

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE QUINTA

Raccolta di esercizi

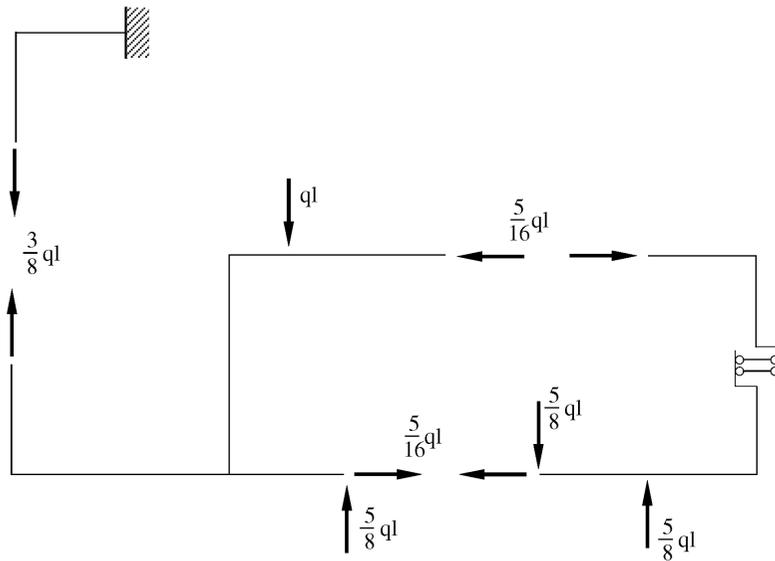
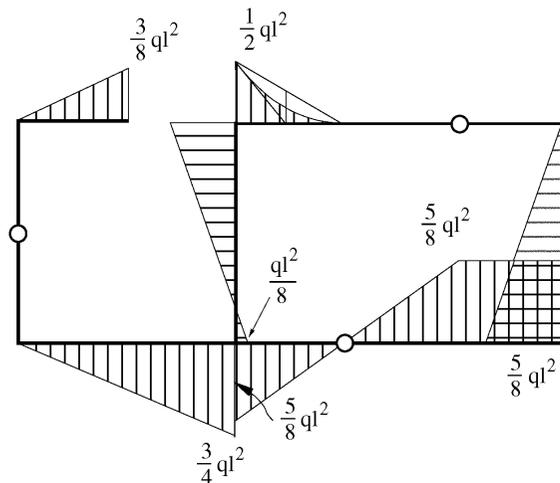
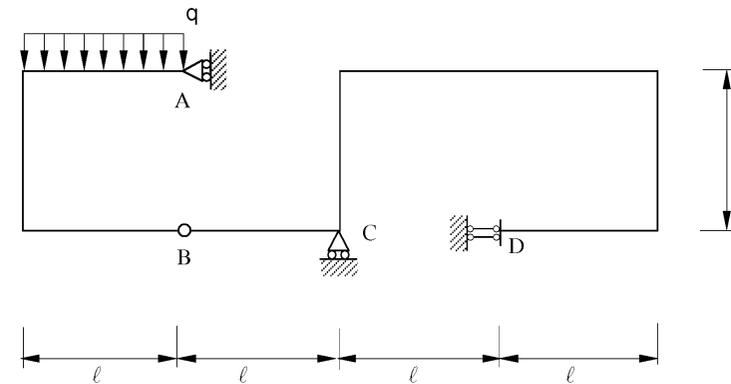
Corsi di Laurea triennali in
Ingegneria Civile ed Ambientale curr. Ambientale, Civile, Edile
Ingegneria Industriale curr. Materiali, Meccanica
Ingegneria Navale

Trieste, 28 agosto 2006

Indice

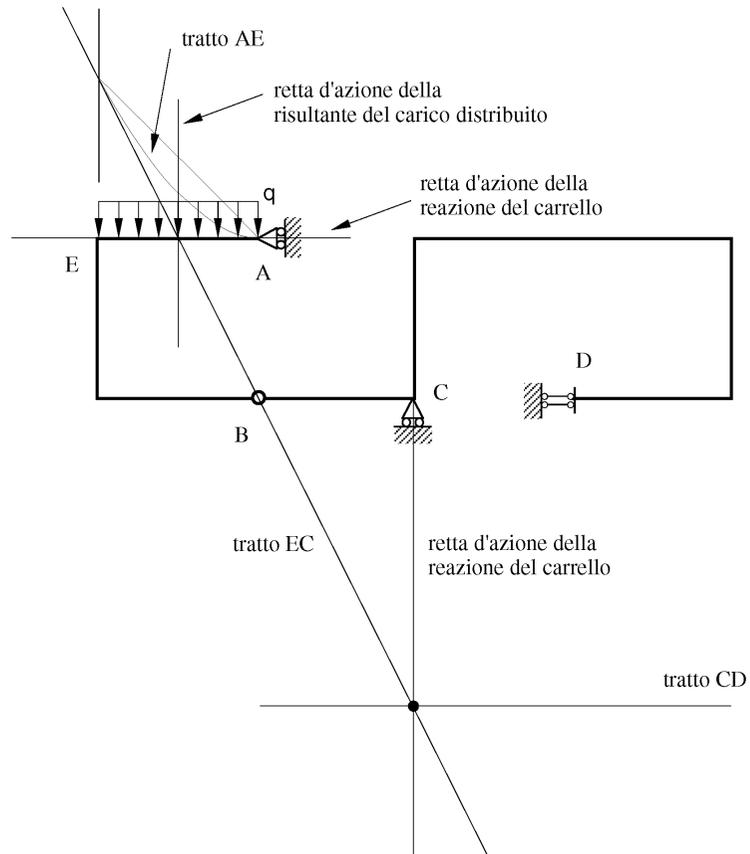
1 Esercizi su sistemi di travi isostatiche	3
1.1 Esercizio 1	3
1.2 Esercizio 2	4
1.3 Esercizio 3	7
1.4 Esercizio 4	9
1.5 Esercizio 5	11
1.6 Esercizio 6	12
1.7 Esercizio 7	15
1.8 Esercizi proposti	17
2 Esercizi sulle sollecitazioni semplici	23
2.1 Esercizio 8	23
2.2 Esercizio 9	24
2.3 Esercizio 10	25
2.4 Esercizio 11	28
2.5 Esercizio 12	31
2.6 Esercizio 13	33
2.7 Esercizio 14	35
2.8 Esercizio 15	39
2.9 Esercizi proposti	42
3 Esercizi su sistemi di travi iperstatiche	45
3.1 Esercizio 16	45
3.2 Esercizio 17	46
3.3 Esercizio 18	48
3.4 Esercizio 19	50
3.5 Esercizio 20	51
3.6 Esercizio 21	53
3.7 Esercizio 22	56
3.8 Esercizio 23	59
3.9 Esercizio 24	60
3.10 Esercizio 25	63

3.11 Esercizio 26	64
3.12 Esercizio 27	66
3.13 Esercizio 28	69
3.14 Esercizio 29	73
3.15 Esercizio 30	75
3.16 Esercizio 31	78
3.17 Esercizi proposti	80

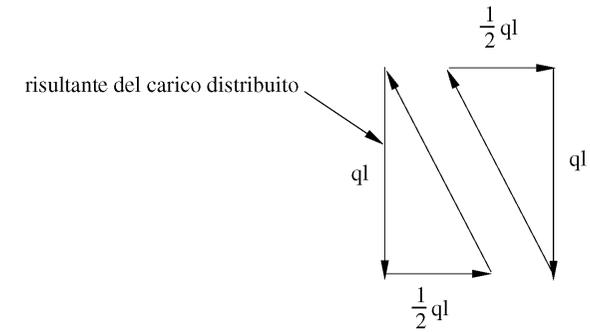
Reazioni interne ed esterneDiagramma del momento flettente**1.2 Esercizio 2**

- Verificare l'isostaticità della struttura;
- Definire la curva delle pressioni;
- Determinare le reazioni interne ed esterne;
- Impostare formalmente il calcolo della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera B utilizzando il principio dei lavori virtuali, e disegnare e quotare i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioni



Poligoni delle forze



Reazioni esterne ed interne

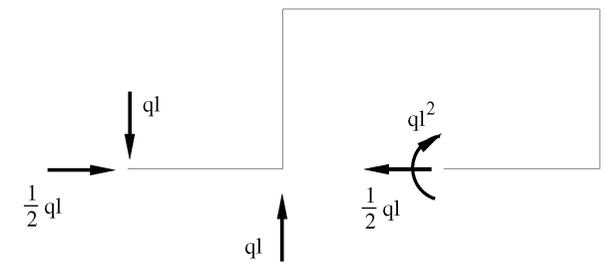
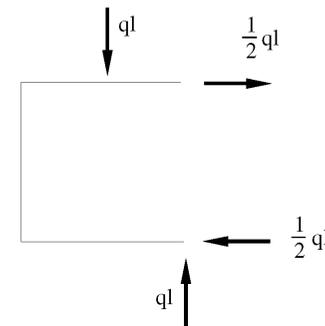
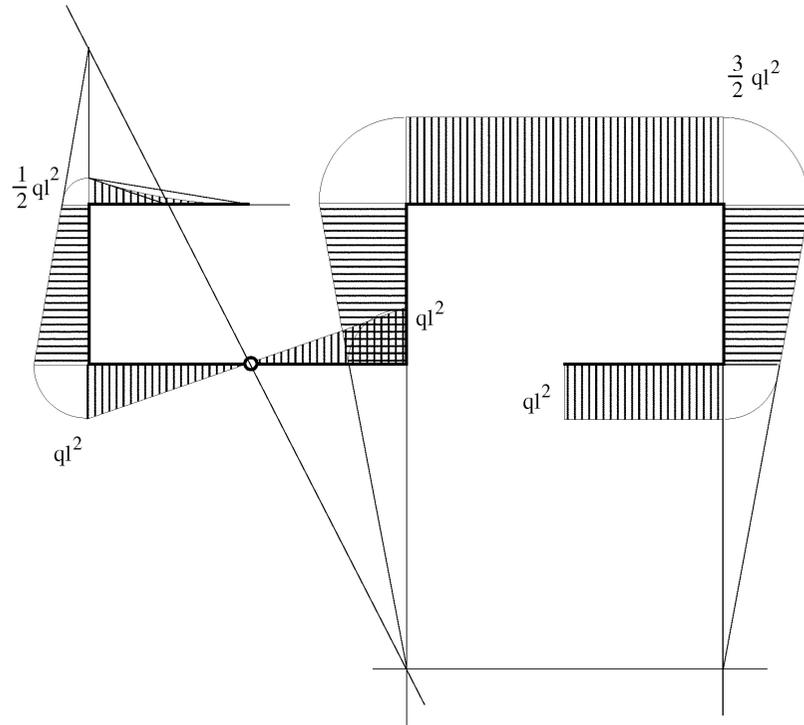
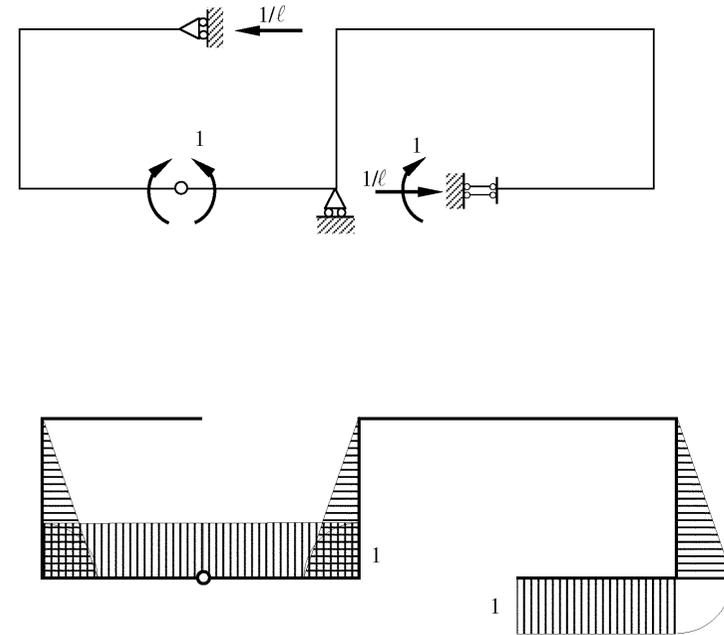
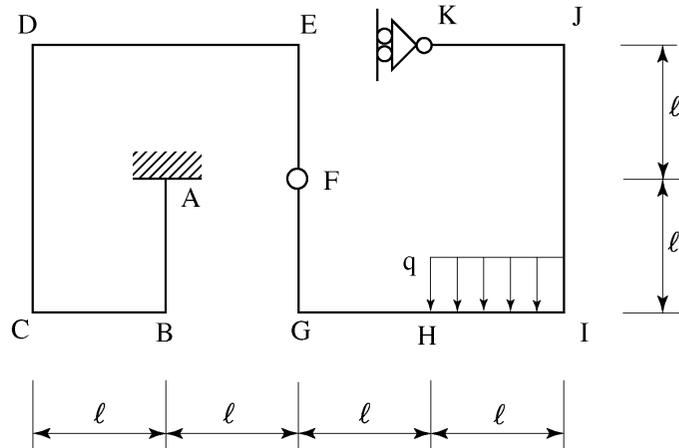
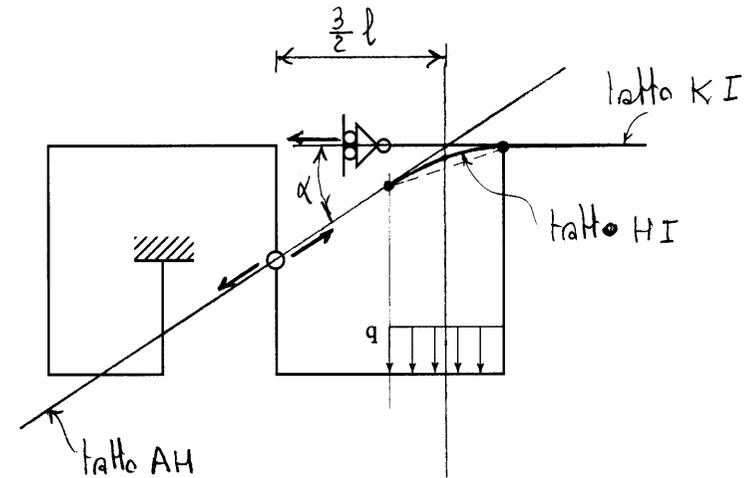


Diagramma del momentoSchema delle forze per il calcolo della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera B

1.3 Esercizio 3

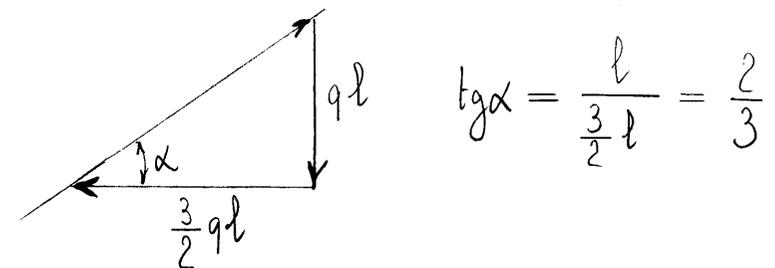


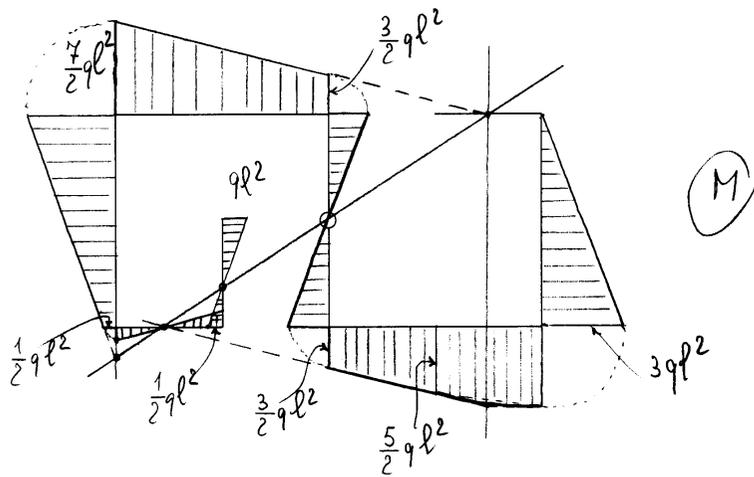
curva delle pressioni



- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare la curva delle pressioni;
- 3) Determinare graficamente le reazioni vincolari e quantificarle;
- 4) Tracciare il diagramma dei momenti facendo uso dei punti di nullo e quarto;
- 5) Tracciare i diagrammi quotati del taglio e della forza normale;
- 6) Determinare il momento in corrispondenza dell'incastro utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 7) Impostare il calcolo dello spostamento del carrello facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo.

Poligono delle forze





Sistema delle forze (sistema fittizio)

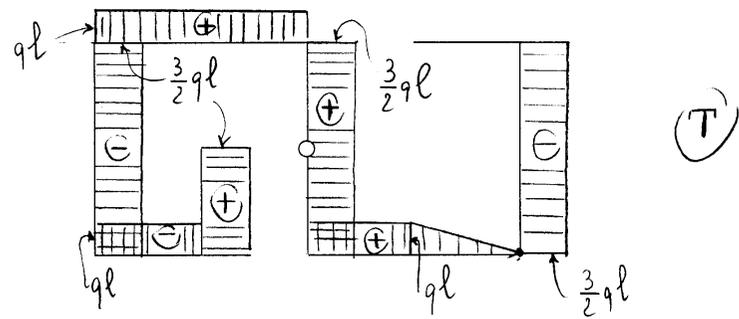
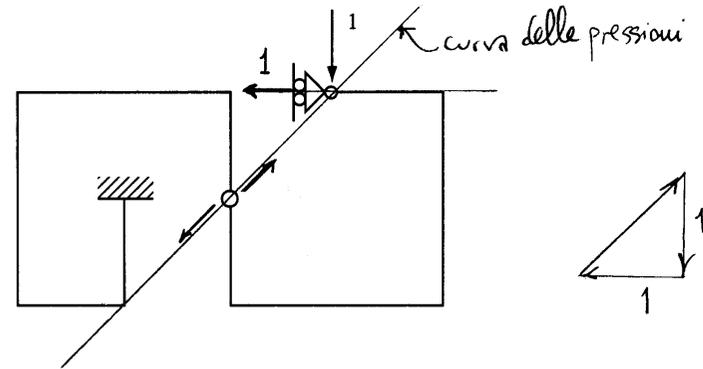
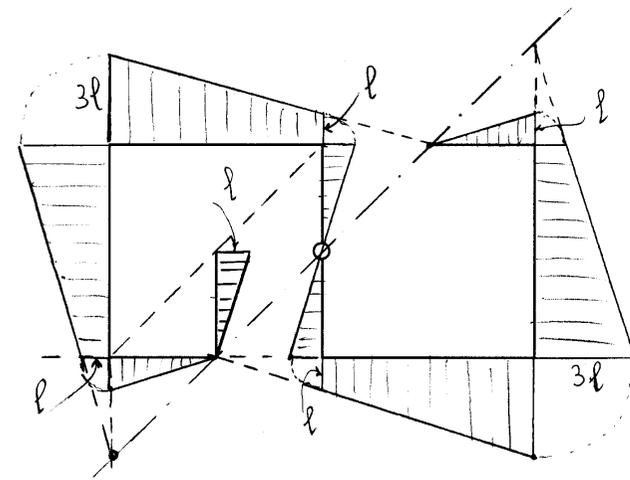
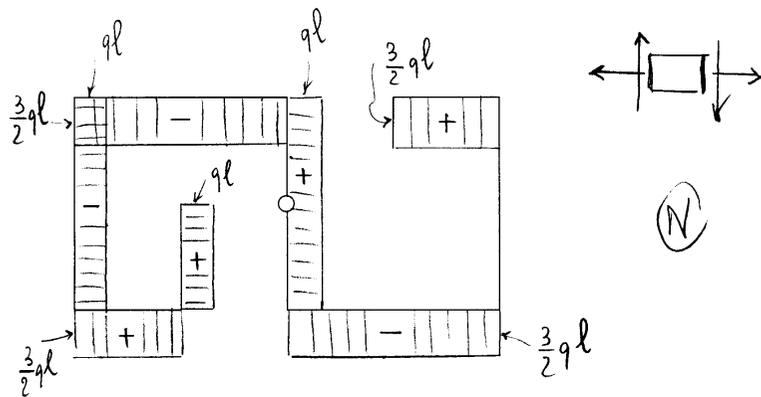
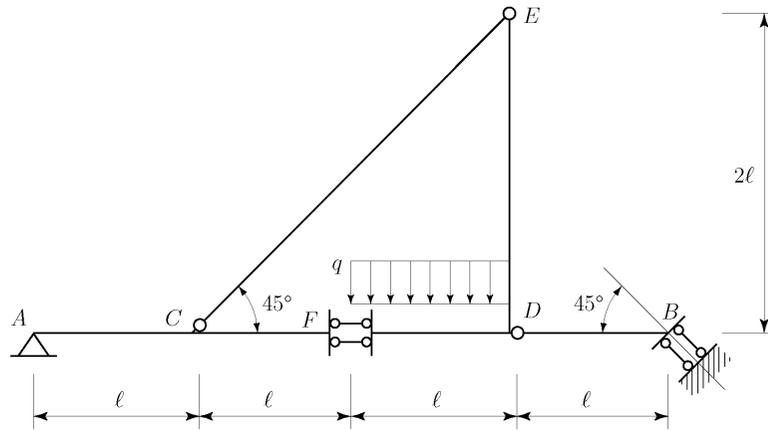


Diagramma del momento nel sistema delle forze

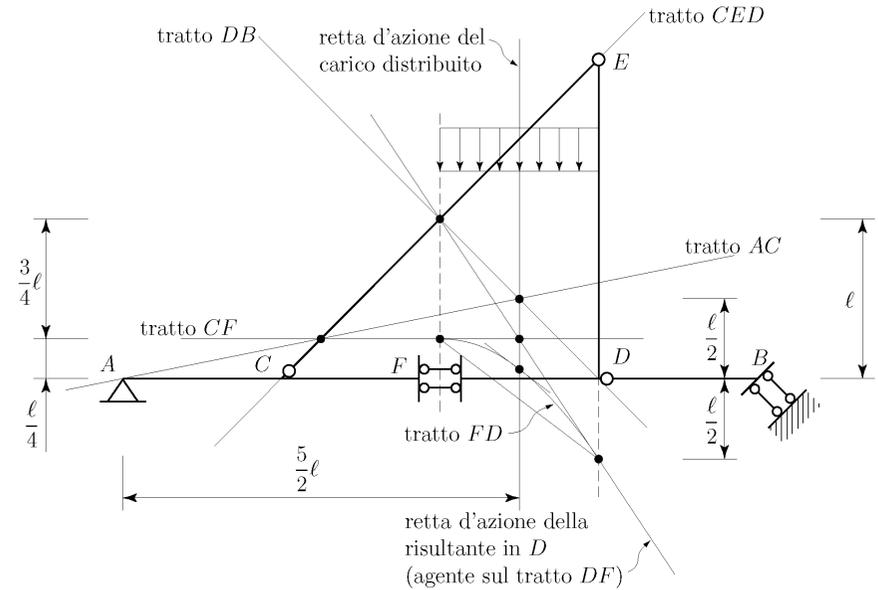


1.4 Esercizio 4

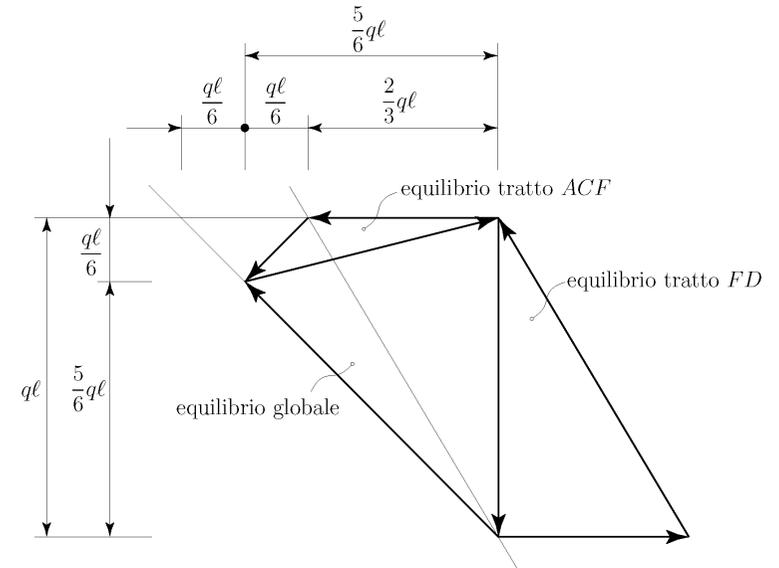


- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 5) Determinare lo spostamento relativo (dovuto alla deformazione della struttura) in corrispondenza del doppio pendolo in F facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, nell'ipotesi che il pendolo CE sia indeformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

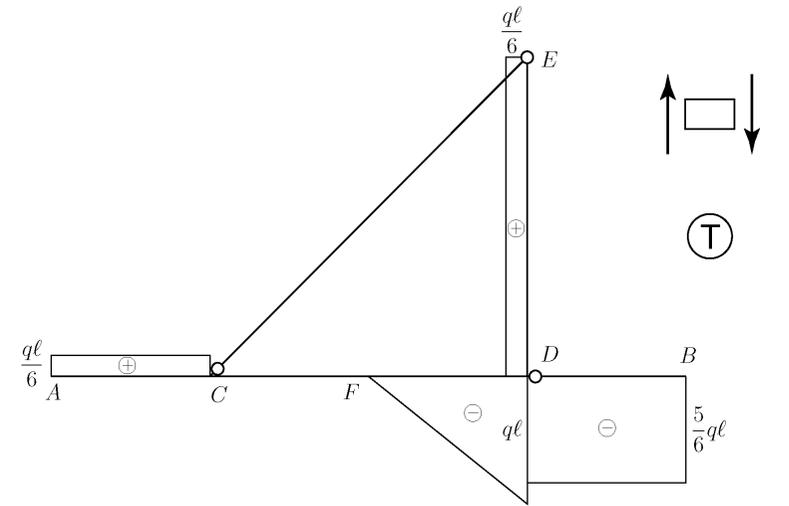
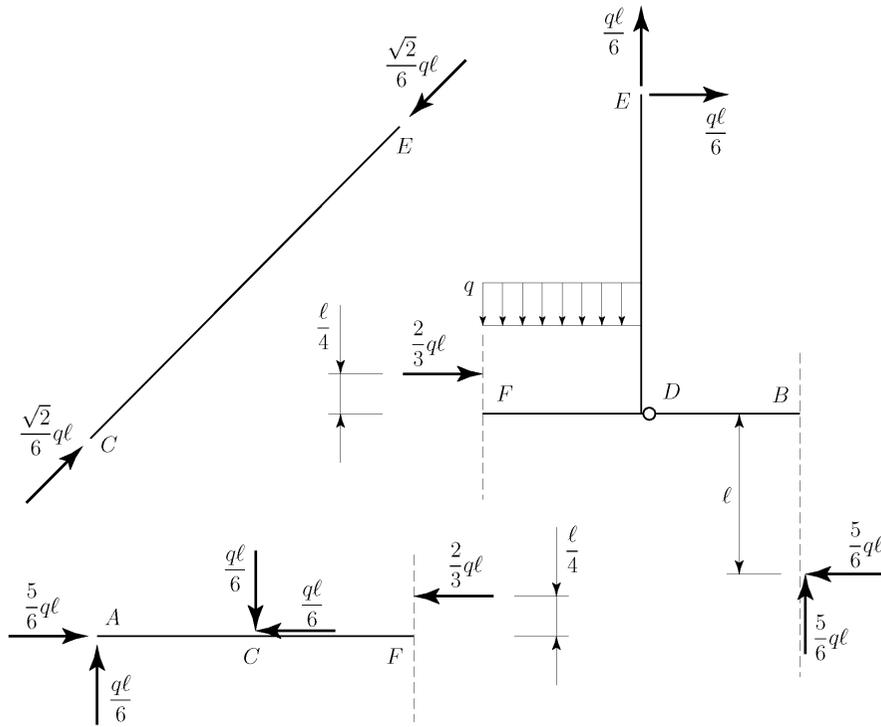
Curva delle pressioni



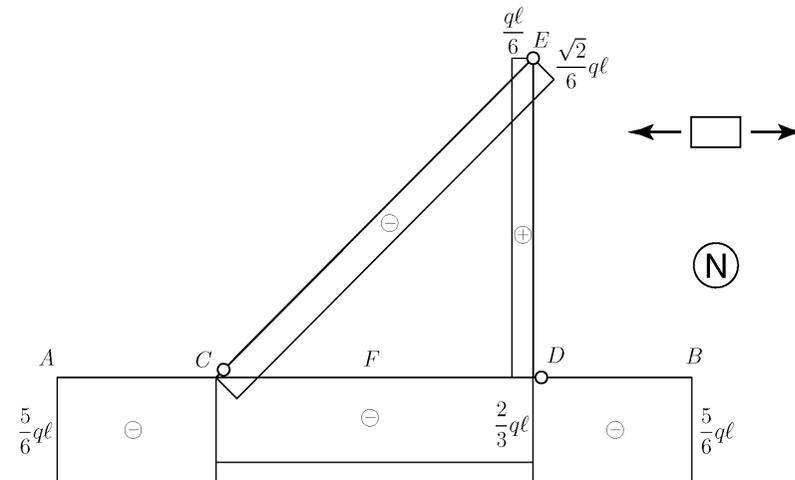
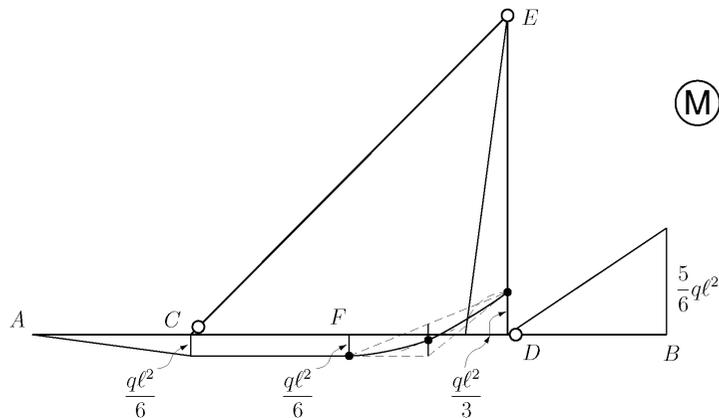
Poligoni delle forze



