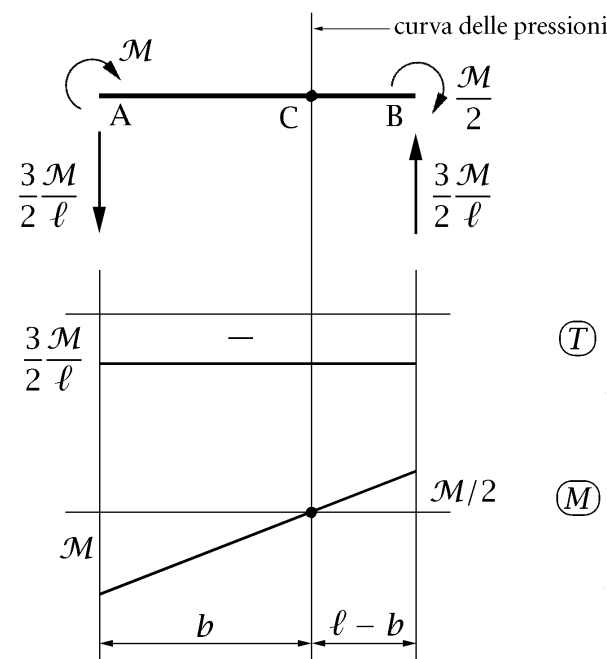
La congruenza implica:

$$\varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{M}{2}.$$

La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

$$\varphi_A = \frac{M\ell}{3EJ} - \frac{\left(\frac{M}{2}\right)\ell}{6EJ} = \frac{M\ell}{4EJ}.$$

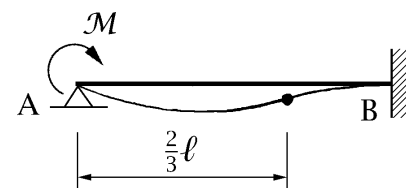
Reazioni vincolari e diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione:



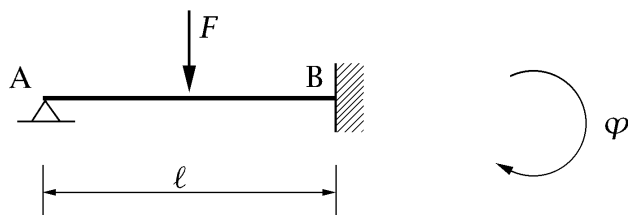
Punto di nullo del momento flettente (punto di flesso della deformata elastica):

$$\frac{b}{M} = \frac{\ell - b}{M/2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3} \ell.$$

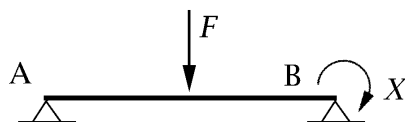
Deformata elastica:



2.3.2 Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza concentrata in mezzeria



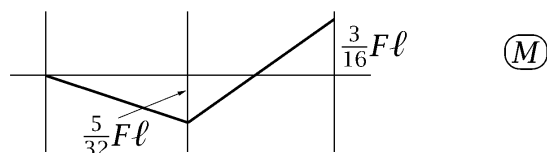
Struttura principale:



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{3EJ} - \frac{F\ell^2}{16EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{3}{16}F\ell.$$

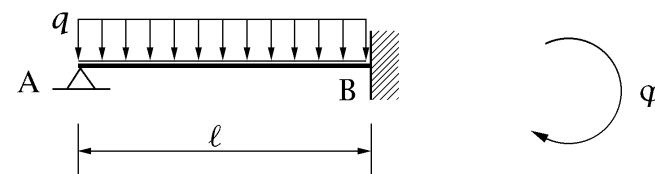
Diagramma del momento:



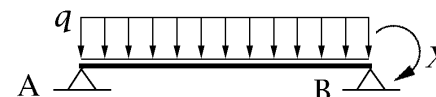
La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

$$\varphi_A = \frac{F\ell^2}{16EJ} - \frac{\left(\frac{3}{16}F\ell\right)\ell}{6EJ} = \frac{F\ell^2}{32EJ}.$$

2.3.3 Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita



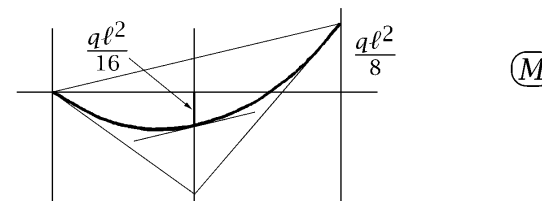
Struttura principale:



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{3EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{q\ell^2}{8}.$$

Diagramma del momento:

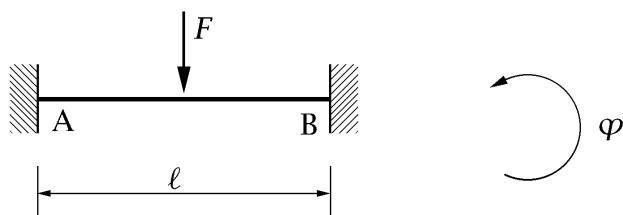


La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

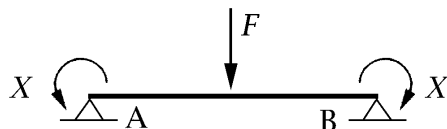
$$\varphi_A = \frac{q\ell^3}{24EJ} - \frac{\left(\frac{q\ell^2}{8}\right)\ell}{6EJ} = \frac{q\ell^3}{48EJ}.$$

2.4 Travi incastro-incastro

2.4.1 Trave incastro-incastro soggetta ad una forza concentrata in mezzeria



Struttura principale (simmetrica):



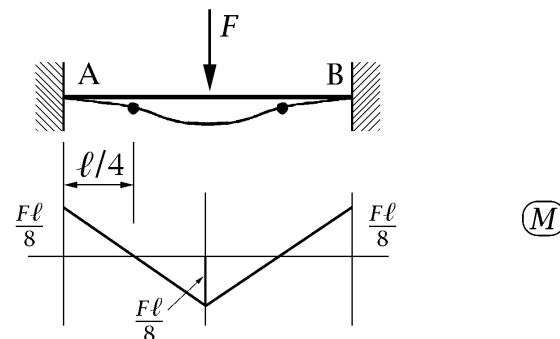
La rotazione della sezione A nella struttura principale vale:

$$\varphi_A = \frac{X\ell}{2EJ} - \frac{F\ell^2}{16EJ}.$$

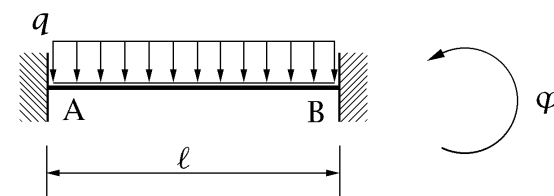
La congruenza implica:

$$\varphi_A = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F\ell}{8}.$$

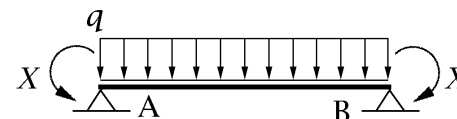
Diagramma del momento e deformata elastica:



2.4.2 Trave incastro-incastro soggetta ad una forza distribuita



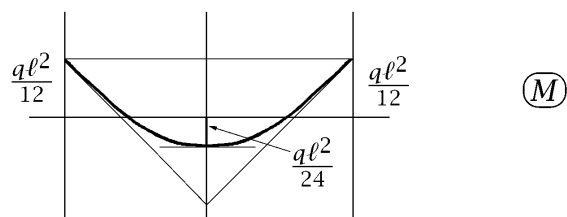
Struttura principale (simmetrica):



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{q\ell^2}{12}.$$

Diagramma del momento:



2.5 Travi continue

Una *trave continua* è una trave senza sconnessioni interne vincolata, oltre che nelle due estremità, anche in punti intermedi, o, in altri termini, è una trave su più appoggi.

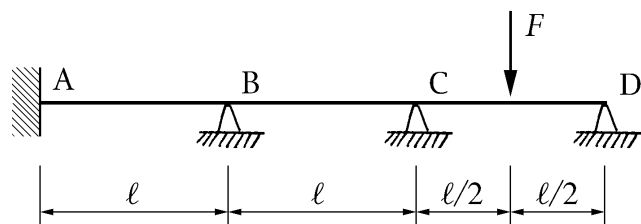
La struttura principale “naturale” si ottiene inserendo delle cerniere sugli appoggi intermedi, cioè sconnettendo la continuità della rotazione delle sezioni su tali appoggi. Le incognite iperstatiche sono quindi delle coppie e le equazioni di congruenza richiedono il calcolo delle rotazioni relative in corrispondenza delle sconnessioni. Nella struttura principale i tratti fra gli appoggi intermedi divengono delle travi appoggiate alle estremità e soggette alle coppie iperstatiche ed agli eventuali carichi esterni che competono al tratto in questione. Per quel che riguarda i due tratti esterni, questi sono delle travi appoggiate oppure delle travi incastro-appoggio a seconda che l'estremità sia appoggiata oppure incastrata. Nel caso in cui un tratto esterno sia a *sbalzo*, ovvero sia con l'estremità non vincolata, sull'appoggio interno del tratto non va effettuata la sconnessione, altrimenti il tratto diventa labile.

Non ha importanza che i vincoli intermedi siano degli appoggi fissi oppure dei carrelli a piano di scorrimento orizzontale, perché, come si è già visto, le eventuali incognite iperstatiche di tipo assiale dipendono solo dalle forze di tipo assiale e sono nulle se queste sono nulle. Se sia le forze di tipo assiale che quelle di tipo flessionale non sono nulle occorrerà risolvere entrambi i problemi (flessionale e assiale), problemi che, in ogni caso, sono indipendenti l'uno dall'altro.

2.5.1 Esempio di trave continua

La trave continua di figura ha tre gradi di libertà se svincolata e ha nove gradi di vincolo. Poiché l'incastro da solo impedisce qualunque moto rigido, la trave non è labile e quindi ha sei gradi di iperstaticità:

$$g = 3, v = 9 \Rightarrow i - l = 6, \quad l = 0 \Rightarrow i = 6.$$

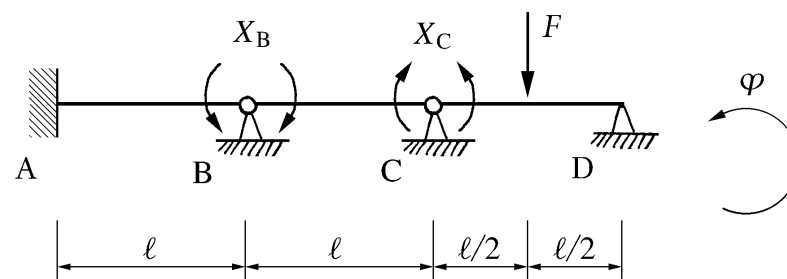


Poiché l'incastro da solo impedisce la traslazione orizzontale, la trave ha tre gradi di iperstaticità i_a di tipo assiale (anche i tre appoggi in B, C e D impediscono lo spostamento orizzontale) e quindi tre gradi di iperstaticità i_f di tipo flessionale:

$$i_a = 3, \quad i_f = 3.$$

Inserendo due cerniere nei nodi B e C si ottiene una struttura una volta iperstatica flessionalmente soggetta alle coppie X_B e X_C in corrispondenza delle facce di B e C rispettivamente, facce rese libere dalle due sconnessioni operate. Tale struttura, anche se iperstatica flessionalmente, può essere utilizzata quale struttura principale poiché il tratto iperstatico AB costituisce una trave incastro-appoggio

soggetta alla coppia X_B applicata in corrispondenza dell'appoggio, tipo di trave già risolta una volta per tutte. Se ci si riducesse ad uno schema flessionalmente isostatico inserendo una cerniera anche in A, si dovrebbe riscrivere l'equazione di congruenza $\varphi_A = 0$ della trave incastro-appoggio che ancora darebbe come risultato che il momento in A è in modulo la metà e di segno opposto di quello applicato in B.



Per risolvere la struttura dobbiamo scrivere le equazioni di congruenza in corrispondenza delle due sconnessioni:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0, \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0, \end{cases}$$

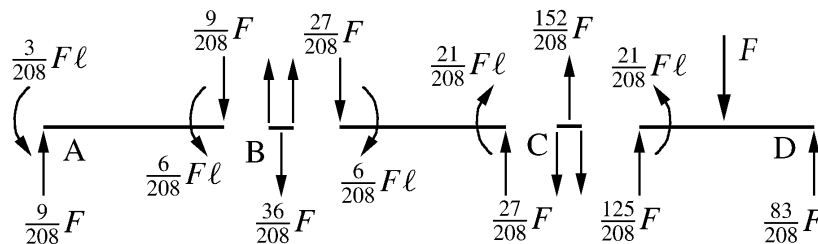
ottenendo:

$$\begin{cases} \left(-\frac{X_B \ell}{3EJ} + \frac{X_C \ell}{6EJ} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{4EJ} \right) = 0, \\ \left(\frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{F \ell^2}{16EJ} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{6EJ} - \frac{X_C \ell}{3EJ} \right) = 0. \end{cases}$$

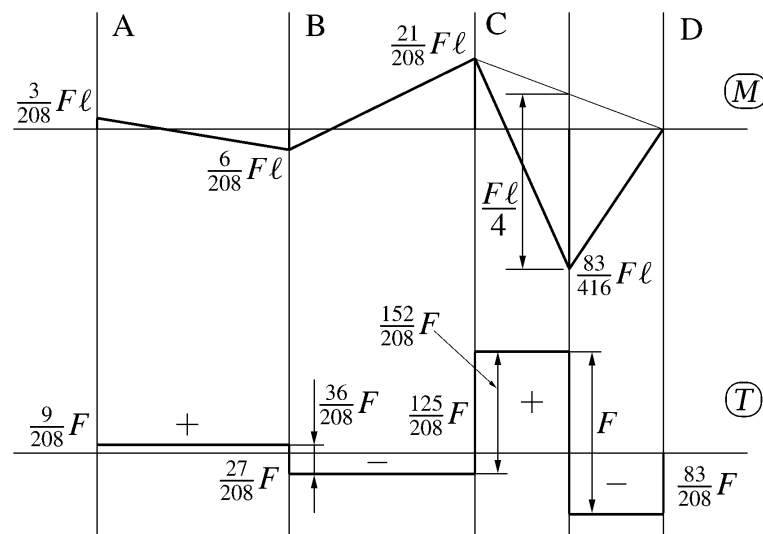
Semplificando e risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} -7X_B + 2X_C = 0, \\ -X_B + X_C - \frac{3}{8}F\ell = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = \frac{6}{208}F\ell, \\ X_C = \frac{21}{208}F\ell. \end{cases}$$

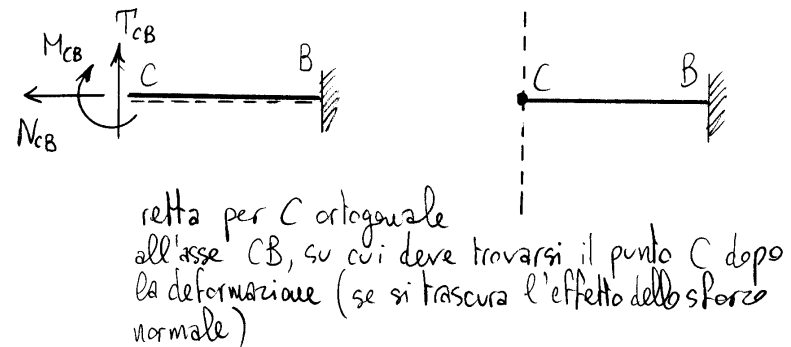
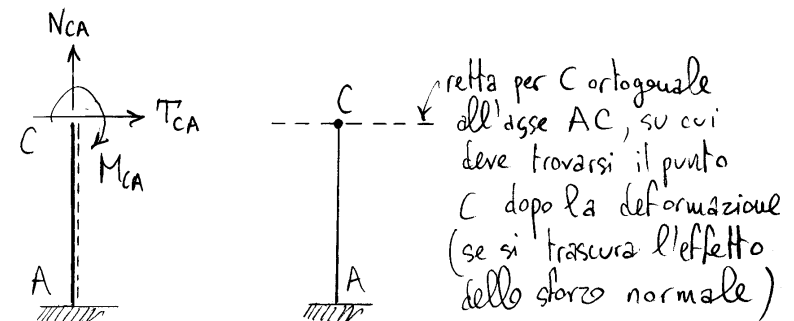
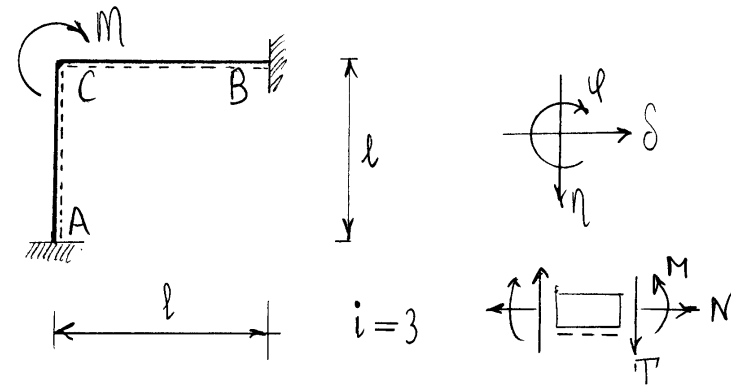
Reazioni interne ed esterne:



Diagrammi del momento flettente e del taglio:



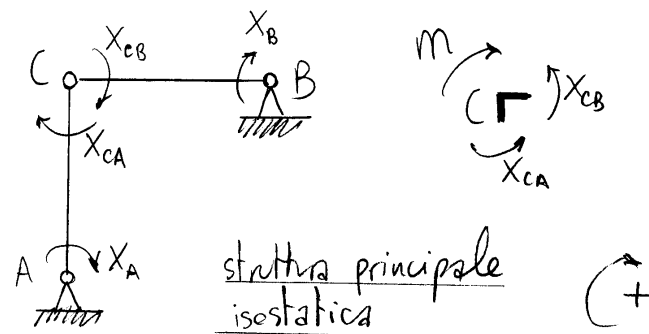
2.6 Esercizio (telaio soggetto ad una coppia)



Dovendo il punto C trovarsi, dopo la deformazione, contemporaneamente su due rette che hanno il solo punto C in comune, il punto C non si sposta e quindi:

$$\eta_C = \delta_C = 0.$$

Vediamo la soluzione con il metodo delle forze.



Equilibrio del nodo:

$$X_{CA} + X_{CB} = M$$

Congruenza:

$$\varphi_B = 0 \Rightarrow \frac{X_B l}{3EJ} - \frac{X_{CB} l}{6EJ} = 0$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \frac{X_A l}{3EJ} - \frac{X_{CA} l}{6EJ} = 0$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} \Rightarrow \frac{X_{CA} l}{3EJ} - \frac{X_A l}{6EJ} = \frac{X_{CB} l}{3EJ} - \frac{X_B l}{6EJ}$$

$$\begin{cases} X_{CA} + X_{CB} = M \\ 2X_B - X_{CB} = 0 \\ 2X_A - X_{CA} = 0 \\ X_A - X_B - 2(X_{CA} - X_{CB}) = 0 \end{cases}$$

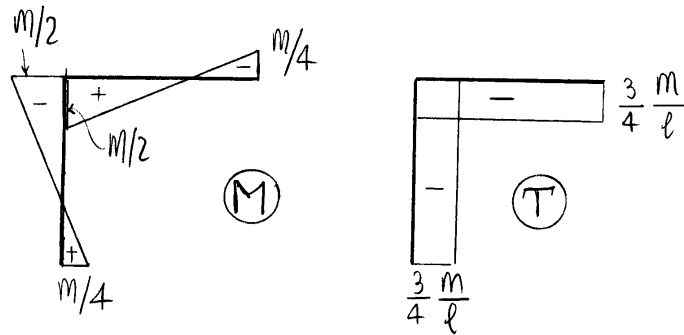
Sistema di 4 equazioni in 4 incognite. La seconda e la terza equivalgono alla soluzione di una trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia all'estremità:

$$X_B = X_{CB}/2, \quad X_A = X_{CA}/2.$$

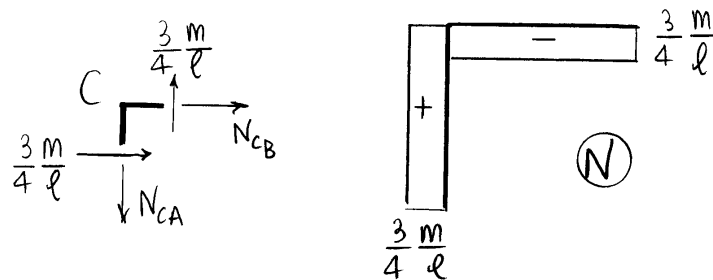
La quarta equazione diviene:

$$X_{CA} - X_{CB} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_{CA} = X_{CB} = \frac{M}{2} \\ X_A = X_B = \frac{M}{4} \end{cases}$$

$$\psi_c = \psi_{CA} = \psi_{CB} = \frac{\frac{m}{2} l}{3EJ} - \frac{\frac{m}{4} l}{6EJ} = \frac{ml}{8EJ}$$



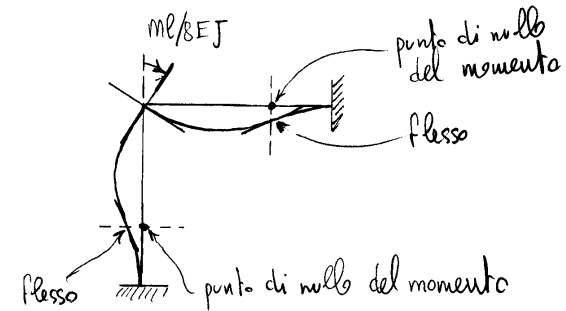
equilibrio alla
traslazione del
nodo C $\Rightarrow$
$$\begin{cases} N_{CA} = \frac{3}{4} \frac{m}{l} \\ N_{CB} = -\frac{3}{4} \frac{m}{l} \end{cases}$$



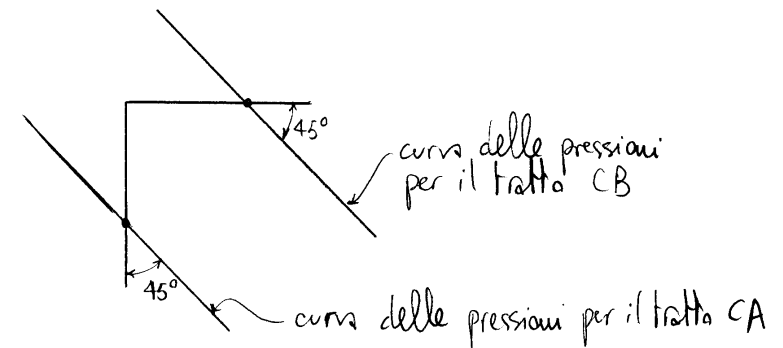
Notare che la forza normale non è nulla e che quindi è essenziale trascurare i suoi effetti sulla deformazione per poter affermare che il nodo C ruota

senza spostarsi.