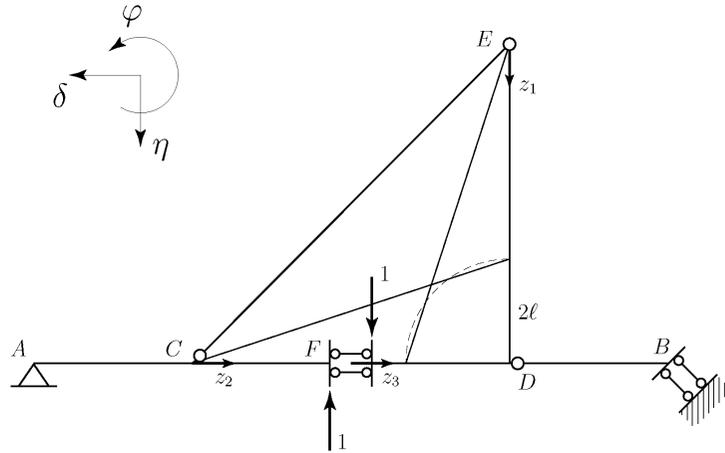
Reazioni esterne ed interne



Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione



Calcolo dello spostamento relativo in F

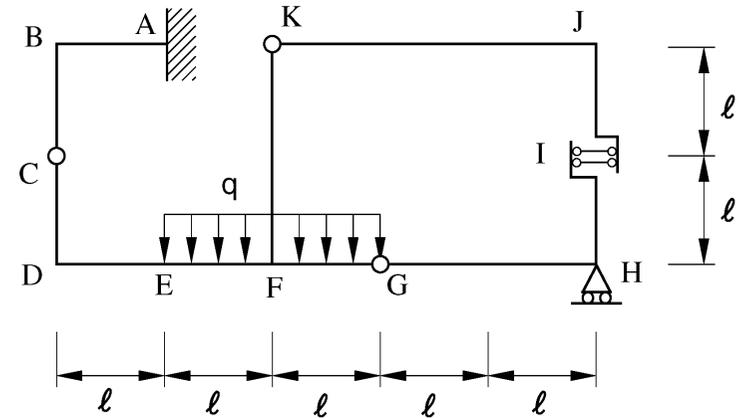


$$L_e = \eta_{FD} - \eta_{FC}$$

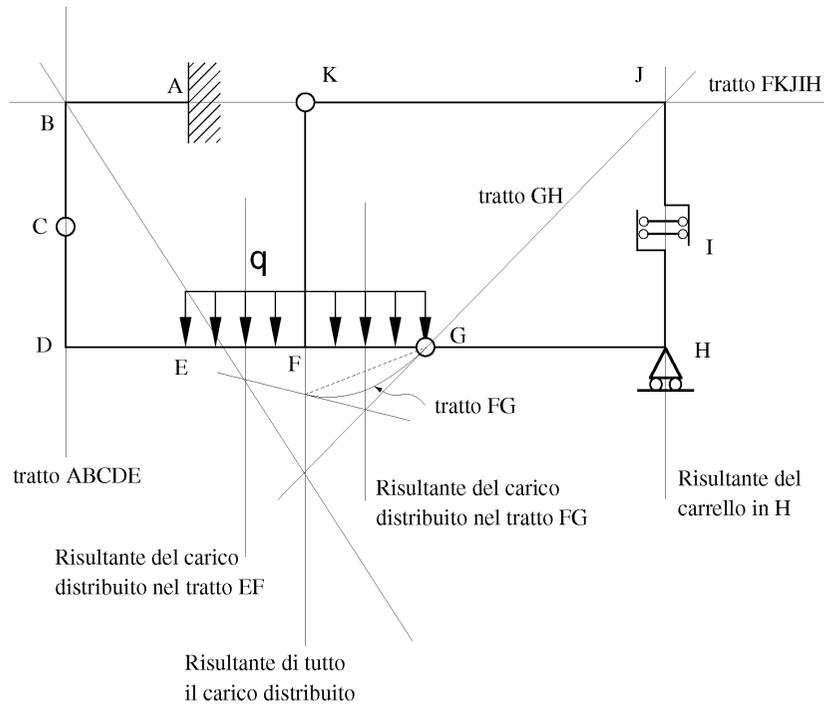
$$L_i = \int_0^{2l} (z_1) \left(\frac{ql}{6} z_1 \right) \frac{dz_1}{EJ} - \int_0^l (z_2) \left(\frac{ql^2}{6} \right) \frac{dz_2}{EJ} - \int_0^l (\ell + z_3) \left(\frac{ql^2}{6} - \frac{qz_3^2}{2} \right) \frac{dz_3}{EJ}$$

$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \frac{q\ell^4}{EJ} = \frac{29}{72} \frac{q\ell^4}{EJ}$$

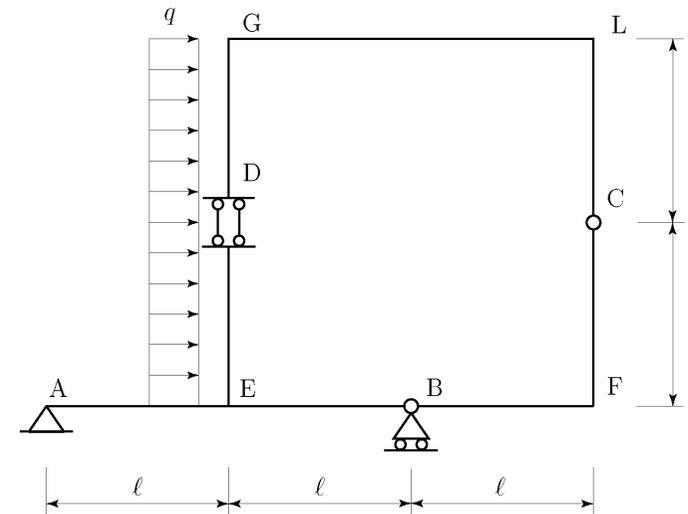
1.5 Esercizio 5



- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 4) Determinare lo spostamento relativo (dovuto alla deformazione della struttura) in corrispondenza del doppio pendolo in I facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioni

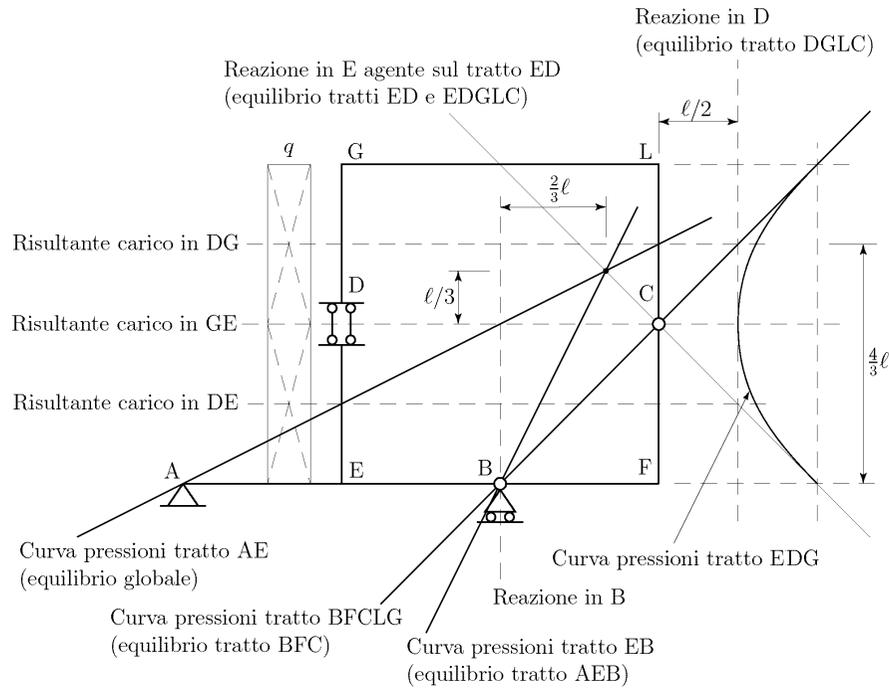
Nel tratto EF la curva delle pressioni degenera in un fascio di rette verticali

1.6 Esercizio 6

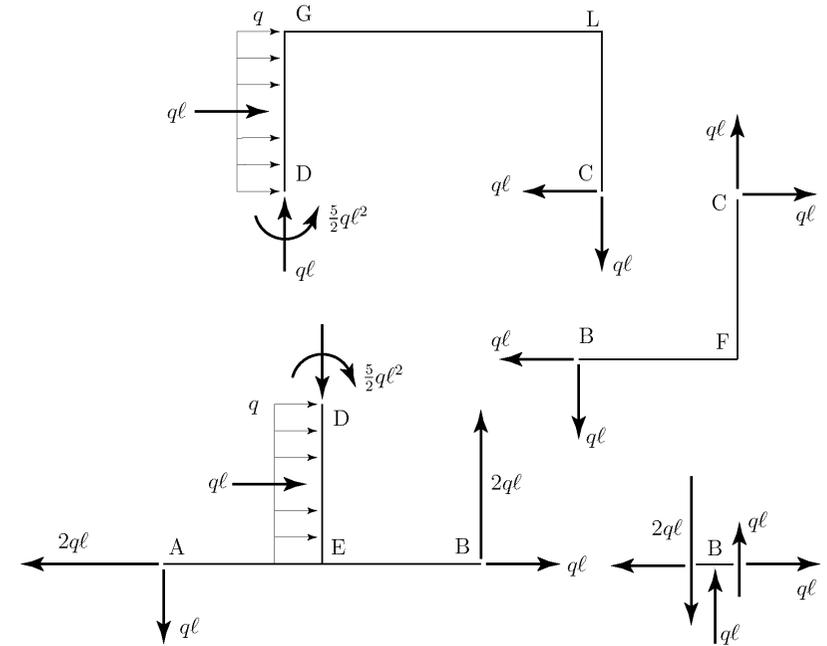
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico ripartito costante sul montante di sinistra:

- 1) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Disegnare la curva delle pressioni;
- 4) Impostare il calcolo della rotazione relativa in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando i diagrammi necessari a tal fine.

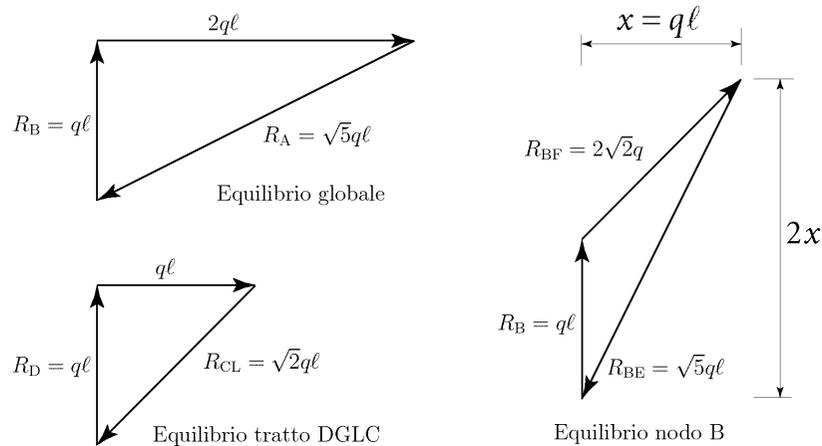
Curva delle pressioni



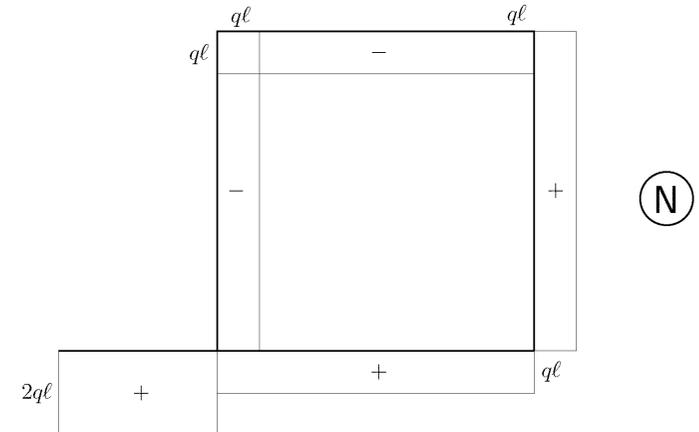
Reazioni esterne ed interne



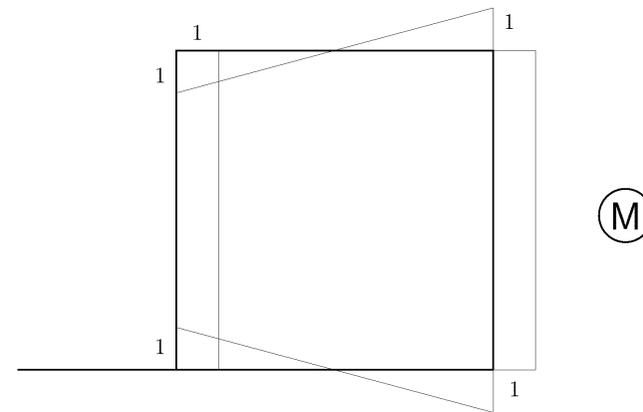
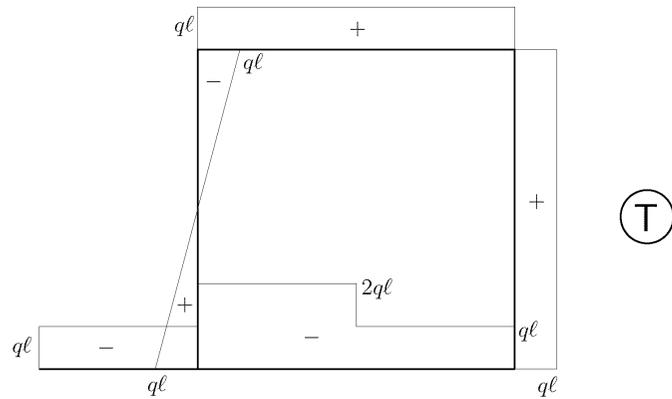
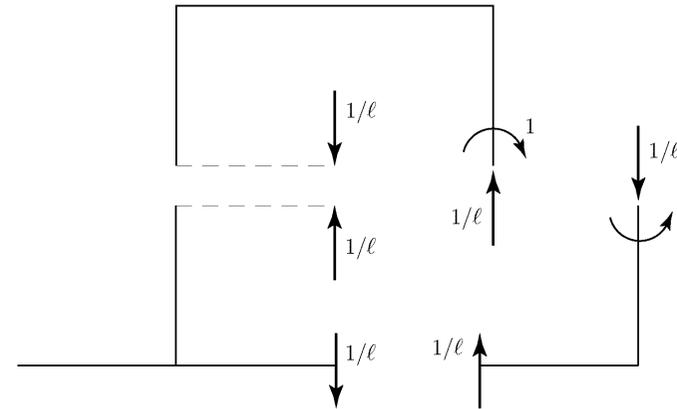
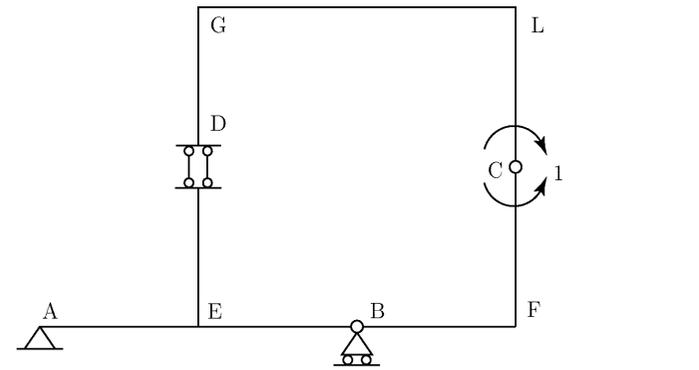
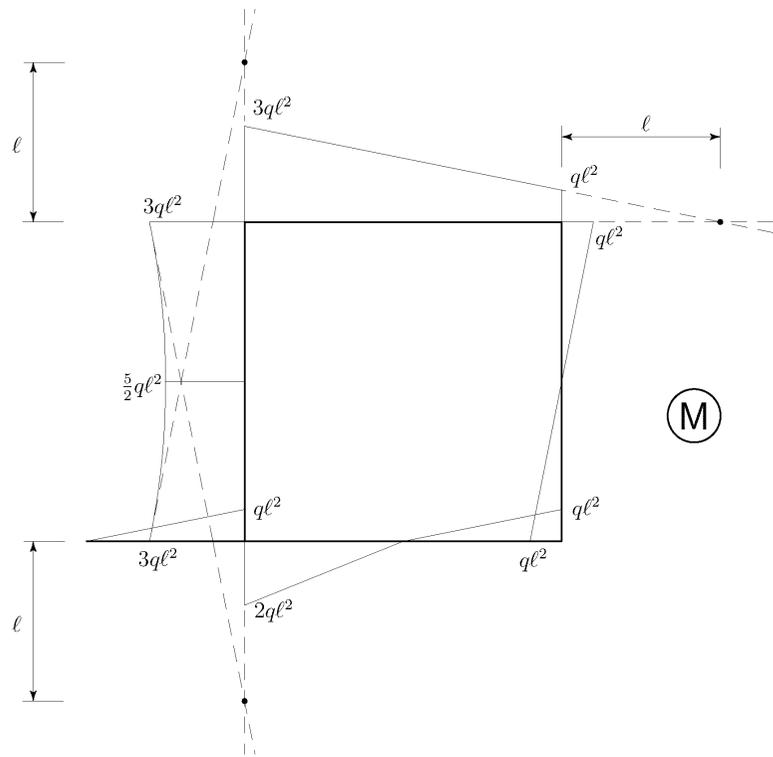
Poligoni delle forze



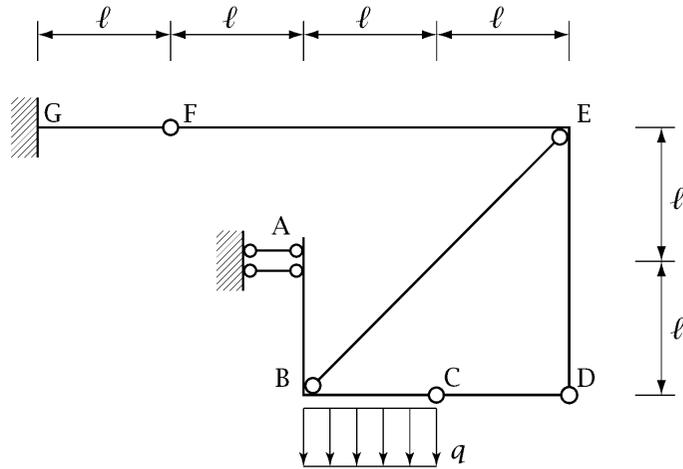
Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione



Schema delle forze per il calcolo della rotazione relativa in C



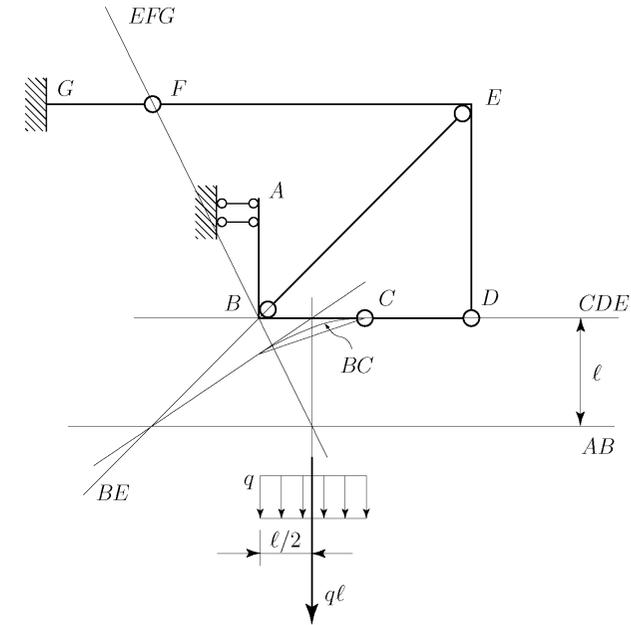
1.7 Esercizio 7



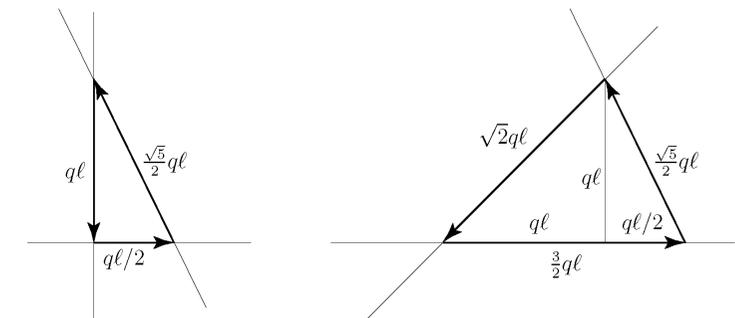
Data la struttura di figura, soggetta ad un carico ripartito uniformemente lungo il tratto BC:

1. Verificare l'isostaticità della struttura
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Determinare la rotazione del pendolo BE (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili nell'ipotesi che il pendolo BE sia deformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.
5. Disegnare la curva delle pressioni.

Curva delle pressioni



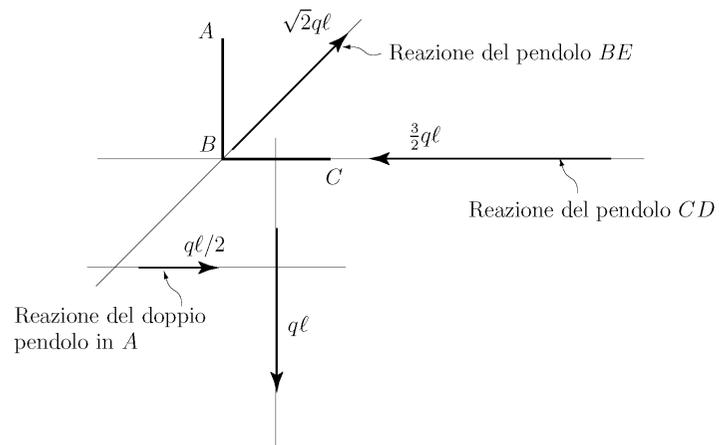
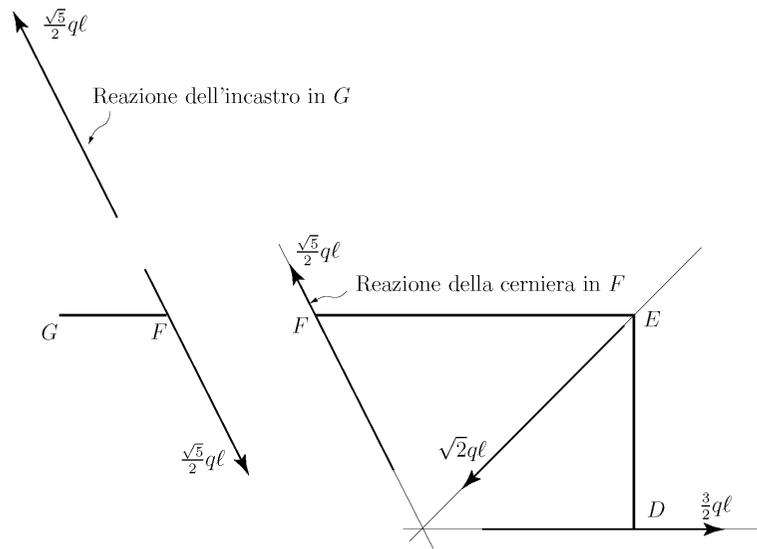
Poligoni delle forze



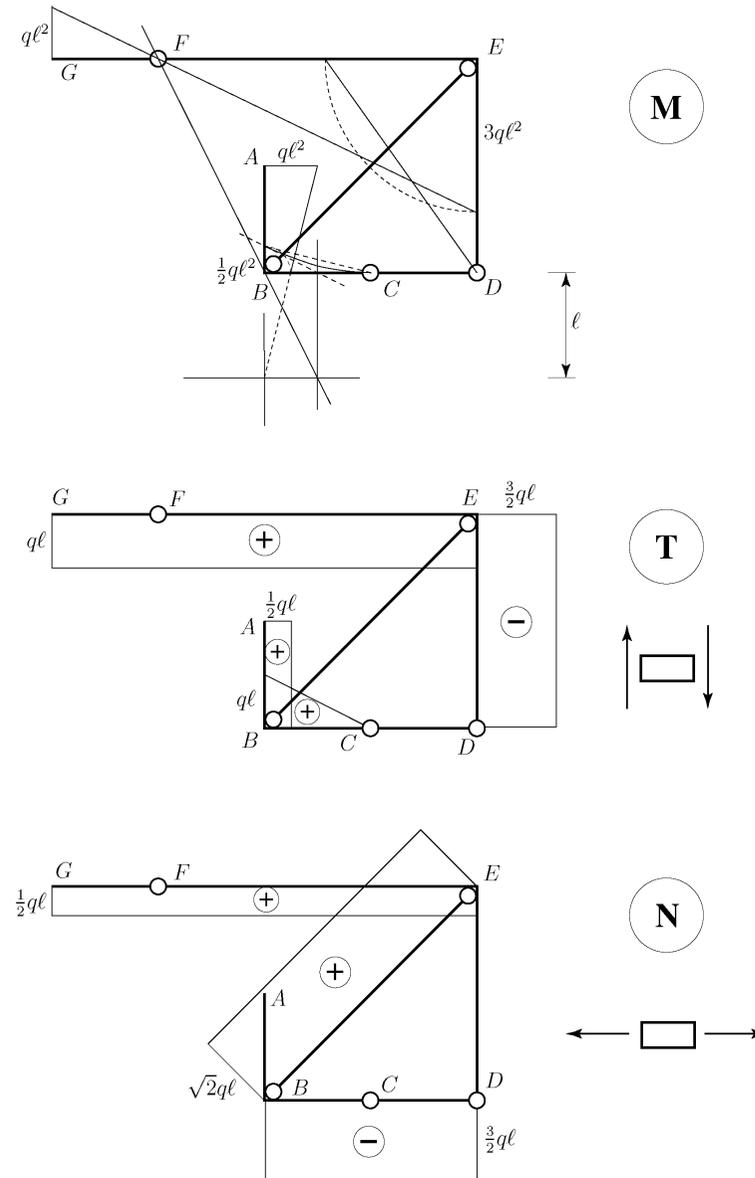
Equilibrio del tratto ABCDEF

Equilibrio del tratto DEF

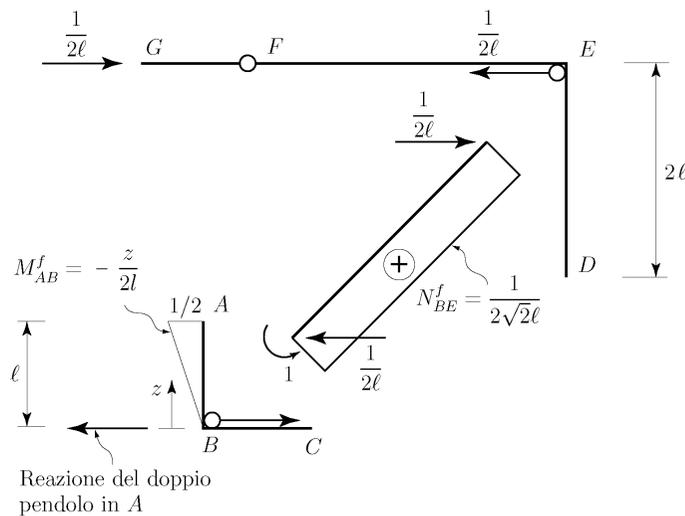
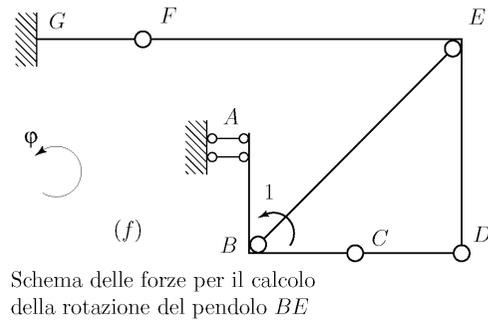
Reazioni esterne ed interne



Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

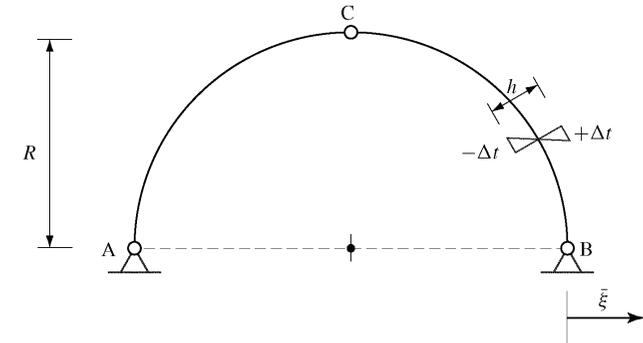


Calcolo della rotazione del pendolo BE



$$\varphi_{BE} = \frac{1}{EA} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\ell} \right) (\sqrt{2}q\ell)(2\sqrt{2}\ell) + \int_0^\ell \frac{1}{EJ} \left(-\frac{z}{2\ell} \right) \left[\frac{q\ell}{2}(z + \ell) \right] dz \quad \frac{\sqrt{2}q\ell}{EA} - \frac{5}{24} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

1.8 Esercizi proposti



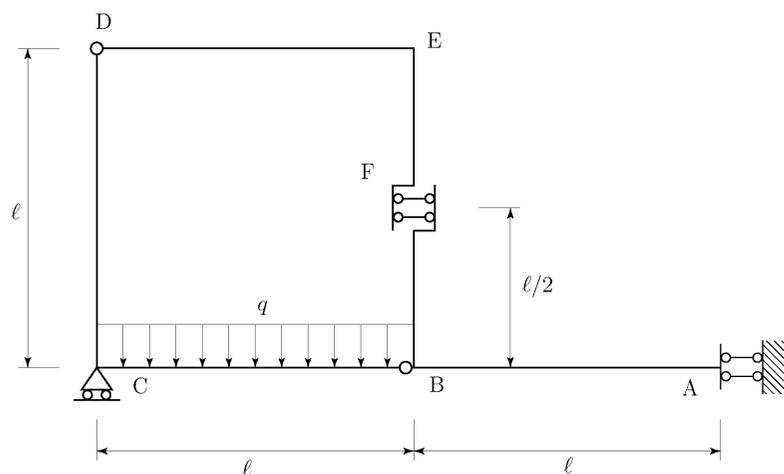
Dato l'arco circolare in figura, soggetto ad una distorsione termica nel tratto CB e ad un cedimento vincolare anelastico in B, calcolare la rotazione relativa in corrispondenza della cerniera C utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Nel seguito sono proposti dei sistemi di travi isostatiche senza che ne sia riportata la relativa soluzione.

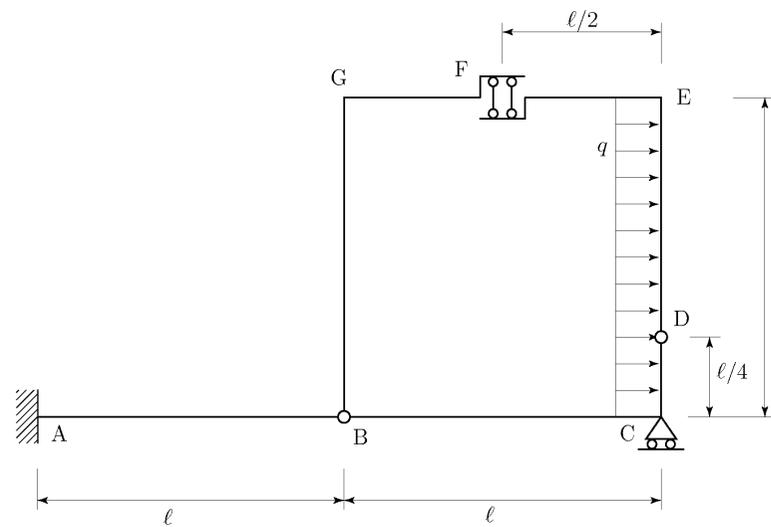
Le domande tipiche sono le seguenti:

- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale.

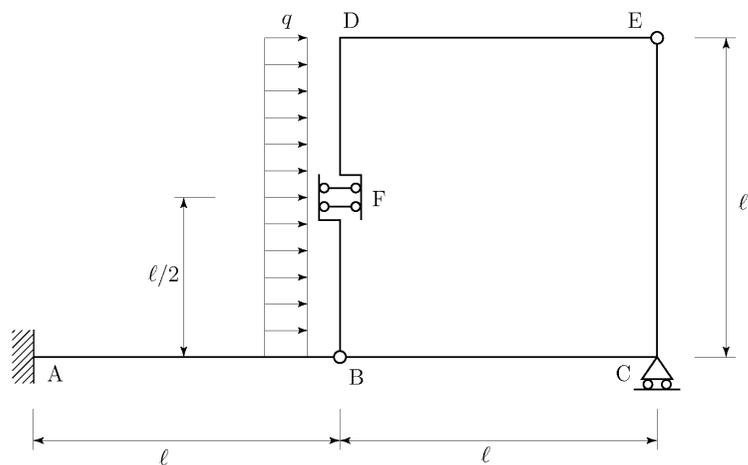
Inoltre a fianco di ogni schema è indicato lo spostamento, assoluto o relativo, di un nodo della struttura da calcolarsi utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



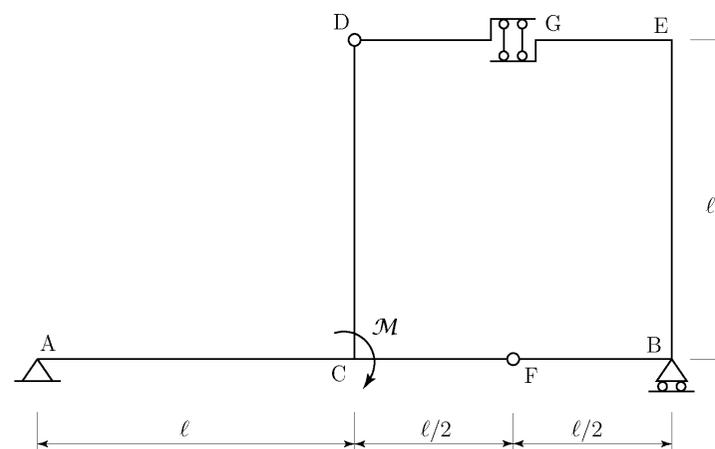
Calcolare lo spostamento del nodo A



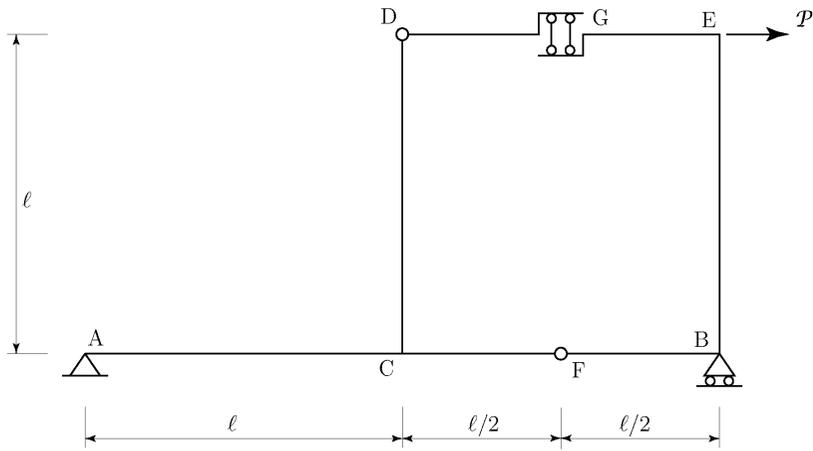
Calcolare la rotazione del nodo F



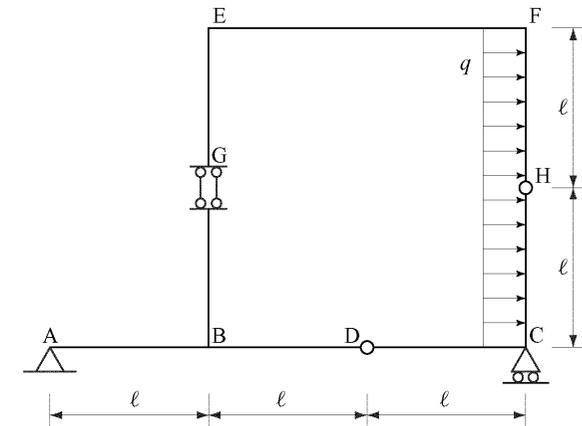
Calcolare la rotazione del nodo D



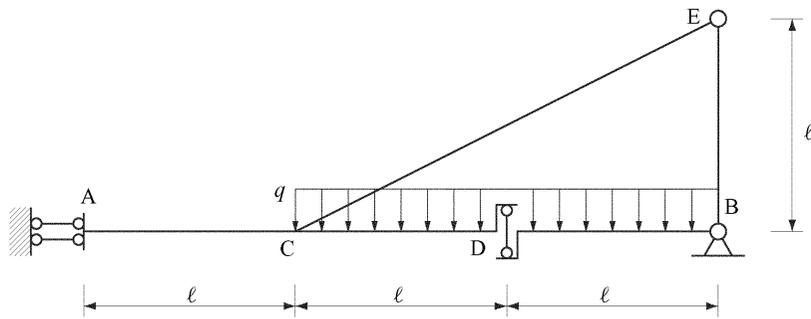
Calcolare lo spostamento orizzontale dei punti della travata GE



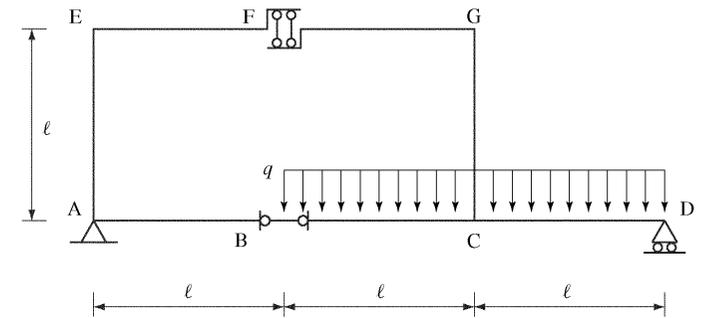
Calcolare la rotazione del nodo C



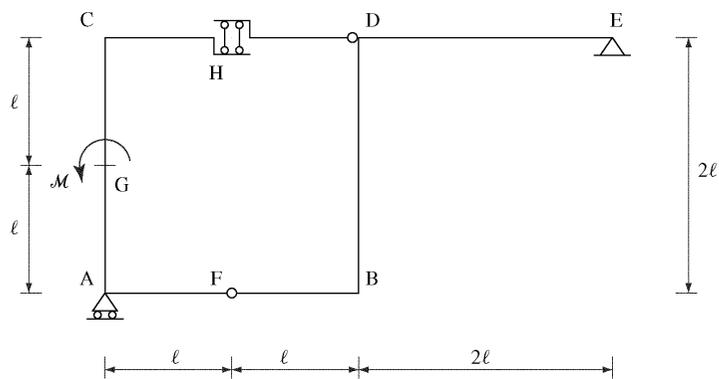
Determinare lo spostamento relativo in corrispondenza del doppio pendolo G



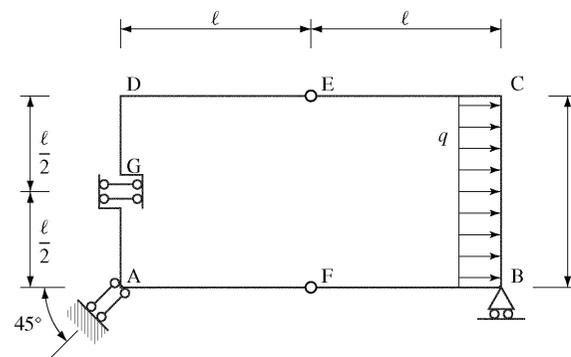
Determinare la rotazione del pendolo BE (dovuta alla deformazione della struttura) nell'ipotesi che il pendolo BE sia indeformabile assialmente.



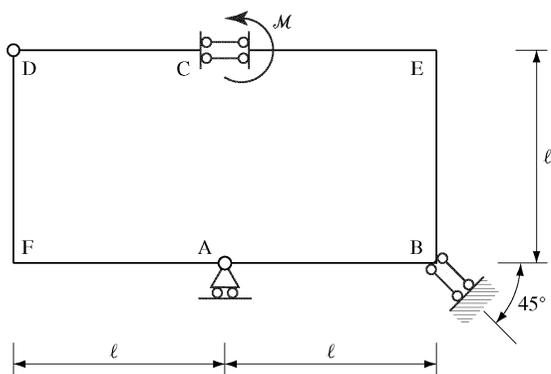
Determinare la rotazione relativa in B



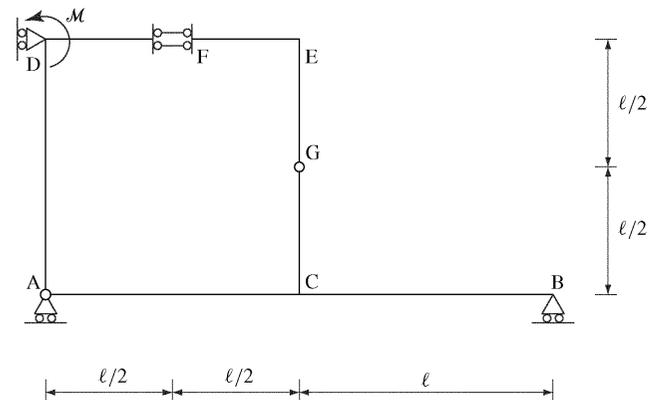
Calcolare lo spostamento orizzontale relativo nella sezione H



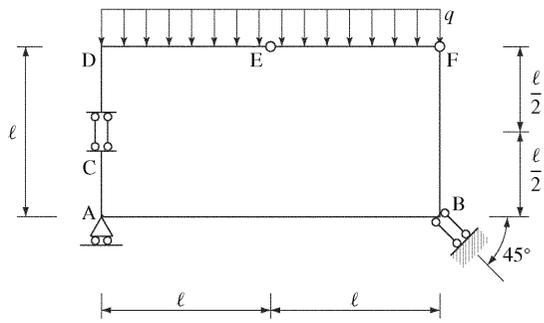
Calcolo lo spostamento del punto A



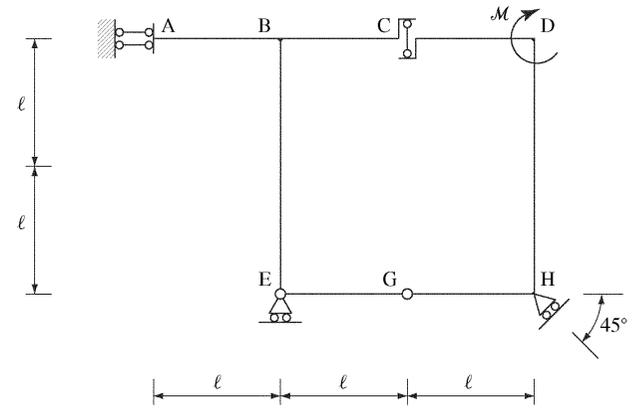
Calcolare lo spostamento verticale del punto D



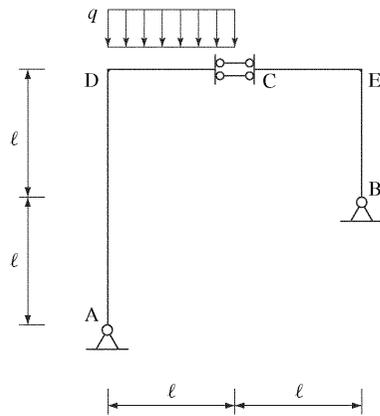
Calcolare lo spostamento verticale relativo nella sezione F



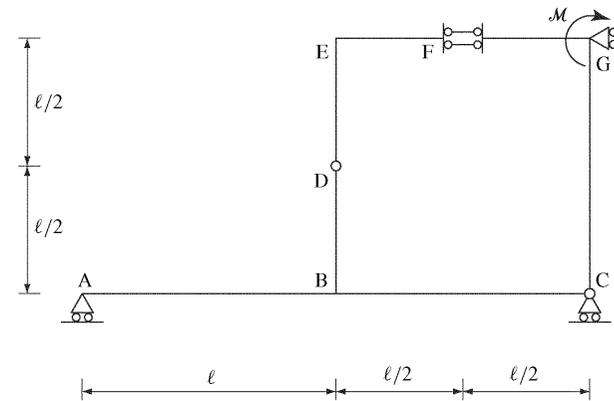
Calcolare lo spostamento orizzontale relativo nella sezione C



Calcolare lo spostamento verticale nella sezione G



Calcolare lo spostamento verticale relativo nella sezione C

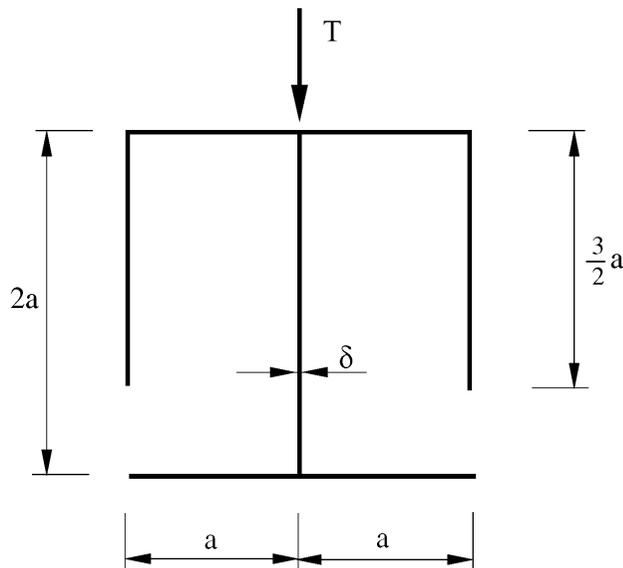


Calcolare lo spostamento verticale relativo nella sezione F

Capitolo 2

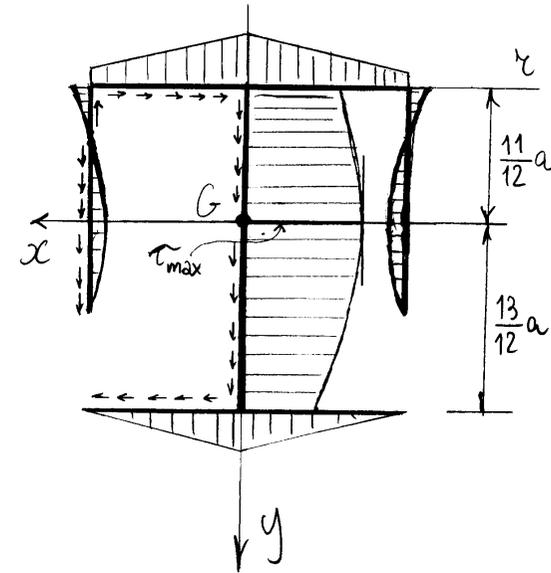
Esercizi sulle sollecitazioni semplici

2.1 Esercizio 8



Sezione sottile in acciaio
 $a=90 \text{ mm}$
 $\delta=6 \text{ mm}$
 $T=100 \text{ kN}$

- Disegnare il diagramma delle tensioni tangenziali;
- Determinare la tensione ideale massima.



$$A = 9\delta a$$

$$J_x = 5.3542\delta a^3$$

$$S_x = \frac{33}{4}\delta a^2$$

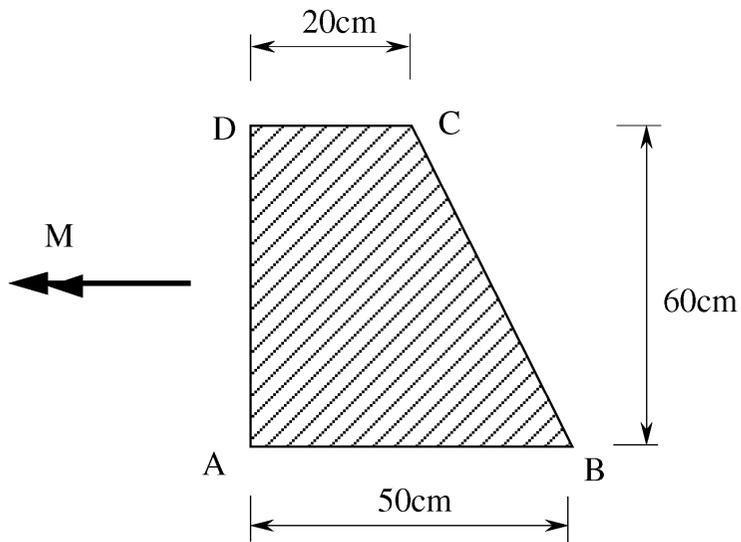
$$S_{x_{max}}^* = 2.7535\delta a^2$$

$$\tau_{max} = \frac{T S_{x_{max}}^*}{J_x \delta} = 0.5143 \frac{T}{\delta a} = 4.6284 \frac{T}{A}$$

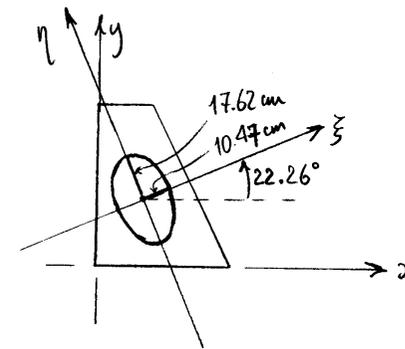
$$\tau_{max} = 0.5143 \frac{1 \times 10^5}{6 \times 90} = 95.24 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_{max} = 165.95 \text{ N/mm}^2$$

2.2 Esercizio 9



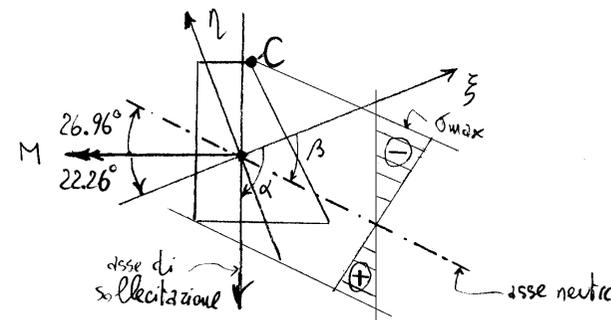
- 1) Determinare il riferimento principale baricentrico
- 2) Determinare l'asse neutro della flessione
- 3) Disegnare il diagramma delle tensioni normali, individuare il punto dove la tensione normale è massima in modulo ed infine scrivere la formula che determina la massima tensione normale



$$\begin{aligned} A &= 2100 \text{ cm}^2 \\ S_x &= 54000 \text{ cm}^3 \\ S_y &= 39000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_G = 18.57 \text{ cm} \\ y_G = 25.71 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 651948 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 230194 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

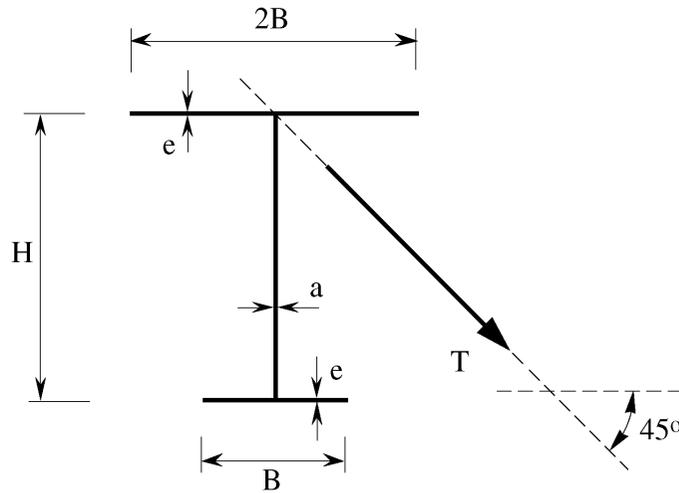


C è il punto più sollecitato (compressione):

$$\sigma_c = -\frac{M \cos(22.26^\circ)}{J_\xi} \eta_c - \frac{M \sin(22.26^\circ)}{J_\eta} \xi_c$$

$$\alpha = -112.26^\circ \implies \beta = \arctan\left\{-\frac{J_\xi}{J_\eta \tan \alpha}\right\} = -49.22^\circ$$

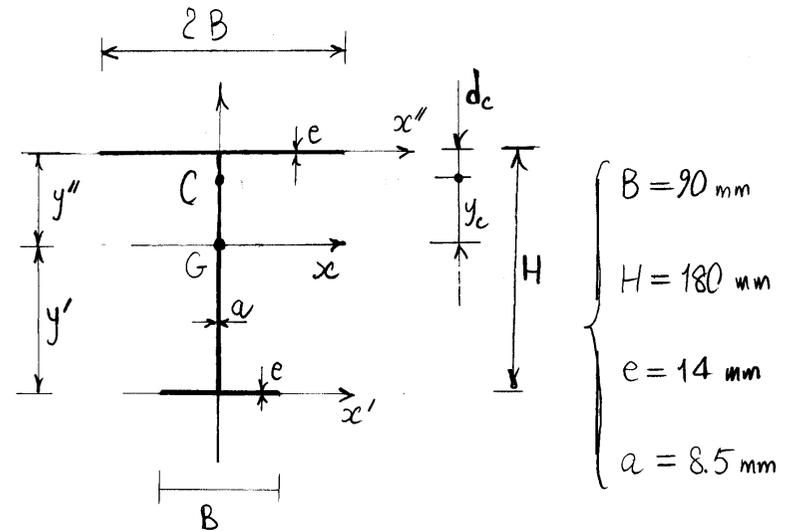
2.3 Esercizio 10



Sezione sottile in acciaio

- T = 50 KN
- H = 180 mm
- B = 90 mm
- a = 8.5 mm
- e = 14 mm

- 1) Determinare la posizione del centro di taglio, facendo uso della soluzione di Jourawski;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
- 3) Determinare la tensione ideale massima.

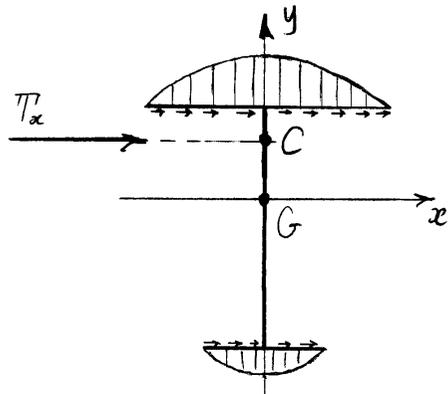


$$\left\{ \begin{aligned} S_{x'} &= 2eBH + a\frac{H^2}{2} = 591300 \text{ mm}^3 \\ A &= 3eB + aH = 5310 \text{ mm}^2 \\ y' &= 111.36 \text{ mm}, \quad y'' = H - y' = 68.64 \text{ mm} \end{aligned} \right.$$

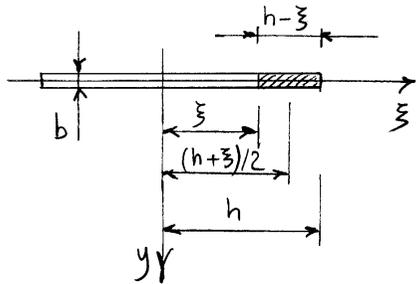
$$\left\{ \begin{aligned} J_x &= 2eBy''^2 + eBy'^2 + \frac{aH^3}{12} + aH\left(y' - \frac{H}{2}\right)^2 = 3.23272 \times 10^7 \text{ mm}^4 \\ J_y &= \frac{eB^3}{12} + \frac{8eB^3}{12} = \frac{3}{4}eB^3 = 7.6545 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ J_t &= \frac{1}{3}(2Be^3 + Be^3 + Ha^3) = Be^3 + \frac{1}{3}Ha^3 = 2.838 \times 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned} \right.$$

Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sull'asse y .



$$\tau = \frac{T_x S^*}{b J_y}$$

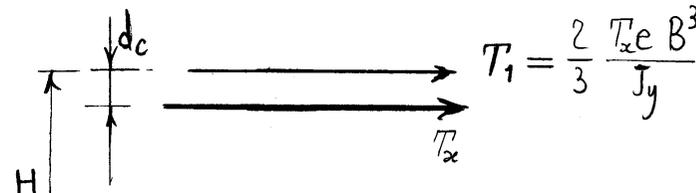


$$S_y^*(\xi) = b(h - \xi) \frac{h + \xi}{2}$$

$$= \frac{b}{2} (h^2 - \xi^2)$$

$$\tau(\xi) = \frac{T_x S_y^*(\xi)}{b J_y} = \frac{T_x}{2 J_y} (h^2 - \xi^2)$$

$$2 \int_0^h \tau(\xi) b d\xi = \frac{T_x}{J_y} \left[h^2 \xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^h = \frac{2}{3} \frac{T_x b h^3}{J_y}$$



$$T_1 = \frac{2}{3} \frac{T_x e B^3}{J_y}$$

$$T_2 = \frac{2}{3} \frac{T_x e \left(\frac{B}{2}\right)^3}{J_y} = \frac{1}{12} \frac{T_x e B^3}{J_y}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{9}{12} e B^3 \frac{1}{J_y} T_x = T_x$$

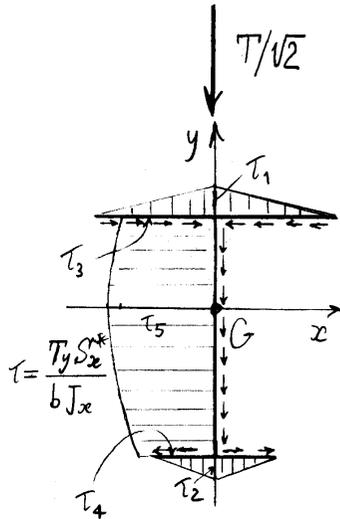
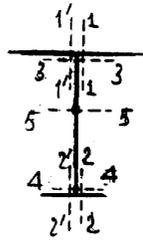
$$T_1 d_c = T_2 (H - d_c) \Rightarrow 8 d_c = H - d_c$$

$$\begin{cases} d_c = \frac{1}{9} H = 20 \text{ mm} \\ y_c = y'' - d_c = 48.64 \text{ mm} \end{cases}$$

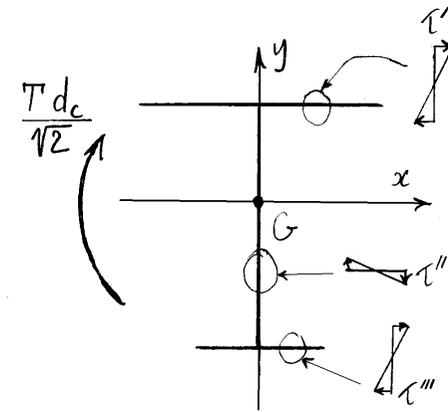
Le caratteristiche della sollecitazione relative al centro di taglio risultano dunque:

$$\begin{cases} T_x = T/\sqrt{2} = 35355 \text{ N}, & T_y = -T/\sqrt{2} = -35355 \text{ N} \\ M_c = -T d_c/\sqrt{2} = -707106 \text{ N mm} \end{cases}$$

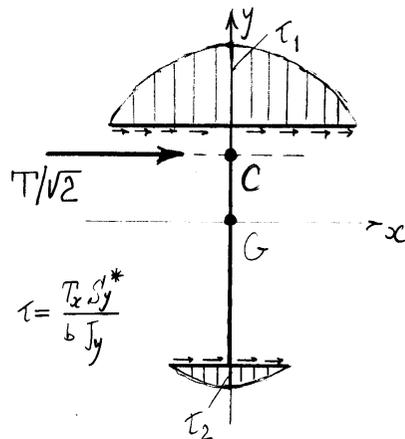
Coefficienti: 2
meno di 10^{-4} mm^{-2}



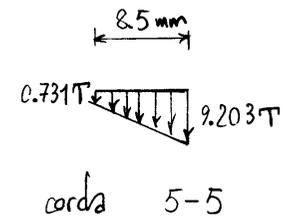
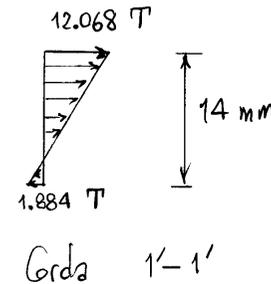
$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{T B (H - y')}{\sqrt{2} J_x} = 1.351 T \\ \tau_3 = \frac{2 e B (H - y') T}{a J_x \sqrt{2}} = 4.451 T \\ \tau_2 = \frac{T B y'}{2 \sqrt{2} J_x} = 1.0\% T \\ \tau_4 = \frac{e B y' T}{a J_x \sqrt{2}} = 3.611 T \\ \tau_5 = \frac{T}{\sqrt{2} a J_x} \left(e B y' + \frac{a}{2} y'^2 \right) = 4.967 T \end{cases}$$



$$\tau = \frac{M_t}{J_t} b \begin{cases} \tau' = \frac{T d_c}{\sqrt{2} J_t} e = 6.976 T \\ \tau'' = \frac{T d_c}{\sqrt{2} J_t} a = 4.236 T \\ \tau''' = \frac{T d_c}{\sqrt{2} J_t} e = 6.976 T \end{cases}$$



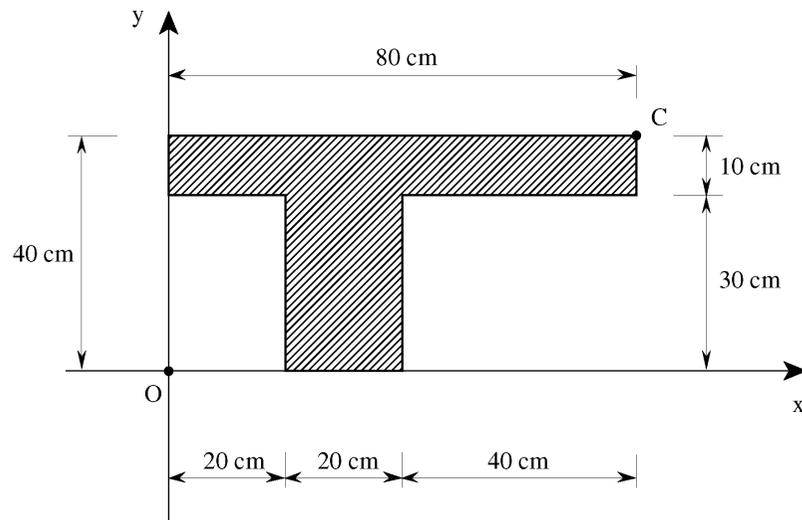
$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{T B^2}{2 \sqrt{2} J_y} = 3.741 T \\ \tau_2 = \frac{T B^2}{8 \sqrt{2} J_y} = 0.935 T \\ \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0 \end{cases}$$



$$\tau_{max} = 12.068 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^4 = 60.34 \text{ N/mm}^2$$

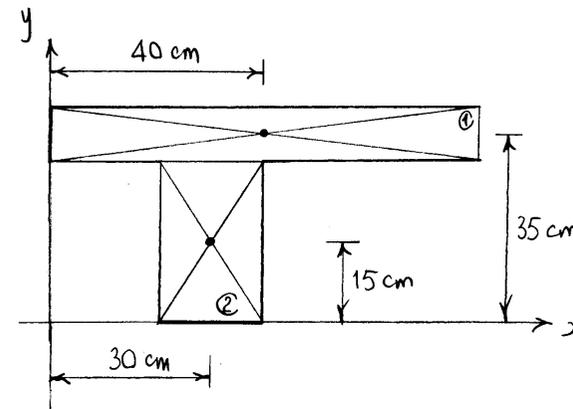
$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_{max} = 105 \text{ N/mm}^2$$

2.4 Esercizio 11



La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 150 kN, applicato in corrispondenza del punto C.