Deformata:

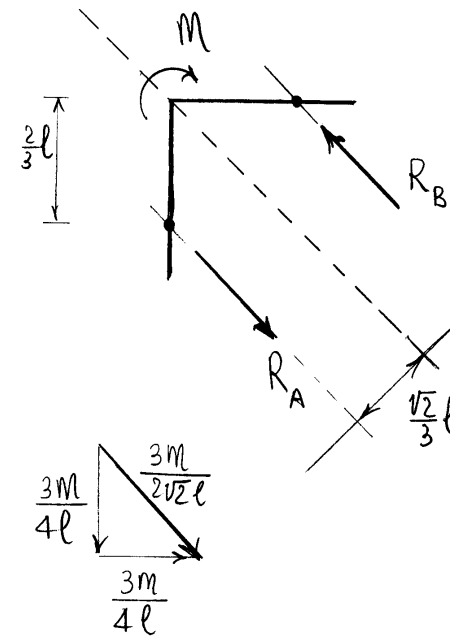


Curva delle pressioni

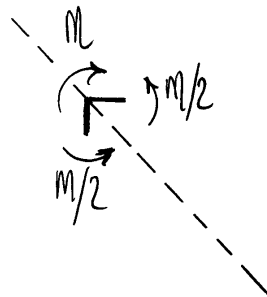
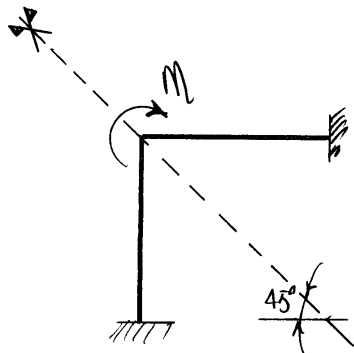


La struttura presenta un asse di simmetria geometrica e materiale e la coppia M , applicata nel nodo C , rappresenta un carico emisimmetrico

(antisimmetrico). Ciò impone che i momenti flettenti agenti a destra e a sinistra del nodo C siano emisimmetrici, cioè uguali in modulo e di verso concorde. Non solo, ciò impone anche che le rette d'azione delle risultanti degli incastri in A e in B, parallele fra loro poiché le due risultanti devono equivalere ad una coppia, siano anche parallele all'asse di simmetria. La soluzione del problema iperstatico impone che le rette d'azione delle risultanti devono passare a $2l/3$ dal nodo per cui il braccio della coppia vale $2\sqrt{2}l/3$.



$$R_A = R_B = \frac{3M}{2\sqrt{2}l}$$



Capitolo 3

Cedimenti vincolari e distorsioni

3.1 Cedimenti vincolari elastici

Un vincolo è detto essere cedevole elasticamente se la reazione del vincolo dipende univocamente dallo spostamento del vincolo stesso (cedimento). In particolare il cedimento può essere elastico-lineare, ovvero sia la reazione del vincolo può essere proporzionale al cedimento stesso, tramite una costante K di rigidezza che rappresenta la reazione vincolare corrispondente al cedimento unitario:

$$R = K s,$$

dove R è la reazione e s il cedimento del vincolo.

Naturalmente, questo è equivalente a dire che il cedimento del vincolo è proporzionale alla reazione vincolare tramite una costante c di cedevolezza (o di flessibilità) che rappresenta il cedimento vincolare corrispondente alla reazione unitaria:

$$s = c R.$$

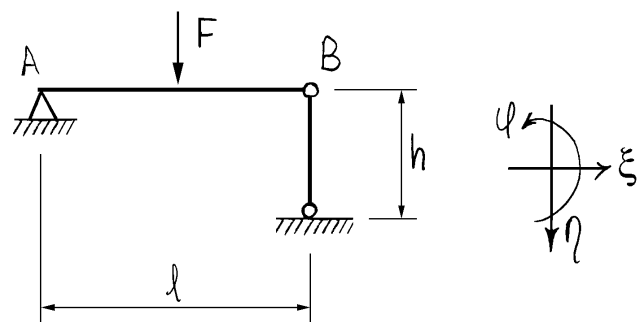
Naturalmente, la cedevolezza è l'inverso della rigidità:

$$c = \frac{1}{K}.$$

Un vincolo cedevole elasticamente si può indicare con il simbolo di una molla.

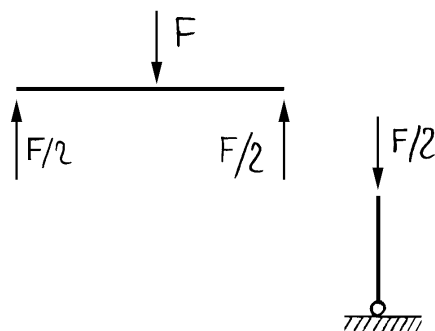
È evidente che se la struttura non è caricata la reazione è nulla e non vi sono cedimenti.

Un pendolo deformabile assialmente è equivalente ad un appoggio cedevole elasticamente, come indicato nell'esempio seguente.



La cedevolezza del vincolo vale:

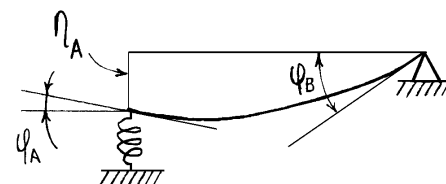
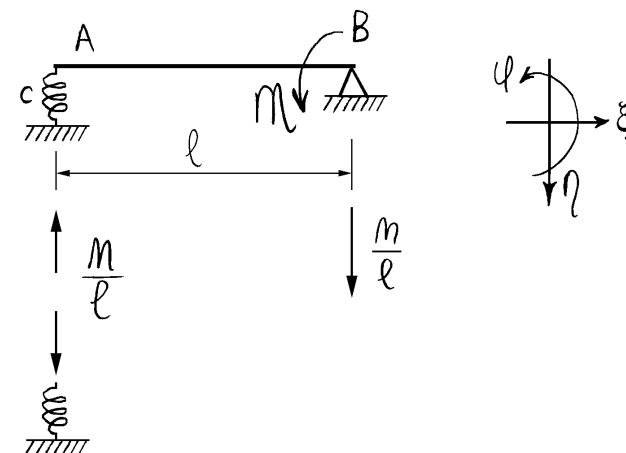
$$c = \frac{h}{EA}$$



Il cedimento del vincolo vale invece:

$$\eta_B = \frac{F}{2} \frac{h}{EA}$$

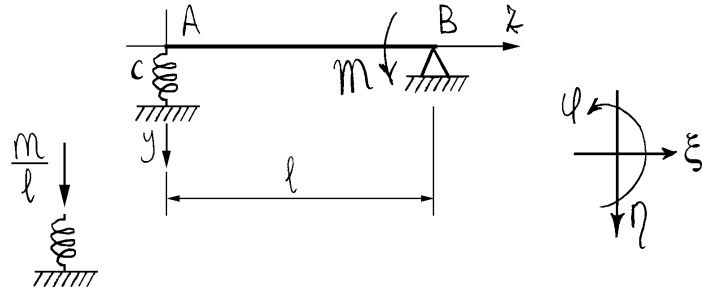
3.1.1 Esempio 1 (trave appoggiata con un appoggio cedevole)



$$\begin{cases} \eta_A = c \frac{m}{l} \\ \eta_A = c \frac{m}{l^2} - \frac{m l}{6 E J} \\ \eta_B = \frac{m}{k l^2} + \frac{m l}{3 E J} \end{cases}$$

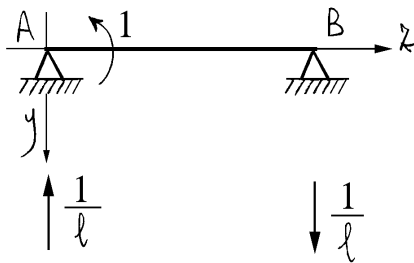
Calcolo di φ_A col principio dei lavori virtuali

Schema reale



$$\eta_A^{(r)} = c \frac{m}{l}, \quad M^{(r)} = \frac{m}{l} x$$

Schema delle forze



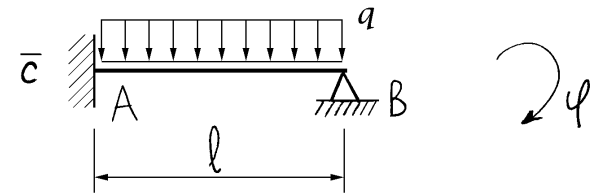
$$M^{(f)} = \frac{x}{l} - 1$$

$$L_{ve} = \varphi_A - \left(\frac{1}{l}\right) \left(c \frac{m}{l}\right) = \varphi_A - \frac{c}{l^2} m$$

$$L_{vi} = \int_0^l \frac{m}{EJl} x \left(\frac{x}{l} - 1\right) dx = -\frac{ml}{6EJ}$$

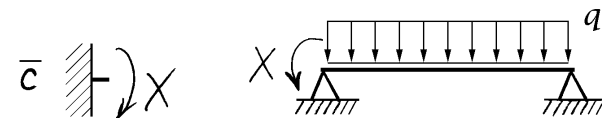
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \varphi_A = -\frac{ml}{6EJ} + \frac{c}{l^2} m$$

3.1.2 Esempio 2 (trave incastro-appoggio con incastro cedevole angolarmente)



$\bar{c} \equiv$ cedevolezza angolare

Struttura principale:



Vincolo angolare cedevole elasticamente:

$$\varphi_A = \bar{c} X$$

Rotazione φ_A valutata nella struttura principale:

$$\varphi_A = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ}$$

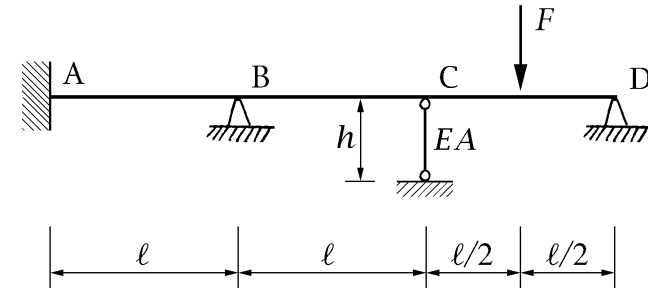
Congruenza:

$$\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} = \bar{c} X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{ql^3}{8(3EJ\bar{c} + l)}$$

$\bar{c}$ è una rotazione per unità di coppia e quindi ha le dimensioni $F^{-1}L^{-1}$, per cui $EJ\bar{c}$ ha le dimensioni di una lunghezza

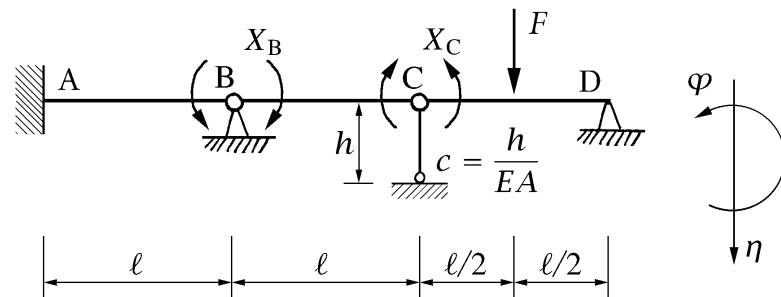
3.1.3 Esempio 3 (trave continua con un appoggio cedevole)



Il vincolo cedevole non impedisce lo spostamento della sezione C vincolata, ma reagisce con una forza proporzionale allo spostamento. Tale spostamento comunque non influenza l'equilibrio poiché questi, nell'ambito della validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, viene scritto sulla struttura indeformata. Al fine della valutazione cinematica della struttura, occorre dunque conteggiare anche il vincolo cedevole in C. La struttura risulta dunque tre volte iperstatica flessionalmente, come nel caso, già analizzato, in cui il vincolo in C era rigido.

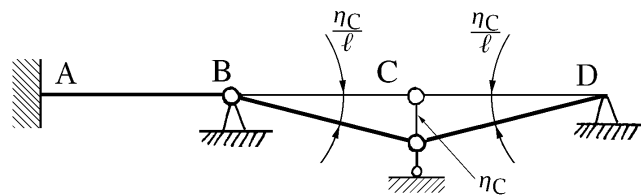
La struttura principale si ottiene ancora inserendo due cerniere in corrispondenza dei punti B e C. Le equazioni di congruenza in corrispondenza delle due sconnessioni sono ancora:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0, \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0. \end{cases}$$



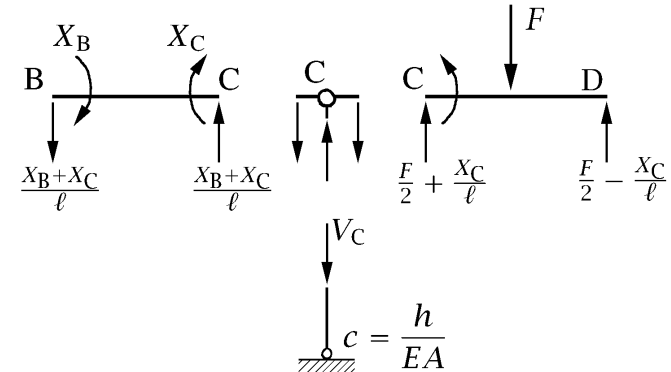
Per esplicitare tali equazioni, si considera prima il punto C fisso (come se avesse un appoggio rigido) e poi si sovrappone l'effetto del moto rigido dovuto al cedimento di C:

$$\begin{cases} \left(-\frac{X_B \ell}{3EJ} + \frac{X_C \ell}{6EJ} - \frac{\eta_C}{\ell} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{4EJ} \right) = 0, \\ \left(\frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{F \ell^2}{16EJ} + \frac{\eta_C}{\ell} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{6EJ} - \frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{\eta_C}{\ell} \right) = 0. \end{cases} \quad (a)$$



Lo spostamento η_C di C è proporzionale alla reazione V_C tramite la cedevolezza c dell'appoggio:

$$\eta_C = c V_C, \quad c = \frac{h}{EA}. \quad (b)$$



L'equilibrio del nodo C impone:

$$V_C = \frac{X_B + 2X_C}{\ell} + \frac{F}{2}. \quad (c)$$

Sostituendo la (c) nella (b) e questa nella (a) si ottengono due equazioni nelle due incognite iperstatiche X_B e X_C .

3.2 Cedimenti vincolari anelastici

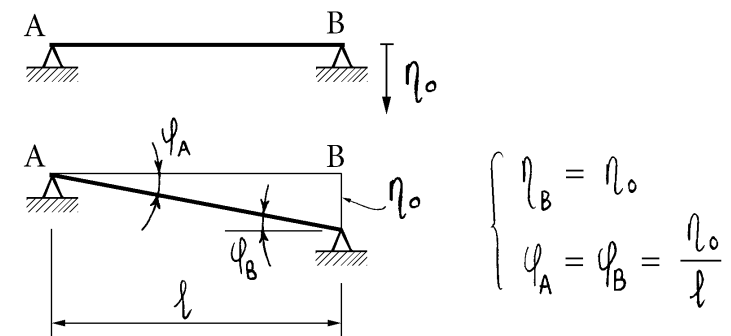
I vincoli cedevoli anelasticamente sono di vario tipo: plastici, viscosi, elasto-plastici, ecc. Un vincolo viscoso, per esempio, è tale da aumentare il cedimento sotto carico costante, ovvero senza incremento della reazione vincolare.

Un caso particolare di vincolo anelastico è quello di uno spostamento impresso. Questo spostamento (che rappresenta il cedimento del vincolo) è un dato del problema ed è indipendente dalle forze applicate. In particolare, agisce anche sulla struttura non caricata.

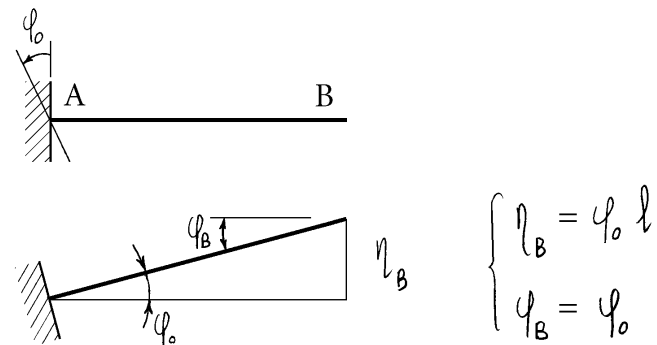
Se la struttura è isostatica, uno spostamento

impresso provoca soli moti rigidi delle parti che compongono la struttura.

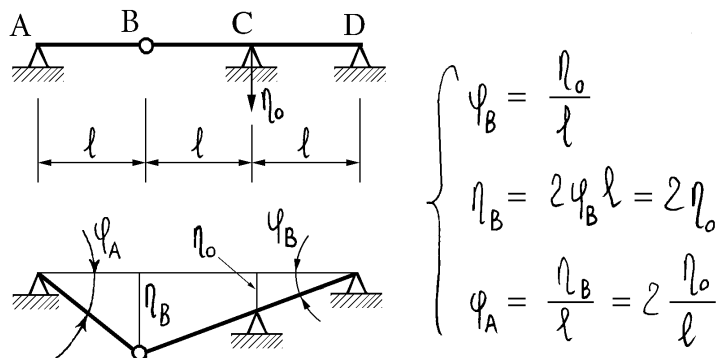
Esempio 1 (cedimento di un appoggio):



Esempio 2 (cedimento angolare di un incastro):

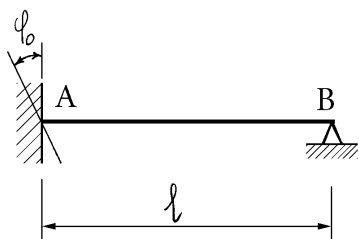


Esempio 3 (cedimento di un appoggio):

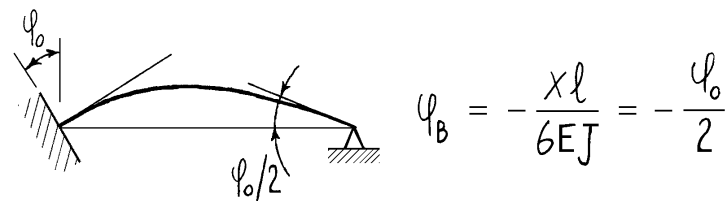
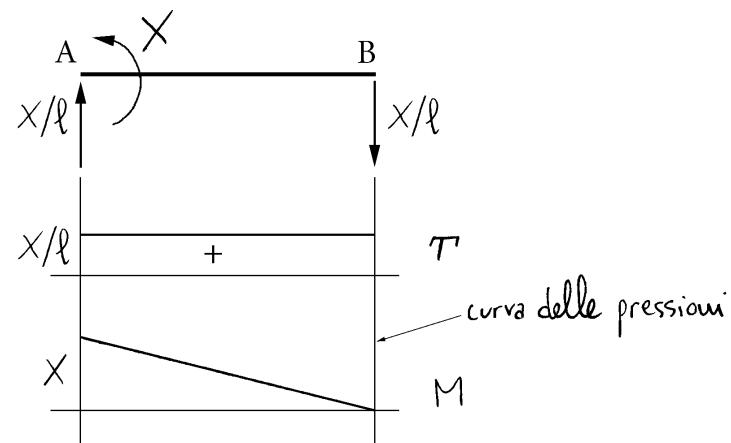
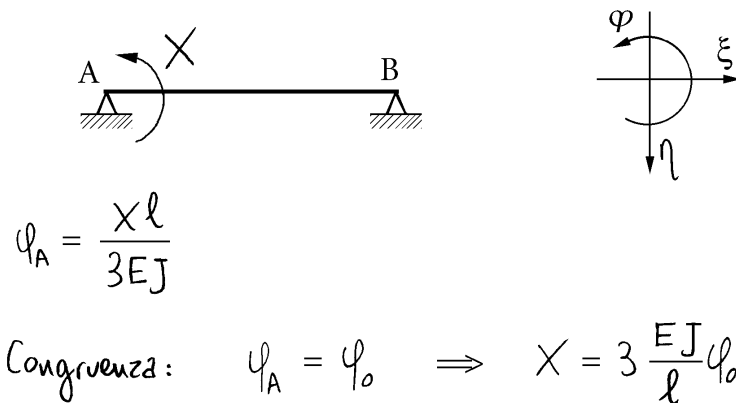


Se la struttura è iperstatica, salvo casi particolari, la struttura si deve deformare per consentire il cedimento vincolare elastico impresso.