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_{ξ} e J_{η});
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η (per eseguire il calcolo, occorre determinare le coordinate del punto C nel sistema principale, utilizzando le formule di trasformazione tra le coordinate nel sistema Oxy e in quello $G\xi\eta$);
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione.



$$A^{(1)} = 10 \times 80 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A^{(2)} = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A = 1400 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{(1)} = A^{(1)} \times 35 = 28000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{(2)} = A^{(2)} \times 15 = 9000 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 37000 \text{ cm}^3$$

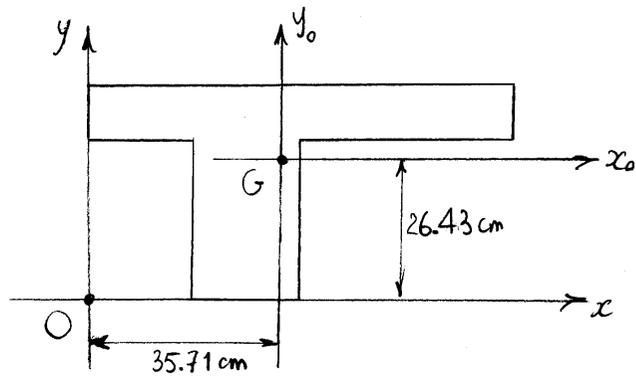
$$S_y^{(1)} = A^{(1)} \times 40 = 32000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{(2)} = A^{(2)} \times 30 = 18000 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 50000 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 26.43 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 35.71 \text{ cm}$$



$$J_{x_0}^{(1)} = \frac{80 \times 10^3}{12} + A^{(1)}(35 - y_G)^2 = 65442 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0}^{(2)} = \frac{20 \times 30^3}{12} + A^{(2)}(15 - y_G)^2 = 123367 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0} = 188810 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0}^{(1)} = \frac{10 \times 80^3}{12} + A^{(1)}(40 - x_G)^2 = 441361 \text{ cm}^4$$

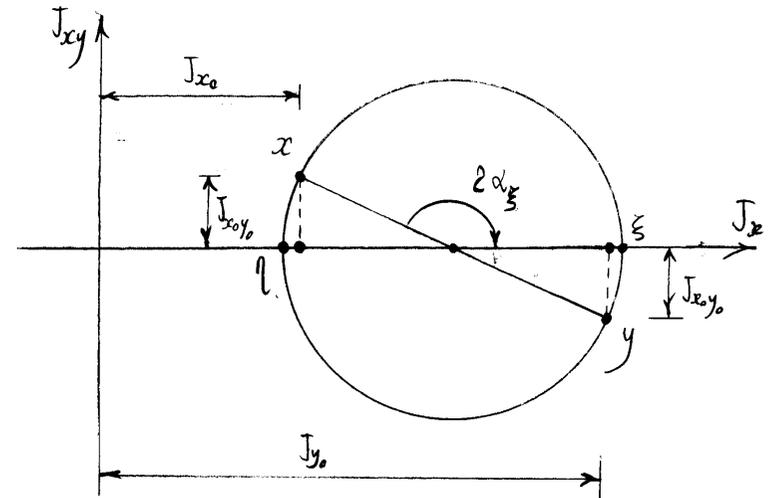
$$J_{y_0}^{(2)} = \frac{30 \times 20^3}{12} + A^{(2)}(30 - x_G)^2 = 39592 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0} = 480952 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{(1)} = A^{(1)}(35 - y_G)(40 - x_G) = 29388 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{(2)} = A^{(2)}(15 - y_G)(30 - x_G) = 39184 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0} = 68571 \text{ cm}^4$$

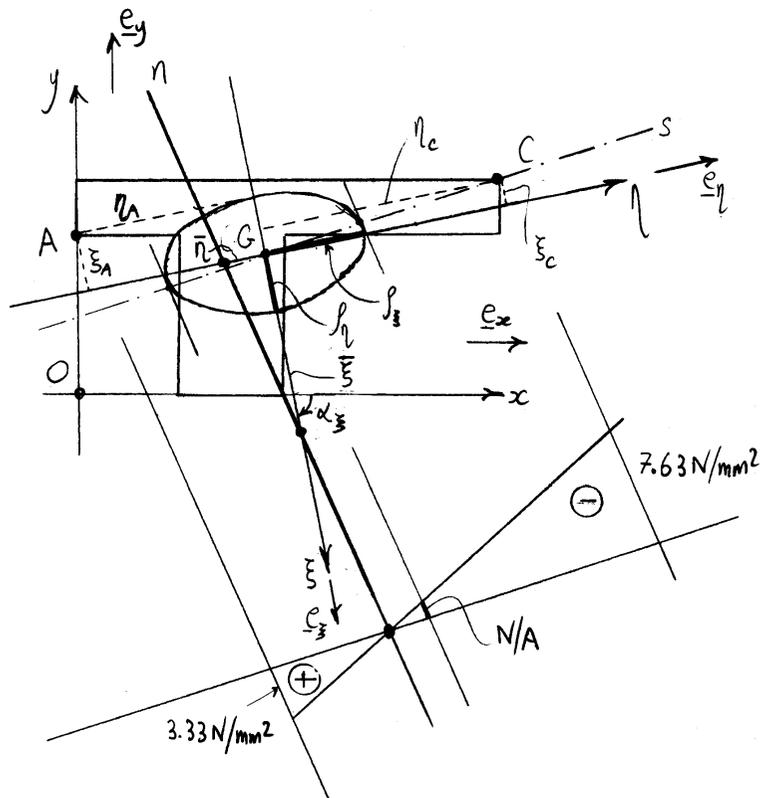


$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2}$$

$$= \begin{cases} 496247 \text{ cm}^4 \\ 173515 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \rho_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 18.83 \text{ cm} \\ \rho_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 11.13 \text{ cm} \end{matrix} \right.$$

$$\alpha_{\xi} = \arctan \left\{ \frac{J_{x_0} - J_{\xi}}{J_{x_0 y_0}} \right\} = -77.43^{\circ}$$



Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = -I_{\eta}^2 / \xi_c = 34.38 \text{ cm} \\ \bar{\eta} = -I_{\xi}^2 / \eta_c = -7.68 \text{ cm} \end{cases}$$

La massima tensione di compressione si ha nel punto C mentre quella di trazione nel punto A di coordinate:

$$\begin{cases} \xi_A = (x_A - x_G) \cos \alpha_\xi + (y_A - y_G) \sin \alpha_\xi = -11.26 \text{ cm} \\ \eta_A = -(x_A - x_G) \sin \alpha_\xi + (y_A - y_G) \cos \alpha_\xi = -34.08 \text{ cm} \end{cases}$$

Coordinate del punto C nel sistema $G\xi\eta$:

$$\begin{aligned} \xi_c &= (C-G) \cdot \underline{e}_\xi = \{(x_c - x_G) \underline{e}_x + (y_c - y_G) \underline{e}_y\} \cdot \underline{e}_\xi \\ &= (x_c - x_G) \cos \alpha_\xi + (y_c - y_G) \sin \alpha_\xi = -3.61 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_c &= (C-G) \cdot \underline{e}_\eta = \{(x_c - x_G) \underline{e}_x + (y_c - y_G) \underline{e}_y\} \cdot \underline{e}_\eta \\ &= -(x_c - x_G) \sin \alpha_\xi + (y_c - y_G) \cos \alpha_\xi = 46.18 \text{ cm} \end{aligned}$$

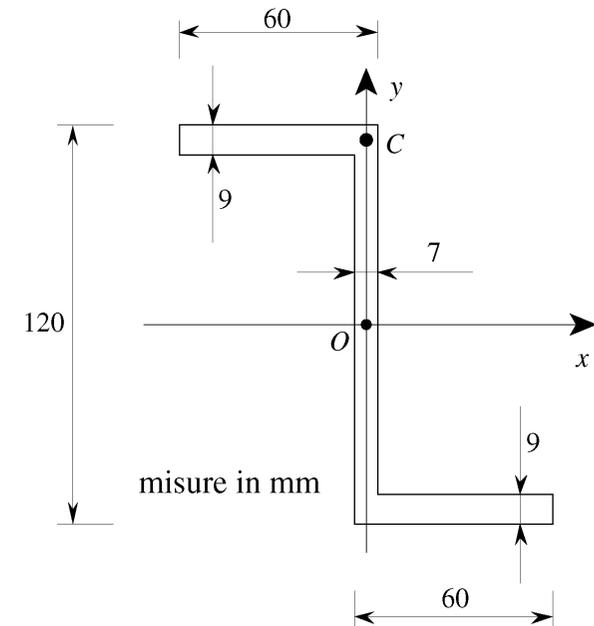
Poiché:

$$\begin{cases} N = -150 \text{ kN} \\ M_\xi = N \eta_c = -6926.7 \text{ kN cm} \\ M_\eta = -N \xi_c = -540.8 \text{ kN cm} \end{cases}$$

risulta:

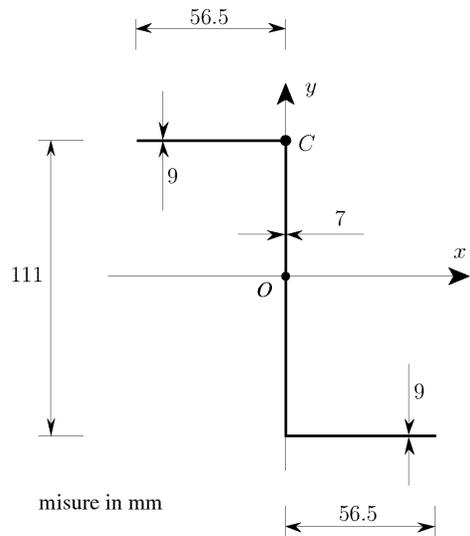
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_c - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_c = -0.763 \text{ kN/cm}^2 \\ &= -7.63 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A = 0.333 \text{ kN/cm}^2 \\ &= 3.33 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right.$$

2.5 Esercizio 12



La sezione sottile di figura è soggetta ad una forza normale di trazione di 100 kN, applicata in corrispondenza del punto C:

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
- 2) Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
- 3) Determinare la posizione dell'asse neutro, disegnare il diagramma delle tensioni normali e calcolare le tensioni massime a trazione e compressione.



$$A = 17.94 \text{ cm}^2$$

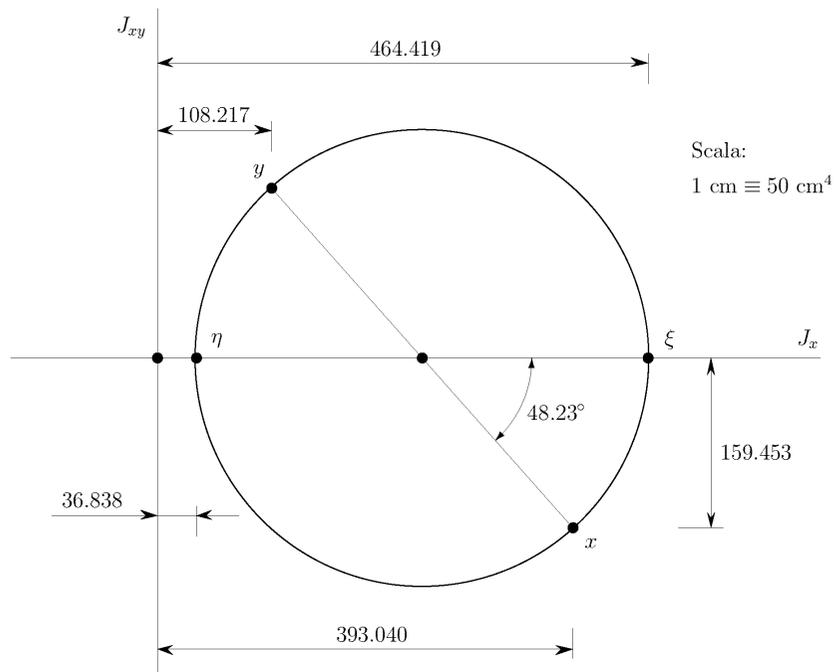
$$\begin{cases} J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

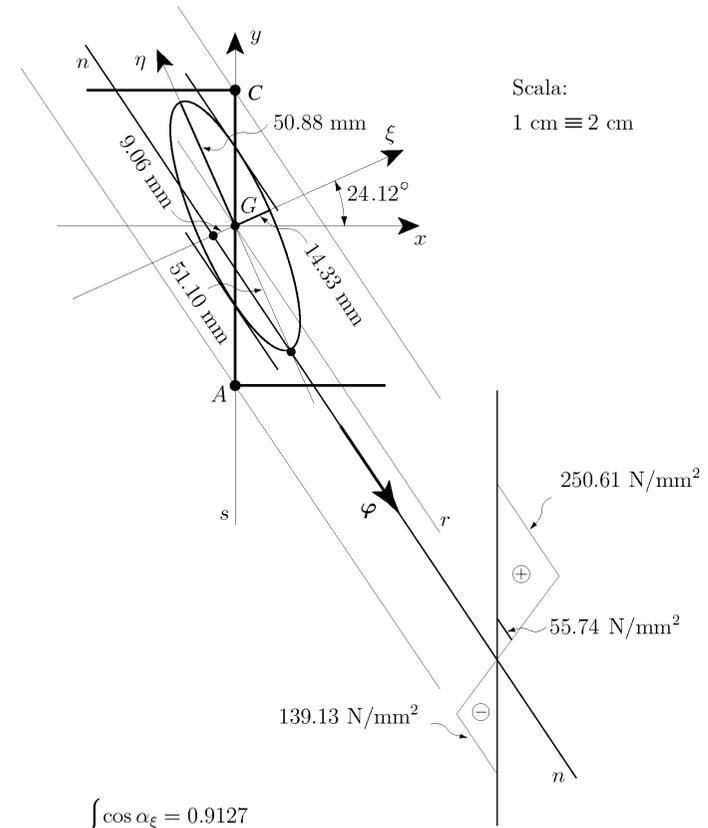
$$\begin{cases} \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_\xi = 48.23^\circ \\ \alpha_\xi = 24.12^\circ \end{cases}$$

misure in mm



Scala:
1 cm \equiv 50 cm⁴



Scala:
1 cm \equiv 2 cm

$$\begin{cases} \cos \alpha_\xi = 0.9127 \\ \sin \alpha_\xi = 0.4086 \end{cases}$$

Coordinate del centro di trazione C:

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 55.5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_C = y_C \sin \alpha_\xi = 22.68 \text{ mm} \\ \eta_C = y_C \cos \alpha_\xi = 50.66 \text{ mm} \end{cases}$$

Coordinate del punto A:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = -55.5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_A = y_A \sin \alpha_\xi - 22.68 \text{ mm} \\ \eta_A = y_A \cos \alpha_\xi = -50.66 \text{ mm} \end{cases}$$

Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = -\rho_\eta^2 / \xi_C = -9.06 \text{ mm} \\ \bar{\eta} = -\rho_\xi^2 / \eta_C = -51.10 \text{ mm} \end{cases}$$

Inclinazione dell'asse neutro (angolo minore di 90°):

$$\widehat{\xi}_n = \arctan \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} = 79.95^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x}_n = 55.84^\circ \\ \widehat{y}_n = 34.16^\circ \end{cases}$$

Momento di inerzia rispetto all'asse r baricentrico e parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione y):

$$J_r = \frac{J_\xi \cos^2 \widehat{\xi}_n + J_\eta \sin^2 \widehat{\xi}_n}{\sin^2 \widehat{y}_n} = 158.094 \text{ cm}^4$$

Momento flettente:

$$\mathbf{M} = N y_C \mathbf{e}_x = (5550.0 \text{ Nm}) \mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} M_\xi = N \eta_C = 5065.6 \text{ Nm} \\ M_\eta = -N \xi_C = -2267.6 \text{ Nm} \end{cases}$$

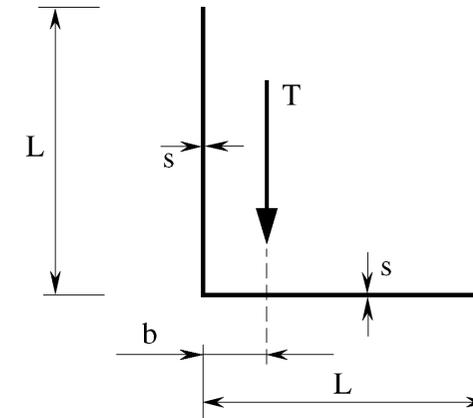
Massima tensione normale di trazione (punto C):

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{N}{A} + \frac{|\mathbf{M}|}{J_r} y_C = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_C - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_C \\ &= (55.74 + 55.26 + 139.61) \text{ N/mm}^2 = 250.61 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Massima tensione normale di compressione (punto A):

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{|\mathbf{M}|}{J_r} y_A = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A \\ &= (55.74 - 55.26 - 139.61) \text{ N/mm}^2 = -139.13 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

2.6 Esercizio 13



$$T = 40 \text{ KN}$$

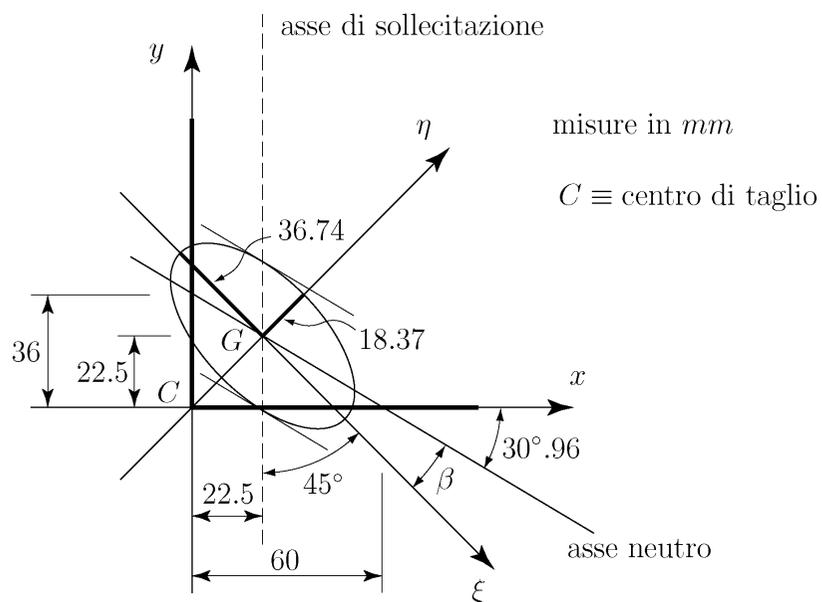
$$L = 90 \text{ mm}$$

$$s = 9 \text{ mm}$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

Data la sezione sottile a L, a lati uguali, di figura:

- 1) Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
- 2) Disegnare l'ellisse centrale di inerzia e determinare l'asse neutro della flessione associata a T;
- 3) Utilizzando l'asse neutro della flessione associata a T, disegnare il diagramma qualitativo complessivo delle tensioni tangenziali dovute al taglio passante per il centro di taglio.



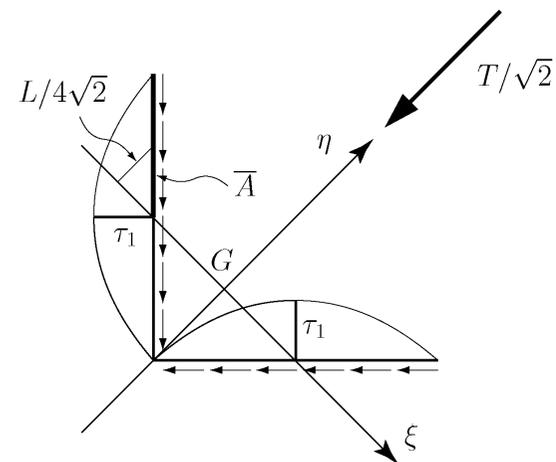
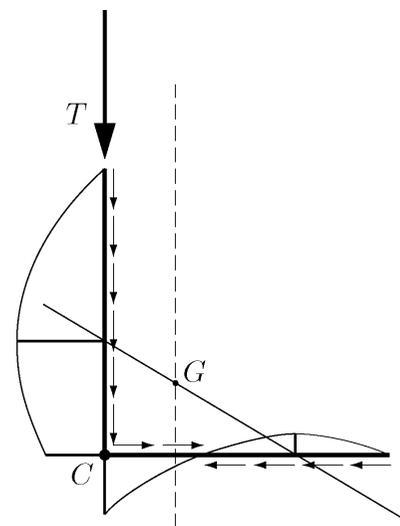
$$\begin{cases} x_G = 22.5 \text{ mm} \\ y_G = 22.5 \text{ mm} \end{cases} \quad \beta - 45^\circ = -30.96$$

$$\begin{cases} J_\xi = 2 \frac{(s\sqrt{2}) \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^3}{12} = 546\,750 \text{ mm}^4 \\ J_\eta = 2 \frac{(s\sqrt{2}) \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} = 2\,187\,000 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

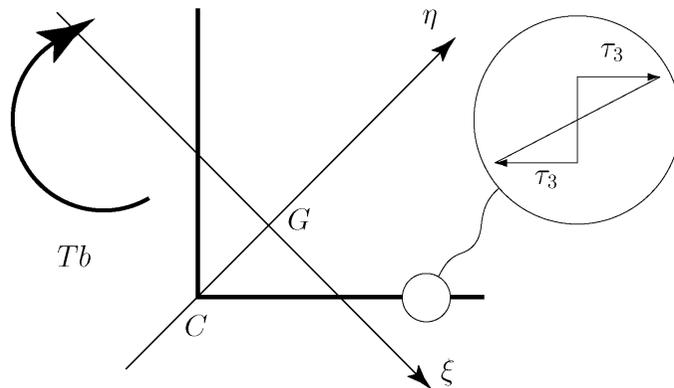
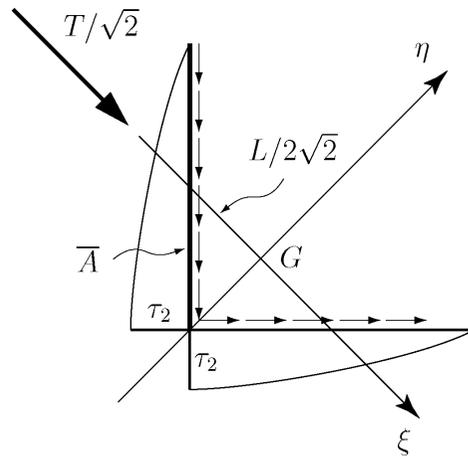
$$\tan(\beta) \tan(-\pi/4) = -J_\xi/J_\eta = -1/4 \Rightarrow \beta = 14.04$$

Intersezioni dell'asse neutro con l'asse x e con l'asse y :

$$\begin{cases} \bar{x} = x_G + y_G \tan(\pi/4 + \beta) = 60 \text{ mm} \\ \bar{y} = y_G + x_G \tan(\pi/4 - \beta) = 36 \text{ mm} \end{cases}$$

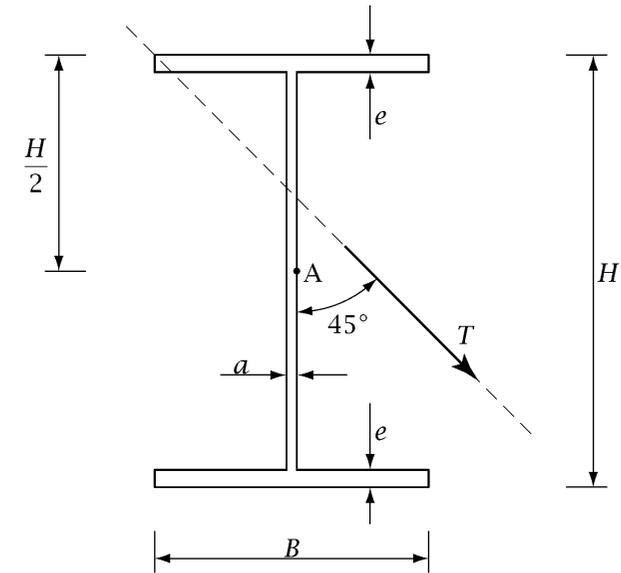


$$\begin{cases} \bar{S}_\xi^1 = s \frac{L}{2} \frac{L}{4\sqrt{2}} = 6\,443.5 \text{ mm}^3 \\ \tau_1 = \frac{T \bar{S}_\xi^1}{\sqrt{2} J_\xi s} = 37.04 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overline{S}_\eta^2 = sL \frac{L}{2\sqrt{2}} = 25\,774 \text{ mm}^3 \\ \tau_2 = \frac{T\overline{S}_\eta^2}{\sqrt{2}J_\eta s} = 37.04 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} J_t = \frac{2}{3}Ls^3 = 43\,740 \text{ mm}^4 \\ \tau_3 = \frac{Tb}{J_t}s = 164.61 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

2.7 Esercizio 14

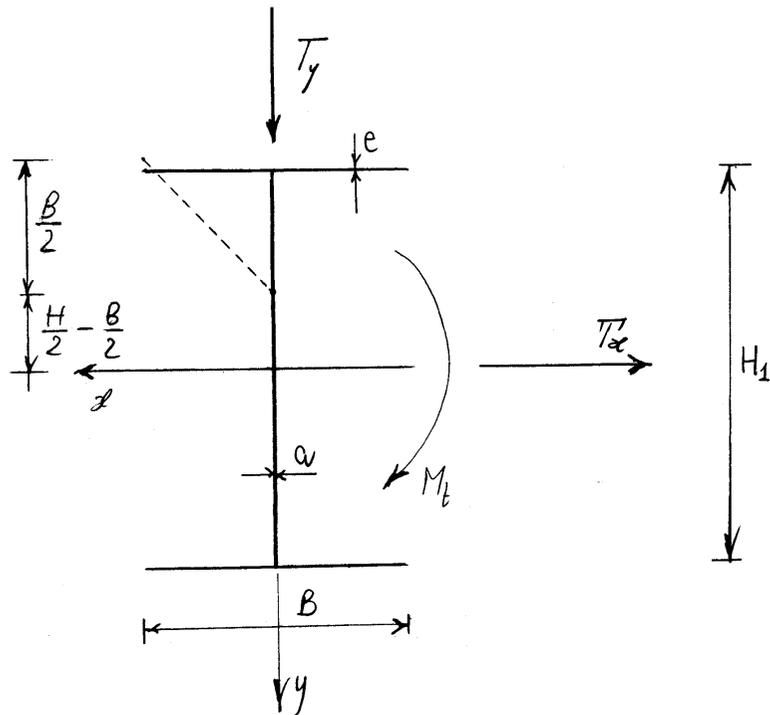


$T = 50 \text{ kN}$
$B = 100 \text{ mm}$
$H = 165 \text{ mm}$
$a = 8 \text{ mm}$
$e = 15 \text{ mm}$

Data la sezione a I di figura, soggetta ad un taglio T :

1. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
2. Determinare l'asse neutro della flessione associata al taglio T ;
3. Disegnare il diagramma qualitativo complessivo delle tensioni tangenziali dovute al taglio utilizzando la formula di Jourawski monomia.

Caratteristiche della sollecitazione



Si procede calcolando i moduli delle forze e delle tensioni, dato che i versi sono automaticamente noti.

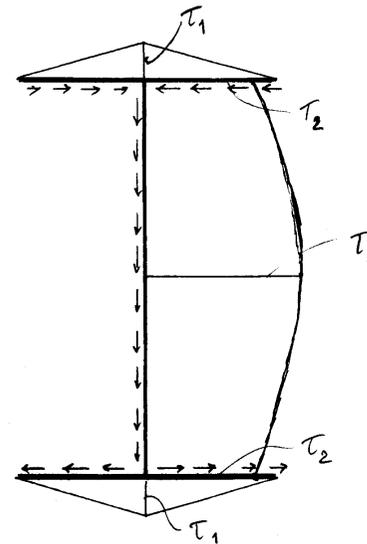
$$H_1 = H - e = 150 \text{ mm}$$

$$T_x = T/\sqrt{2} = 35.36 \text{ kN}$$

$$T_y = T/\sqrt{2} = 35.36 \text{ kN}$$

$$M_t = T_x \left(\frac{H}{2} - \frac{B}{2} \right) = 1149 \text{ kNmm}$$

Taglia T_y



$$T_y = 35.36 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{b J_x}$$

$$J_x = \frac{a H_1^3}{12} + 2 e B \left(\frac{H_1}{2} \right)^2 = 1912.5 \text{ cm}^4$$

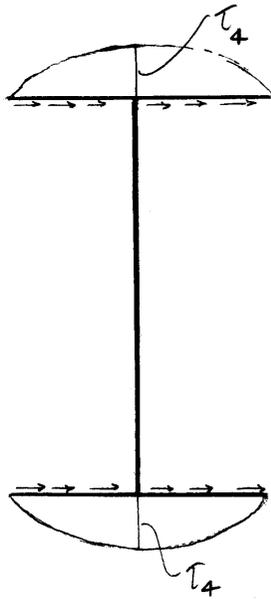
$$S_{x1}^* = e \frac{B}{2} \frac{H}{2} = 56.25 \text{ cm}^3, \quad S_{x2}^* = e B \frac{H}{2} = 112.5 \text{ cm}^3$$

$$S_{x3}^* = e B \frac{H}{2} + a \frac{H}{2} \frac{H}{4} = 135 \text{ cm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{T_y S_{x1}^*}{e J_x} = 6.93 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_2 = \frac{T_y S_{x2}^*}{a J_x} = 26 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_3 = \frac{T_y S_{x3}^*}{a J_x} = 31.20 \text{ N/mm}^2$$

Taglio T_x



$$T_x = 35.36 \text{ kN}$$

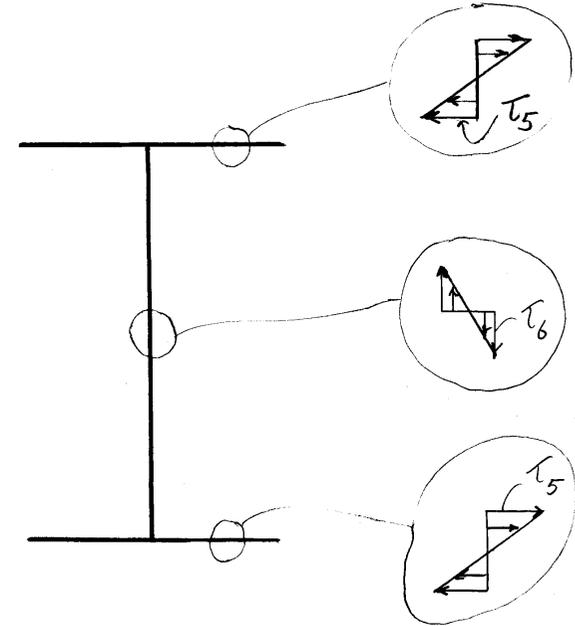
$$\tau = \frac{T_x S_y^*}{b J_y}$$

$$J_y = 2 \frac{e B^3}{12} = 250 \text{ cm}^4$$

$$S_{y4}^* = e \left(\frac{B}{2} \right) \left(\frac{B}{4} \right) = 18.75 \text{ cm}^3$$

$$\tau_4 = \frac{T_x S_{y4}^*}{e J_y} = 17.68 \text{ N/mm}^2$$

Momento torcente M_t



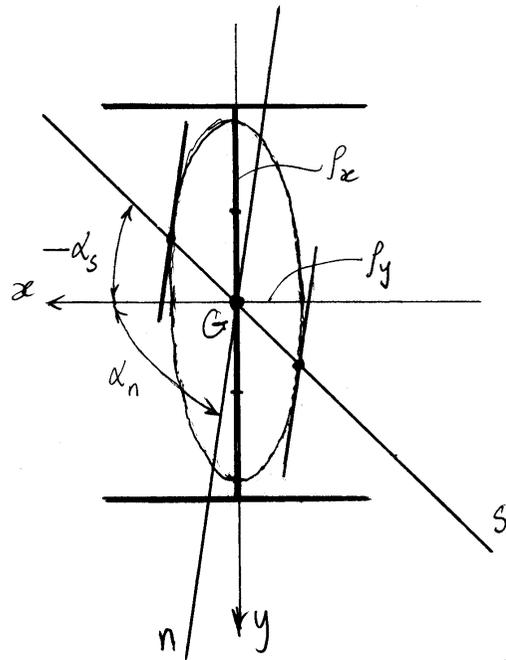
$$M_t = 1149 \text{ kN mm}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (2 B e^3 + H_1 a^3) = 25.06 \text{ cm}^4$$

$$\tau_5 = \frac{M_t}{J_t} e = 68.78 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} b$$

$$\tau_6 = \frac{M_t}{J_t} a = 36.68 \text{ N/mm}^2$$

Asse neutro

$$A = 2eB + aH_1 = 4200 \text{ mm}^2$$

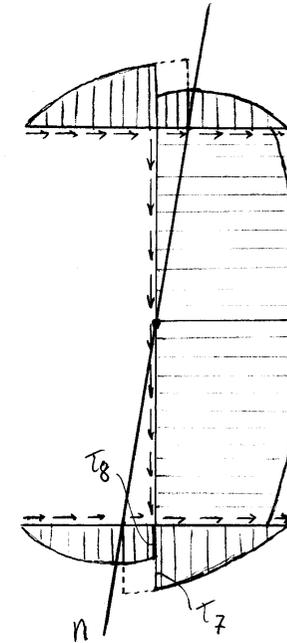
$$l_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = 67.48 \text{ mm}$$

$$l_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = 24.40 \text{ mm}$$

$$\alpha_s = -\frac{\pi}{4}$$

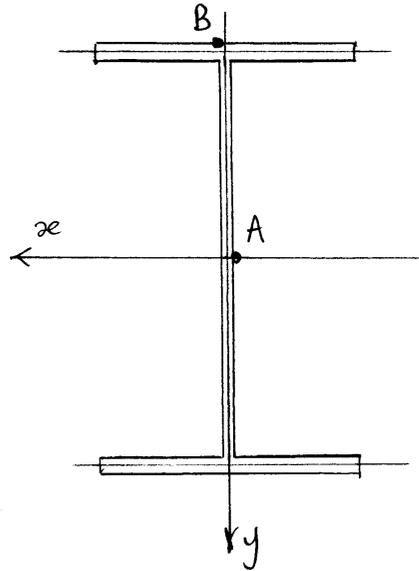
$$\tan \alpha_s \tan \alpha_n = -\frac{J_x}{J_y} \Rightarrow \alpha_s = \arctan\left(-\frac{J_x}{J_y \tan \alpha_n}\right)$$

$$\alpha_s = 82.55^\circ$$

Teglia τ 

$$\tau_7 = \tau_4 + \tau_1 = 24.61 \text{ N/mm}^2$$

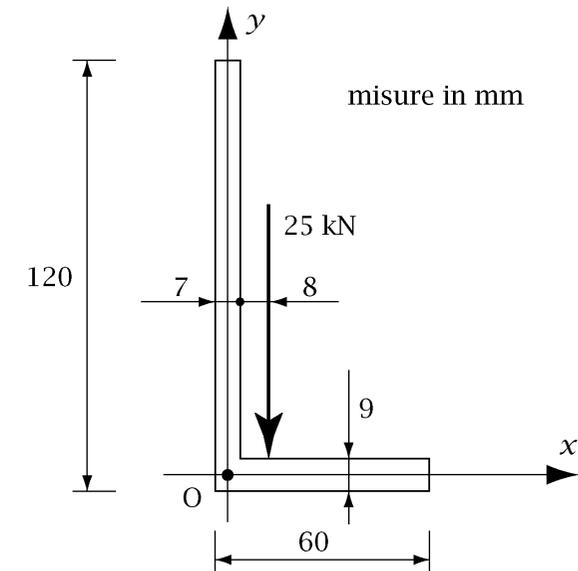
$$\tau_8 = \tau_4 - \tau_1 = 10.75 \text{ N/mm}^2$$

Tensione ideale massima

$$\tau_A = \tau_3 + \tau_6 = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

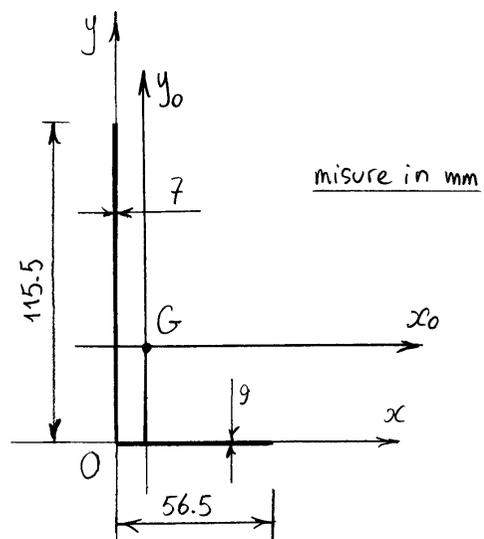
$$\tau_B = \tau_1 + \tau_4 + \tau_5 = 93.39 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_B = 161.76 \text{ N/mm}^2$$

2.8 Esercizio 15

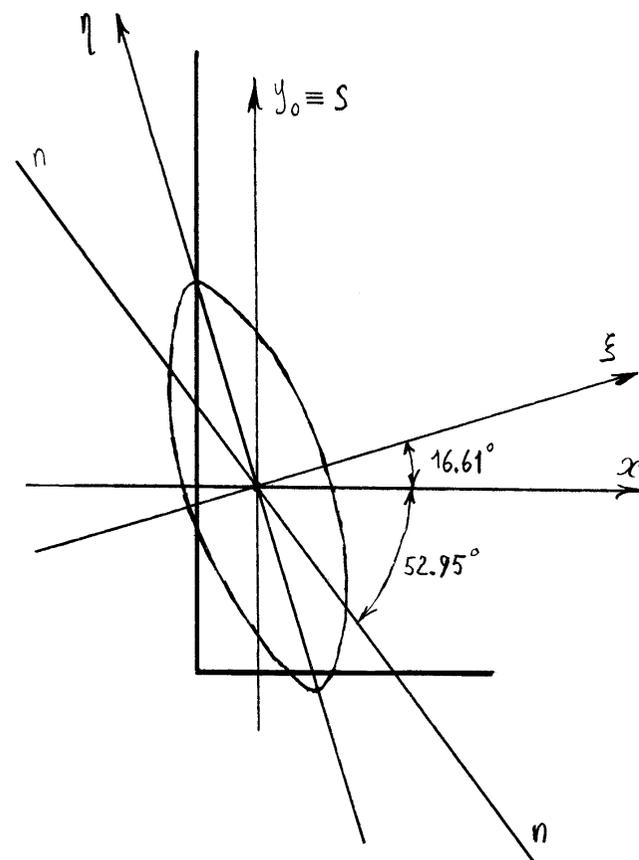
Data la sezione sottile a L di figura:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, concentrando lo spessore sulla linea media (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente;
4. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali dovute alle componenti del taglio rispetto agli assi principali di inerzia;
5. Utilizzando l'asse neutro della flessione associata al taglio, tracciare il diagramma qualitativo delle tensioni tangenziali dovute al taglio complessivo.