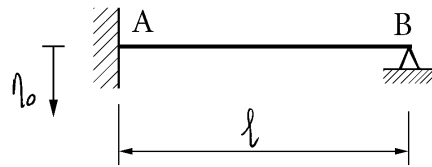
Esempio 1:



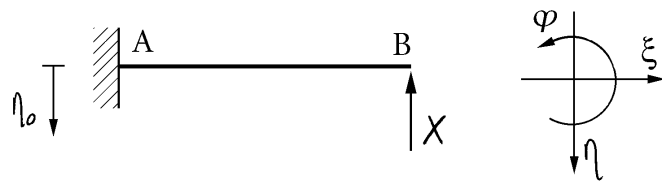
struttura principale:



Esempio 2:



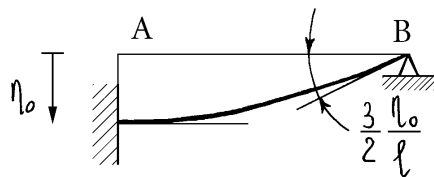
struttura principale:



$$\eta_B = \eta_0 - \frac{X l^3}{3EJ}$$

Congruenza:

$$\eta_B = 0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l^3} \eta_0$$

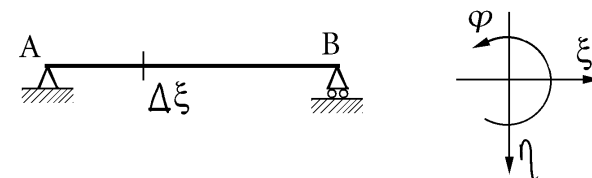


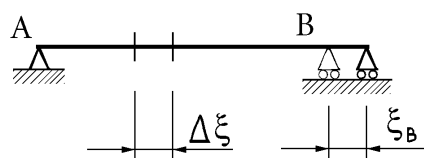
$$\varphi_B = \frac{X l^2}{2EJ} = \frac{3}{2} \frac{\eta_0}{l}$$

3.3 Distorsioni concentrate

Se si sconnette una trave in corrispondenza di una sezione interna, si impone uno spostamento relativo e infine si riconnette la trave si ottiene una cosiddetta distorsione concentrata. Se la trave è isostatica, a seguito della distorsione impressa si hanno dei semplici moti rigidi delle due parti in cui la trave è stata sconnessa.

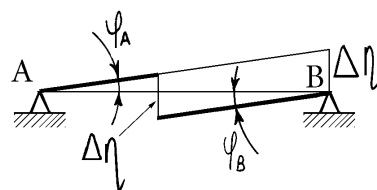
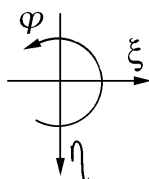
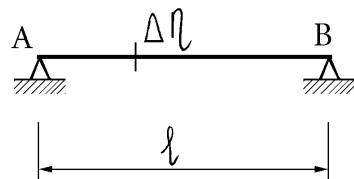
Distorsione di tipo assiale nella sezione interna di una trave con appoggio e carrello:





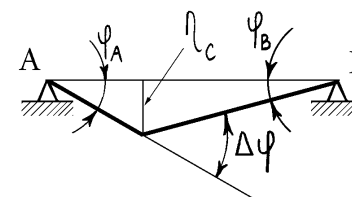
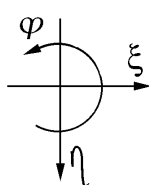
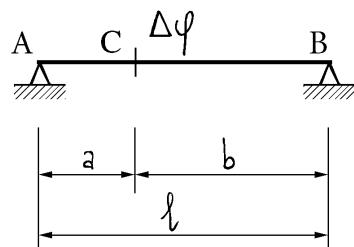
$$\xi_B = \Delta \xi$$

Distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna di una trave appoggio-appoggio:



$$\psi_A = \psi_B = \frac{\Delta \eta}{l}$$

Distorsione di rotazione relativa in una sezione interna di una trave appoggio-appoggio:

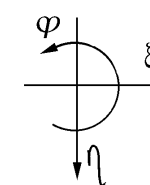
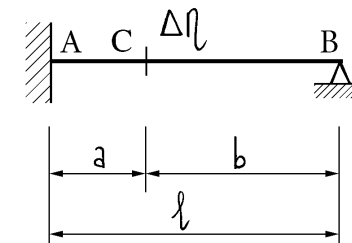


$$\begin{cases} a \psi_A = b \psi_B \\ \psi_A + \psi_B = \Delta \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_A = \frac{b}{l} \Delta \psi \\ \psi_B = \frac{a}{l} \Delta \psi \end{cases}$$

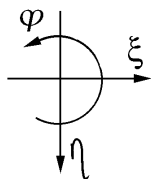
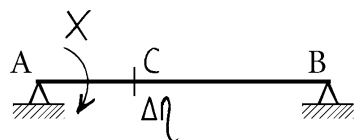
$$\eta_c = a \psi_A = b \psi_B = \frac{a b}{l} \Delta \psi$$

Se la trave è iperstatica, si deve deformare per consentire lo sviluppo della distorsione impressa.

Distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna di una trave incastro-appoggio:

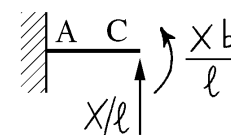
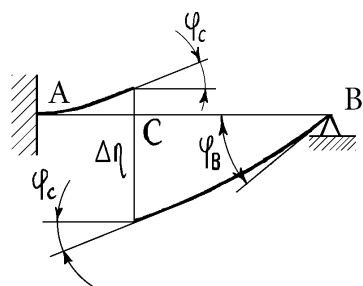
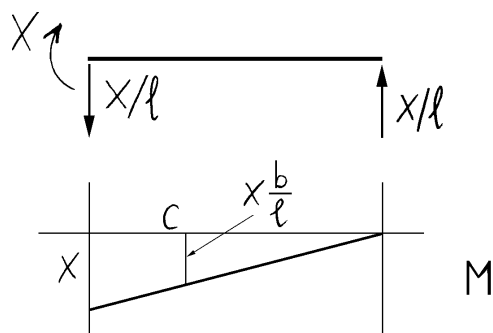


Struttura principale:

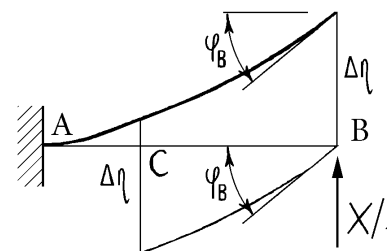


$$\varphi_A = \frac{\Delta \eta}{\ell} - \frac{X \ell}{3EJ}$$

Congruenza: $\varphi_A = 0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{\ell^2} \Delta \eta$



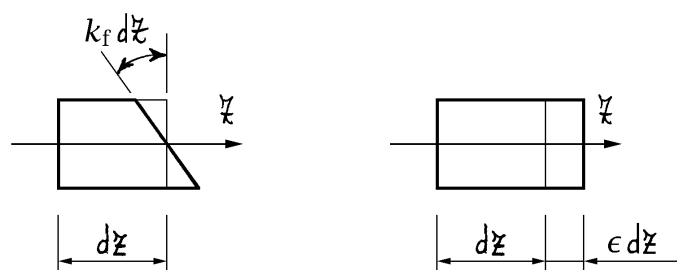
$$\varphi_C = \frac{X b a}{\ell EJ} + \frac{X a^2}{2 \ell EJ}$$



$$\varphi_B = \frac{(X/\ell) \ell^2}{2 EJ} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \eta}{\ell}$$

3.4 Distorsioni distribuite

Si dice che un elemento di trave subisce una *distorsione distribuita* se viene in un qualche modo deformato, a partire da una configurazione naturale (cioè non soggetta a forze e a caratteristiche della sollecitazione), fino a portarlo in una nuova configurazione naturale, quindi deformata rispetto alla precedente ma ancora non soggetta a forze e caratteristiche della sollecitazione. A seconda del tipo di deformazione impressa, dilatazione lineare ϵ oppure curvatura flessionale k_f , la distorsione può essere di tipo assiale oppure flessionale.



Si noti che nel caso di distorsione distribuita le due sezioni di estremità dell'elemento di trave subiscono un moto relativo infinitesimo, a differenza del caso delle distorsioni concentrate in cui si aveva un moto relativo finito tra le due facce di una stessa sezione. Se la distorsione è distribuita su un tratto di lunghezza finita si genererà un moto relativo finito tra due sezioni qualunque del tratto poste a distanza finita.

Se il sistema è isostatico, le eventuali distorsioni possono svilupparsi liberamente e il sistema si deforma in assenza di caratteristiche della sollecitazione. Se invece il sistema è iperstatico, lo sviluppo delle distorsioni può essere contrastato e si possono generare reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione. In quest'ultimo caso, la deformazione totale (rispetto alla configurazione che si aveva prima della distorsione) sarà la somma tra quella dovuta alla distorsione e quella dovuta alle caratteristiche della sollecitazione.

Ci sono due importanti casi in cui si sviluppano distorsioni distribuite. Il primo caso è quello dell'interazione con gli effetti termici, poiché gli incrementi di temperatura danno luogo a delle dilatazioni lineari in assenza di sollecitazioni, almeno fino a che tali dilatazioni possono svilupparsi liberamente. Il secondo caso è invece quello in cui le sollecitazioni impresse superano il limite di snervamento e si sviluppano delle deformazioni plastiche nel materiale. Ne risultano delle deformazioni permanenti, cioè delle distorsioni, una volta che i carichi vengano rimossi. Come vedremo nel seguito, nei sistemi di travi inflesse le distorsioni dovute alla plasticità del materiale sono normalmente limitate in zone ristrette nell'intorno delle sezioni dove si raggiungono i massimi relativi del diagramma del momento flettente. Ne consegue che tali distorsioni distribuite possono allora essere approssimate da distorsioni concentrate in tali sezioni (*cerniere plastiche*).

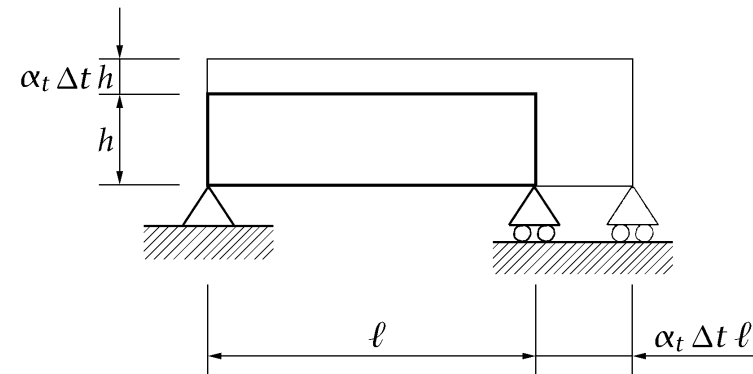
3.5 Distorsioni termiche

Un incremento uniforme di temperatura Δt produce, in un corpo continuo di materiale termicamente omogeneo, una dilatazione ϵ costante di tutte le linee interne al corpo in assenza di scorrimenti. La configurazione “deformata” dall’incremento di temperatura è dunque omotetica alla configurazione soggetta alla sola temperatura iniziale, con costante di omotetia pari alla dilatazione ϵ . Inoltre, tali deformazioni si sviluppano senza provocare sollecitazioni. Questo significa che se il corpo è inizialmente in una configurazione naturale (privo di forze agenti e di sollecitazioni interne) allora continua a restare in una configurazione naturale anche dopo la distorsione termica. Quindi la configurazione naturale di un corpo termicamente omogeneo varia, in modo omotetico, a seguito di un incremento uniforme di temperatura. Se invece l’incremento di temperatura non è uniforme oppure se il corpo non è termicamente omogeneo, nel corpo possono sorgere delle cosiddette *autotensioni*, cioè delle sollecitazioni interne autoequilibrate (i carichi esterni continuano ad essere nulli).

La dilatazione lineare α_t per unità di incremento di temperatura viene chiamata *coefficiente di dilatazione termica*:

$$\alpha_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\epsilon(\Delta t)}{\Delta t},$$

ed è in generale funzione della temperatura. Comunque, nell’ambito dei problemi strutturali, il coefficiente di dilatazione termica può essere considerato costante con sufficiente approssimazione. Per es., per l’acciaio e il ferro tra 0° e 100° si



può utilizzare il valore medio $\alpha_t = 0.000012$. Nel caso di un corpo termicamente omogeneo, il coefficiente di dilatazione termica è costante nel corpo.

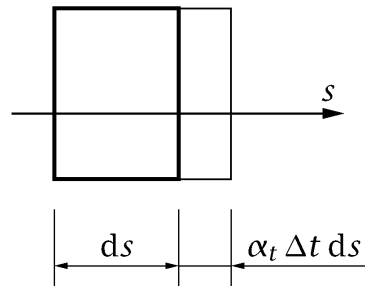
Se il coefficiente di dilatazione termica viene considerato costante, la dilatazione lineare ϵ dovuta ad un incremento di temperatura Δt vale:

$$\epsilon = \alpha_t \Delta t,$$

e, nel caso di incremento uniforme e corpo termicamente omogeneo, l’allungamento di una linea inizialmente di lunghezza ℓ vale:

$$\Delta \ell = \alpha_t \Delta t \ell.$$

Nell’ambito della teoria della trave, si è solo in grado di studiare gli effetti delle dilatazioni delle fibre longitudinali. Prendendo allora dalla dilatazione delle altre fibre, si consideri un elemento di trave soggetto ad una variazione termica uniforme. Come illustrato, l’elemento di trave, inizialmente di lunghezza ds , si allunga della quantità $\alpha_t \Delta t ds$. Si noti che affinché un elemento di trave si deformi in tal modo basta



che Δt e α_t siano costanti sulla sezione retta di cui l'elemento è intorno. Per il resto, sia l'incremento di temperatura che il coefficiente di dilatazione termica possono essere variabili lungo la linea d'asse, ovvero possono essere funzioni della coordinata s della linea d'asse.

Se poi l'incremento di temperatura Δt varia linearmente lungo l'altezza della trave, la deformazione termica viene ancora assorbita in assenza di autotensioni. Se la variazione termica passa dal valore Δt_1 all'estradosso al valore Δt_2 all'intradosso, ne risulta, come illustrato, sia una dilatazione lineare della linea d'asse che una curvatura flessionale.

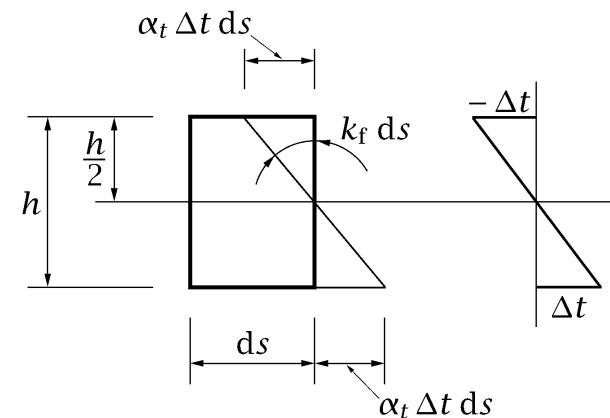
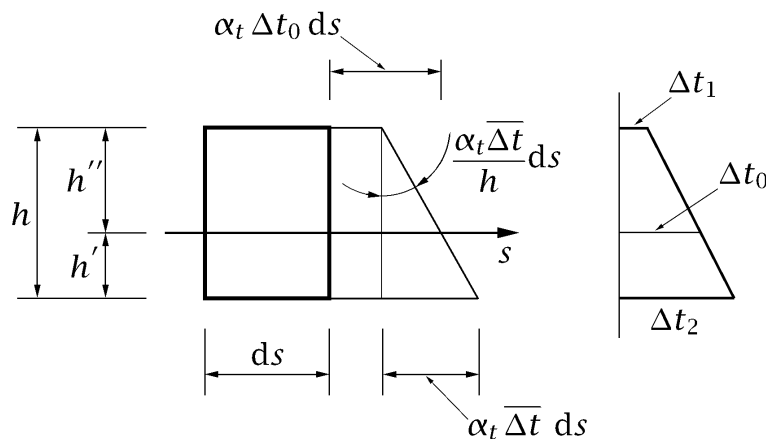
La dilatazione della linea d'asse è dovuta all'incremento Δt_0 di temperatura al livello della fibra baricentrica:

$$\Delta t_0 = \Delta t_1 + \frac{h''}{h}(\Delta t_2 - \Delta t_1) = \frac{h' \Delta t_1 + h'' \Delta t_2}{h},$$

dove h'' è la distanza del baricentro dall'estradosso e h l'altezza della sezione mentre la curvatura flessionale è dovuta invece al salto totale $\overline{\Delta t} = \Delta t_2 - \Delta t_1$ di temperatura tra estradosso e intradosso. Ne risulta:

$$\epsilon_G = \alpha_t \Delta t_0, \quad k_f = \frac{\alpha_t \overline{\Delta t}}{h}.$$

Se la variazione termica passa dal valore Δt all'intradosso a quello opposto $-\Delta t$ all'estradosso si dice che si ha una *variazione termica a farfalla*. Il salto totale di temperatura



tra estradosso e intradosso vale ora $\overline{\Delta t} = 2 \Delta t$ e ne risulta la seguente curvatura flessionale della linea d'asse:

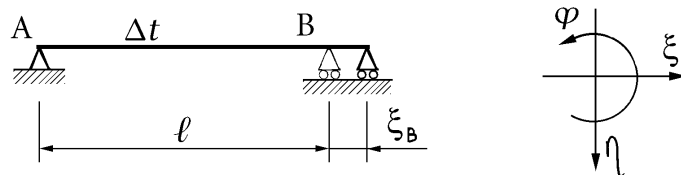
$$k_f = \frac{2\alpha_t \Delta t}{h}.$$

Si noti che se l'asse baricentrico non si trova a metà altezza, a seguito della distorsione termica a farfalla risulta anche una dilatazione della linea d'asse baricentrica:

$$\epsilon_G = \alpha_t \frac{(h'' - h')}{h} \Delta t.$$

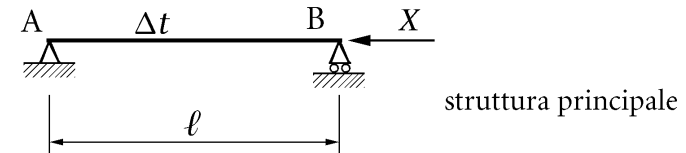
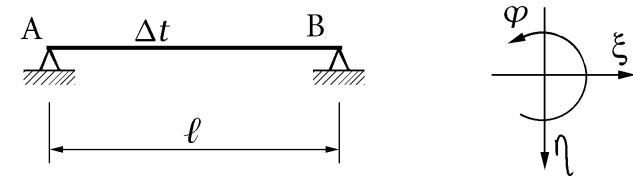
Tale dilatazione è comunque normalmente trascurabile poiché baricentro e metà altezza, se non coincidenti, sono di norma poco discosti.

3.5.1 Esempio 1 (trave appoggio-carrello soggetta ad una variazione termica uniforme)



$$\xi_B = \alpha_t \Delta t \ell$$

3.5.2 Esempio 2 (trave appoggio-appoggio soggetta ad una variazione termica uniforme)



$$\xi_B = \alpha_t \Delta t \ell - \frac{X \ell}{EA}$$

$$\text{Congruenza: } \xi_B = 0 \implies X = EA \alpha_t \Delta t.$$

Deformazione finale:

$$\epsilon_G = \alpha_t \Delta t - \frac{X}{EA} = \alpha_t \Delta t - \alpha_t \Delta t = 0.$$

Quindi la trave resta “indeformata” rispetto alla configurazione naturale dell'asta AB prima dell'incremento termico, che però non rappresenta la configurazione naturale della

stessa asta dopo l'incremento termico. Rispetto a quest'ultima configurazione, la configurazione finale è deformata

$$\epsilon_G = \frac{ds - ds(1 + \alpha_t \Delta t)}{ds(1 + \alpha_t \Delta t)} = -\frac{\alpha_t \Delta t}{1 + \alpha_t \Delta t},$$

e quindi:

$$\epsilon_G \approx -\alpha_t \Delta t,$$

poichè $\alpha_t \Delta t$ è piccolo. Essendo questa la dilatazione rispetto alla configurazione naturale che si ha dopo l'incremento uniforme di temperatura, ne risulta una forza normale N :

$$N = EA\epsilon_G = -EA\alpha_t \Delta t,$$

in accordo con la soluzione iperstatica.

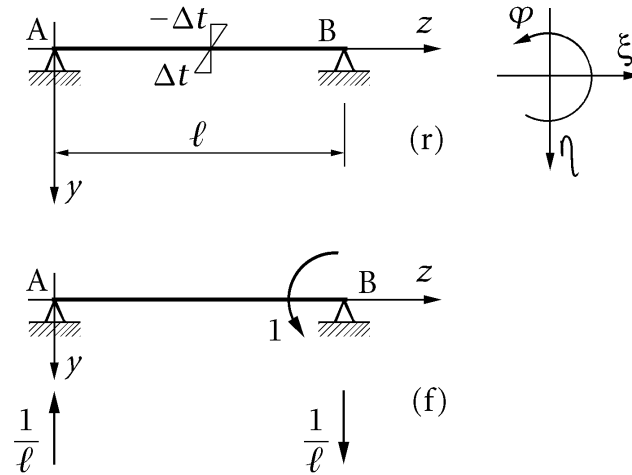
3.5.3 Esempio 3 (trave appoggiata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)

Si vuole valutare la rotazione nella sezione B di estremità e a tale scopo si utilizza il principio dei lavori virtuali.

La trave appoggiata soggetta alla distorsione termica a farfalla rappresenta lo schema reale, cioè lo schema degli spostamenti e deformazioni congruenti. Poiché il salto totale di temperatura vale $2\Delta t$ la curvatura flessionale reale risulta:

$$k_f^{(r)} = \frac{\alpha_t \overline{\Delta t}}{h} = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}.$$

Lo schema fittizio, cioè lo schema delle forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrate, è la stessa trave appoggia-



ta soggetta ad una coppia unitaria in B. Il momento flettente fittizio vale:

$$M^{(f)} = \frac{1z}{\ell}.$$

I lavori virtuali esterno ed interno valgono:

$$L_{ve} = 1\varphi_B,$$

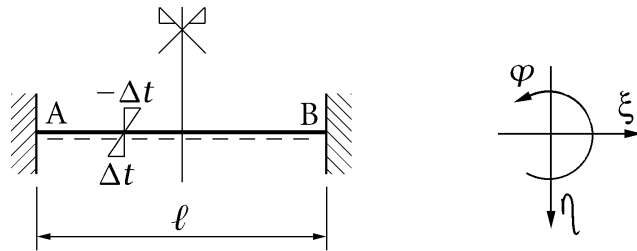
$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_0^\ell M^{(f)} k_f^{(r)} dz = \\ &= \int_0^\ell \left(\frac{1z}{\ell}\right) \left(2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\right) dz = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{\ell h} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^\ell = \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h}. \end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$L_{ve} = L_{vi} \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h}.$$

3.5.4 Esempio 4 (trave doppiamente incastrata soggetta ad una distorsione termica a farfalla)

La struttura è due volte flessionalmente iperstatica. Svincolando le rotazioni agli incastri, si ottiene quale struttura principale una trave appoggiata e poiché le due reazioni devono essere simmetriche il problema presenta una sola incognita.

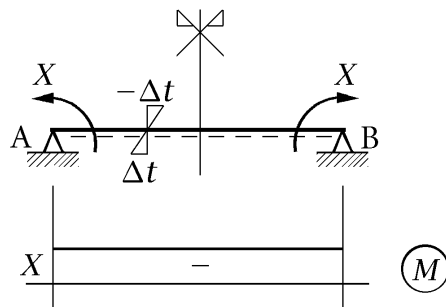


La rotazione della sezione B nella struttura principale vale:

$$\varphi_B = -\frac{X\ell}{2EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h},$$

e quindi la congruenza impone:

$$\varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 2 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$



La deformazione finale, valutata rispetto alla configurazione naturale che si aveva prima della distorsione termica, vale:

$$k_f = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} - \frac{X}{EJ} = 0,$$

e quindi la trave resta “indeformata” rispetto a tale configurazione.

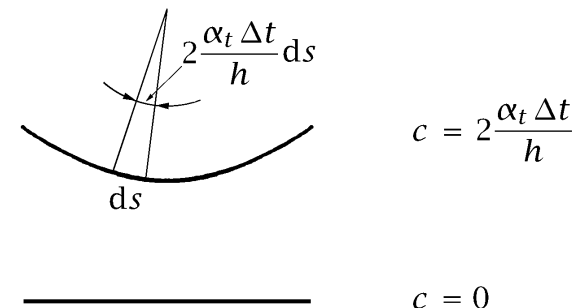
Nella configurazione naturale che l'asta assume a seguito della distorsione termica un elemento di trave presenta la curvatura geometrica positiva $c = 2\alpha_t \Delta t/h$. La configurazione finale è invece rettilinea e quindi presenta una curvatura nulla ($c = 0$). Ne consegue che rispetto alla configurazione naturale che l'asta assume a seguito della distorsione termica la deformazione finale vale:

$$k_f = -2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h},$$

e dunque:

$$M = EJk_f = -2 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$

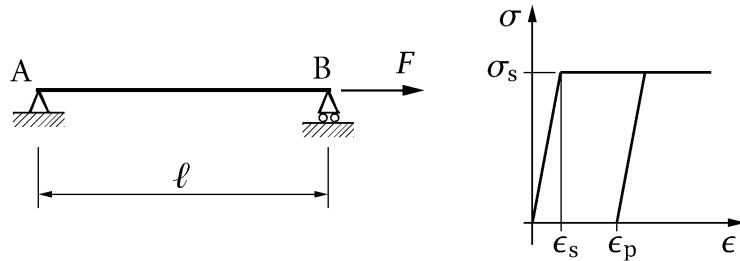
in accordo con la soluzione iperstatica.



3.6 Distorsioni plastiche

3.6.1 Distorsione plastica distribuita di tipo assiale

Si consideri una trave appoggiata costituita di materiale elastoplastico e soggetta ad una forza F di tipo assiale. Si supponga che la risposta elastoplastica sia di tipo bilineare e perfettamente plastica, come riportato nel diagramma.



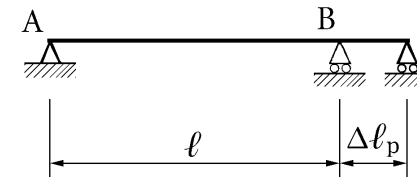
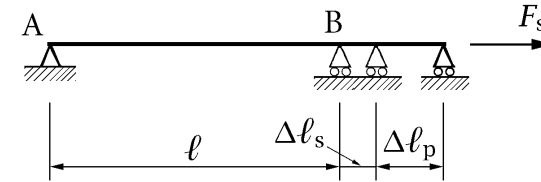
Si incrementi la forza F fino al valore F_s che plasticizza la sezione:

$$F_s = \sigma_s A,$$

dove σ_s è la tensione di snervamento. La trave si allunga di $\Delta\ell_s$ per effetto della deformazione elastica:

$$\Delta\ell_s = \frac{F_s \ell}{EA},$$

dopodiché la deformazione fluisce liberamente. Si immagina di fermare il flusso della deformazione plastica quando la trave si è allungata di un ulteriore $\Delta\ell_p$ e indi di scaricare la trave. La quota elastica $\Delta\ell_s$ dell'allungamento viene recuperata



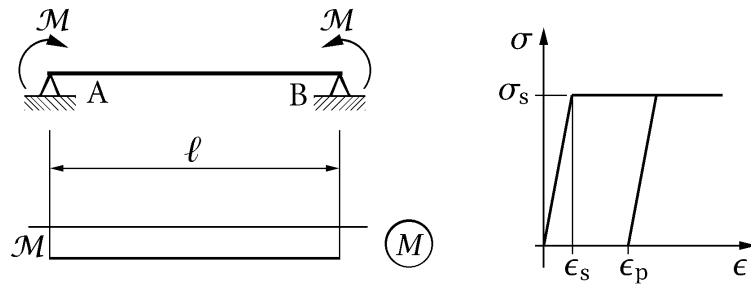
La trave risulta scarica e non soggetta a caratteristiche della sollecitazione. Grazie alla plasticità del materiale si è passati così da una configurazione naturale in cui la trave è lunga ℓ ad un'altra configurazione naturale in cui la trave è lunga $\ell + \Delta\ell_p$. La deformazione plastica permanente:

$$\epsilon_p = \frac{\Delta\ell_p}{\ell},$$

rappresenta una distorsione distribuita lungo l'asse della trave.

3.6.2 Distorsione plastica distribuita di tipo flessionale

Si consideri una trave appoggiata di sezione rettangolare, costituita di materiale elastoplastico e soggetta a due coppie $\mathcal{M}$ simmetriche alle estremità. Si supponga che la risposta elastoplastica sia ancora di tipo bilineare e perfettamente plastica. Il momento flettente M è costante e pari alle coppie $\mathcal{M}$ applicate.

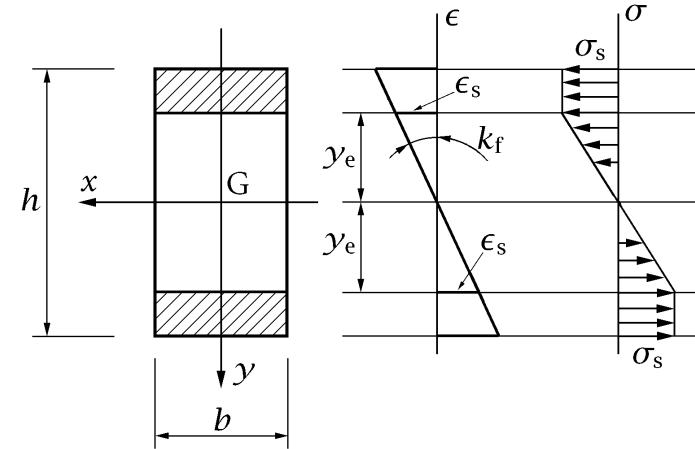


Si incrementino le coppie $\mathcal{M}$, e quindi il momento flettente, fino a che questi assuma il valore M_s di snervamento che plasticizza i lembi estremi della sezione:

$$M_s = W \sigma_s = \frac{bh^2}{6} \sigma_s,$$

dove σ_s è la tensione di snervamento e $W = bh^2/6$ il modulo di resistenza della sezione. Al momento di snervamento M_s corrisponde la curvatura flessionale k_s di snervamento:

$$k_s = 2 \frac{\epsilon_s}{h},$$



dove $\epsilon_s = \sigma_s/E$ è la dilatazione di snervamento. Il diagramma $M-k_f$ tra momento flettente e curvatura flessionale è lineare finché il comportamento del materiale è elastico lineare:

$$M = EJk_f = E \frac{bh^3}{12} k_f.$$

Continuando ad incrementare il momento flettente la plasticizzazione si propaga all'interno della sezione, sezione che resta così divisa in due parti: una parte centrale elastica con andamento lineare della tensione normale e una parte esterna plasticizzata in cui la tensione normale è costante e pari alla tensione σ_s di snervamento. Detta y_e la distanza del baricentro della sezione dai lembi estremi della parte a comportamento elastico, la curvatura flessionale k_f e il momento flettente M corrispondenti valgono:

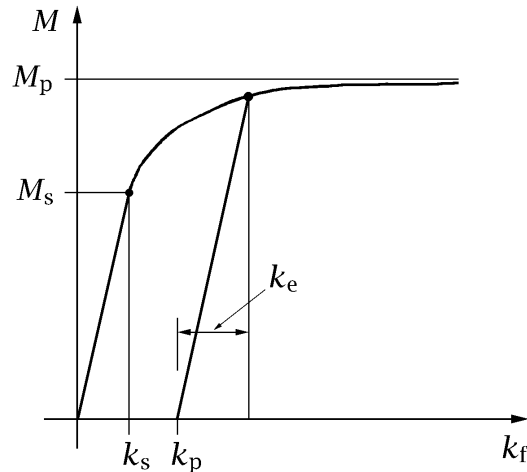
$$k_f = \frac{\epsilon_s}{y_e},$$

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{1}{2} b \sigma_s y_e \right) \left(\frac{4}{3} y_e \right) + \left\{ b \sigma_s \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \right\} \left(\frac{h}{2} + y_e \right) \\
 &= \frac{2}{3} b \sigma_s y_e^2 + b \sigma_s \left(\frac{h^2}{4} - y_e^2 \right) = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3} \right) \sigma_s.
 \end{aligned}$$

Queste sono le equazioni parametriche (di parametro y_e) di una curva $M-k_f$, valida per $k_f > k_s$. All'aumentare del momento flettente aumenta la zona plasticizzata e diminuisce di conseguenza l'ampiezza y_e della zona elastica. Se $y_e \rightarrow 0$ allora $k_f \rightarrow \infty$ e $M \rightarrow M_p$, dove M_p è detto *momento plastico* e vale:

$$M_p = \frac{b h^2}{4} \sigma_s.$$

La curva $M-k_f$ risulta quindi asintotica al momento plastico per $k_f \rightarrow \infty$.



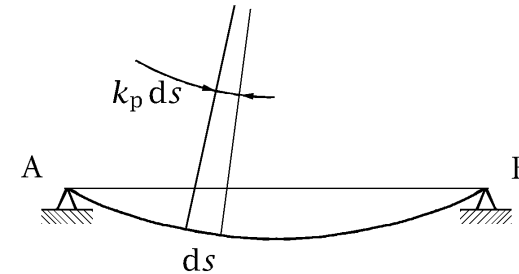
Si aumentino ora le coppie applicate fino a portare il momento flettente M a superare il momento di snervamento e a sviluppare quindi delle distorsioni plastiche, e poi si scari-

chino le coppie applicate fino ad annullarle. Durante lo scarico tutte le fibre si comportano elasticamente per cui viene recuperata la sola parte elastica della curvatura flessionale:

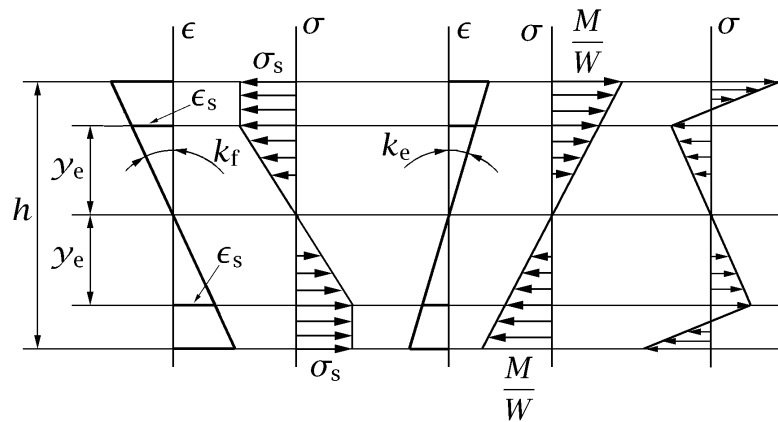
$$k_e = \frac{M}{EJ} = \frac{3h^2 - 4y_e^2}{h^3} \epsilon_s,$$

quantità che dipende dal livello del momento flettente M e cioè dal parametro y_e . Dopo l'annullarsi del momento flettente, resta quindi una curvatura flessionale permanente k_p che rappresenta una distorsione distribuita lungo l'asse della trave:

$$k_p = \frac{\epsilon_s}{y_e} - \frac{3h^2 - 4y_e^2}{h^3} \epsilon_s.$$



Si noti che per scaricare la zona centrale elastica occorrerebbe recuperare tutta la curvatura. Permangono quindi delle tensioni normali che equivalgono ad una coppia flettente, tensioni che sono autoequilibrate da quelle che permangono nella zona che ha subito la plasticizzazione e che originano una coppia complessiva equilibrante la precedente. Il valore delle autotensioni al passaggio tra la zona elastica e quella che ha



subito la plasticizzazione è data dalla relazione:

$$\sigma(y_e) = E k_p y_e,$$

mentre quelle ai lembi estremi della sezione valgono:

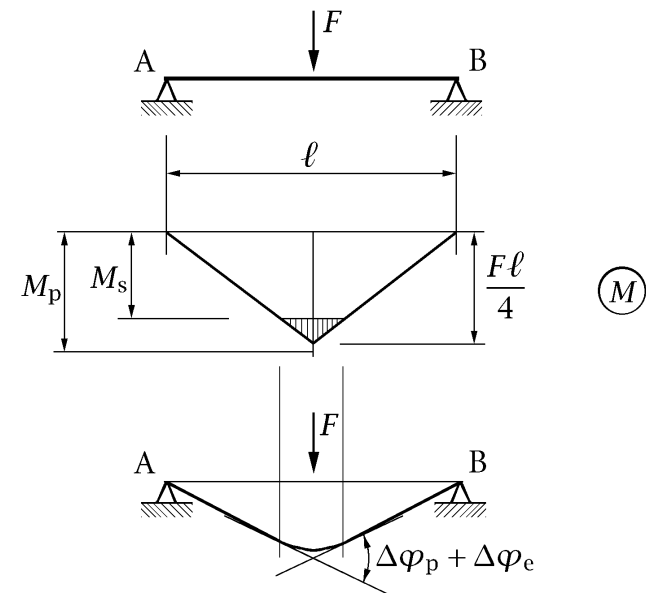
$$\sigma\left(\frac{h}{2}\right) = \sigma_s - \frac{M}{W} = \frac{M_s - M}{W}.$$

Quest'ultima tensione ha segno opposto di quella che si è generata durante il caricamento poiché $M > M_s$.

3.6.3 Distorsioni plastiche concentrate (cerniere plastiche)

Nell'esempio del paragrafo precedente il momento flettente è costante e la plasticizzazione si sviluppa contemporaneamente in tutta la trave. Nei sistemi di travi soggetti prevalentemente a momento flettente in generale il momento non è costante. Questo significa che la plasticizzazione si sviluppa a partire dalle sezioni in cui il momento è massimo, quando tale momento uguaglia il momento di snervamento.

Si consideri, quale esempio, la trave appoggiata di sezione rettangolare e soggetta ad un carico concentrato F in mezzzeria. All'incrementarsi del carico il momento $F\ell/4$ in mezzzeria raggiunge il valore di snervamento M_s . A questo punto il momento nella sezione continua ad incrementarsi con il carico e

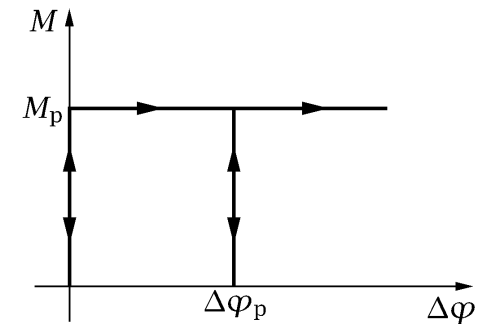


la zona plasticizzata tende ad interessare un intorno di tale sezione. In tale zona il legame tra momento flettente e curvatura flessionale segue la curva non lineare stabilita al paragrafo precedente: piccoli incrementi del momento provocano grandi incrementi della curvatura flessionale e ne risultano delle notevoli rotazioni relative $\Delta\varphi_p$ nella, ristretta, zona plasticizzata. Tali rotazioni relative dovute alla plasticizzazione vanno a sommarsi alle rotazioni relative $\Delta\varphi_e$, di ampiezza notevolmente inferiore, che si sono sviluppate durante il comportamento elastico del materiale.

Si ottiene allora la situazione in cui nella sezione di momento massimo il momento flettente si approssima al momento plastico M_p e nell'intorno di tale sezione tende a svilupparsi una rotazione relativa tendenzialmente infinita (prescindendo dalla resistenza del materiale). Tale situazione suggerisce l'introduzione del modello approssimato di *cerniera plastica* basata sulle due assunzioni seguenti:

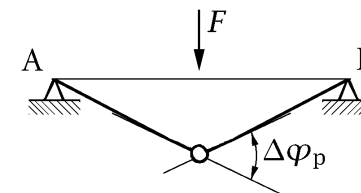
1. La rotazione relativa che si sviluppa nell'intorno della sezione di momento massimo e dovuta alla distorsione plastica viene concentrata in tale sezione;
2. La rotazione relativa concentrata nella sezione di momento massimo inizia a svilupparsi quando il momento nella sezione ha raggiunto il livello del momento plastico, senza ulteriori aumenti del momento flettente nella sezione.

Queste due assunzioni possono compendiarsi in un diagramma bilineare $M-\Delta\varphi$ di comportamento elasto-perfettamente plastico della sezione generica di una trave prevalentemente soggetta a momento flettente. Si osservi che lo sviluppo



di una rotazione relativa a momento flettente costante corrisponde all'inserimento di una cerniera nella sezione. Nelle due facce così sconnesse continua naturalmente ad agire il momento plastico.

Si vogliono ora verificare le implicazioni del modello di cerniera plastica per il caso della trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria. La trave si comporta elasti-

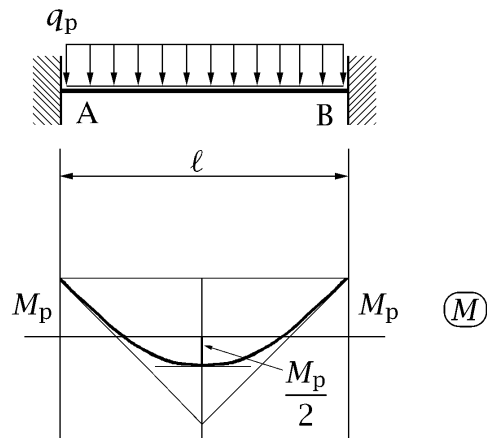


camente al crescere del carico finché il momento in mezzeria uguaglia il momento plastico. A questo punto nella sezione di mezzeria si sviluppa una cerniera plastica che rende la trave labile. Ne consegue che continuando a permanere il carico la rotazione relativa nella sezione di mezzeria tende a divenire infinita.