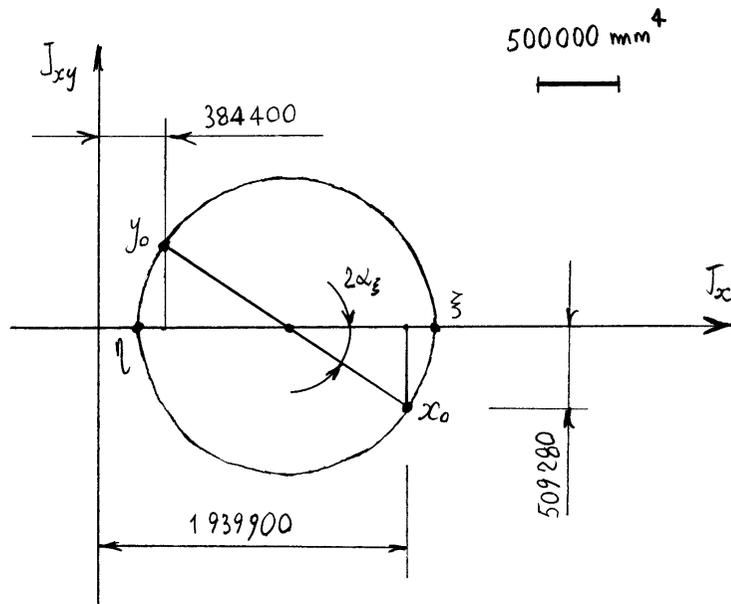
$$\begin{cases} x_G = 10.91 \text{ mm} \\ y_G = 35.45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{x_0} = 1\,939\,900 \text{ mm}^4 \\ J_{y_0} = 384\,400 \text{ mm}^4 \\ J_{x_0 y_0} = -509\,280 \text{ mm}^4 \end{cases}$$



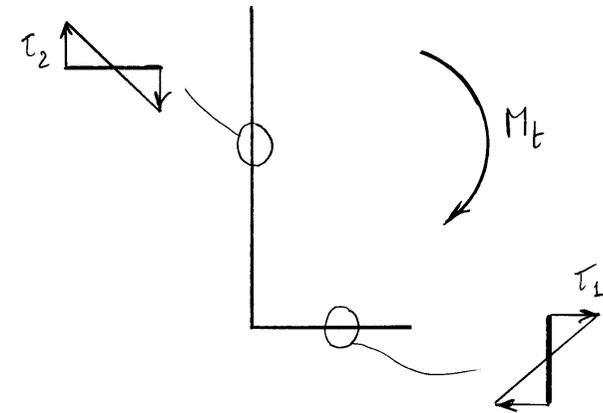
$$\begin{cases} J_\xi = 2\,091\,800 \text{ mm}^4 \\ J_\eta = 232\,490 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_\xi = 39.85 \text{ mm} \\ r_\eta = 13.29 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\tan 2\alpha_z = \frac{509280 \times 2}{1939900 - 384400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_z = 16.61^\circ$$



$$M_t = 25 \times 11.5 \text{ kN mm} = 287500 \text{ N mm}$$

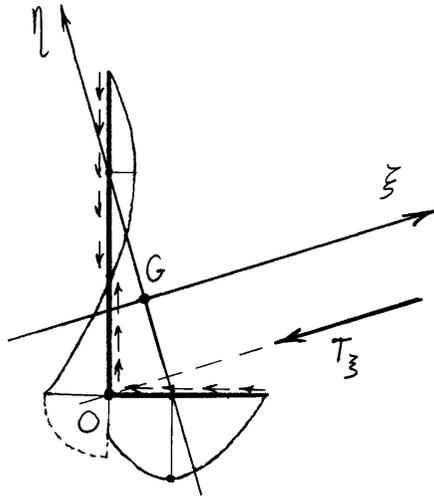
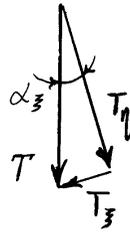
$$J_t = \frac{1}{3} (56.5 \times 9^3 + 115.5 \times 7^3) = 26935 \text{ mm}^4$$

$$\tau_1 = \frac{287500}{26935} \times 9 = 96.06 \text{ N/mm}^2$$

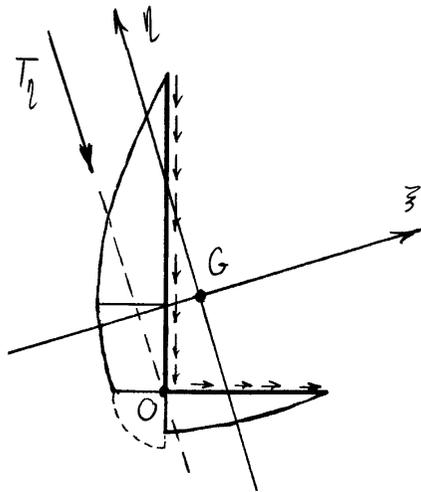
$$\tau_2 = \frac{287500}{26935} \times 7 = 74.72 \text{ N/mm}^2$$

$$T_{\xi} = T \sin \alpha_{\xi} = 7 \text{ kN}$$

$$T_{\eta} = T \cos \alpha_{\xi} = 24 \text{ kN}$$

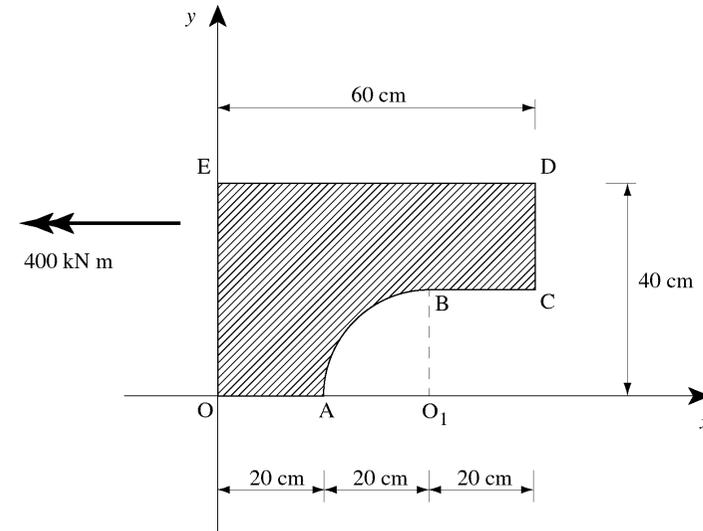


$$\tau = \frac{T_{\xi} S_{\eta}^*}{b J_{\eta}}$$



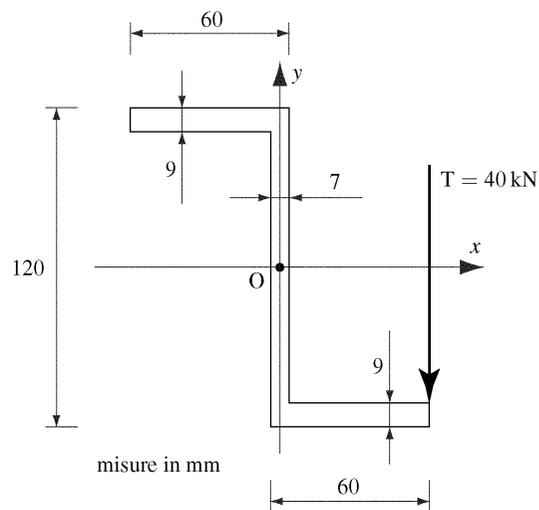
$$\tau = \frac{T_{\eta} S_{\xi}^*}{b J_{\xi}}$$

2.9 Esercizi proposti



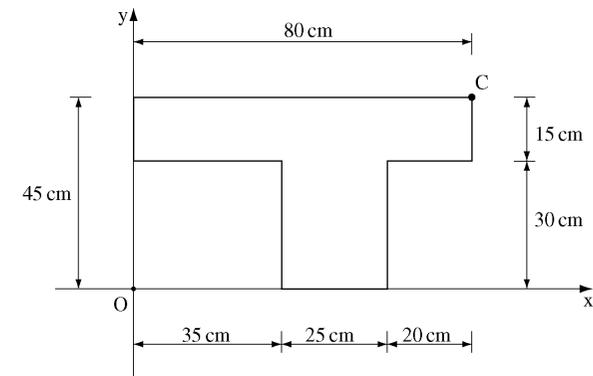
Data la sezione riportata in figura, soggetta ad un momento flettente di 400 kN m, di asse momento orizzontale:

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro, assi principali di inerzia e momenti principali di inerzia);
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia, e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al riferimento principale;
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula binomia;
- 6) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



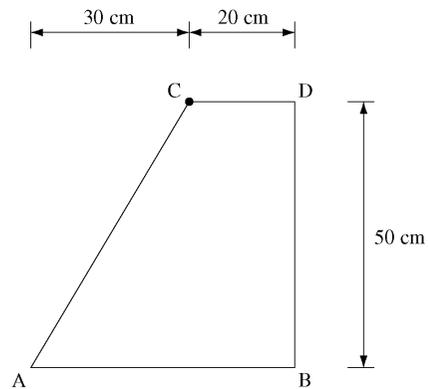
Data la sezione sottile a Z di figura:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, concentrando lo spessore sulla linea media (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente;
4. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali dovute alle componenti del taglio rispetto agli assi principali di inerzia;
5. Utilizzando l'asse neutro della flessione associata al taglio, tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al taglio complessivo.



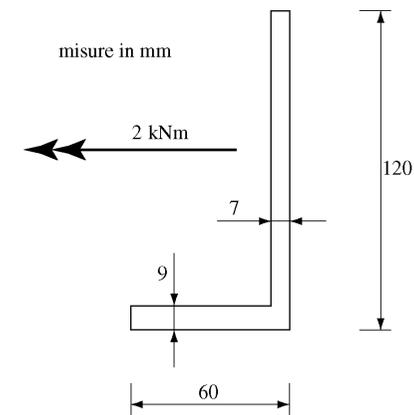
La sezione di figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 300 kN, applicata in corrispondenza del punto C:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Determinare la posizione dell'asse neutro, disegnare il diagramma delle tensioni normali e calcolare le tensioni massime a trazione e compressione.



La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 200 kN, applicata in corrispondenza del punto C.

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_{ξ} e J_{η});
2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
4. Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
5. Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η (per eseguire il calcolo, occorre determinare le coordinate del punto C nel sistema principale, utilizzando le formule di trasformazione tra le coordinate nel sistema Gxy e quelle nel sistema $G\xi\eta$);
6. Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



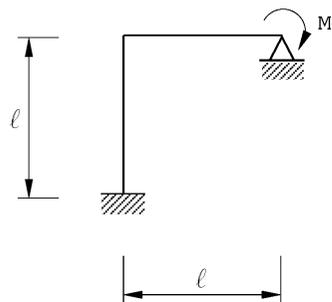
Data la sezione sottile riportata in figura, soggetta ad un momento flettente di 2 kNm, di asse momento orizzontale:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro, assi principali di inerzia e momenti principali di inerzia);
2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia, e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
4. Impostare il calcolo della tensione normale massima a compressione;
5. Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al riferimento principale;
6. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula binomia;
7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia;
8. Calcolare la curvatura flessionale (rotazione relativa per unità di linea) associata al momento flettente, supponendo che il modulo di Young valga $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

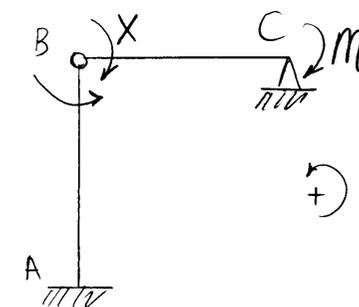
Capitolo 3

Esercizi su sistemi di travi iperstatiche

3.1 Esercizio 16



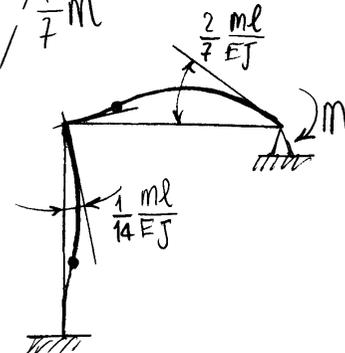
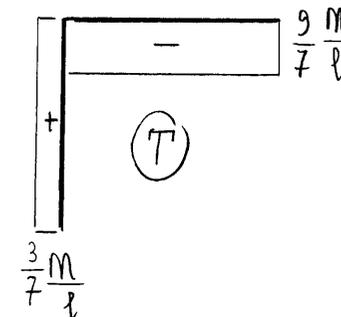
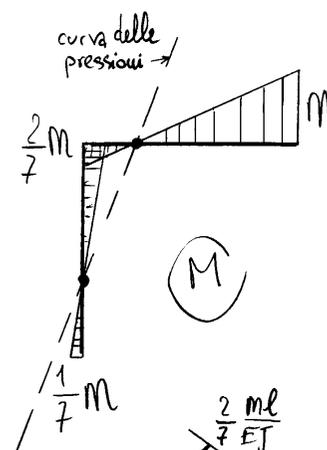
- Risolvere la struttura iperstatica con il metodo delle forze
- Tracciare il diagramma del momento flettente e del taglio
- Disegnare la deformata elastica della struttura
- Disegnare la curva delle pressioni



Metodo delle forze

$$\frac{Xl}{4EJ} = -\frac{Xl}{3EJ} + \frac{ml}{6EJ}$$

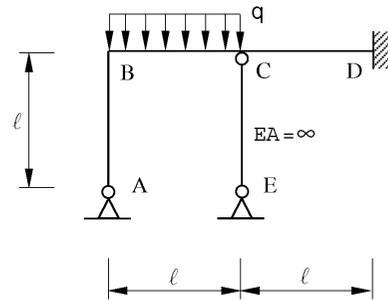
$$X = \frac{2}{7} M$$



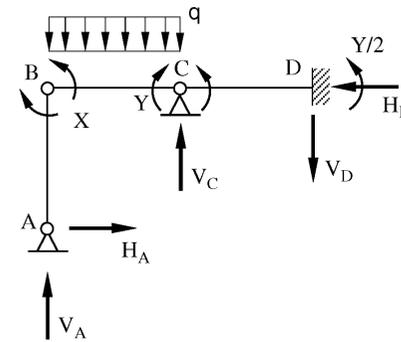
$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{ml}{6EJ} - \frac{\left(\frac{2}{7}M\right)l}{3EJ} \\ &= \frac{1}{14} \frac{ml}{EJ} \end{aligned}$$

$$\varphi_C = -\frac{ml}{3EJ} + \frac{\left(\frac{2}{7}M\right)l}{6EJ} = -\frac{2}{7} \frac{ml}{EJ}$$

3.2 Esercizio 17



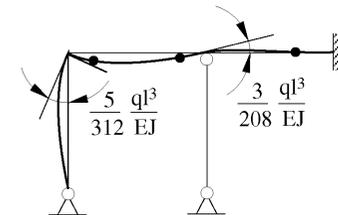
- Risolvere la struttura iperstatica
- Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale
- Disegnare la deformata elastica della struttura, quotando le rotazioni dei nodi B e C
- Disegnare la curva delle pressioni



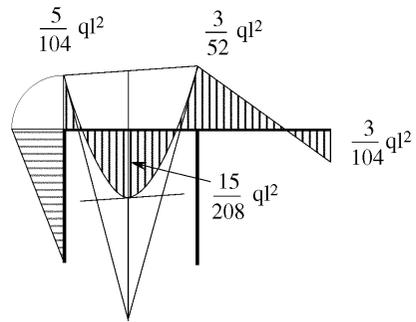
$$\begin{cases} H_A = H_D = \frac{5}{104} ql \\ V_A = \frac{51}{104} ql \\ V_C = \frac{31}{52} ql \\ V_D = \frac{9}{104} ql \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{BA} = \phi_{BC} \Rightarrow -\frac{Xl}{3EJ} = \frac{Xl}{3EJ} + \frac{Yl}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \\ \phi_{CB} = \phi_{CD} \Rightarrow -\frac{Yl}{3EJ} - \frac{Xl}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} = \frac{Yl}{4EJ} \end{cases}$$

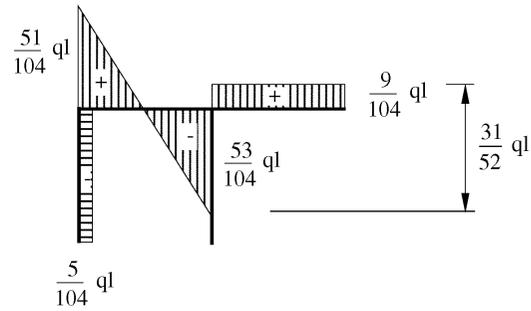
$$\begin{cases} 16X + 4Y = ql^2 \\ 4X + 14Y = ql^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{5}{104} ql^2 \\ Y = \frac{3}{52} ql^2 \end{cases} \begin{cases} \phi_B = -\frac{5}{312} \frac{ql^3}{EJ} \\ \phi_C = \frac{3}{208} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$



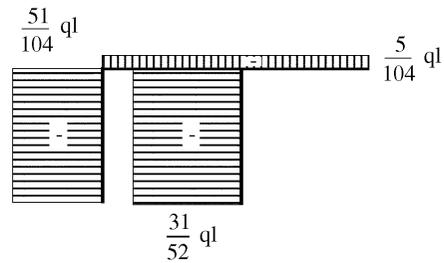
● ≡ punti di flesso



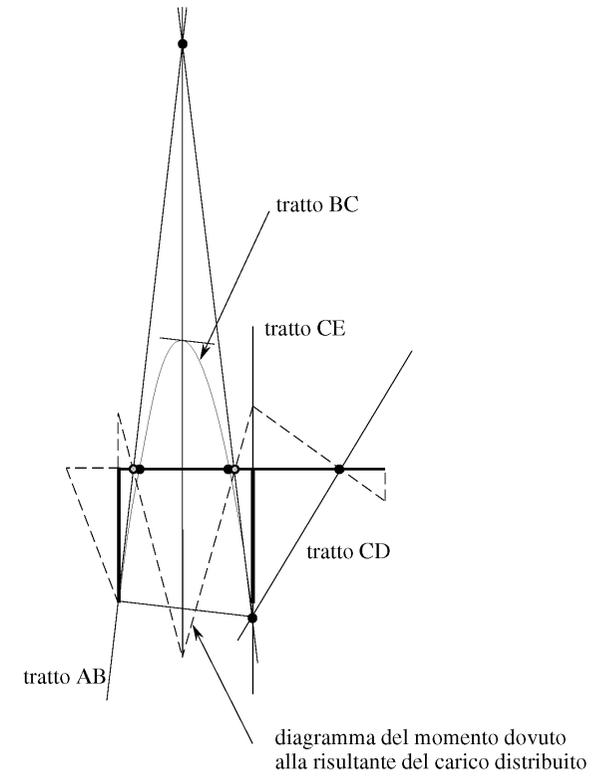
(M)



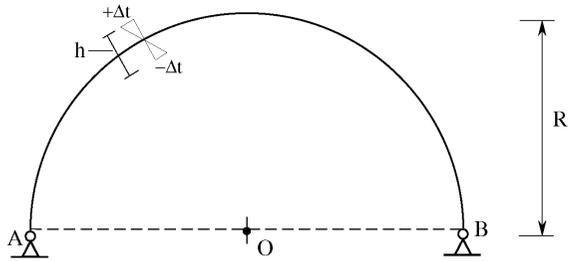
(T)



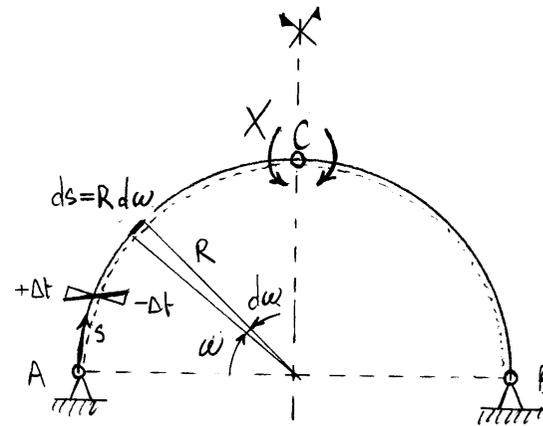
(N)



3.3 Esercizio 18



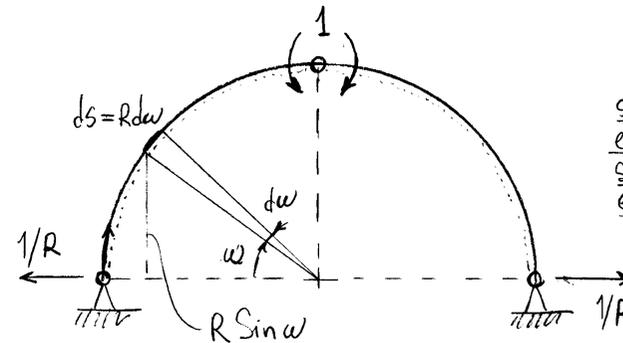
- a) Risolvere la struttura iperstatica
- b) Scrivere le equazioni del momento flettente, del taglio e della forza normale e disegnare i relativi diagrammi, usando quale fondamentale la linea AB orizzontale



(r)
schemi degli
spostamenti e
deformazioni
congruenti

Per simmetria $\varphi_{CA} = \varphi_{CB} = 0$

Calcolo di φ_{CA} con il principio dei lavori virtuali



(f)
schemi delle forze
e caratteristiche della
sollecitazione
equilibrate

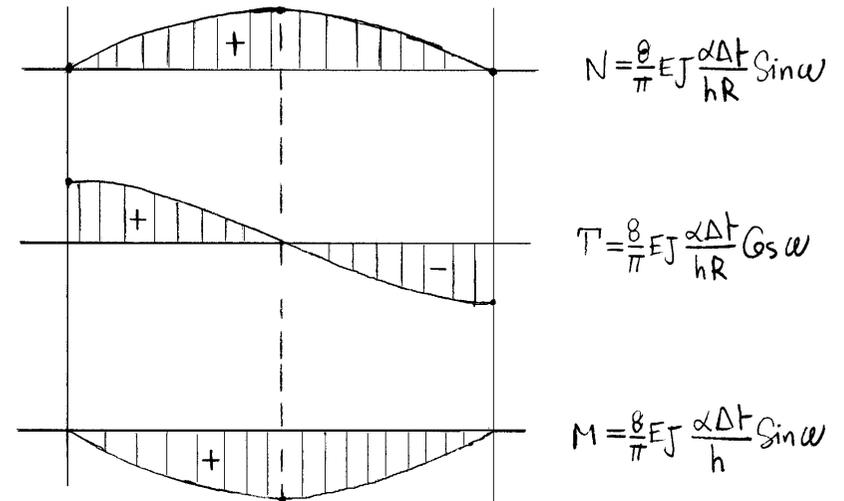
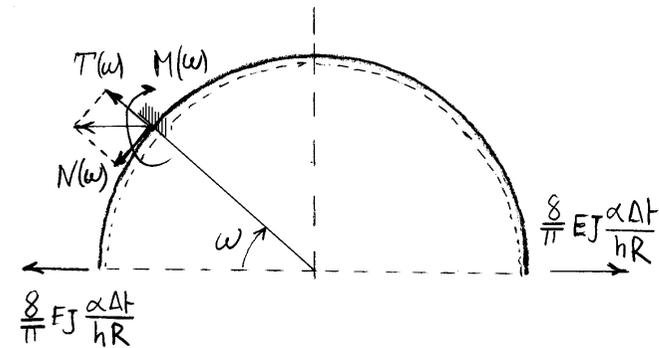
$$\begin{cases} M^{(f)} = \frac{1}{R} R \sin \omega = \sin \omega \\ K^{(r)} = X \frac{M^{(f)}}{EJ} - \frac{2\alpha \Delta t}{h} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} M^{(F)} \left\{ X \frac{M^{(F)}}{EJ} - \frac{2\alpha\Delta t}{h} \right\} R d\omega = 0$$

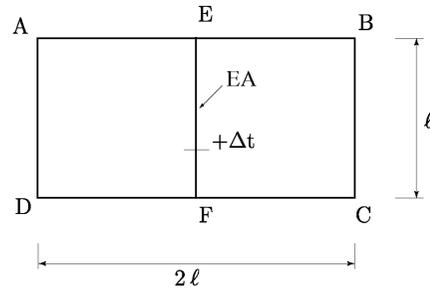
$$\frac{XR}{EJ} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega d\omega - 2\alpha\Delta t \frac{R}{h} = 0$$

$$\frac{XR}{EJ} \left[\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sin 2\omega \right]_0^{\pi/2} = 2\alpha\Delta t \frac{R}{h}$$

$$X = \frac{8}{\pi} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h}$$



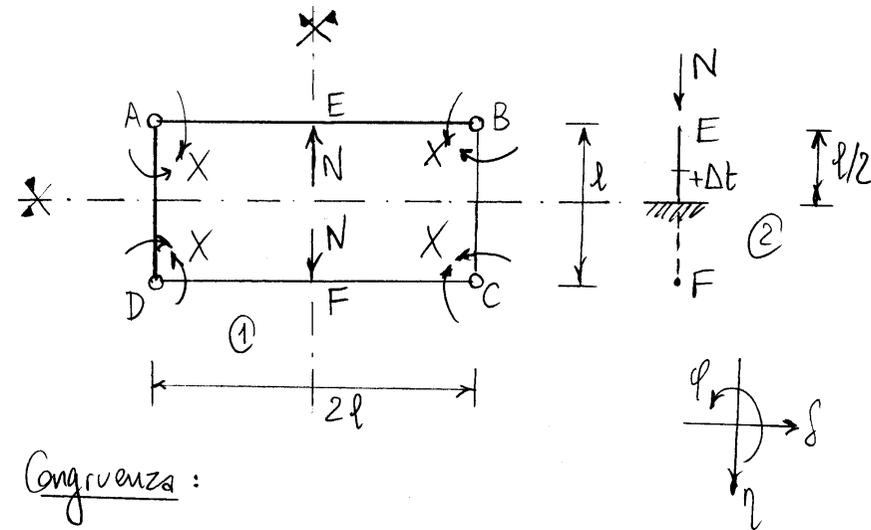
3.4 Esercizio 19



Risolvere la struttura assegnata, soggetta ad una variazione termica uniforme sul ritto EF, tenendo conto della deformabilità assiale di tale ritto.

Disegnare i diagrammi del momento, del taglio e della forza normale.

Disegnare la deformata della struttura.



Congruenza:

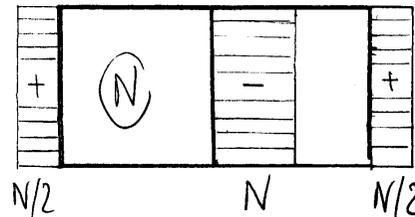
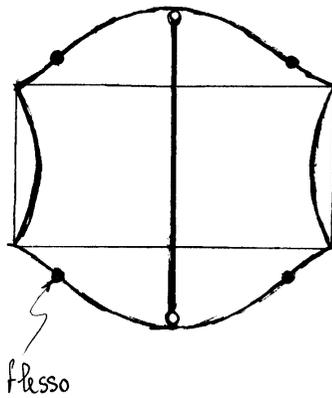
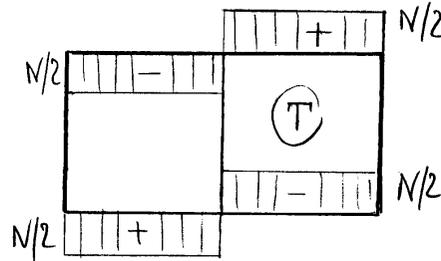
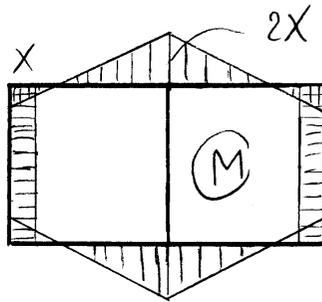
$$\varphi_{AD}^{(1)} = \varphi_{AB}^{(1)} \Rightarrow \frac{Xl}{2EJ} = -\frac{X(2l)}{2EJ} + \frac{N(2l)^2}{16EJ}$$

$$l_E^{(1)} = l_E^{(2)} \Rightarrow \frac{X(2l)^2}{8EJ} - \frac{N(2l)^3}{48EJ} = \frac{N(l/2)}{EA} - \alpha \Delta t \frac{l}{2}$$

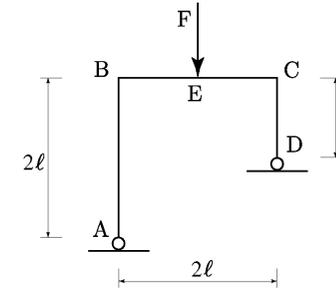
$$\begin{cases} X = Nl/6 \\ \frac{4Nl^3}{48EJ} - \frac{8Nl^3}{48EJ} = \frac{Nl}{2EA} - \alpha \Delta t \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\frac{Nl^3}{12EJ} + \frac{Nl}{2EA} = \alpha \Delta t \frac{l}{2}$$

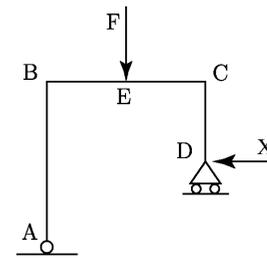
$$\left\{ \begin{aligned} N &= \frac{6EJ\alpha\Delta t}{\left(1 + \frac{6J}{Al^2}\right)l^2} \\ X &= \frac{EJ\alpha\Delta t}{\left(1 + \frac{6J}{Al^2}\right)l} \end{aligned} \right.$$



3.5 Esercizio 20

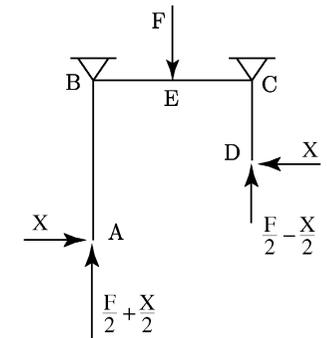


- 1) Risolvere la struttura iperstatica;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Calcolare le rotazioni dei nodi B e C, lo spostamento orizzontale della travata e lo spostamento verticale del punto di applicazione del carico concentrato;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) disegnare la curva delle pressioni.