3.6.4 Esempio (calcolo a rottura di una trave in acciaio a sezione rettangolare, incastrata e soggetta ad un carico ripartito)

Si consideri una trave incastrata alle due estremità, di sezione rettangolare e soggetta ad un carico ripartito q . Si vuole determinare il valore q_r del carico ripartito che provoca la rottura della trave adottando il modello di cerniera plastica. Nello spirito di tale modello si raggiunge la rottura quando si sono formate un numero di cerniere plastiche sufficienti a rendere labile la struttura. Infatti a questo punto le rotazioni relative si possono sviluppare illimitatamente senza incrementare sensibilmente il carico, circostanza che porta inevitabilmente alla rottura del materiale.

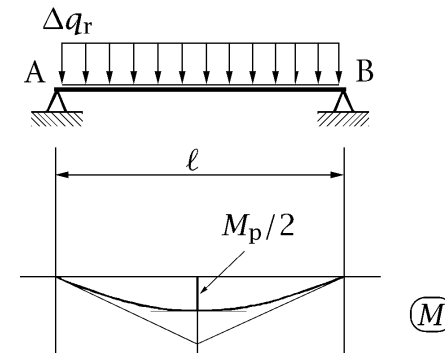
Si incrementi allora il carico ripartito q a partire dalla configurazione naturale. La trave inizialmente si comporta in modo elastico-lineare fino al livello q_p del carico che porta al-



la formazione di due cerniere plastiche agli incastrati, dove il momento è massimo (in modulo):

$$\frac{q_p \ell^2}{12} = M_p \quad \Rightarrow \quad q_p = 12 \frac{M_p}{\ell^2} = 3 \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Ulteriori incrementi Δq del carico vengono ad agire sulla trave appoggiata e determinano un incremento $\Delta q \ell^2 / 8$ del momento in mezzeria. Tenendo conto che il momento in mezzeria



sotto il carico q_p vale $M_p/2$, l'incremento Δq_r del carico che porta alla formazione della cerniera plastica in mezzeria e quindi alla rottura della trave è individuato dalla condizione:

$$\frac{\Delta q_r \ell^2}{8} + \frac{M_p}{2} = M_p \quad \Rightarrow \quad \Delta q_r = 4 \frac{M_p}{\ell^2} = \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Il carico di rottura q_r vale quindi:

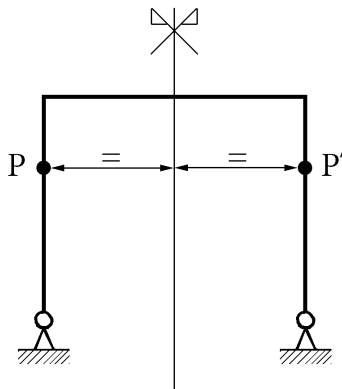
$$q_r = q_p + \Delta q_r = 16 \frac{M_p}{\ell^2} = 4 \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Capitolo 4

Strutture simmetriche

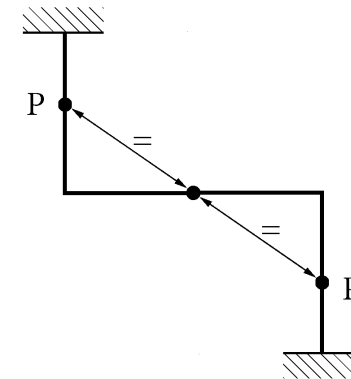
Una struttura è *simmetrica* se è invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, sotto certe trasformazioni. Nel seguito si considereranno, per le strutture piane, due tipi di trasformazioni: le *riflessioni* rispetto ad un asse e le *rotazioni di 180°* attorno ad un punto detto *polo*.

In una riflessione il punto corrispondente a un dato punto è posto sulla perpendicolare all'asse di riflessione per tale punto, dalla parte opposta rispetto all'asse e ad ugual distanza dall'asse. Una struttura invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, per riflessione rispetto ad un asse è detta *assialsimmetrica*. Spesso, quando si dice che una struttura è *simmetrica* senza nessuna altra specificazione si intende che è assialsimmetrica. Si noti che una riflessione è equivalente ad una rotazione di 180° attorno all'as-



se di riflessione. Tale rotazione comunque, a differenza della riflessione, coinvolge la terza dimensione. Con riferimento alle sezioni delle travi si è anche parlato di (*assial*)*simmetria obliqua*: in tal caso, dato un punto, la trasformazione gli fa corrispondere il punto posto sulla retta per il punto dato e avente la data direzione obliqua, dalla parte opposta rispetto all'asse e ad ugual distanza dall'asse.

Una rotazione di 180° attorno a un polo è equivalente alla trasformazione che a un dato punto fa corrispondere il punto posto sulla congiungente per il polo, dalla parte opposta rispetto al polo e ad ugual distanza dal polo. Una struttura



invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, per rotazioni di 180° attorno a un polo è detta *polarsimmetrica*.

4.1 Azioni su strutture simmetriche

Si consideri ora un sistema di travi simmetrico (in senso generico, ovvero sia assialsimmetrico oppure polarsimmetrico

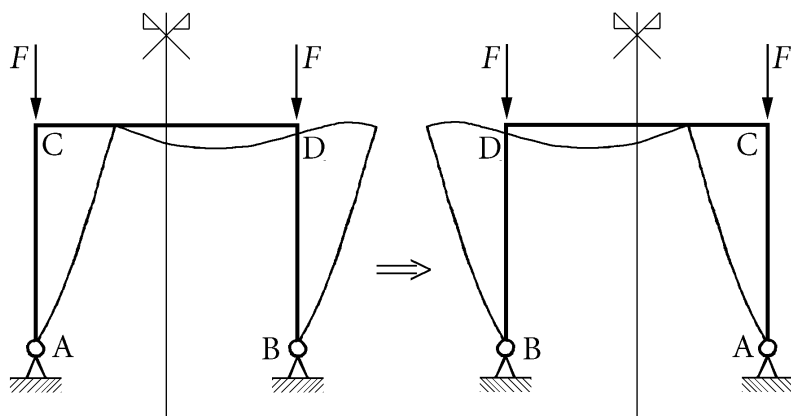
o altro). Le azioni che agiscono sulla struttura (forze, distorsioni, vincoli) possono essere:

1. *Simmetriche*, se sono invarianti a seguito della trasformazione;
2. *Emisimmetriche* (o *antisimmetriche*) se nella trasformazione si ottengono le azioni cambiate di segno;
3. *Generiche*, ovverossia né simmetriche e né emisimmetriche.

4.1.1 Sistemi simmetrici soggetti ad azioni simmetriche

Si consideri innanzitutto un sistema simmetrico soggetto ad azioni simmetriche e si supponga che ammetta una soluzione non simmetrica (quando ciò avviene si parla di *rottura di simmetria*).

Eseguendo la trasformazione la struttura e le azioni restano invariate mentre la soluzione si trasforma nella sua simmetrica. Questo implica che se un sistema simmetrico sotto certe

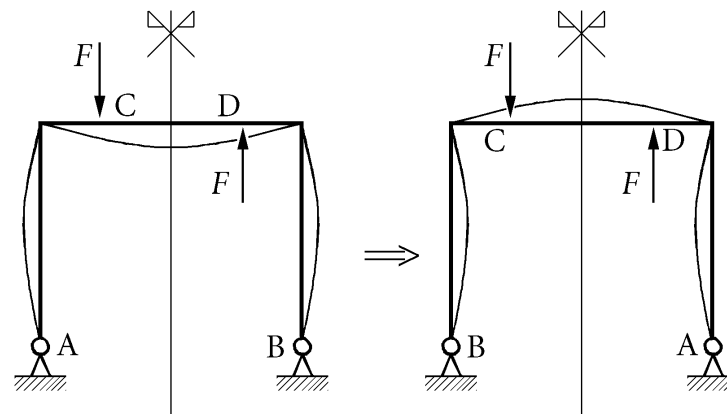


azioni simmetriche ammette una soluzione non simmetrica, anche la simmetrica di tale soluzione è una soluzione. In particolare se ne può concludere che le (eventuali) soluzioni non simmetriche si presentano sempre a coppie.

Poiché i sistemi lineari, tipo quelli che si stanno al momento considerando, ammettono una sola soluzione se ne può concludere che questa, unica, soluzione deve essere simmetrica.

4.1.2 Sistemi simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche

Si consideri ora un sistema simmetrico soggetto ad azioni emisimmetriche e si supponga che ammetta una soluzione non emisimmetrica. Eseguendo la trasformazione la struttura resta invariata, le azioni cambiano di segno e la soluzione si trasforma nella sua simmetrica. Se il sistema è anche omogeneo di grado uno (come nel caso dei sistemi lineari) e sotto certe azioni ammette una soluzione allora sotto le azioni cambiate di segno (cioè moltiplicate per -1) ammette la soluzione precedente cambiata di segno. Dopo la trasformazione



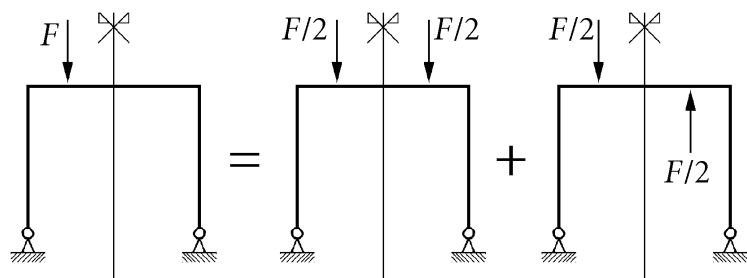
si cambi allora segno sia alle forze che alla soluzione (simmetrica della soluzione di partenza) ottenendo così le forze originali e la emisimmetrica della soluzione di partenza. Quindi le eventuali soluzioni non emisimmetriche di un sistema omogeneo di grado uno simmetrico e soggetto ad azioni emisimmetriche si presentano a coppie.

Nel caso dei sistemi lineari simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche si può quindi concludere che la soluzione, unica, deve essere emisimmetrica.

4.1.3 Sistemi simmetrici soggetti ad azioni generiche

Infine, se le azioni su una struttura simmetrica sono generiche e se vale la sovrapposizione degli effetti (come nel caso delle strutture lineari), possono sempre decomporre nella somma di azioni simmetriche e di azioni emisimmetriche.

Infatti, se in punto è data una certa azione, basta dividerla a metà, una metà farà parte delle azioni simmetriche e l'altra metà di quelle emisimmetriche. In più, delle azioni simmetriche farà parte la simmetrica di tale metà e delle azioni emi-



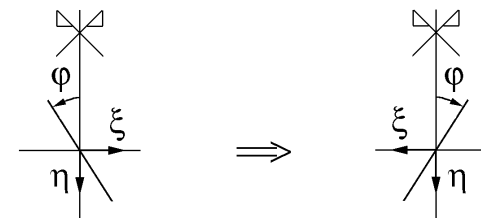
simmetriche farà parte la sua emisimmetrica. Sommando si riottiene l'intera azione mentre la simmetrica e l'emisimmetrica di metà di tale azione si elidono reciprocamente.

4.2 Sistemi assialsimmetrici

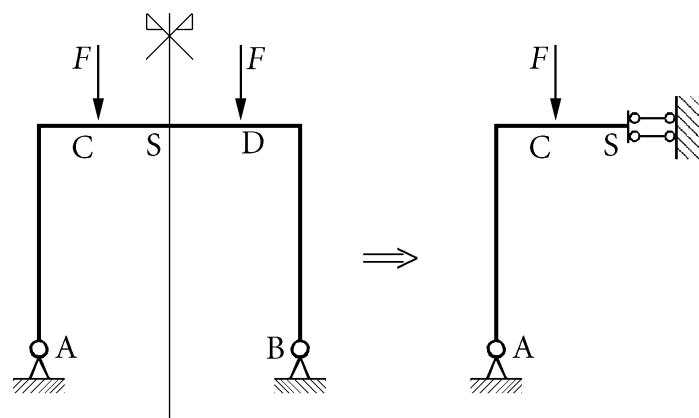
Si concentri ora l'attenzione sui sistemi assialsimmetrici, quindi, come detto, invarianti per riflessione rispetto ad un asse. Nel seguito analizzeremo tali sistemi sia soggetti ad azioni simmetriche che emisimmetriche, con particolare riferimento alla situazione che si presenta in corrispondenza di sezioni poste sull'asse di simmetria.

4.2.1 Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni simmetriche

Come detto, la risposta di una struttura simmetrica ad azioni simmetriche, nel caso delle strutture lineari, è simmetrica. Ne consegue che una sezione posta sull'asse di simmetria può solo traslare lungo l'asse di simmetria. Infatti, per riflessione, tale spostamento resta invariato, mentre sia una traslazione ortogonale all'asse di simmetria che una rotazione vengono



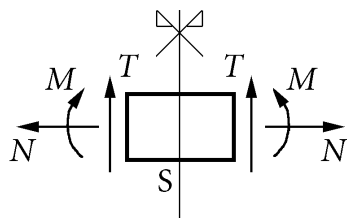
cambiate di segno nella riflessione (sono cioè emisimmetriche). Ne consegue che le condizioni cinematiche imposte dalla simmetria sono equivalenti a quelle dovute ad un doppio pendolo.



Si consideri ora la situazione statica di una sezione posta sull'asse di simmetria e di traccia coincidente con l'asse. Per equilibrio del nodo, la sezione può essere soggetta a forza normale e a momento flettente mentre il taglio deve essere nullo, almeno se la sezione non è direttamente caricata:

Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse di simmetria

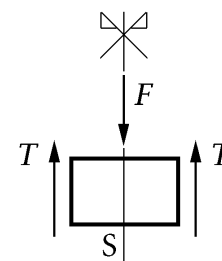
$$\Rightarrow T = 0.$$



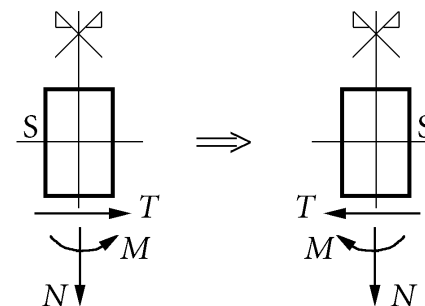
Se la sezione è invece caricata da una forza simmetrica, cioè da una forza avente la direzione dell'asse di simmetria, l'equilibrio impone che nelle due facce poste immediatamente prima e dopo l'asse di simmetria il taglio valga metà della forza applicata:

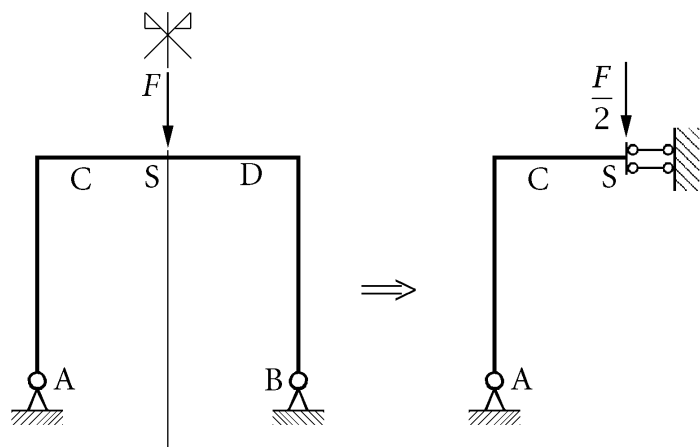
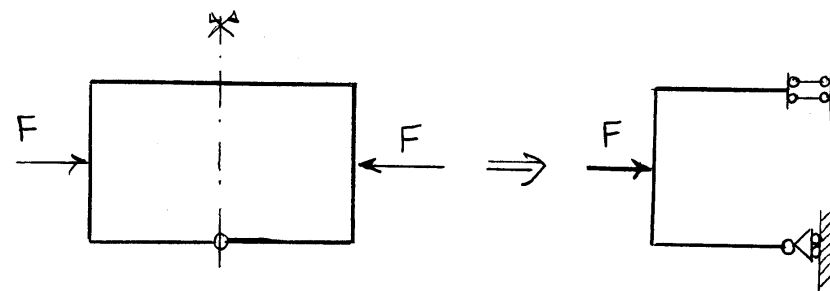
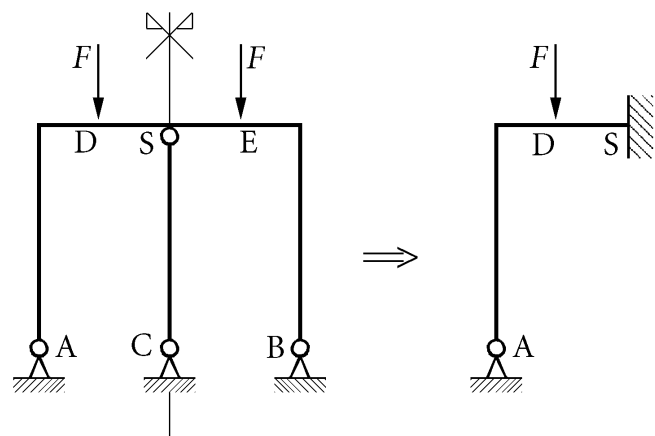
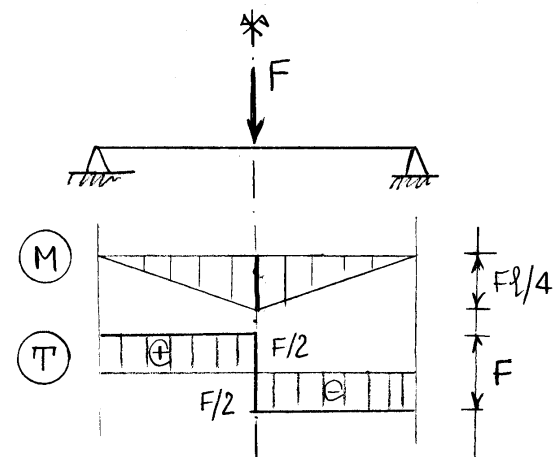
Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse di simmetria

$$\Rightarrow T = \frac{F}{2}.$$

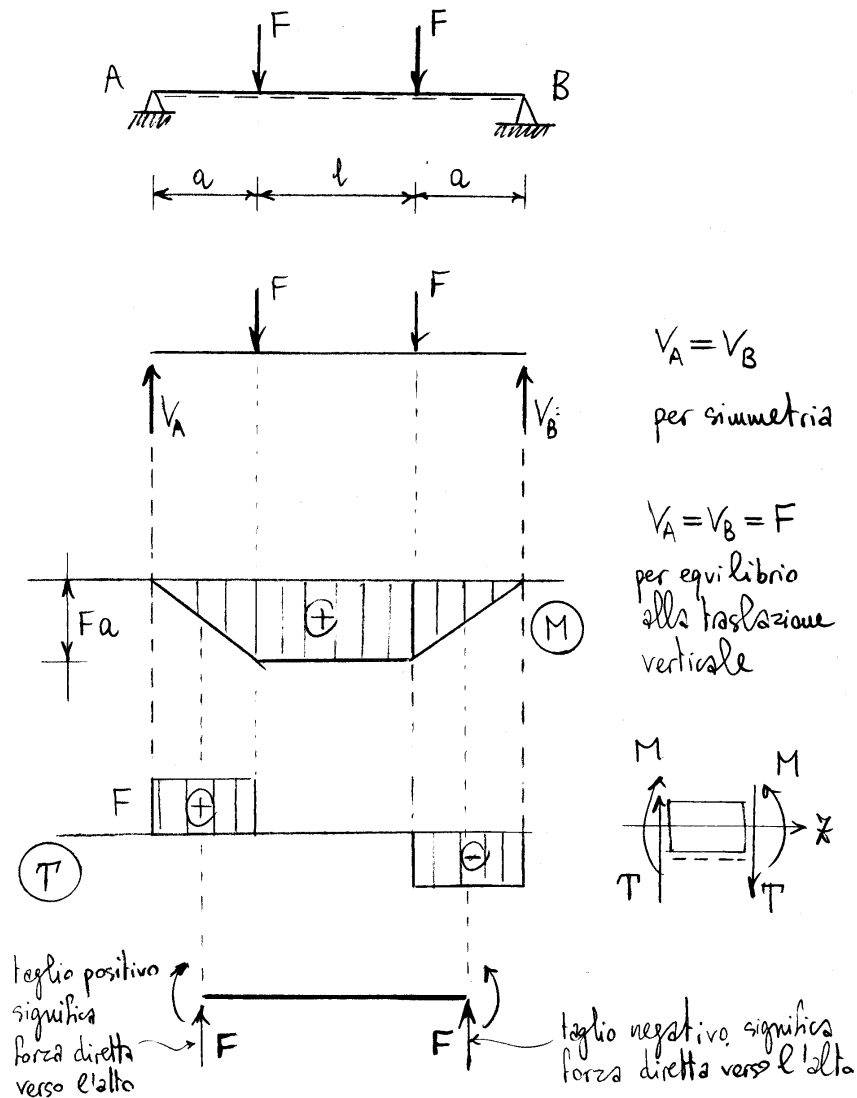


Si consideri poi una sezione posta sull'asse di simmetria ma di traccia ortogonale all'asse. In tale caso risulta che la sezione è soggetta alla sola forza normale. Infatti la forza normale è l'unica caratteristica della sollecitazione che si rifletta restando invariante.



Esempio 1:**Esempio 3:****Esempio 2:****Esempio 4:**

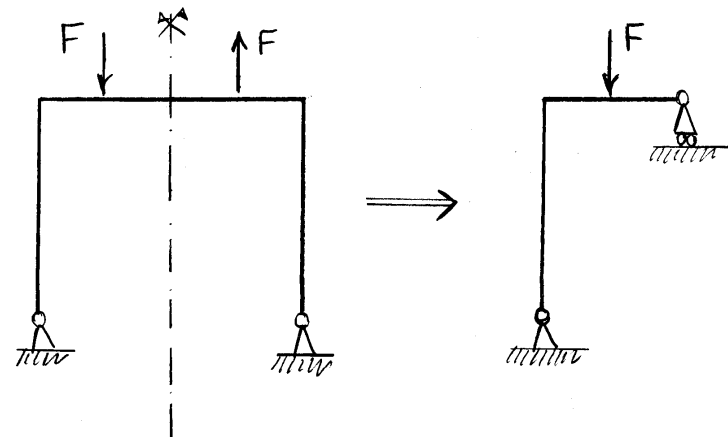
Esempio 5:



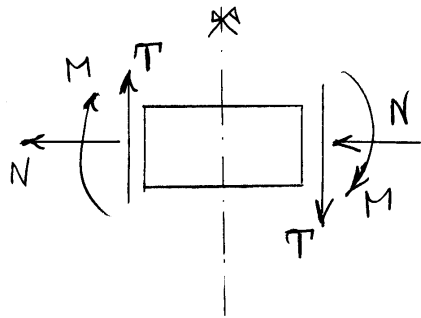
il diagramma del taglio è emisimmetrico, ma le forze sono simmetriche

4.2.2 Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche

La sezione posta sull'asse di simmetria può traslare in direzione ortogonale all'asse e può ruotare mentre non può traslare nella direzione dell'asse. Infatti, per riflessione, lo spostamento nella direzione dell'asse non cambia di segno e quindi rappresenta uno spostamento simmetrico. Le condizioni cinematiche imposte dalla emisimmetria ad una sezione posta sull'asse di simmetria sono dunque equivalenti a quelle dovute ad un carrello con piano di scorrimento ortogonale all'asse di simmetria.



Per equilibrio del nodo posto sull'asse di emisimmetria, la relativa sezione può essere soggetta a taglio mentre la forza normale ed il momento flettente devono essere nulli, almeno nel caso in cui la sezione posta sull'asse non è caricata.



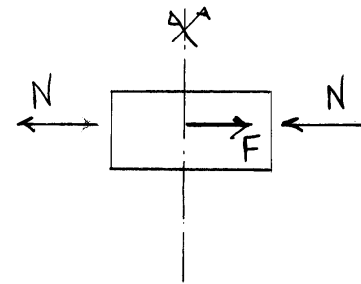
Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente

Equilibrio alla traslazione ortogionalmente all'asse di simmetria $\Rightarrow N = 0$

Equilibrio alla rotazione $\Rightarrow M = 0$

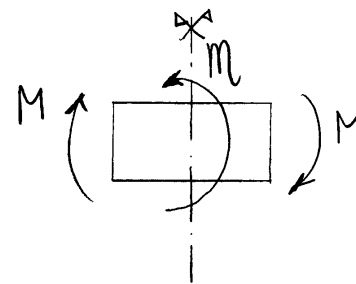
Se il nodo è caricato da una forza emisimmetrica l'equilibrio impone che la forza normale a destra e a sinistra del nodo valga metà della forza applicata.

Analogamente, se il nodo è caricato da una coppia, l'equilibrio impone che il momento flettente a destra e a sinistra del nodo valga metà della coppia applicata.



Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente e soggetta ad una forza (emisimmetrica) nella sezione di simmetria

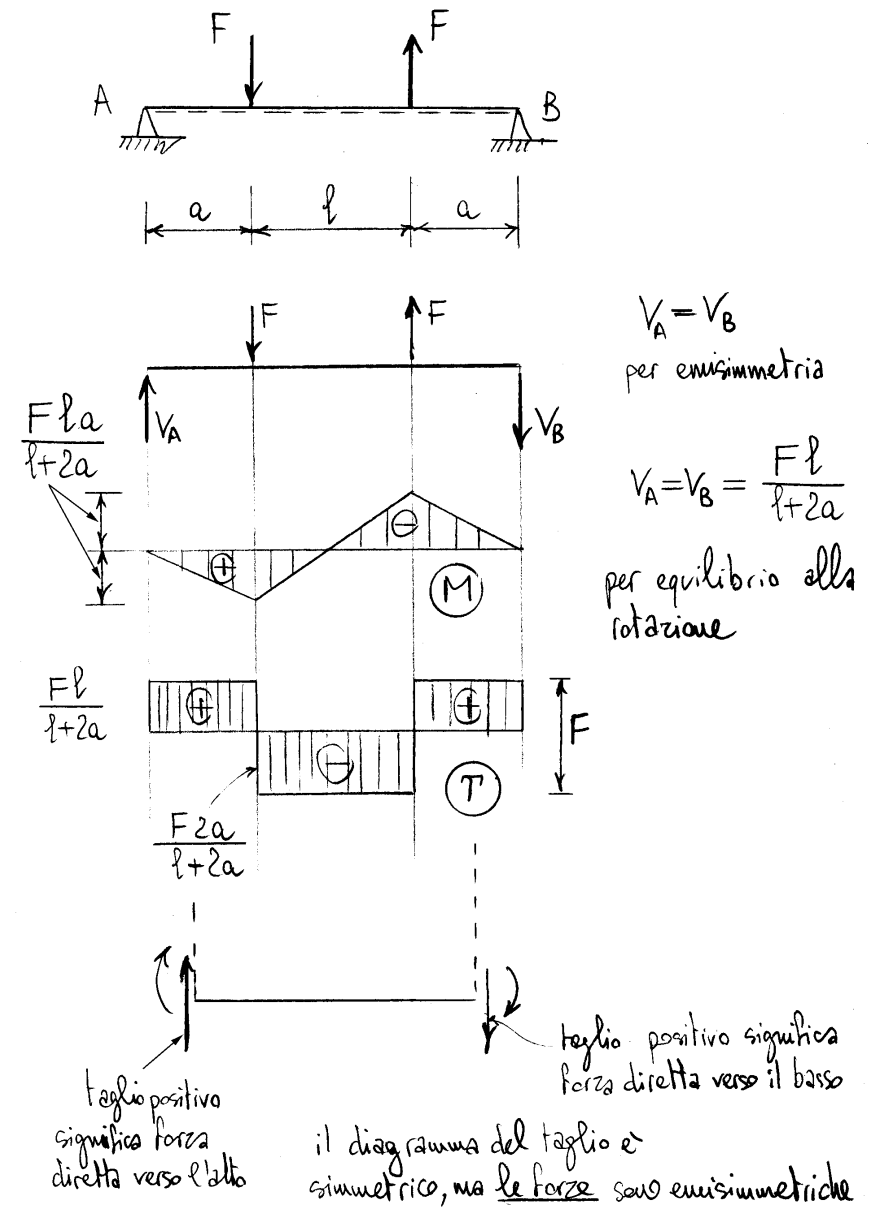
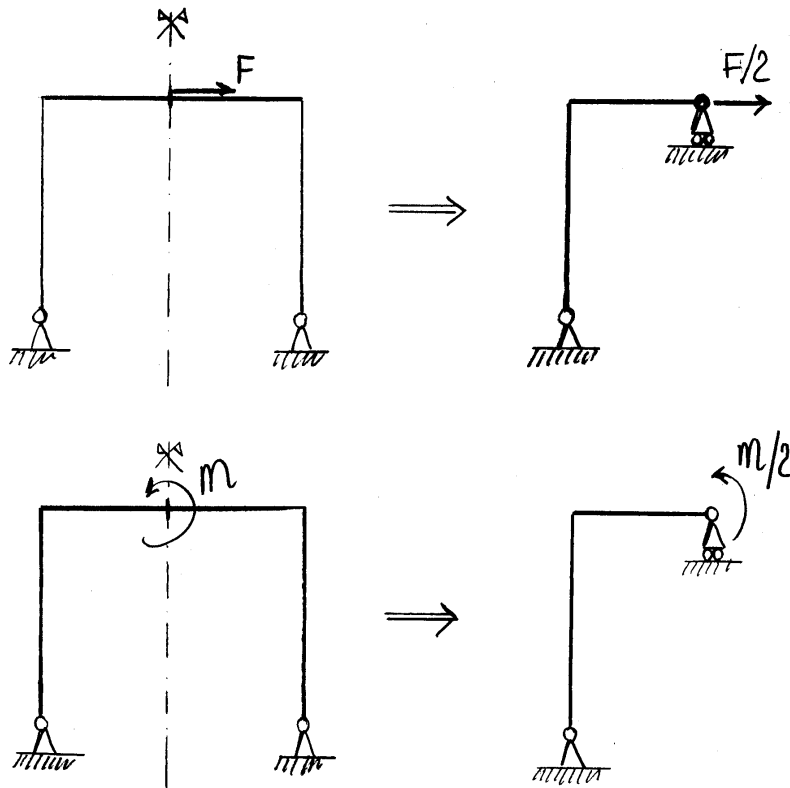
Equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale all'asse di simmetria $\Rightarrow N = \frac{F}{2}$

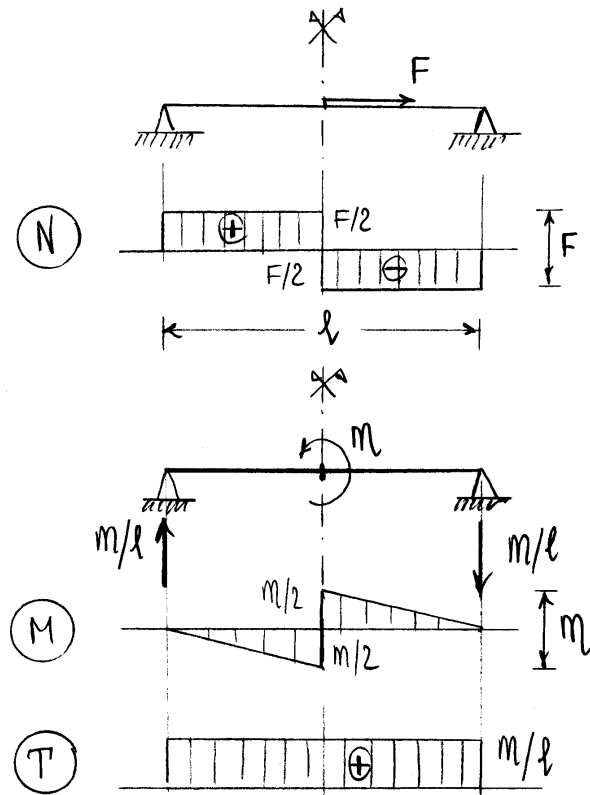


Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente e soggetta ad una coppia nella sezione di simmetria

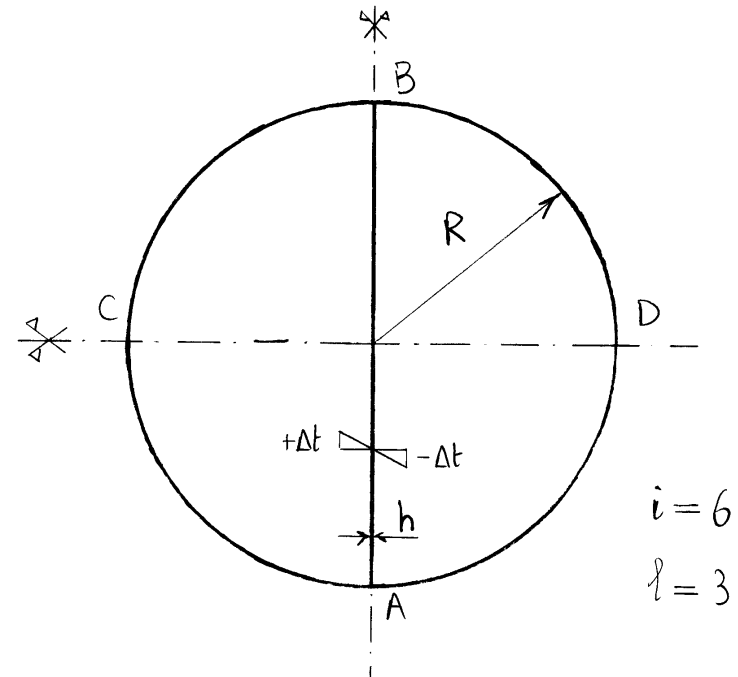
Equilibrio alla rotazione $\Rightarrow M = \frac{M}{2}$

Si noti che una forza diretta come l'asse di simmetria ed applicata in corrispondenza di una sezione posta sull'asse di simmetria, rappresenta un carico simmetrico.



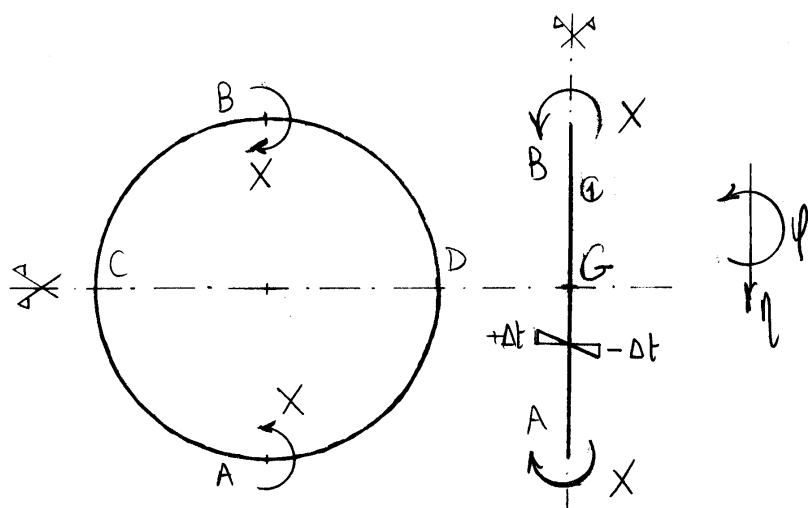


4.2.3 Esecizio (anello con diaframma soggetto ad una distorsione termica)



La struttura è simmetrica rispetto all'asse CD ed emisimmetrica rispetto all'asse AB . Inoltre è 3 volte labile e 6 volte iperstatica.

Per ridursi ad una struttura staticamente determinata, iniziamo a separare l'asta AB soggetta alla variazione termica dell'anello circolare. Per la simmetria rispetto all'asse CD , le sezioni

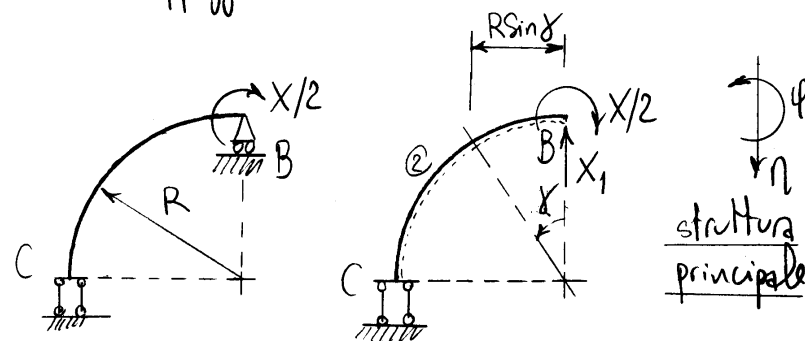


A e B di estremità dell'asta AB sono soggette ad un momento flettente X simmetrico e non sono soggette a taglio (per equilibrio alla traslazione orizzontale), mentre per la emisimmetria rispetto all'asse AB la forza normale è nulla (la forza normale è una forza simmetrica). La rotazione di G è inoltre nulla per la simmetria rispetto a CD e quindi la rotazione di B (e per simmetria anche di A) può valutarsi considerando che il tratto GB si deforma come una mensola, a meno di una traslazione orizzontale:

$$\varphi_B^{\text{①}} = \frac{XR}{EJ} - \frac{2R\alpha\Delta t}{h}.$$

Separiamo ora il quarto di circonferenza BC, tenendo

conto che B è una sezione di emisimmetria e che C è una sezione di simmetria. Si ottiene così una struttura una volta labile e una volta iperstatica, che può essere resa staticamente determinata rimuovendo l'appoggio in B:



Congruenza:

$$\begin{cases} \varphi_B^{\text{②}} = \varphi_B^{\text{①}} \\ \eta_B^{\text{②}} = 0 \end{cases}$$

$$M(\gamma) = X_1 R \sin \gamma - X/2$$

$$d\varphi_B^{\text{②}} = \frac{M}{EJ} ds$$

$$d\eta_B^{\text{②}} = -\frac{M}{EJ} R \sin \gamma ds$$

Procedendo con il metodo cinematico sulla struttura principale, si ottiene:

$$\varphi_B^{\text{②}} = \int_0^{\pi/2} \frac{R}{EJ} (X_1 R \sin \gamma - X/2) d\gamma = \frac{R^2}{EJ} X_1 - \frac{\pi R}{4EJ} X,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_B^2 &= - \int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{EJ} (X_1 R \sin \gamma - X/2) \sin \gamma d\gamma \\ &= - \frac{R^2}{2EJ} \left(\frac{\pi R}{2} X_1 - X \right) \end{aligned}$$

$$\vartheta_B^2 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{2}{\pi R} X$$

$$\begin{aligned} \varphi_B^2 &= \varphi_B^1 \Rightarrow \frac{2R}{\pi EJ} X - \frac{\pi R}{4EJ} X = \frac{XR}{EJ} - \frac{2R\alpha\Delta t}{h} \\ &\Rightarrow \frac{R}{EJ} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) X = R \frac{2\alpha\Delta t}{h} \end{aligned}$$

La soluzione risulta dunque:

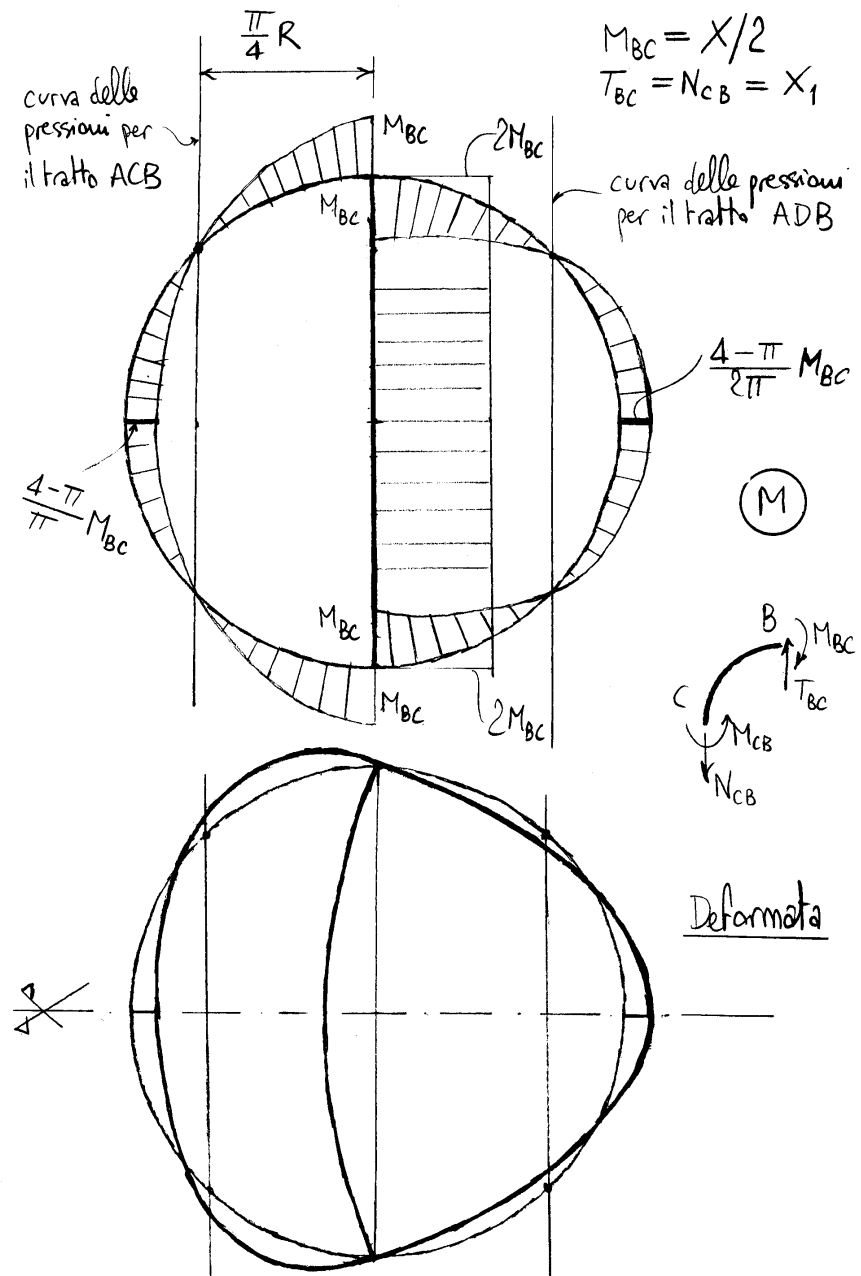
$$\begin{cases} X = \frac{8\pi}{4\pi + \pi^2 - 8} \frac{EJ\alpha\Delta t}{h} \\ X_1 = \frac{16}{4\pi + \pi^2 - 8} \frac{EJ\alpha\Delta t}{hR} \end{cases}$$

Il rapporto $b = (X/2)/X_1$ tra la coppia e la forza agenti in B misura la distanza tra la sezione B e la retta d'azione della risultante in B:

$$b = \frac{\pi}{4} R < R$$

Il momento cambia dunque di segno tra B e C e in C vale:

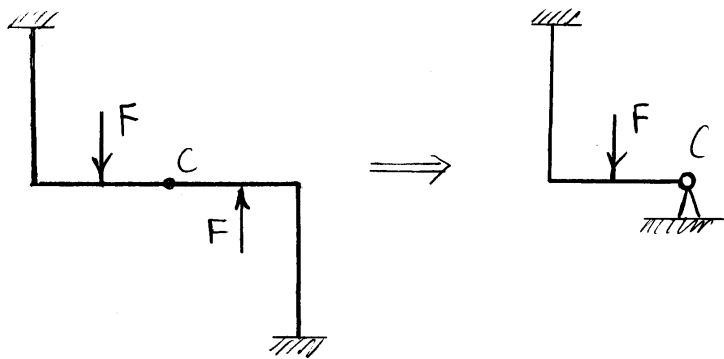
$$M_c = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} X - \frac{1}{2} X = \frac{4-\pi}{2\pi} X$$



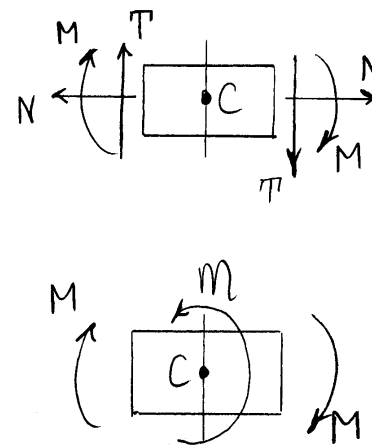
4.3 Sistemi polarsimmetrici

4.3.1 Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polarsimmetriche

Se il polo C appartiene alla struttura, la corrispondente sezione può ruotare ma non può traslare, poiché la sola rotazione risulta essere polarsimmetrica. Le condizioni cinematiche imposte dalla polarsimmetria sono dunque quelle di una cerniera fissa.