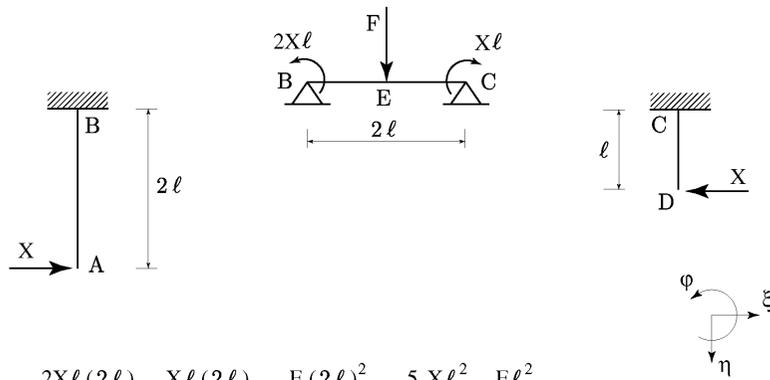
Struttura principale isostatica

Congruenza: $\xi_D = 0$



Struttura equivalente
(a meno di una traslazione orizzontale)

Congruenza: $\xi_D = \xi_A$



$$\varphi_B = \frac{2Xl(2l)}{3EJ} + \frac{Xl(2l)}{6EJ} - \frac{F(2l)^2}{16EJ} = \frac{5Xl^2}{3EJ} - \frac{Fl^2}{4EJ}$$

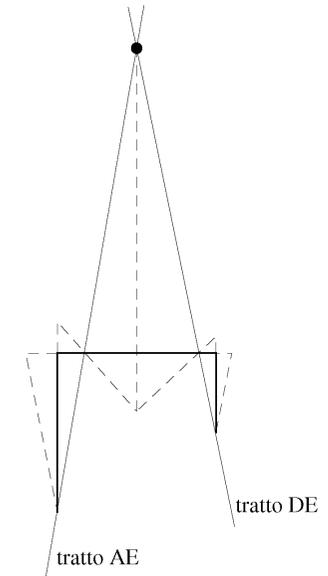
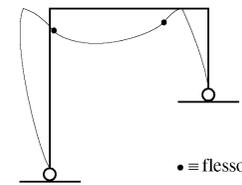
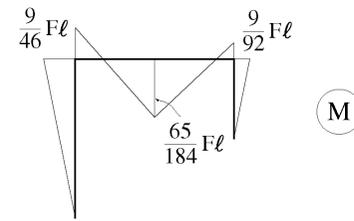
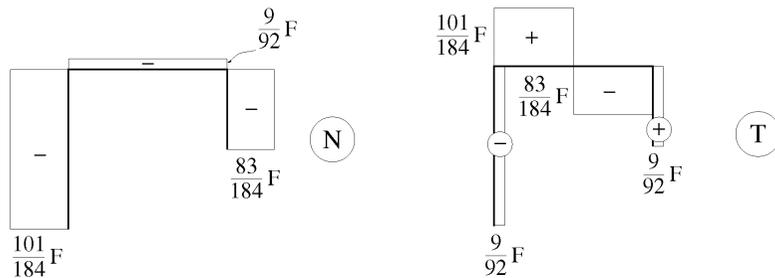
$$\varphi_C = -\frac{2Xl(2l)}{6EJ} - \frac{Xl(2l)}{3EJ} + \frac{F(2l)^2}{16EJ} = -\frac{4Xl^2}{3EJ} + \frac{Fl^2}{4EJ}$$

$$\xi_A = \frac{X(2l)^3}{3EJ} + \varphi_B(2l) = 6\frac{Xl^3}{EJ} - \frac{Fl^3}{2EJ}$$

$$\xi_D = -\frac{Xl^3}{3EJ} + \varphi_C l = -\frac{5Xl^3}{3EJ} + \frac{Fl^3}{4EJ}$$

$$\xi_A = \xi_D \implies 6\frac{Xl^3}{EJ} - \frac{Fl^3}{2EJ} = -\frac{5Xl^3}{3EJ} + \frac{Fl^3}{4EJ} \implies \frac{23Xl^3}{3EJ} = \frac{3Fl^3}{4EJ}$$

$$X = \frac{9}{92}F$$



curva delle pressioni

Spostamenti e rotazioni:

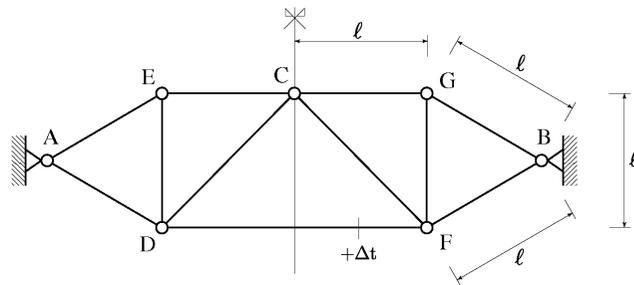
$$\varphi_B = -\frac{2}{23} \frac{Fl^2}{EJ}$$

$$\varphi_C = \frac{11}{92} \frac{Fl^2}{EJ}$$

$$\xi_B = \xi_C = -\frac{2}{23} \frac{Fl^3}{EJ}$$

$$\eta_E = -\frac{2Xl(2l)^2}{16EJ} - \frac{Xl(2l)^2}{16EJ} + \frac{F(2l)^3}{48EJ} = \frac{103}{1104} \frac{Fl^3}{EJ} = .093 \frac{Fl^3}{EJ}$$

3.6 Esercizio 21



- 1) Risolvere la struttura iperstatica illustrata soggetta ad una variazione termica uniforme nell'asta DF, supponendo che tutte le aste abbiano area uguale;
- 2) Compilare una tabella riassuntiva che riporti la forza normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
- 3) Calcolare lo spostamento verticale del nodo C;
- 4) Valutare la variazione termica minima che rende instabile per flessione laterale l'asta DF, supponendo che le cerniere in corrispondenza dei nodi siano sferiche (i valori numerici necessari per il calcolo sono riportati di seguito).
- 5) Disegnare la deformata elastica della struttura;

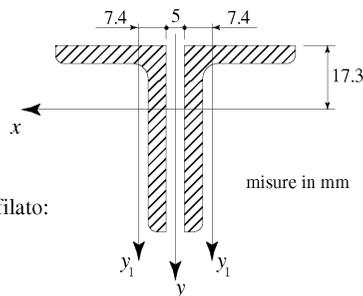
Valori numerici (da utilizzare per il quesito no 4):

$l = 2.00\text{m}$
 $\alpha = 0.000012\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

2 Profilati accoppiati
 L UNI EU 57 - 50x30x5

Valori relativi al singolo profilato:

$A = 3.78\text{ cm}^2$
 $J_x = 9.36\text{ cm}^4$
 $J_{y_1} = 2.51\text{ cm}^4$



(r)

Aste	Forze Normali
CG	-X
CF	0
GF	$\frac{X}{\sqrt{3}}$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}X$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}X$

Struttura principale isostatica
 Congruenza: $\xi_F = \alpha \Delta t l - \frac{Xl}{EA}$

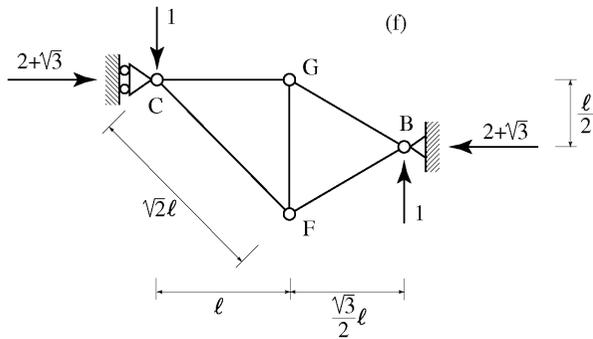
(f)

Aste	Forze Normali
CG	-1
CF	0
GF	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

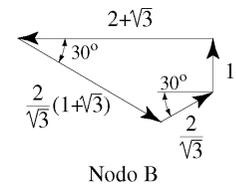
Schema delle forze per il calcolo dello spostamento ξ_F con il principio dei lavori virtuali

$L_e = \xi_F$, $L_i = \sum_h N_h^{(f)} \frac{N_h^{(r)} l_h}{EA} = \frac{Xl}{EA} (1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}) = 4 \frac{Xl}{EA}$

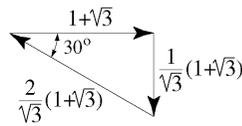
Congruenza: $4 \frac{Xl}{EA} = \alpha \Delta t l - \frac{Xl}{EA} \implies X = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t$



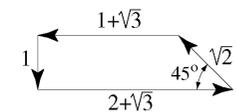
Schema delle forze per il calcolo dello spostamento η_C con il principio dei lavori virtuali



Nodo B



Nodo G



Nodo C

Aste	Tipo	Sforzi Normali (a meno di $EA\alpha\Delta t$)
CG	Puntone	$\frac{1}{5}$
CF	=====	0
GF	Tirante	$\frac{1}{5\sqrt{3}}$
BG	Puntone	$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
BF	Puntone	$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
DF	Puntone	$\frac{1}{5}$

Aste	Forze Normali
CG	$-(1+\sqrt{3})$
CF	$-\sqrt{2}$
GF	$\frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$L_e = \eta_C$

$$L_i = \sum_h N_h^{(f)} \frac{N_h^{(r)} \ell_h}{EA} = \frac{X\ell}{EA} \left\{ (1+\sqrt{3}) + \frac{1}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3} \right\}$$

$$= \frac{X\ell}{EA} \left\{ \frac{8}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3} \right\} = \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \frac{X\ell}{EA}$$

$$\eta_C = \frac{1}{5} \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \alpha \Delta t \ell$$

$\ell = 2.00\text{m}$
 $\alpha = 0.000012 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

2 Profilati accoppiati
 L UNI EU 57 - 50x30x5

Valori relativi al singolo profilato:

$A = 3.78 \text{ cm}^2$
 $J_x = 9.36 \text{ cm}^4$
 $J_{y1} = 2.51 \text{ cm}^4$

Valori relativi ai due profilati accoppiati:

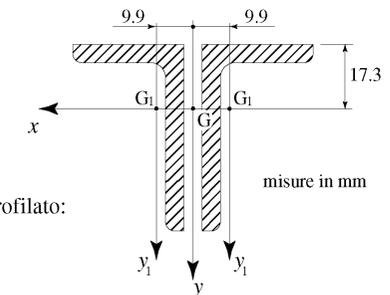
$A = 2 \times 3.78 = 7.56 \text{ cm}^2$
 $J_x = 2 \times 9.36 = 18.7 \text{ cm}^4$
 $J_y = 2 \times (2.51 + 3.78 \times 0.99^2) = 12.4 \text{ cm}^4$

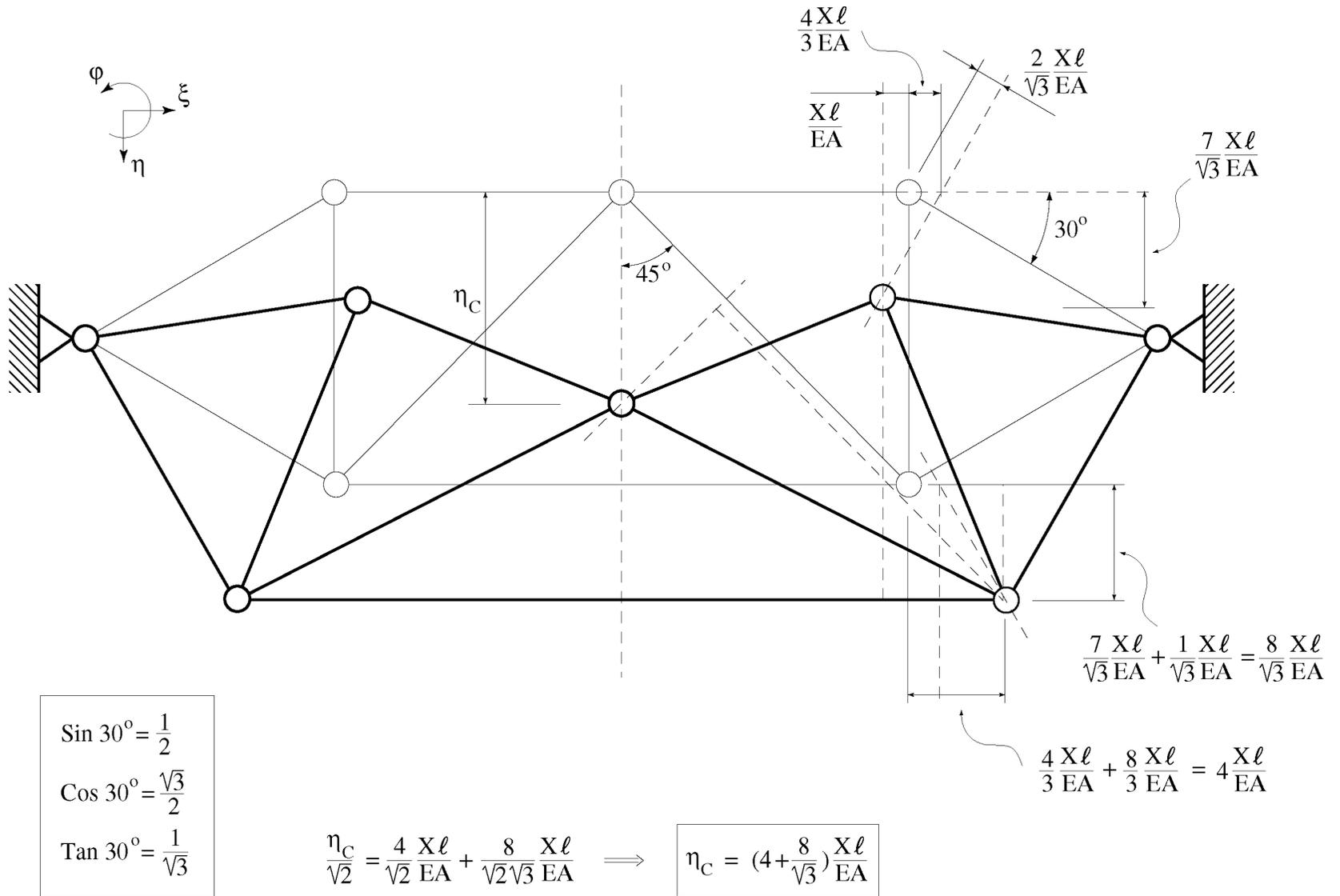
Equazione determinatrice della variazione critica di temperatura:

$$\pi^2 \frac{EJ_y}{(2\ell)^2} = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t_{cr}$$

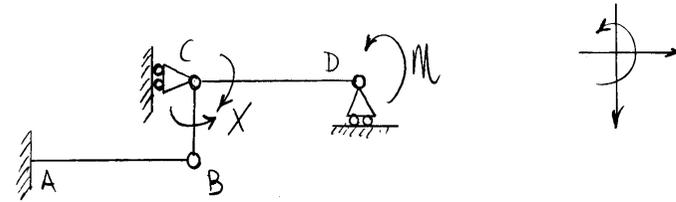
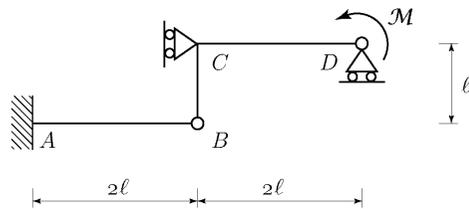
$$\Delta t_{cr} = \frac{5 \pi^2 J_y}{4 \alpha \ell^2 A} = \frac{5 \times \pi^2 \times 12.4}{4 \times 0.000012 \times (200)^2 \times 7.56}$$

$$\Delta t_{cr} = 42 \text{ } ^\circ\text{C}$$





3.7 Esercizio 22



Struttura principale isostatica

Congruenza: $\varphi_{CD} = \varphi_{CB}$

1) Risolvere la struttura una volta iperstatica con il metodo delle forze, utilizzando il metodo cinematico per la scrittura dell'equazione di congruenza;

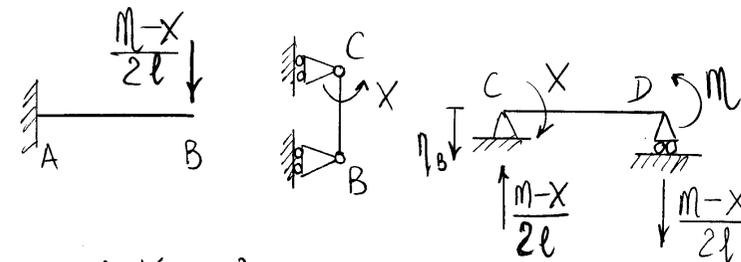
2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni e disegnare la curva delle pressioni;

3) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;

4) Disegnare la deformata elastica della struttura;

5) Calcolare la rotazione e lo spostamento verticale del nodo C;

6) Risolvere la struttura utilizzando il principio dei lavori virtuali per la scrittura dell'equazione di congruenza.

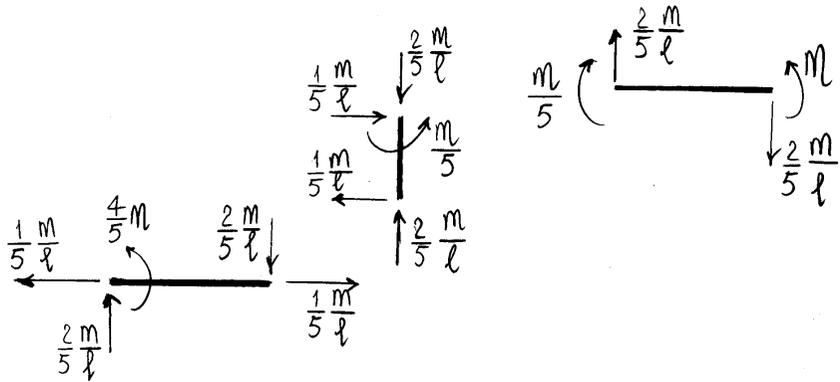
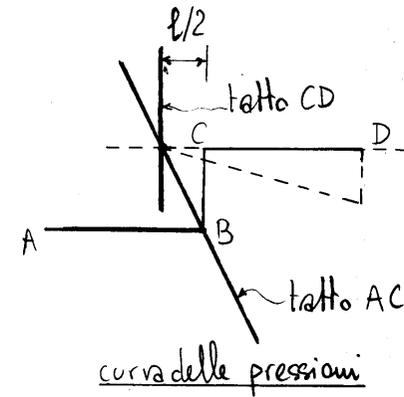


$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_B = \frac{\frac{M-X}{2l} (2l)^3}{3EJ} \\ \varphi_{CB} = \frac{Xl}{3EJ} \\ \varphi_{CD} = -\frac{X(2l)}{3EJ} - \frac{M(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_B}{2l} \end{array} \right.$$

Equazione risolvente:

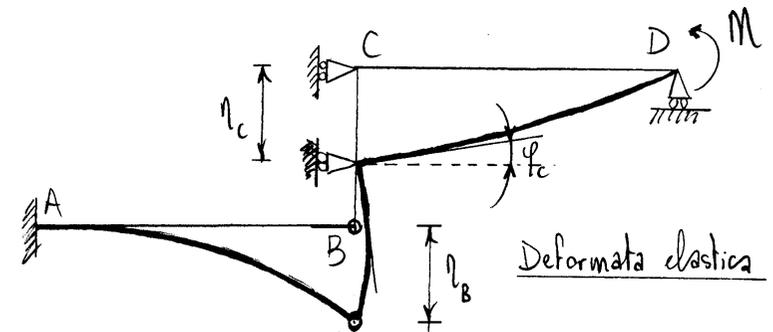
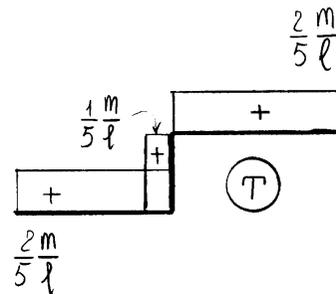
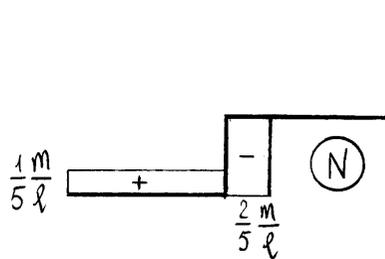
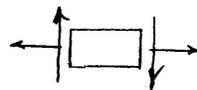
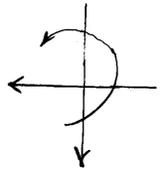
$$-\frac{2 \times l}{3 EJ} - \frac{1 \times ml}{3 EJ} + \frac{2 \times ml}{3 EJ} - \frac{2 \times l}{3 EJ} = \frac{1 \times l}{3 EJ}$$

$$\frac{5}{3} X = \frac{1}{3} m \Rightarrow X = \frac{1}{5} m$$

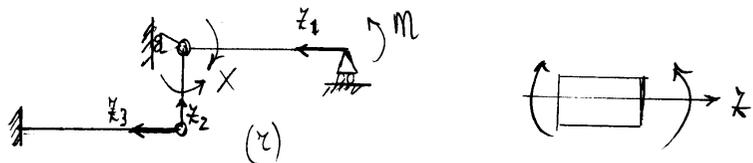


$$\eta_c = \eta_b = \frac{\frac{2}{5} \frac{m}{l} (2l)^3}{3EJ} = \frac{16}{15} \frac{ml^2}{EJ}$$

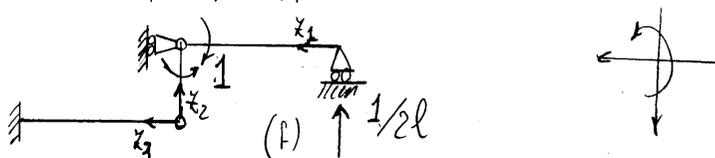
$$\varphi_c = \frac{(m/5)l}{3EJ} = \frac{1}{15} \frac{ml}{EJ}$$



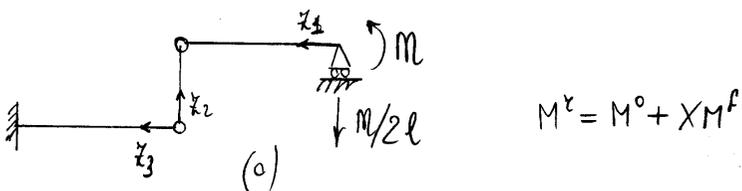
Principio dei lavori virtuali



struttura principale (spostamenti-deformazioni)



schema delle forze-caratteristiche della sollecitazione



$$M^r = M^o + X M^f$$

schema dei carichi

$$\begin{cases} M^f(z_1) = -\frac{1}{2l} z_1 \\ M^o(z_1) = \frac{M}{2l} z_1 - M \\ M^r(z_1) = \frac{M-X}{2l} z_1 - M \end{cases} \begin{cases} M^f(z_2) = \frac{1}{l} z_2 \\ M^o(z_2) = 0 \\ M^r(z_2) = \frac{X}{l} z_2 \end{cases} \begin{cases} M^f(z_3) = -\frac{1}{2l} z_3 \\ M^o(z_3) = \frac{M}{2l} z_3 \\ M^r(z_3) = \frac{M-X}{2l} z_3 \end{cases}$$

$$L_{ve} = \varphi_{CB} - \varphi_{CD}$$

$$L_{vi} = \int_0^{2l} \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{M}{2l} z_1 - \frac{M-X}{4l^2} z_1^2 \right\} dz_1$$

$$+ \int_0^l \frac{X}{EJ l^2} z_2^2 dz_2$$

$$- \int_0^{2l} \frac{M-X}{EJ 4l^2} z_3^2 dz_3$$

$$= \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{M}{4l} (2l)^2 - \frac{M-X}{12l^2} (2l)^3 \right.$$

$$+ \frac{X}{3l^2} l^3$$

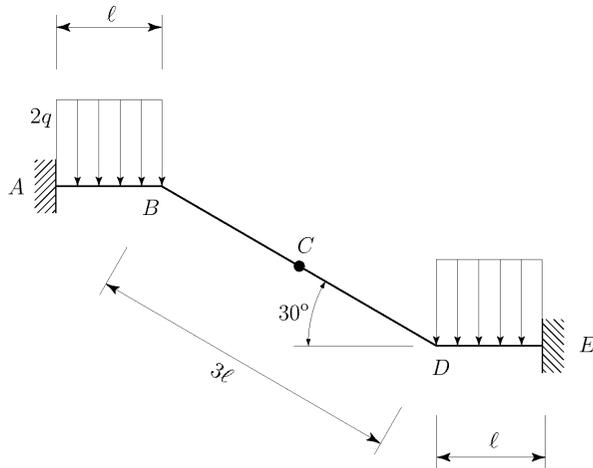
$$\left. - \frac{M-X}{12l^2} (2l)^3 \right\}$$

$$= \frac{l}{EJ} \left\{ M - \frac{4}{3}(M-X) + \frac{1}{3}X \right\}$$

$$= \frac{l}{EJ} \left\{ -\frac{1}{3}M + \frac{5}{3}X \right\}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \varphi_{CB} - \varphi_{CD} = \frac{l}{EJ} \left\{ -\frac{1}{3}M + \frac{5}{3}X \right\}$$

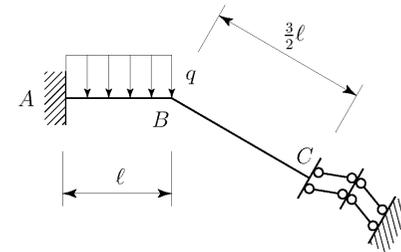
3.8 Esercizio 23



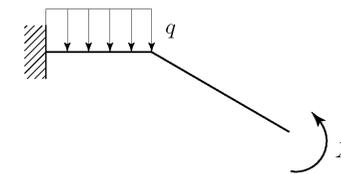
Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C, e in particolare:

- 1) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 2) Calcolare rotazione e spostamento verticale del nodo B e disegnare la deformata elastica;
- 3) Disegnare la curva delle pressioni.

Schema polar emisimmetrico



Schema equivalente



Struttura principale

Congruenza: $\varphi_C = 0$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{Xl}{EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{X(\frac{3}{2}l)}{EJ} + \varphi_B = \frac{5Xl}{2EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \end{cases}$$

$$\varphi_C = 0 \Rightarrow X = \frac{ql^2}{15}$$

Rotazione nodo B:

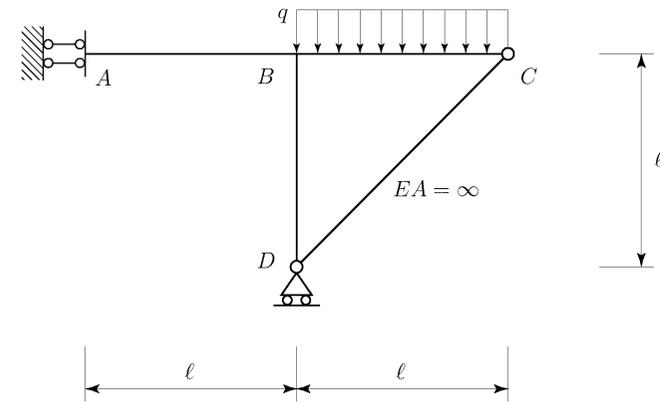
$$\varphi_B = \frac{ql^3}{15EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} = -\frac{ql^3}{10EJ}$$

Spostamento verticale nodo B:

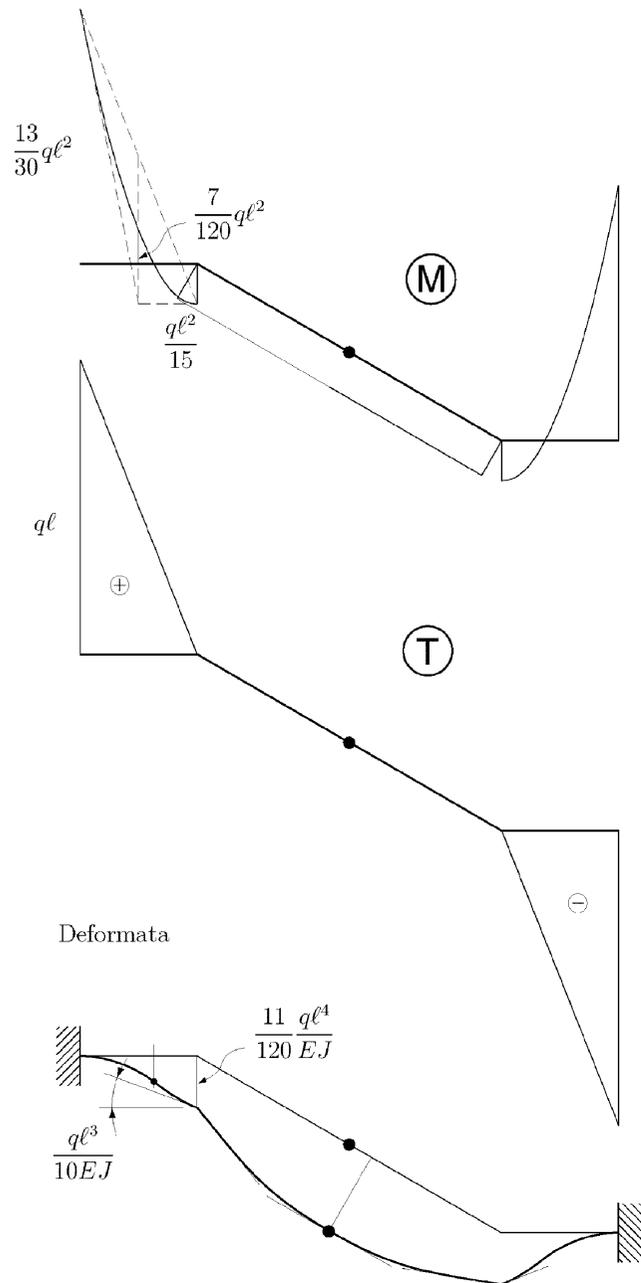
$$\eta_B = -\frac{Xl^2}{2EJ} + \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{11}{120} \frac{ql^4}{EJ}$$

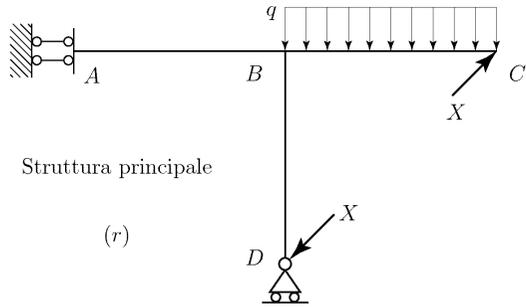
La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette parallele nel tratto AB e non esiste nel tratto BC

3.9 Esercizio 24



- 1) Risolvere la struttura con il metodo delle forze, utilizzando, per il calcolo degli spostamenti che rientrano nell'equazione di congruenza, sia il metodo cinematico che il principio dei lavori virtuali;
- 2) Calcolare le reazioni interne ed esterne e disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Individuare la curva delle pressioni;
- 5) Calcolare la rotazione del nodo B, gli spostamenti dei nodi C e D e la rotazione del pendolo CD.

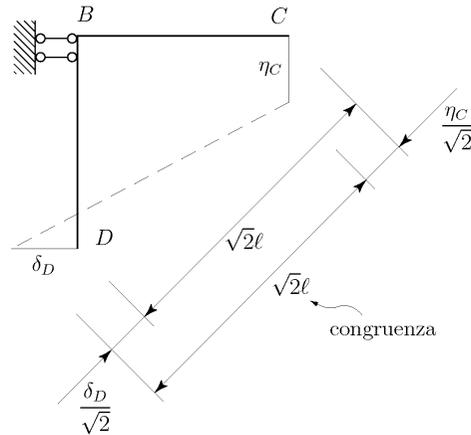
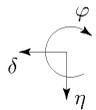
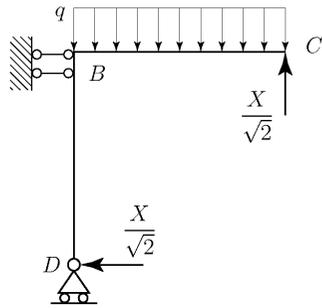




Struttura principale

(r)

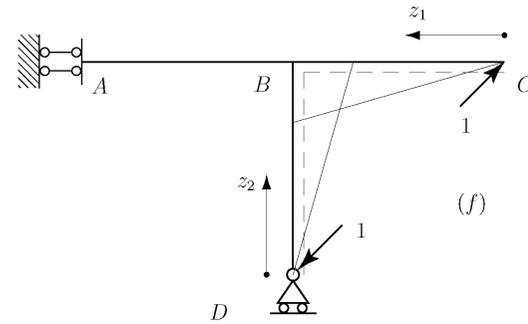
Tenuto conto dell'indefornabilità assiale del pendolo CD , la congruenza richiede che la distanza dei punti C e D resti pari a $\sqrt{2}\ell$ anche dopo la deformazione. Il punto B è un punto fisso e la sua rotazione non influisce sulla condizione di congruenza. Si può allora scrivere la condizione di congruenza facendo riferimento alla struttura con il nodo B vincolato a non ruotare.