Per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione, l'equilibrio impone che in corrispondenza del polo C (se appartiene alla struttura) si annulli il momento flettente, salvo che non vi sia una coppia esterna applicata in C . In quest'ultimo caso il momento flettente a destra e a sinistra di C vale la metà della coppia applicata.



Equilibrio alla rotazione

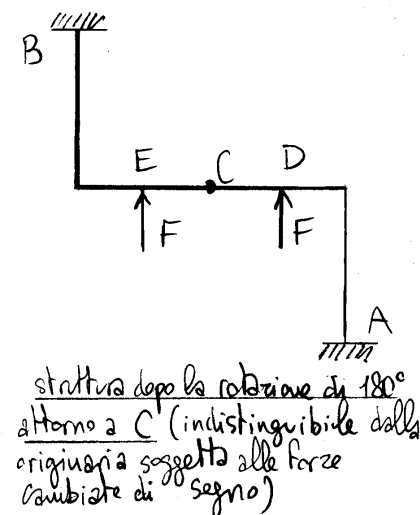
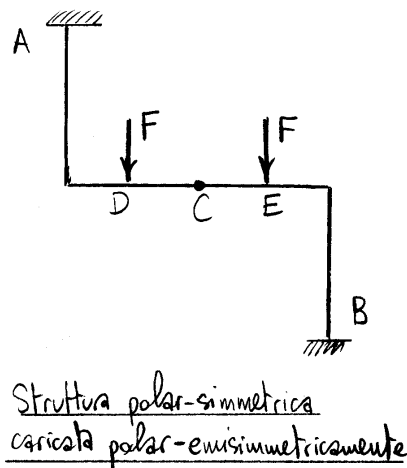
$$M = 0$$

Equilibrio alla rotazione

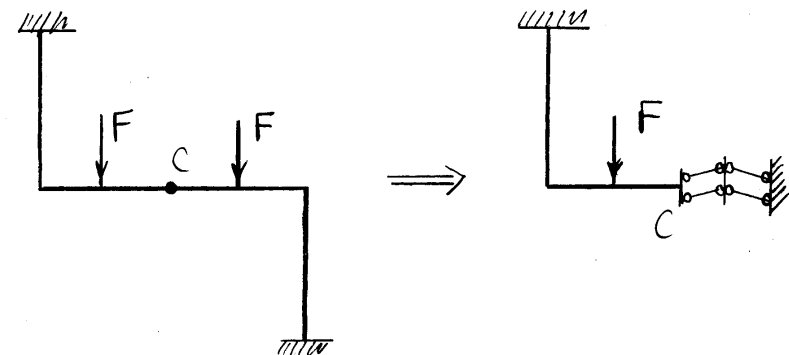
$$M = m/2$$

4.3.2 Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polaremisimmetriche

Se una struttura polar-simmetrica è caricata polar-emisimmetricamente, una rotazione di 180° della struttura attorno al polo la rende indistinguibile dalla struttura originaria sottoposta alle forze cambiate di segno. Ne consegue che anche la risposta della struttura deve essere polar-emisimmetrica.

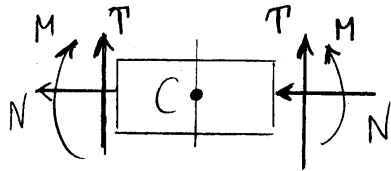


Se il polo C appartiene alla struttura, la corrispondente sezione può solo traslare (in una direzione qualunque) ma non può ruotare, essendo solo la traslazione polar-emisimmetrica. Le condizioni cinematiche imposte dalla polar-emisimmetria sono dunque equivalenti a quelle di un doppio-doppio pendolo.



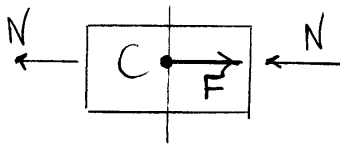
Delle caratteristiche della sollecitazione, risulta presente, per equilibrio, il solo momento flettente, a meno che non sia presente una forza applicata in C.

In quest'ultimo caso, la forza normale vale la metà della componente assiale della forza applicata e il taglio la metà della componente ortogonale all'asse della trave.



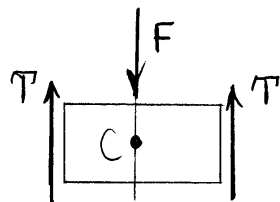
Equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$



Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse della struttura:

$$N = F/2$$



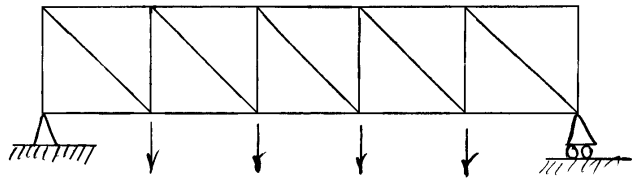
Equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale all'asse della struttura

$$T = F/2$$

Capitolo 5

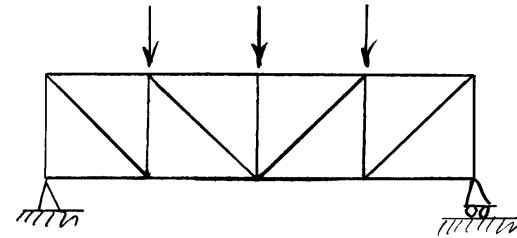
Travature reticolari

Le travature reticolari sono sistemi di travi soggette prevalentemente a forze di tipo assiale, nelle quali non è quindi trascurabile la deformabilità assiale delle singole travi. Le travi che compongono le strutture reticolari vengono tradizionalmente denominate "aste". Tali aste sono collegate tra di loro alle estremità tramite nodi cerniera oppure nodi incastro.

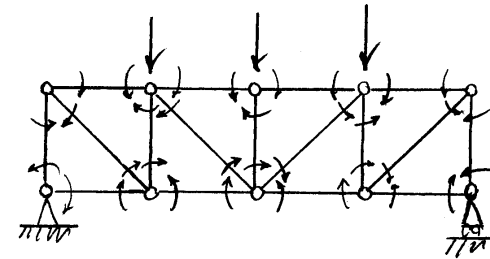


Se le aste sono incernierate (articolate) nei nodi e se le forze esterne agiscono solo nei nodi, l'unica sollecitazione presente è quella di forza normale. Se vi sono forze esterne agenti lungo le aste, queste risultano anche inflesse. Se però le forze prevalenti sono quelle applicate nei nodi, prevalgono le forze normali sulle azioni flettenti. Per esempio, il peso proprio delle aste componenti le strutture reticolari produce normalmente dei momenti flettenti trascurabili rispetto all'entità degli sforzi normali. Inoltre, delle azioni flettenti, se importanti, si può tenere conto in un secondo momento sovrapponendo gli effetti.

Se le aste sono collegate tra loro da nodi rigidi, tramite i nodi vengono trasmessi dei momenti flettenti. Tuttavia, se il numero delle aste non è inferiore a quello necessario ad avere un sistema non labile nel caso le aste fossero articolate nei nodi tali azioni flettenti sono trascurabili. Una trave reticolare con nodi rigidi può quindi essere risolta come se le aste fossero articolate nei nodi. Infatti, in tal caso, il problema iperstatico potrebbe risolversi considerando le aste articolate nei nodi. Per ripristinare la congruenza occorre che le rotazioni relative dovute ai carichi esterni (applicati solo nei nodi e che quindi originano solo sforzi normali) uguagliano quelle dovute alle incognite iperstatiche.

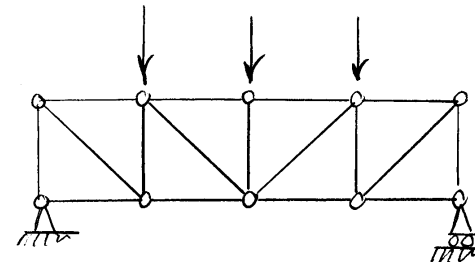


trave
reticolare
a nodi rigidi



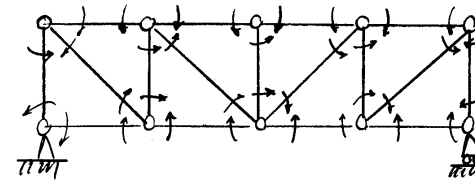
sistema
principale

||



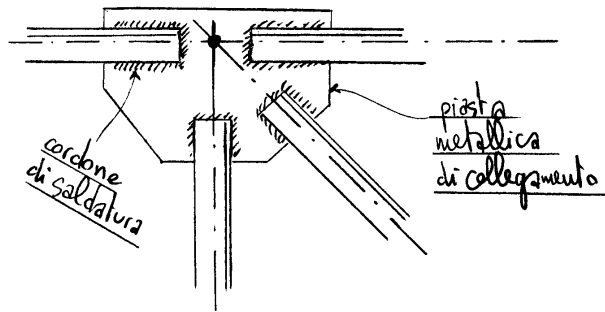
solo sforzi
normali

+



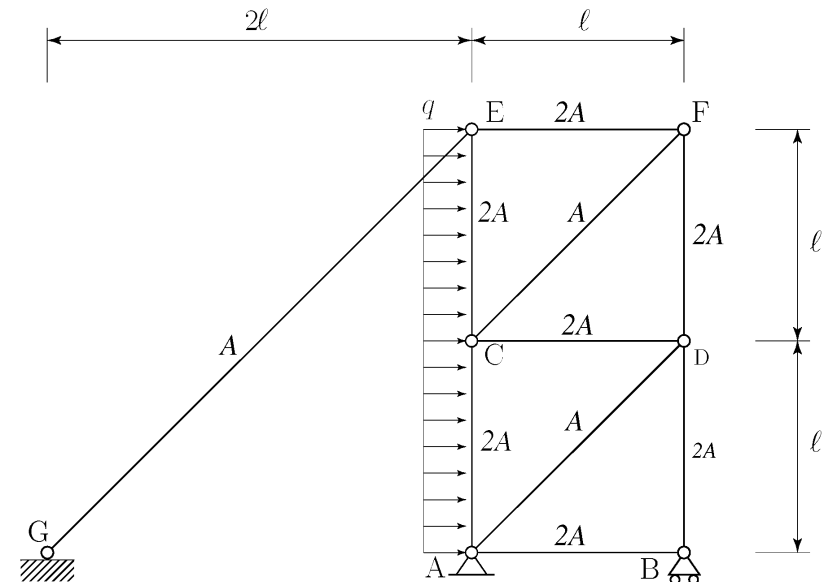
si devono originare
le stesse rotazioni
relative che si
originano nel sistema
soggetto ai soli carichi
esterni

Poiché le rotazioni dovute all'effetto dello sforzo normale sono "piccole" rispetto a quelle dovute all'effetto dei momenti flettenti, la congruenza sarà rispettata in corrispondenza a "piccoli" valori delle incognite iperstatiche, gli effetti delle quali sono quindi normalmente trascurabili.



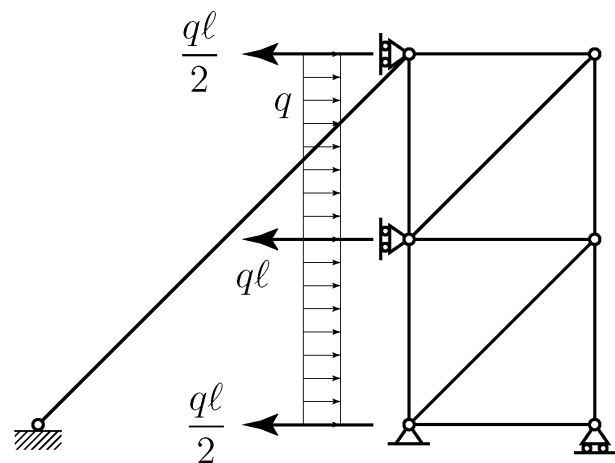
tipico nodo incastra

5.1 Esercizio su una travatura reticolare iperstatica



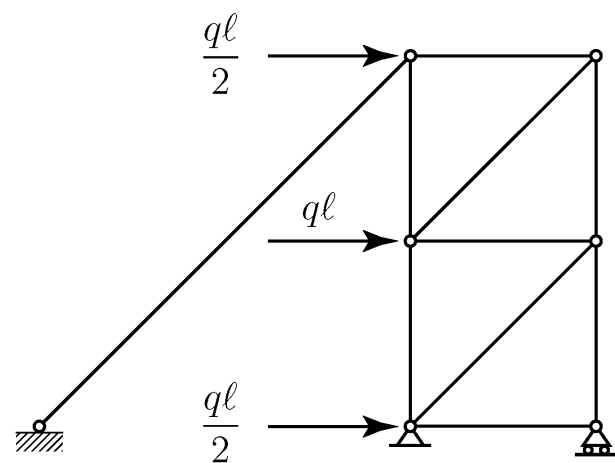
- 1) Risolvere la struttura;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 3) Compilare una tabella riassuntiva dello sforzo normale, precisando se la singola asta è un tirante oppure un puntone.

5.1.1 Sovrapposizione degli effetti



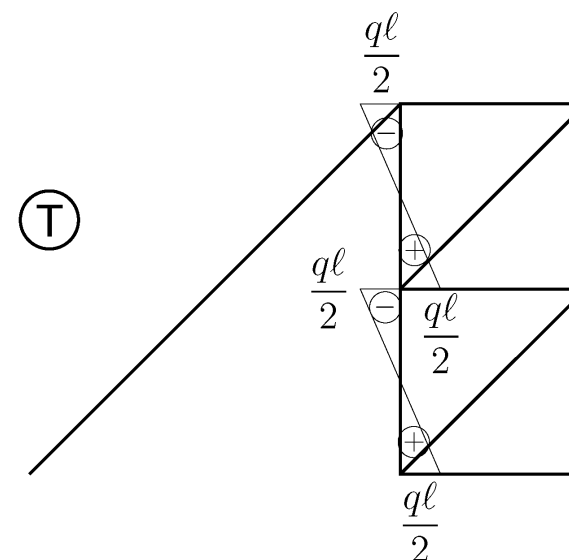
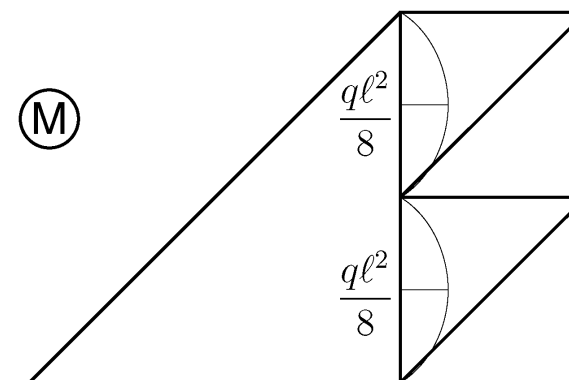
Azioni flettenti

+



Azioni normali

5.1.2 Soluzione flessionale



$$L_{vi} = \int_{\ell} N^{(f)} \frac{N^{(r)}}{EA} ds = \sum_i N_i^{(f)} \frac{N_i^{(r)}}{E_i A_i} \ell_i$$

$$N_i^{(r)} = N_i^{(o)} - X N_i^{(r)}$$

$$X = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{15 + 16\sqrt{2}}{3 + 4\sqrt{2}} q\ell = 0.7684q\ell$$

asta	luce	area	$N^{(f)}$	$N^{(o)}$	$N^{(r)}$	$N^{(r)} _{X=0.77q\ell}$	tipo asta
AC	ℓ	$2A$	$2/\sqrt{2}$	$q\ell/2$	$-2X/\sqrt{2} + q\ell/2$	$-0.59q\ell$	puntone
CE	ℓ	$2A$	$1/\sqrt{2}$	0	$-X/\sqrt{2}$	$-0.54q\ell$	puntone
BD	ℓ	$2A$	$-2/\sqrt{2}$	$-2q\ell$	$2X/\sqrt{2} - 2q\ell$	$-0.91q\ell$	puntone
DF	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - q\ell/2$	$-0.04q\ell$	puntone
AB	ℓ	$2A$	0	0	0	0	=
CD	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-3q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - 3q\ell/2$	$-0.96q\ell$	puntone
EF	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - q\ell/2$	$-0.04q\ell$	puntone
AD	$\sqrt{2}\ell$	A	1	$3q\ell/\sqrt{2}$	$-X + 3q\ell/\sqrt{2}$	$1.35q\ell$	tirante
CF	$\sqrt{2}\ell$	A	1	$q\ell/\sqrt{2}$	$-X + q\ell/\sqrt{2}$	$-0.06q\ell$	puntone

Capitolo 6

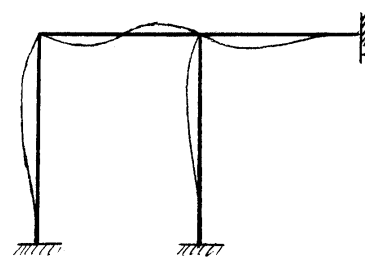
Telai piani

Come già detto, i sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente inflesse sono detti "telai" (telai piani nel caso di travi piane) e tale denominazione è utilizzata quale sinonimo di sistema di travi prevalentemente inflesse.

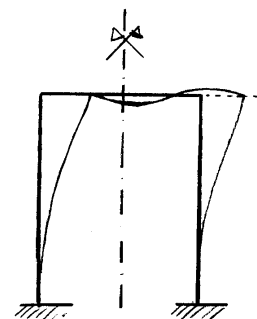
È utile distinguere i telai in telai a "nodi fissi" ed in telai a "nodi spostabili". Un telaio è detto a nodi fissi se i nodi del telaio (i punti di giunzione delle singole travi) possono solo ruotare, altrimenti è detto a nodi spostabili. Un telaio in cui non si trascuri l'effetto della deformabilità assiale sarà sempre, salvo casi

particolari, un telaio a nodi spostabili.

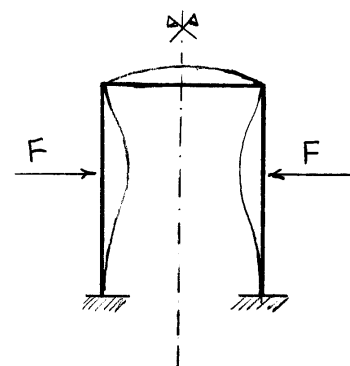
Alcuni esempi:



Telaio a nodi fissi



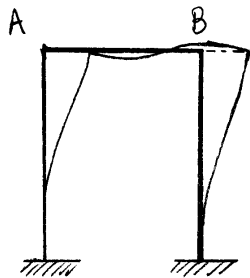
Telaio a nodi spostabili



Telaio a nodi fissi per simmetria strutturale e di carico

Un telaio in cui venga trascurata la deformabilità assiale associata alla forza normale viene detto "telaio a n nodi spostabili" se n è il numero degli spostamenti di nodo indipendenti fra loro.

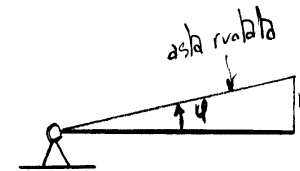
Esempio :



Telaio a un nodo spostabile perché gli spostamenti orizzontali dei punti A e B sono uguali

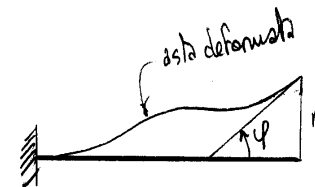
Per determinare il numero dei nodi spostabili si può fare riferimento ad un telaio rigido associato ottenuto dallo stesso telaio inserendo cerniere in corrispondenza di tutti i nodi, comprese le sezioni che sono vincolate esternamente, e considerando rigide tutte le travi che compongono il telaio.