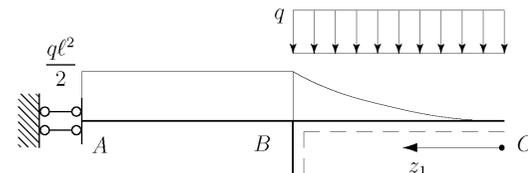
Congruenza: $\frac{\delta_D}{\sqrt{2}} = \frac{\eta_C}{\sqrt{2}}$ da cui: $\delta_D = \eta_C$

$$\begin{cases} \delta_D = \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} \\ \eta_C = -\frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} \end{cases} \Rightarrow 2 \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} = \frac{q\ell^4}{8EJ} \Rightarrow X = \frac{3\sqrt{2}}{16} q\ell$$

Principio dei lavori virtuali



$$\begin{cases} M^f(z_1) = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \\ M^f(z_2) = \frac{z_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



Struttura principale

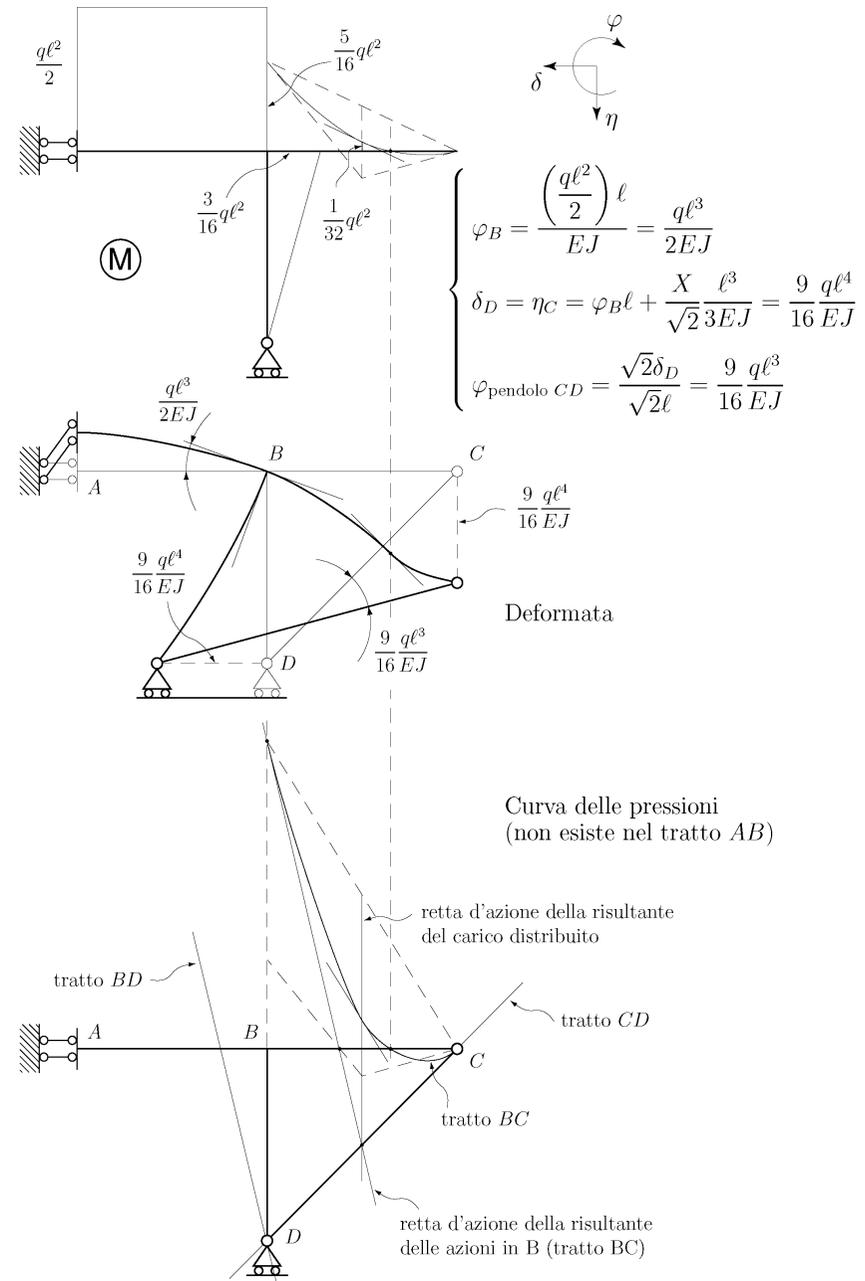
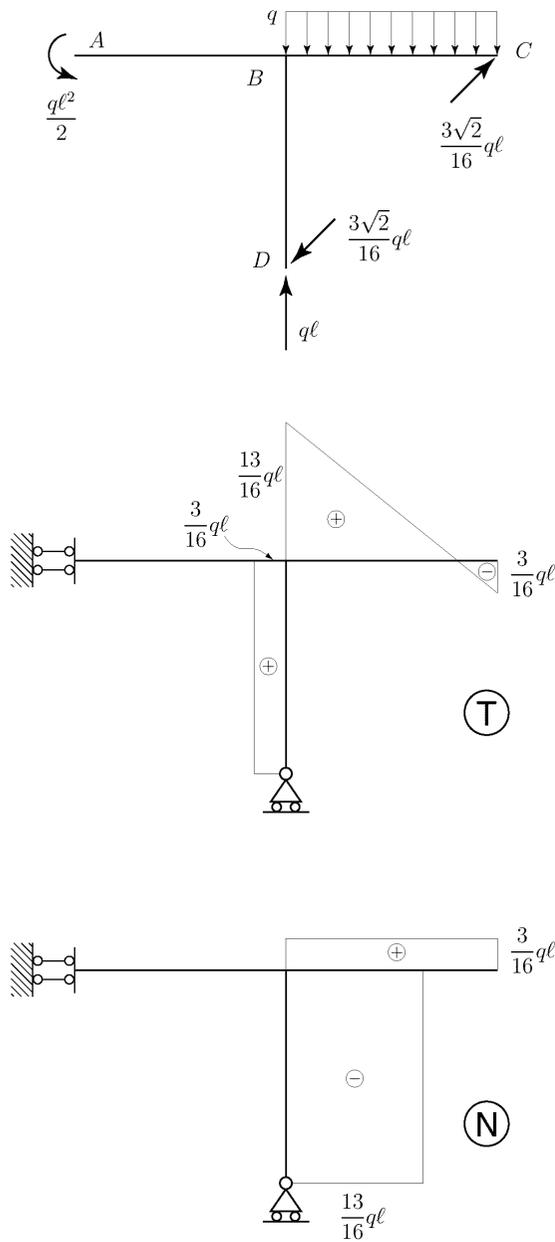
(o)

$$\begin{cases} M^o(z_1) = -\frac{qz_1^2}{2} \\ M^o(z_2) = 0 \end{cases}$$

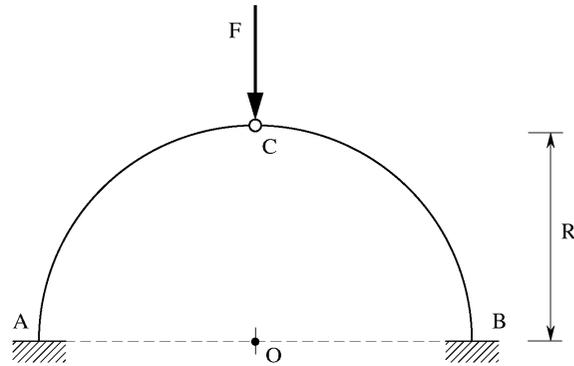
$$\begin{cases} M^r(z_1) = \frac{X}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{qz_1^2}{2} \\ M^r(z_2) = \frac{X}{\sqrt{2}} z_2 \end{cases}$$

Congruenza:

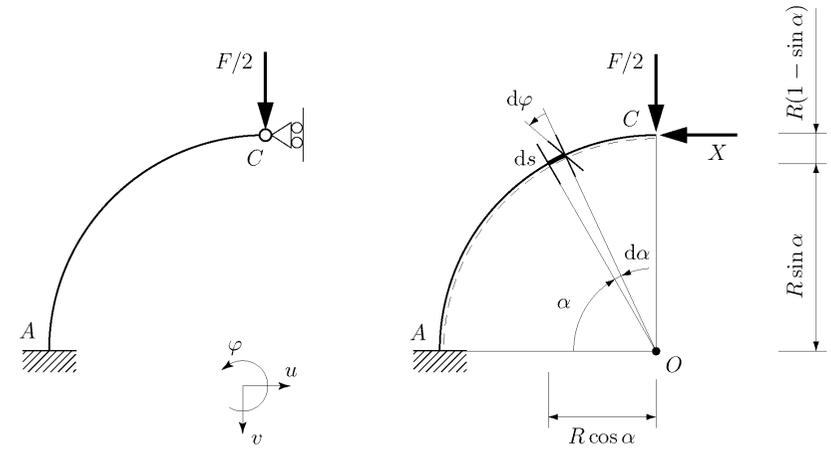
$$\begin{aligned} \int_0^\ell \frac{z_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{qz_1^2}{2} \right) \frac{1}{EJ} dz_1 + \int_0^\ell \frac{z_2}{\sqrt{2}} \frac{X}{\sqrt{2}} z_2 \frac{1}{EJ} dz_2 &= 0 \\ \Rightarrow 2 \frac{X}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^\ell - \frac{q}{2\sqrt{2}} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^\ell &= 0 \\ \Rightarrow \frac{X\ell^3}{3} = \frac{q\ell^4}{8\sqrt{2}} \Rightarrow X &= \frac{3}{8\sqrt{2}} q\ell \end{aligned}$$



3.10 Esercizio 25



Risolvere la struttura iperstatica



Congruenza: $u_C = 0$

$$ds = R d\alpha$$

$$d\varphi = \frac{M}{EJ} R d\alpha$$

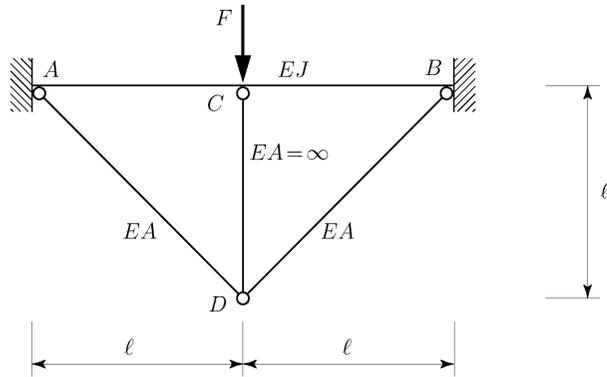
$$du_C = -d\varphi R(1 - \sin \alpha)$$

$$u_C = - \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EJ} R^2 (1 - \sin \alpha) d\alpha$$

$$M = -\frac{F}{2} R \cos \alpha + X R(1 - \sin \alpha)$$

Congruenza: $\frac{F}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha (1 - \sin \alpha) d\alpha - X \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \alpha)^2 d\alpha = 0$

3.11 Esercizio 26



- 1) Risolvere formalmente la struttura tenendo conto della deformabilità assiale dei pendoli AD e BD;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Individuare la curva delle pressioni.

Posto:

$F = 150 \text{ kN}$
 $\ell = 3 \text{ m}$
 $E = 200 \text{ kN/mm}^2$

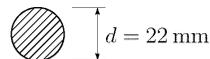
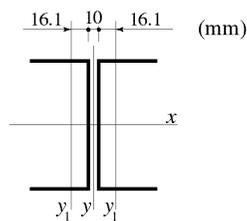
Asta AB (IPE 300):
 $J = 8356 \text{ cm}^4$
 $W = 557 \text{ cm}^3$

Pendolo CD (2 UPN 120):

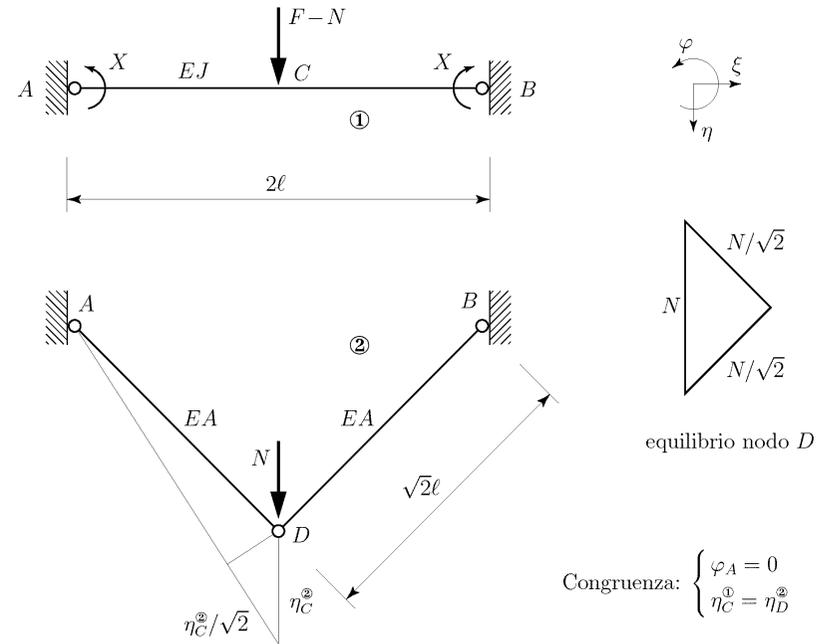
Caratteristiche del singolo profilato:

$J_x = 364 \text{ cm}^4$
 $J_{y_1} = 43.1 \text{ cm}^4$
 $A = 17 \text{ cm}^2$

Pendoli AD e BD (tondi):



- 5) Calcolare la tensione normale massima nell'asta AB.



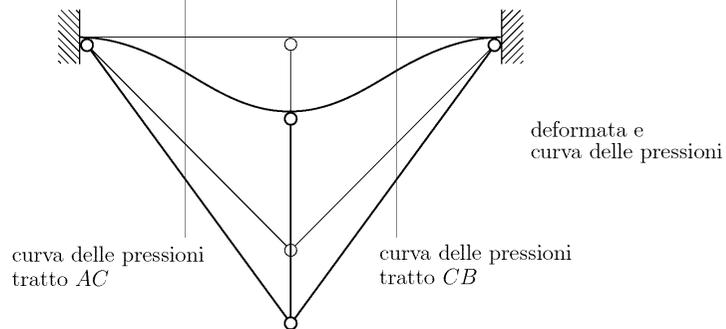
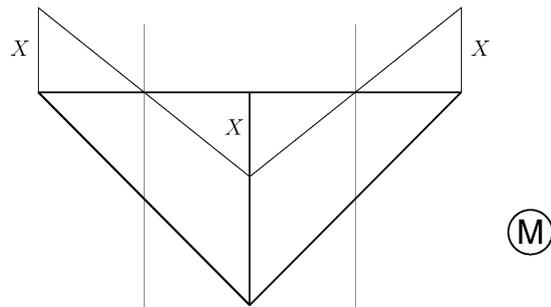
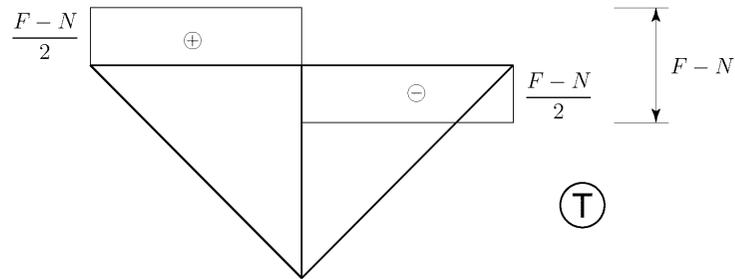
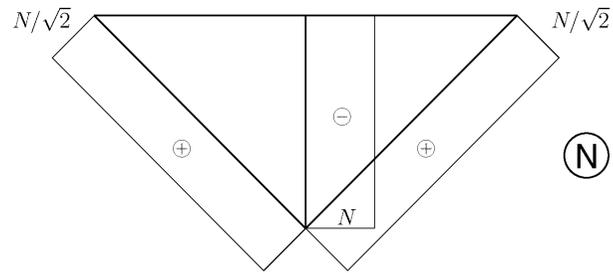
Congruenza: $\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \eta_C^{\textcircled{1}} = \eta_D^{\textcircled{2}} \end{cases}$

$$\begin{cases} \varphi_A = \frac{X(2\ell)}{2EJ} - \frac{(F-N)(2\ell)^2}{16EJ} \\ \eta_C^{\textcircled{1}} = \frac{(F-N)(2\ell)^3}{48EJ} - 2\frac{X(2\ell)^2}{16EJ} \\ \frac{\eta_D^{\textcircled{2}}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{N}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{2}\ell}{EA} \Rightarrow \eta_D^{\textcircled{2}} = \sqrt{2} \frac{N\ell}{EA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \Rightarrow X = (F-N) \frac{\ell}{4} \Rightarrow \eta_C^{\textcircled{1}} = \frac{2X\ell^2}{3EJ} - \frac{X\ell^2}{2EJ} = \frac{X\ell^2}{6EJ} \\ \eta_C^{\textcircled{1}} = \eta_D^{\textcircled{2}} \Rightarrow \frac{X\ell^2}{6EJ} = \sqrt{2} \frac{N\ell}{EA} \Rightarrow X = \beta N\ell \text{ dove } \beta = 6\sqrt{2} \frac{J}{A\ell^2} \end{cases}$$

Si ottiene infine:

$$\begin{cases} N = \frac{F}{1+4\beta} \\ X = \frac{\beta}{1+4\beta} F\ell \end{cases}$$



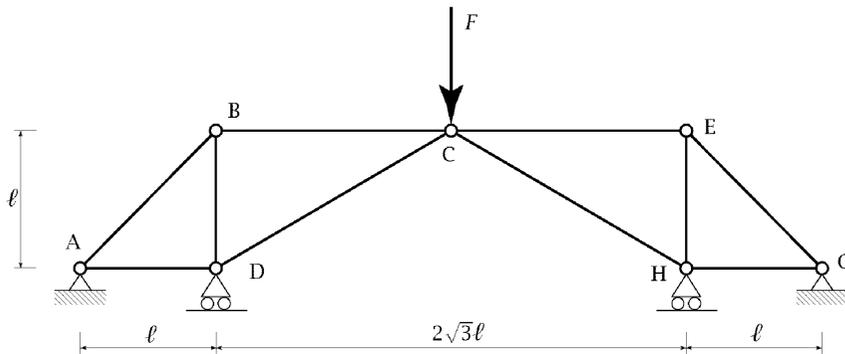
Nota l'area del tondo componente i pendoli AD e BD , restano determinati il coefficiente β e le reazioni N e X :

$$\beta = 6\sqrt{2} \frac{83\,560\,000}{380 \times 3\,000^2} = 0.207 \Rightarrow \begin{cases} N = 82 \text{ kN} \\ X = 51 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

tensione normale massima nell'asta AB

$$\sigma_{\max} = \frac{X}{W} = 92 \text{ N/mm}^2.$$

3.12 Esercizio 27



1) Risolvere la struttura reticolare iperstatica sopra illustrata utilizzando il metodo delle forze, scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali e supponendo che tutte le aste abbiano area uguale;

2) Compilare una tabella riassuntiva che riporti la forza normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;

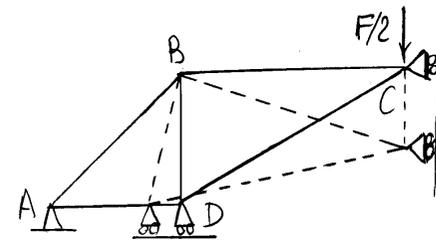
3) Calcolare con il metodo cinematico gli spostamenti dei punti B, C e D;

4) Disegnare la deformata elastica della struttura.

Soluzione di confronto

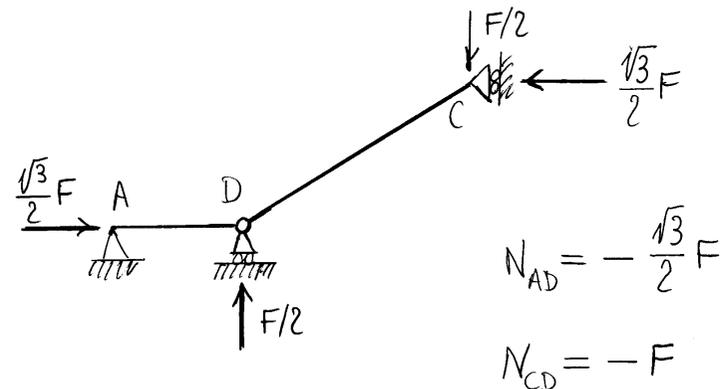
Risulta possibile deformare le aste AD e CD senza deformare le restanti aste soddisfacendo le

condizioni imposte dai vincoli.

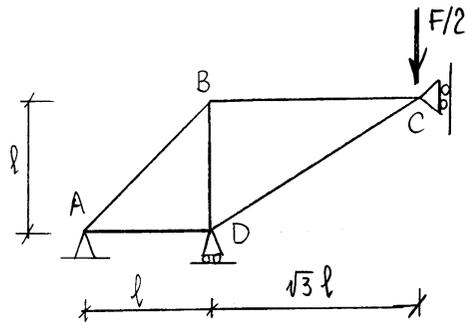


Dato che il nodo B non è caricato risulta quindi

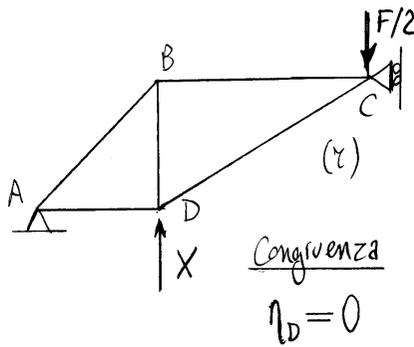
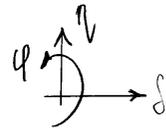
possibile assorbire il carico $F/2$ tramite le aste AD e CD soddisfacendo la congruenza e ottenendo così la soluzione del sistema iperstatico.



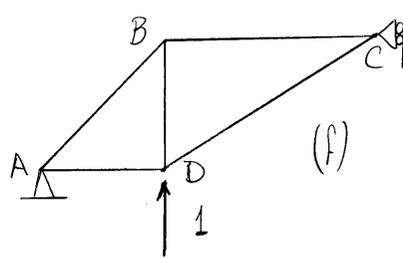
Soluzione col metodo delle forze



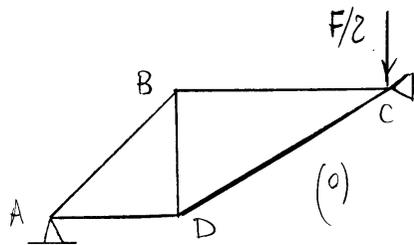
Struttura equivalente per simmetria



Struttura principale
(schema degli spostamenti - deformazioni congruenti)

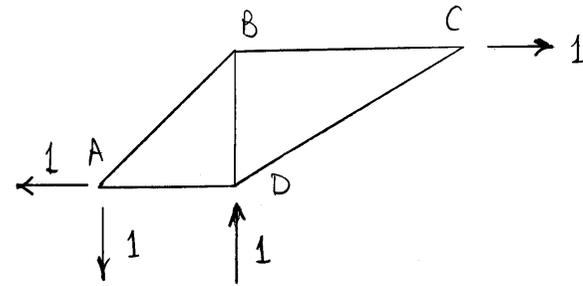


schema delle forze - caratteristiche della sollecitazione equilibrate
(per il calcolo di η_D nella struttura principale)



Struttura principale soggetta alle sole forze esterne

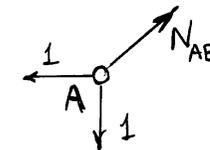
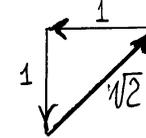
Schema (f)



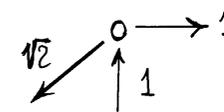
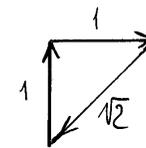
Equilibrio nodo C \Rightarrow Asta CD scarica, $N_{BC} = 1$

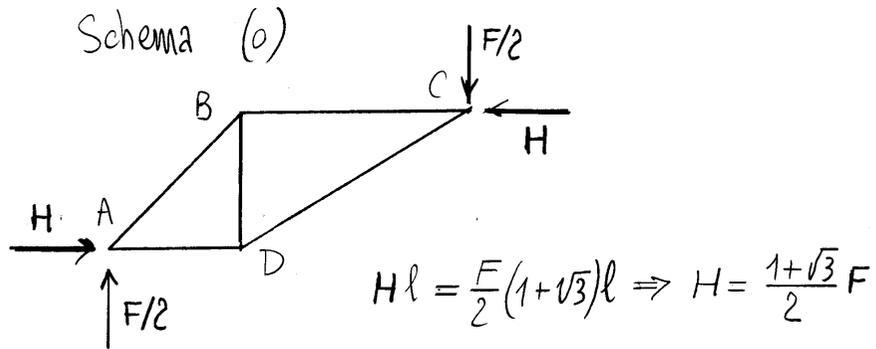
Equilibrio nodo D \Rightarrow Asta AD scarica, $N_{BD} = -1$

Equilibrio nodo A $\Rightarrow N_{AB} = \sqrt{2}$

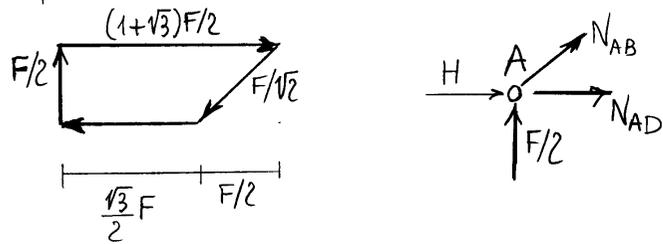


Equilibrio nodo B (per controllo)

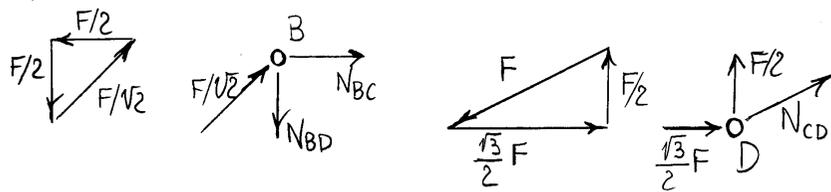




Equilibrio nodo A $\Rightarrow N_{AB} = -F/\sqrt{2}$, $N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$



Equilibri nodi B e D $\Rightarrow N_{BC} = -\frac{F}{2}$, $N_{BD} = \frac{F}{2}$, $N_{CD} = -F$



Equilibria nodo C (per controllo)

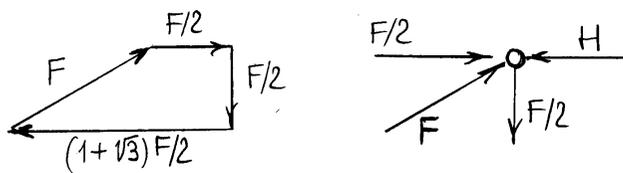


Tabella riassuntiva

					$X = F/2$	
Asta	l_i	$N^{(1)}$	$N^{(0)}$	$N^{(2)}$	Tipo	N (in moduli)
AB	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}$	$-\frac{F}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}}$	Scarica	0
AD	l	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	Puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2}F$
BD	l	-1	$\frac{F}{2}$	$-X + \frac{F}{2}$	Scarica	0
BC	$\sqrt{3}l$	1	$-\frac{F}{2}$	$X - \frac{F}{2}$	Scarica	0
CD	$2l$	0	$-F$	$-F$	Puntone	F

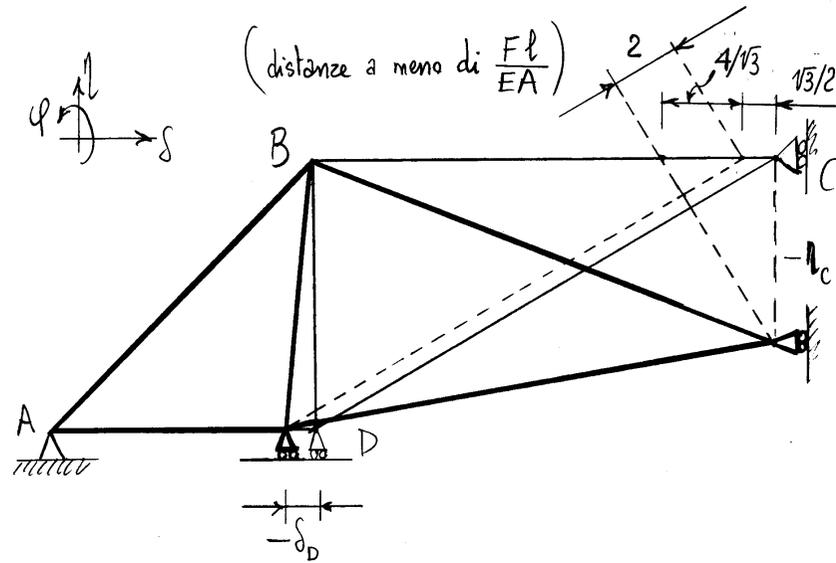
Principio dei lavori virtuali:

$$1 \cdot \eta_D = \sum_{aste\ i} N_i^{(F)} \frac{N_i^{(X)} l_i}{EA}$$

$$= \frac{l}{EA} \left\{ \sqrt{2} \left(\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} - 1 \left(-X + \frac{F}{2} \right) + 1 \left(X - \frac{F}{2} \right) \sqrt{3} \right\}$$

$$= (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \frac{l}{EA} \left(X - \frac{F}{2} \right)$$

$$\eta_D = 0 \Rightarrow X = \frac{F}{2}$$

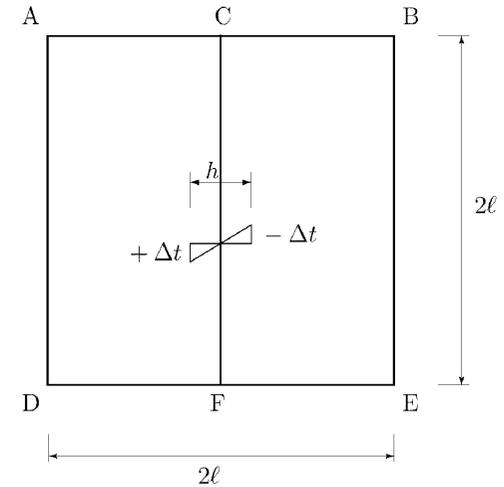


$$-\delta_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$-\eta_C = \sqrt{3} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \eta_C = \frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$\delta_B = \eta_B = 0$$

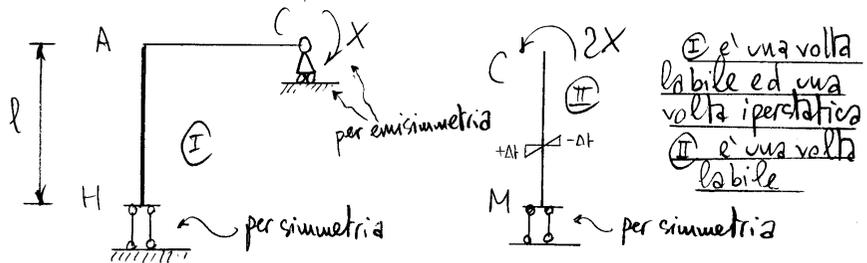
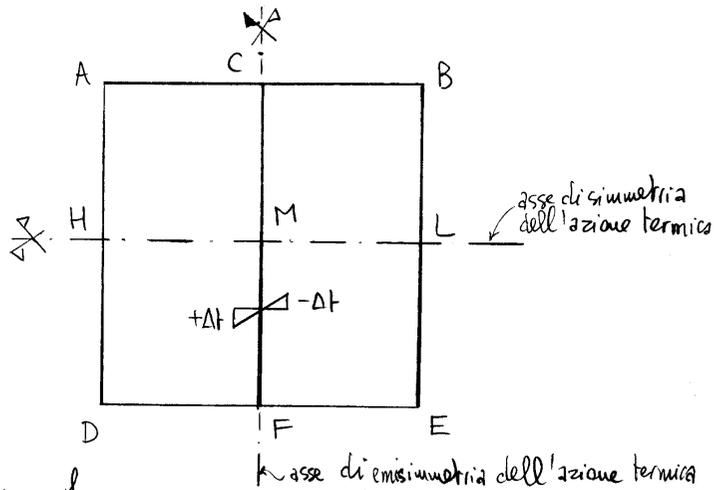
3.13 Esercizio 28



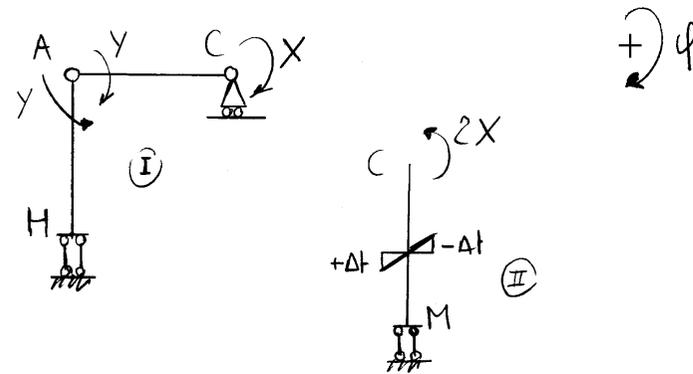
La struttura inflessa di figura è soggetta ad una distorsione termica a farfalla nel montante centrale:

- 1) Analizzare cinematicamente e staticamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura;
- 3) Disegnare i diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale per la struttura complessiva;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni per la struttura complessiva;
- 5) Calcolare la rotazione dei nodi A e C;
- 6) Disegnare la deformata della struttura complessiva.