Il comportamento di un'asta ad asse rettilineo è qualitativamente lo stesso, relativamente agli spostamenti di una delle due estremità, se la si considera rigida ed incernierata all'altra estremità oppure se la si considera deformabile flessionalmente (ma non assialmente) ed incastrata oppure incernierata all'altra estremità.



Asta rigida incernierata:

l'estremità libera può spostarsi perpendicolarmente all'asse dell'asta

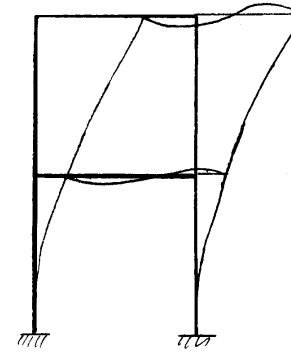
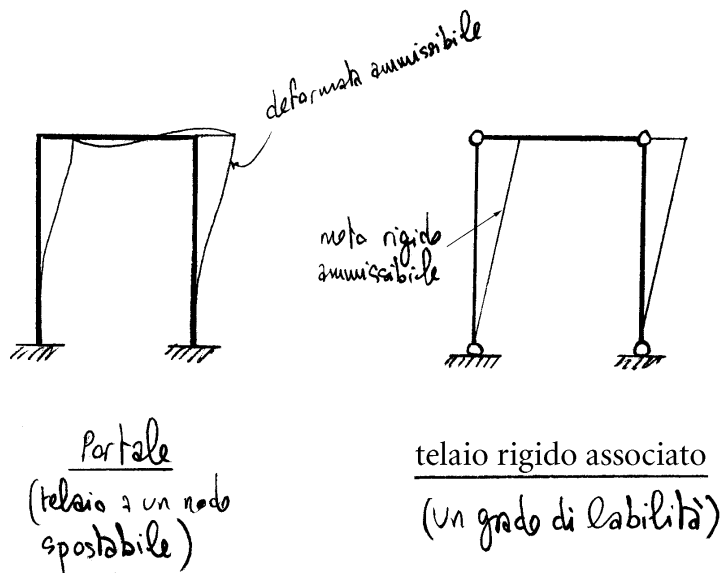


Asta incastrata deformabile flessionalmente:

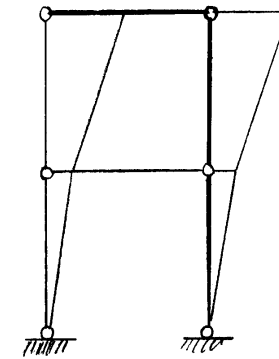
l'estremità libera può spostarsi perpendicolarmente all'asse dell'asta

Questo fatto comporta che il telaio rigido associato e il telaio stesso hanno, qualitativamente, gli stessi spostamenti di nodo. Il numero degli spostamenti indipendenti di nodo di un telaio coincide dunque con il grado di libertà del telaio rigido associato.

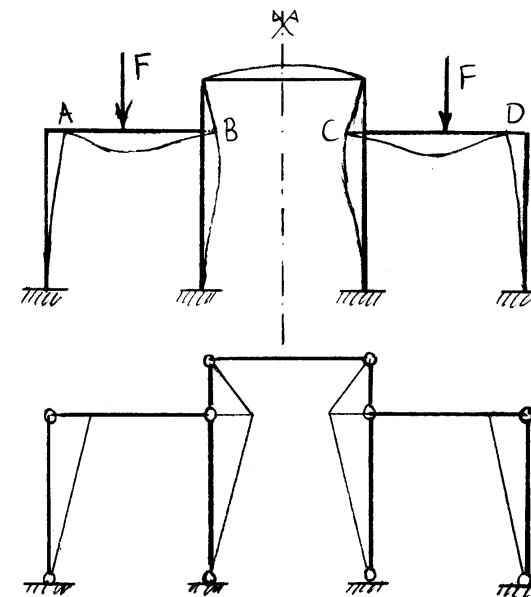
Esempi:



Telaio a due nodi spostabili



telaio rigido associato
(due gradi di libertà)

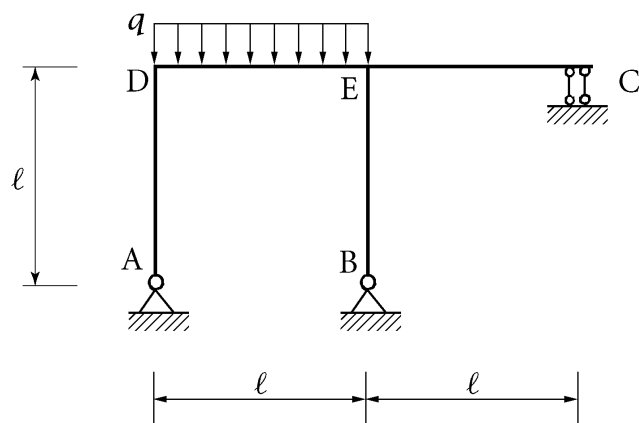


telaio rigido associato (1 grado di libertà per moto rigido simmetrico)

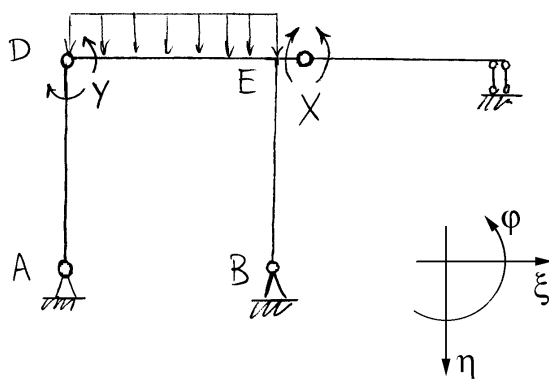
Telaio cattedrale

Telaio simmetrico simmetricamente caricato. Poiché i punti A, B, C, D si muovono della stessa quantità rappresenta un telaio a un nodo spostabile.

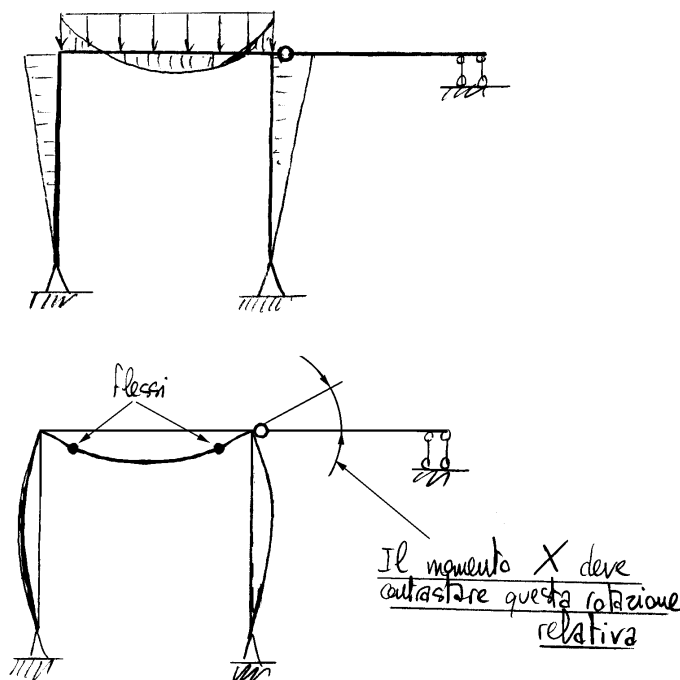
6.1 Esempio di un telaio a un nodo spostabile



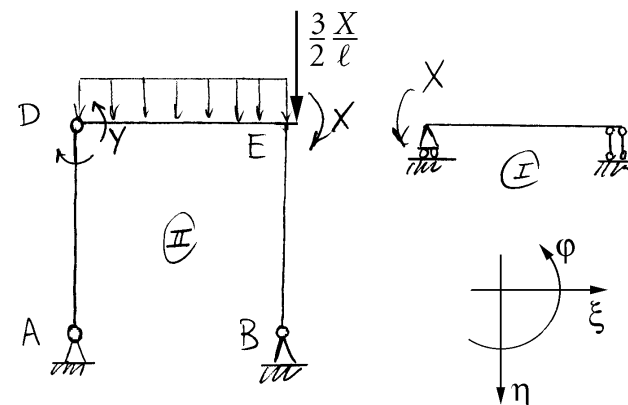
Sistema principale



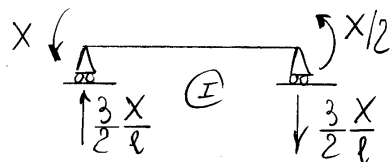
Previsione del verso della X



Schema risolvente

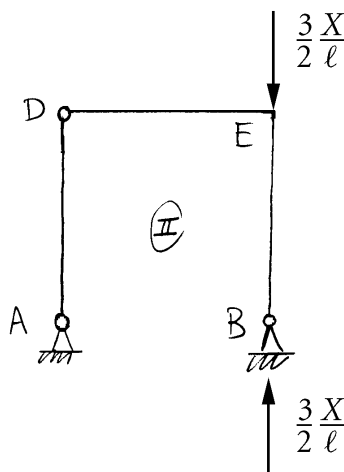


Trave incastro-appoggio (a meno di uno spostamento orizzontale)



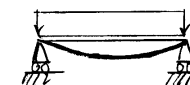
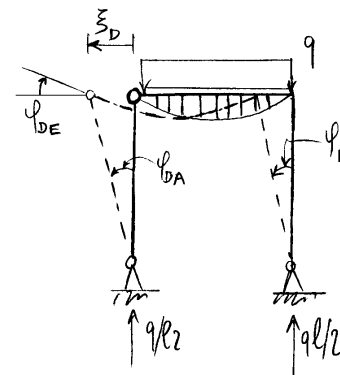
$$\varphi_E^{(I)} = \frac{Xl}{4EJ}$$

Carico $\frac{3X}{2l}$



La struttura è soggetta a solo sforzo normale e quindi resta indeformata.

Carico q



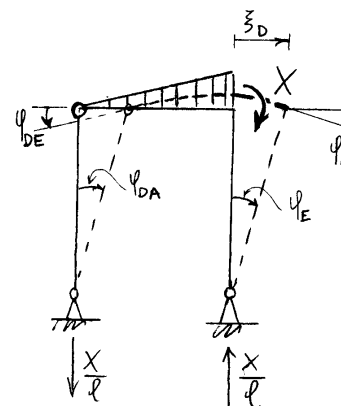
$$\varphi_{DE} = \frac{-ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_{DA} = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_E = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\xi_D = \frac{-ql^4}{24EJ}$$

Coppia X

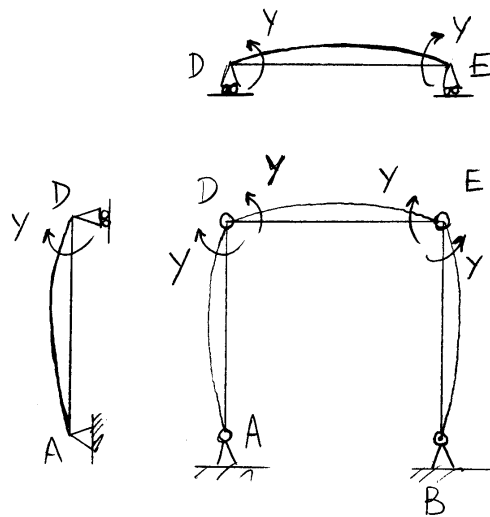


$$\varphi_{DE} = \frac{Xl}{6EJ}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{Xl}{3EJ}$$

$$\varphi_E = -\frac{Xl}{3EJ}$$

$$\xi_D = +\frac{Xl^2}{3EJ}$$

Coppie Y (punti D ed E fissi)

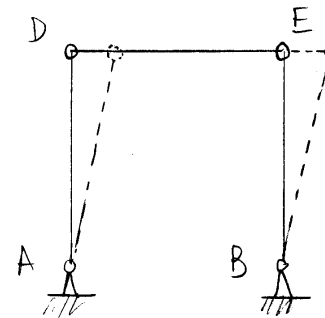
$$\begin{cases} \varphi_{DA} = -\frac{Yl}{3EJ} \\ \varphi_{DE} = \frac{Yl}{2EJ} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_{EB} = \frac{Yl}{3EJ} \\ \varphi_{ED} = -\frac{Yl}{2EJ} \end{cases}$$

Se i nodi D ed E vengono tenuti fissi in E si ha un incremento $\Delta\varphi_E$ pari a:

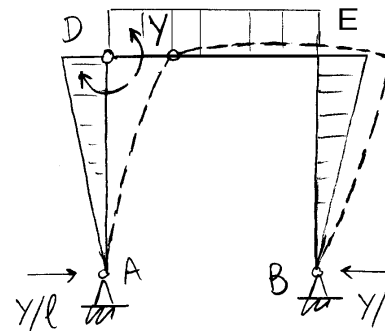
$$\Delta\varphi_E = \varphi_{EB} - \varphi_{ED} = \frac{5}{6} \frac{Yl}{EJ}$$

Coppie Y (ripristino della congruenza)

Il nodo E è rigido e tale $\Delta\varphi_E$ non può realizzarsi. Per ripristinare la congruenza occorre ruotare il tratto BE di $-\Delta\varphi_E$ attorno al punto B:



$$\begin{cases} \xi_D = \frac{5}{6} \frac{Yl^2}{EJ} \\ \varphi_{ED} = \varphi_{DE} = 0 \\ \varphi_{EB} = \varphi_{DA} = -\frac{5}{6} \frac{Yl}{EJ} \end{cases}$$

Coppie Y (globale)

$$\begin{cases} \varphi_{DE} = \frac{Yl}{2EJ} \\ \varphi_{DA} = -\frac{Yl}{3EJ} - \frac{5}{6} \frac{Yl}{EJ} \\ \quad = -\frac{7}{6} \frac{Yl}{EJ} \\ \varphi_E = -\frac{Yl}{2EJ} \\ \xi_D = +\frac{5}{6} \frac{Yl^2}{EJ} \end{cases}$$

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varphi_E^I = \varphi_E^{II} \\ \varphi_{DE} = \varphi_{DA} \end{cases} \begin{cases} \frac{Xl}{4EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} - \frac{Yl}{2EJ} \\ -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Xl}{6EJ} + \frac{Yl}{2EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} - \frac{7Yl}{6EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6X = ql^2 - 8X - 12Y \\ -ql^2 + 4X + 12Y = ql^2 - 8X - 28Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12Y + 14X = ql^2 \\ 40Y + 12X = 2ql^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6Y + 7X = \frac{ql^2}{2} \\ 10Y + 3X = \frac{ql^2}{2} \end{cases}$$

$$-4Y + 4X = 0 \Rightarrow \boxed{X = Y = \frac{ql^2}{26}}$$

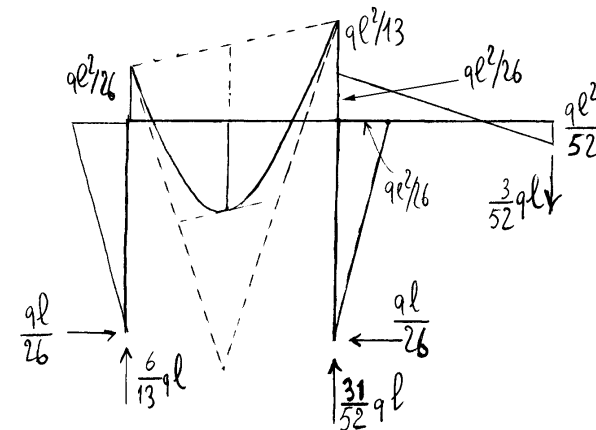
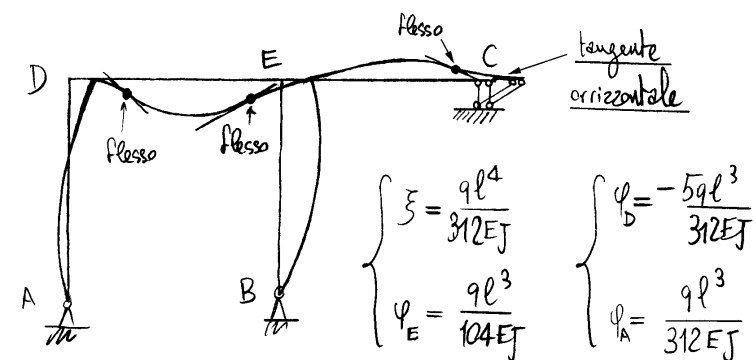
Spostamenti globali

$$\begin{aligned} \xi_D &= \frac{-ql^4}{24EJ} + \frac{ql^4}{3 \times 26EJ} + \frac{5ql^4}{6 \times 26EJ} = \frac{-ql^4}{24EJ} + \frac{7ql^4}{6 \times 26EJ} \\ &= \left(-\frac{1}{24} + \frac{7}{12 \times 13} \right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{-13 + 14}{8 \times 12 \times 13} \frac{ql^4}{EJ} \end{aligned}$$

$$\varphi_E = \frac{ql^3}{4 \times 26EJ}$$

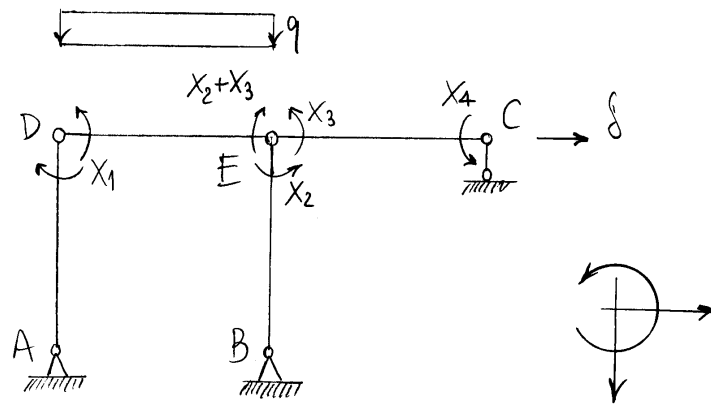
$$\varphi_D = -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql^3}{6 \times 26EJ} + \frac{ql^3}{2 \times 26EJ} = -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql^3}{3 \times 13} = -\frac{5}{24 \times 13} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_A = \frac{Yl}{6EJ} - \frac{\xi}{l} = \frac{\left(\frac{ql^2}{26}\right)l}{6EJ} - \frac{ql^3}{312EJ} = \frac{ql^3}{312EJ}$$

Diagramma del momento flettenteDeformata

6.2 Soluzione col metodo dei telai

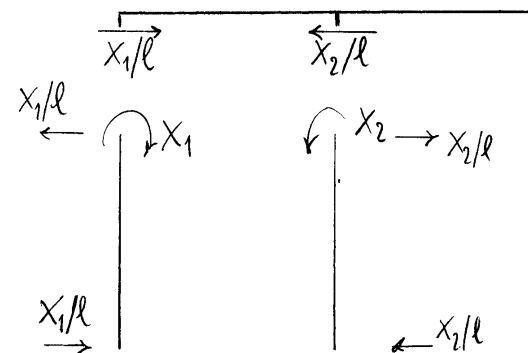
Struttura principale labile



5 incognite $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ statiche: } X_1, X_2, X_3, X_4 \\ 1 \text{ cinematica: } \delta \end{array} \right.$

5 equazioni $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ di congruenza: } \varphi_{DA} = \varphi_{DE}, \varphi_{ED} = \varphi_{EB} \\ \varphi_{ED} = \varphi_{EC}, \varphi_C = 0 \\ 1 \text{ di equilibrio: traslazione orizzontale } \delta \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \varphi_{DA} &= -\frac{X_1 l}{3EJ} - \frac{\delta}{l} \\ \varphi_{DE} &= \frac{X_1 l}{3EJ} + \frac{(X_2 + X_3)l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{ED} &= -\frac{(X_2 + X_3)l}{3EJ} - \frac{X_1 l}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{EB} &= \frac{X_2 l}{3EJ} - \frac{\delta}{l} \\ \varphi_{EC} &= \frac{X_3 l}{3EJ} - \frac{X_4 l}{6EJ} \\ \varphi_C &= -\frac{X_3 l}{6EJ} + \frac{X_4 l}{3EJ} \end{aligned}$$



equilibrio:

$$\boxed{X_1 = X_2}$$

Sistema risolvibile

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ 4X_1 + X_2 + X_3 + \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ X_1 + 4X_2 + 2X_3 - \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 = \frac{ql^2}{4} \\ X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = X_2 \\ X_3 = 2X_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad 5X_2 + 2X_4 + \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ \textcircled{2} \quad \begin{cases} 5X_2 + 4X_4 - \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ 3X_2 + 7X_4 = \frac{ql^2}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: 2X_4 = \frac{12EJ}{l^2} \delta \Rightarrow \delta = \frac{X_4 l^2}{6EJ}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad 5X_2 + 3X_4 = \frac{ql^2}{4} \\ \textcircled{2} \quad 3X_2 + 7X_4 = \frac{ql^2}{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: 2X_2 - 4X_4 = 0 \Rightarrow X_2 = 2X_4$$

$$13X_4 = \frac{ql^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} X_4 = \frac{1}{52} ql^2 \\ X_1 = X_2 = \frac{1}{26} ql^2 \\ X_3 = \frac{1}{26} ql^2 \\ X_2 + X_3 = \frac{1}{13} ql^2 \\ \delta = \frac{1}{312} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$