La struttura risulta 3 volte labile e sei volte iperstatica. Presenta inoltre 2 assi di simmetria, 1 verticale rispetto al quale la distorsione termica è emisimmetrica, 1 orizzontale rispetto al quale la distorsione termica è simmetrica.



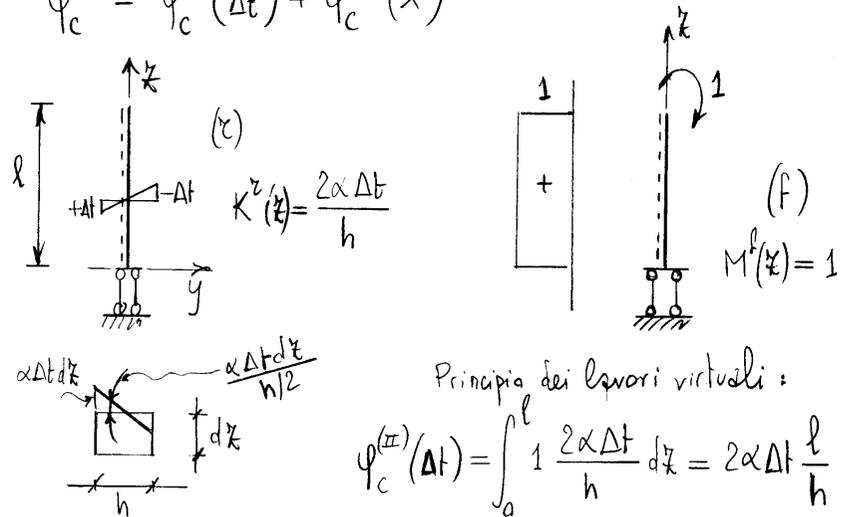
Per emisimmetria la forza normale in C di (II) è nulla
 Per equilibrio alla traslazione orizzontale di (II) il taglio in C è nullo



Congruenza :

$$\begin{cases} \varphi_c^{(I)} = \varphi_c^{(II)} \\ \varphi_{AC} = \varphi_{AH} \end{cases}$$

$$\varphi_c^{(II)} = \varphi_c^{(II)}(\Delta t) + \varphi_c^{(II)}(X)$$



Principio dei lavori virtuali :

$$\varphi_c^{(II)}(\Delta t) = \int_0^l 1 \frac{2\alpha\Delta t}{h} dz = 2\alpha\Delta t \frac{l}{h}$$

$$\psi_c^{(I)} = \frac{Xl}{3EJ} - \frac{Yl}{6EJ}$$

$$\psi_c^{(II)} = 2\alpha\Delta t \frac{l}{h} - \frac{2Xl}{EJ}$$

$$\psi_{AC} = -\frac{Xl}{6EJ} + \frac{Yl}{3EJ}$$

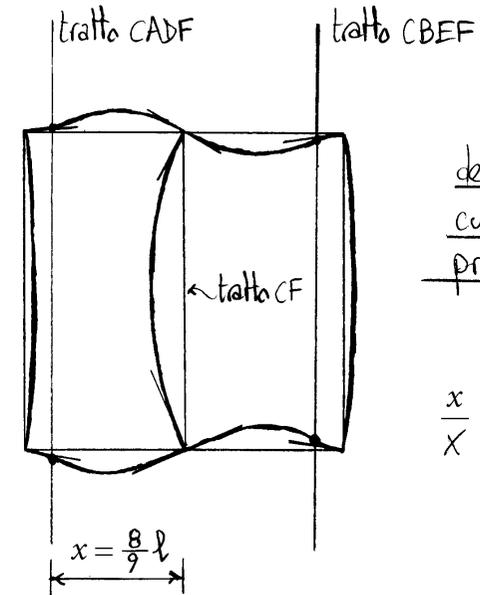
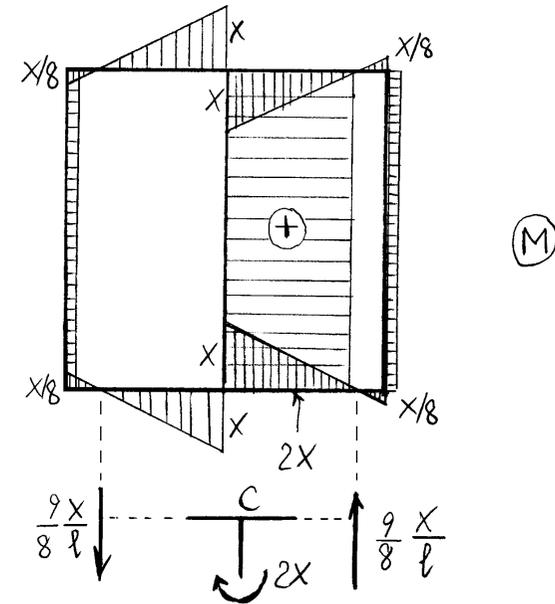
$$\psi_{AH} = -\frac{Yl}{EJ}$$

Congruenza (moltiplicando per $6EJ/l$):

$$\begin{cases} 2X - Y = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} - 12X \\ -X + 2Y = -6Y \end{cases} \Rightarrow$$

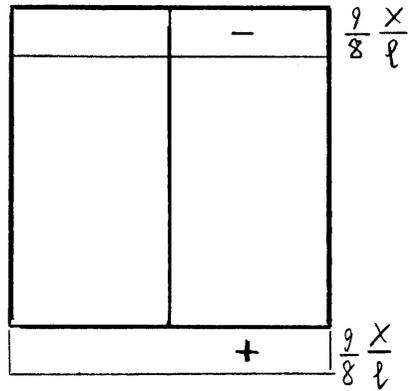
$$\Rightarrow \begin{cases} 14X - Y = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ Y = \frac{X}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{111}{8} X = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{32}{37} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ Y = \frac{4}{37} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \end{cases}$$



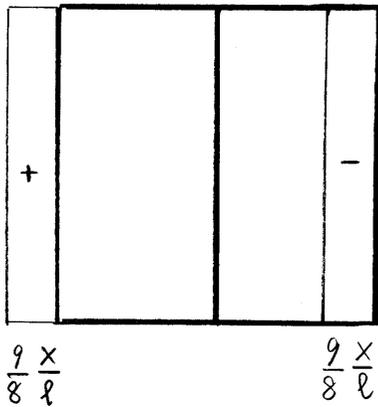
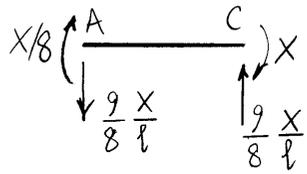
deformata e
curva delle
pressioni

$$\frac{x}{X} = \frac{l}{\frac{9}{8}X}$$



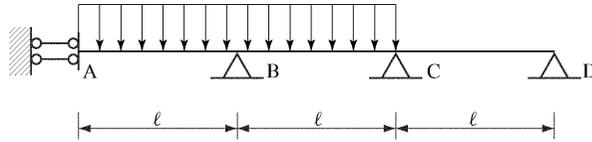
(T)

$$\begin{cases} \varphi_A = -\frac{Yl}{EJ} = -\frac{4}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \\ \varphi_C = 2\alpha \Delta t \frac{l}{h} - \frac{2 \times l}{EJ} = \frac{10}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \end{cases}$$



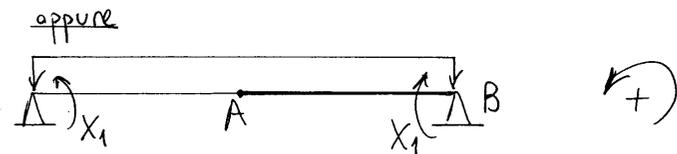
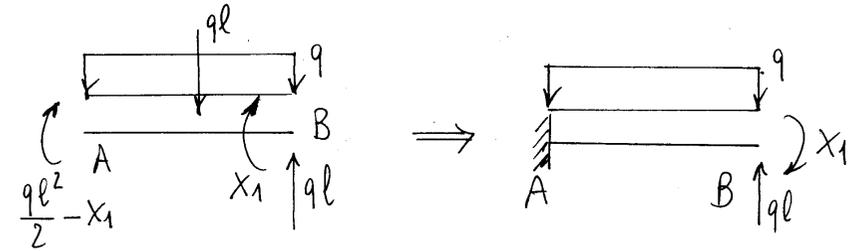
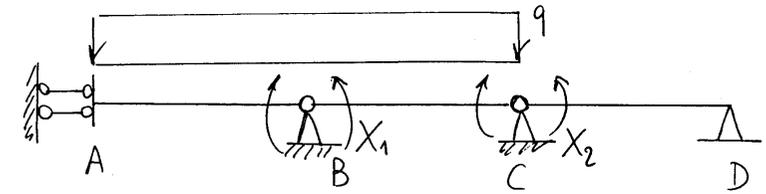
(N)

3.14 Esercizio 29



Data la trave continua di figura:

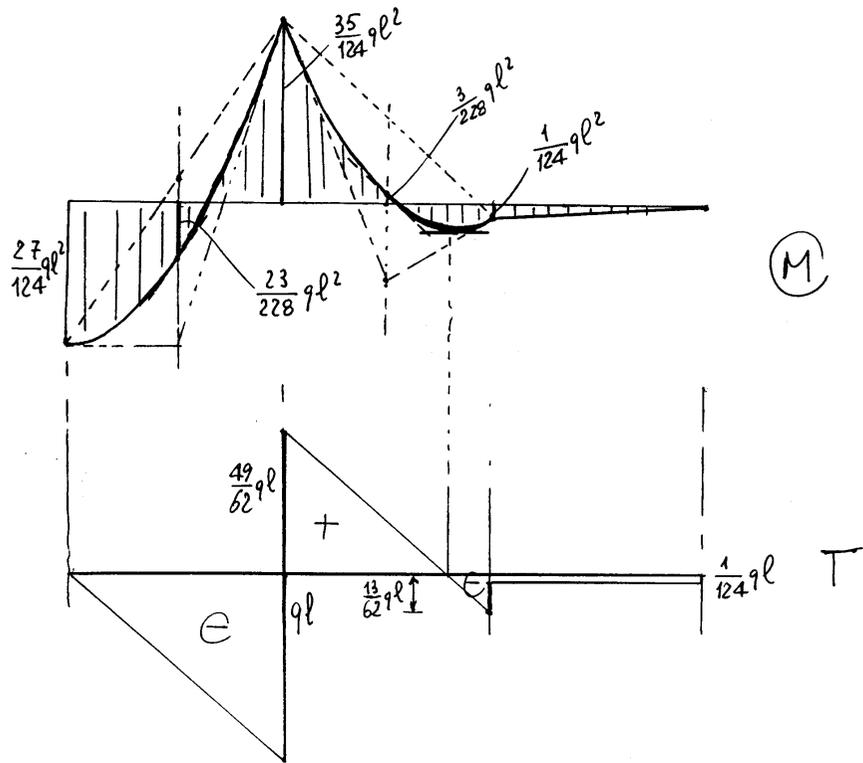
1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Risolvere la struttura;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
4. Calcolare le rotazioni delle sezioni B e C;
5. Disegnare la deformata elastica della struttura.



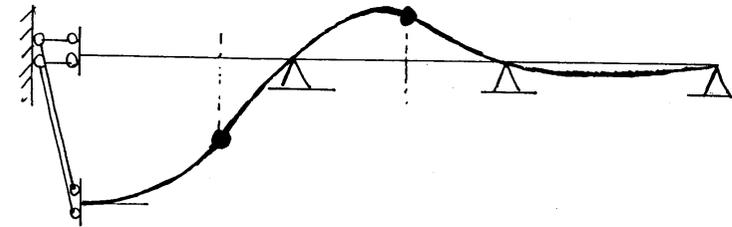
$$\begin{cases} \varphi_{BA} = -\frac{X_1 l}{EJ} + \frac{ql^3}{3EJ} \\ \varphi_{BC} = \frac{X_1 l}{3EJ} + \frac{X_2 l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{CB} = -\frac{X_1 l}{6EJ} - \frac{X_2 l}{3EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{CD} = \frac{X_2 l}{3EJ} \end{cases}$$

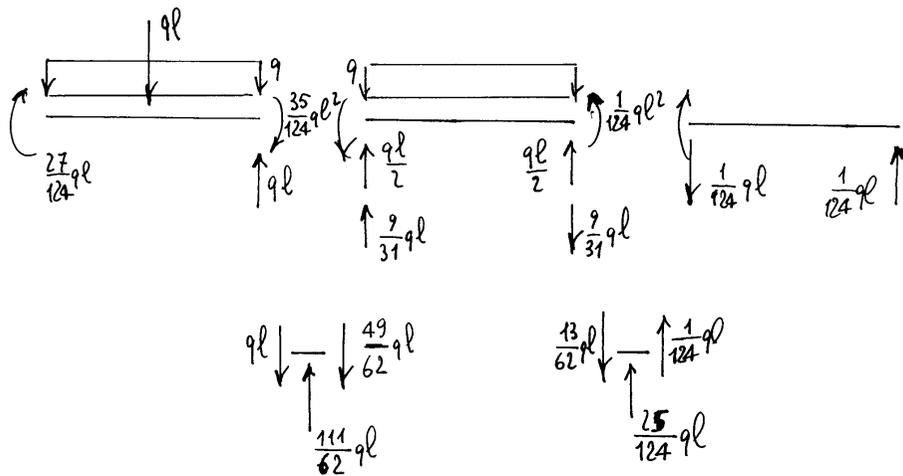
$$\begin{aligned} \varphi_{BA} = \varphi_{BC} &\Rightarrow 32X_1 + 4X_2 = 9ql^2 \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} &\Rightarrow 4X_1 + 16X_2 = 9ql^2 \end{aligned} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{35}{124} 9ql^2 \\ X_2 = -\frac{1}{124} 9ql^2 \end{cases}$$



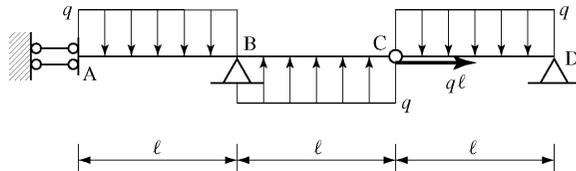
Deformata



$$\begin{cases} \varphi_B = \left(-\frac{35}{124} + \frac{1}{3} \right) \frac{q l^3}{EJ} = \frac{19}{372} \frac{q l^3}{EJ} \\ \varphi_C = -\frac{1}{372} \frac{q l^3}{EJ} \end{cases}$$



3.15 Esercizio 30

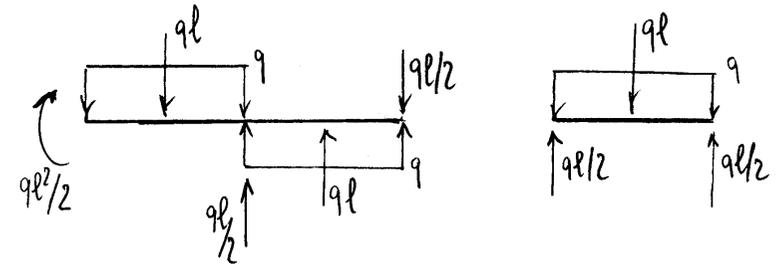


Data la trave di figura:

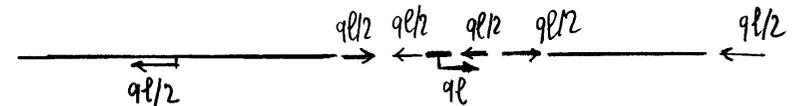
1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Calcolare lo spostamento verticale del nodo C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
5. Determinare il momento flettente in A utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
6. Disegnare la curva delle pressioni;
7. Calcolare la rotazione in B utilizzando il metodo cinematico;
8. Disegnare la deformata elastica della struttura.

Struttura 2 volte iperstatica (assialmente)

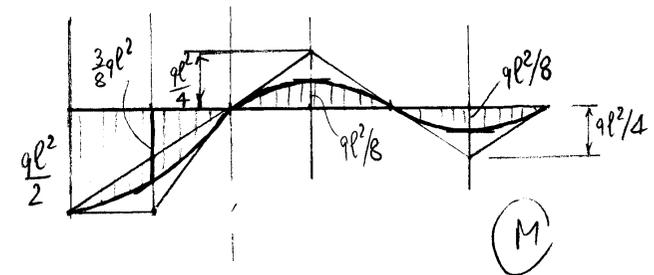
Soluzione flessionale

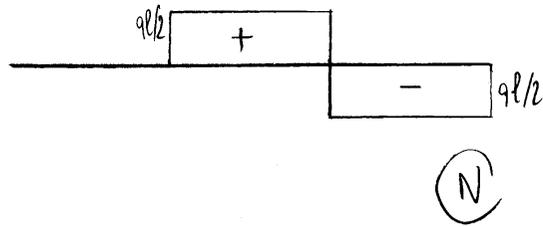
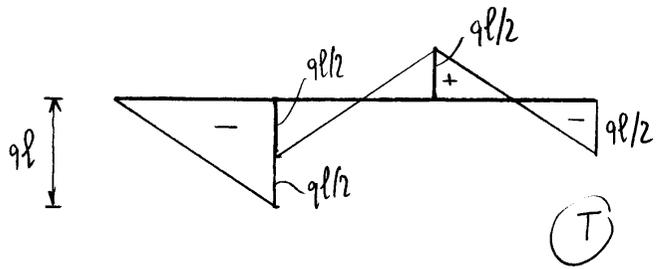


Soluzione assiale

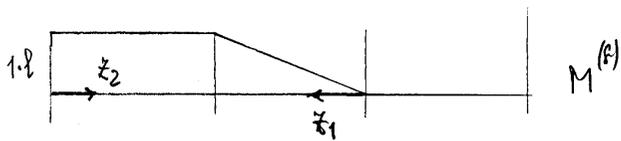
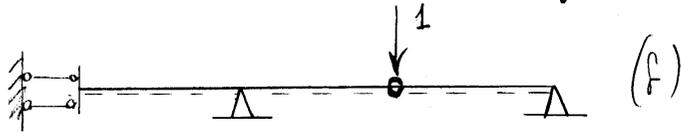
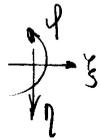


Diagrammi





Spostamento verticale di C



$$\begin{cases} M^{(f)}(z_1) = -z_1 \\ M^{(f)}(z_2) = -l \end{cases} \quad \begin{cases} M^{(z)}(z_1) = \frac{qz_1^2}{2} - \frac{ql}{2}z_1 \\ M^{(z)}(z_2) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qz_2^2}{2} \end{cases}$$

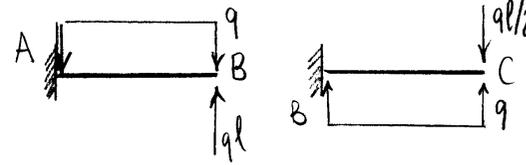
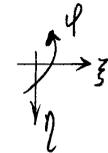
$$L_{ve} = 1 \cdot \eta_c$$

$$L_{vi} = \int_l M^{(f)} \left(\frac{M^{(z)}}{EJ} \right) ds$$

$$= \frac{q}{2EJ} \int_0^l (lz_1^2 - z_1^3) dz_1 + \int_0^l (lz_2^2 - l^3) dz_2$$

$$= \frac{ql^4}{2EJ} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{7}{24} ql^4$$

Verifica col metodo cinematico

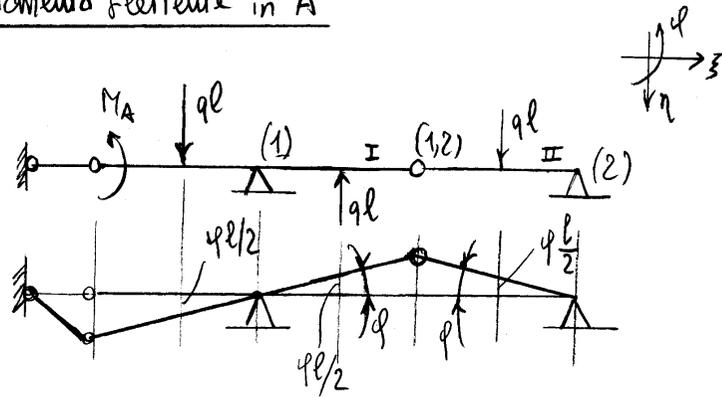


$$\eta_c = \frac{(ql/2)l^3}{3EJ} - \frac{ql^4}{8EJ} - \eta_B l$$

$$\eta_B = \frac{(ql)l^2}{2EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} = \frac{ql^3}{3EJ}$$

$$\eta_c = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{7}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

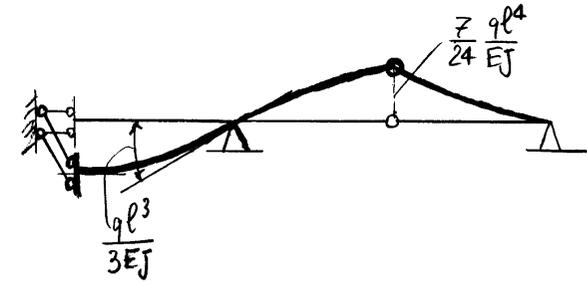
Momento flettente in A



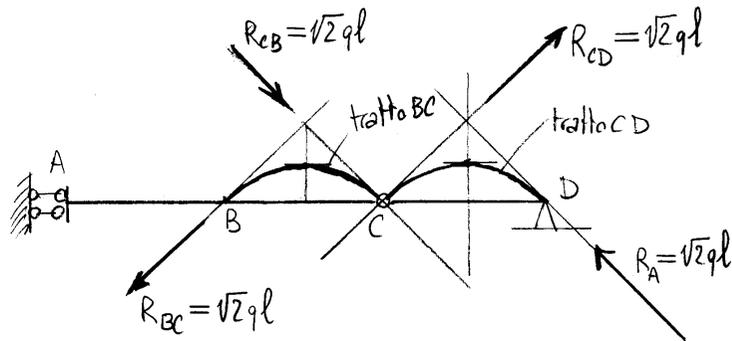
$$M_A \varphi + (ql)\left(\varphi \frac{l}{2}\right) + (ql)\left(\varphi \frac{l}{2}\right) - (ql)\left(\varphi \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$M_A \varphi = -\frac{ql^2}{2} \varphi \Rightarrow M_A = -\frac{ql^2}{2}$$

Deformata

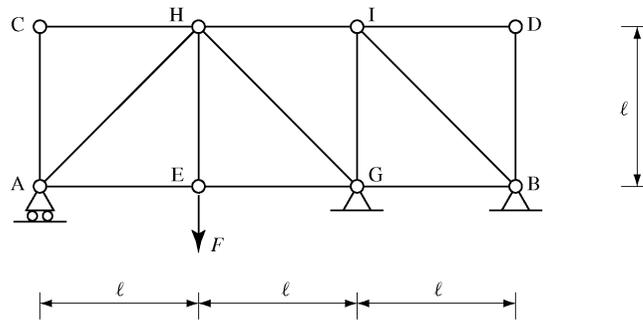


Curva delle pressioni



Nel tratto AB degenera in un fascio di rette verticali

3.16 Esercizio 31



Con riferimento alla figura e supponendo che le aste abbiano area A uguale:

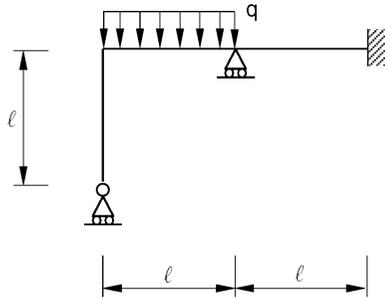
1. Risolvere la struttura reticolare iperstatica utilizzando il metodo delle forze e scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali;
2. Compilare una tabella riassuntiva che riporti la forza normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;

Posto che le aste siano realizzate in acciaio Fe360, di modulo di Young $E = 200$ GPa, e che inoltre sia $F = 150$ kN, $l = 2$ m, $A = 20$ cm² e che infine i momenti di inerzia massimo e minimo delle aste siano $J_{\max} = 140$ cm⁴ e $J_{\min} = 100$ cm⁴:

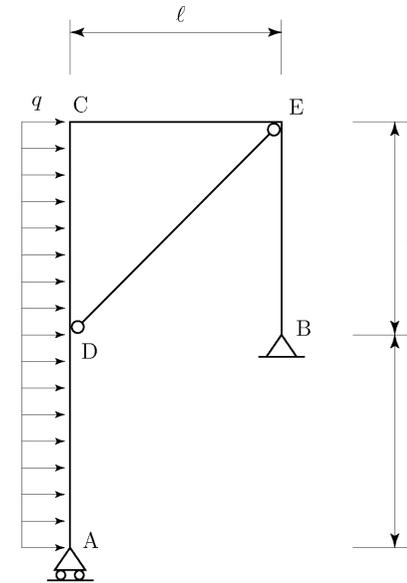
3. Valutare il livello critico della forza F relativamente all'instabilità per flessione laterale delle aste compresse.

Asta	Arca A	Raggio di inerzia minimo $\sqrt{J_{\min}/A}$	Luce ℓ	Snellezza $\ell\sqrt{A/J_{\min}}$	N^f 1	N^o F	N^r $(N^o - XN^f)$	$ N $ F	Tipo
AC	1	1	1	1	=	=	=	0	=
CH	1	1	1	1	=	=	=	0	=
BD	1	1	1	1	=	=	=	0	=
ID	1	1	1	1	=	=	=	0	=
GB	1	1	1	1	=	=	=	0	=
IB	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	=	=	=	0.1049	tirante
HI	1	1	1	1	$-1/\sqrt{2}$	0	$X/\sqrt{2}$	0.0742	tirante
GI	1	1	1	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-X/\sqrt{2}$	0.0742	puntone
AE	1	1	1	1	$1/(2\sqrt{2})$	1/2	$F/2 - X/(2\sqrt{2})$	0.4629	tirante
EG	1	1	1	1	$1/(2\sqrt{2})$	1/2	$F/2 - X/(2\sqrt{2})$	0.4629	tirante
EH	1	1	1	1	0	1	F	1	tirante
AH	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-F/\sqrt{2} + X/2$	0.6547	puntone
HG	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1/2	$-1/\sqrt{2}$	$-F/\sqrt{2} - X/2$	0.7595	puntone

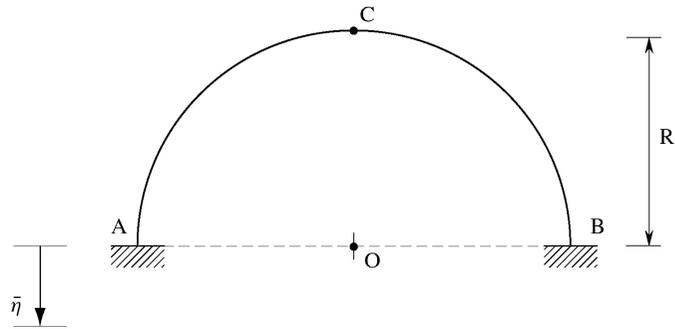
3.17 Esercizi proposti



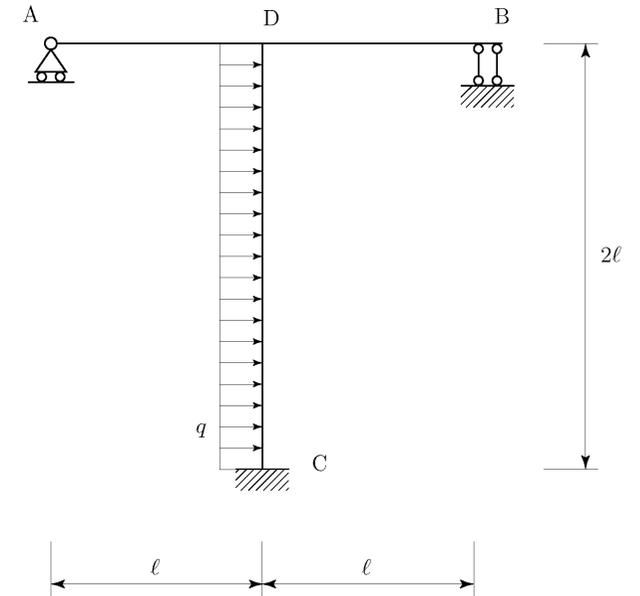
- Risolvere la struttura iperstatica
- Tracciare il diagramma del momento flettente e del taglio
- Disegnare la deformata elastica della struttura



- Risolvere la struttura supponendo il pendolo ED indeformabile assialmente;
- Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- Calcolare le rotazioni dei nodi E, C, D e lo spostamento della travata;
- Disegnare la curva delle pressioni;
- Disegnare la deformata elastica della struttura.

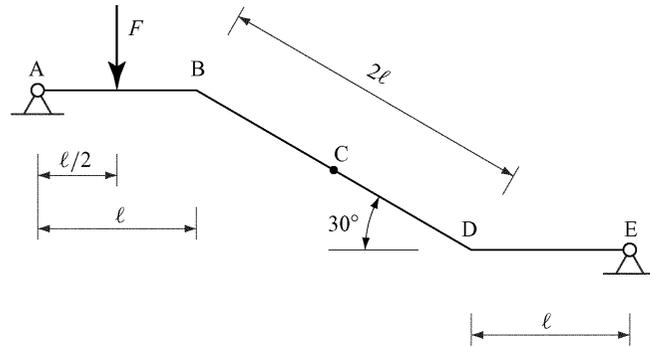


- 1) Risolvere la struttura, soggetta ad un cedimento verticale anelastico dell'incastro in A, tenendo conto della sua simmetria geometrica;
- 2) Scrivere le equazioni del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 3) Disegnare i relativi diagrammi (per l'arco ABC completo), usando quale fondamentale la linea ACB dell'arco (momento flettente dalla parte delle fibre tese) e quotando i valori massimi;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) "Calcolare" lo spostamento verticale complessivo del punto C.

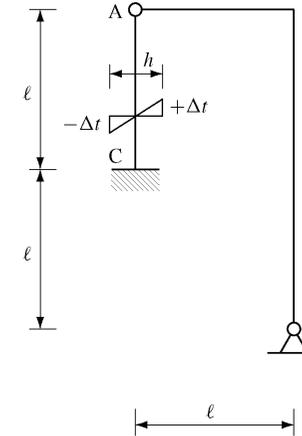


La struttura inflessa di figura è soggetta ad una forza distribuita lungo il montante centrale:

- 1) Analizzare cinematicamente e staticamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura;
- 3) Disegnare i diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale;
- 4) Calcolare la rotazione del nodo D e lo spostamento orizzontale della travata;
- 5) Individuare la curva delle pressioni;
- 6) Disegnare la deformata della struttura.

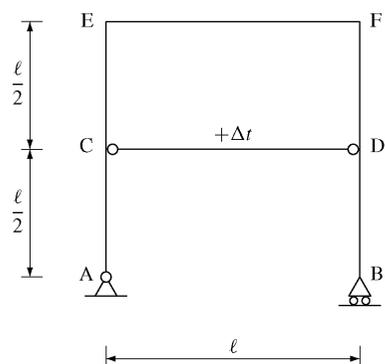


1. Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C.
2. Per i due schemi, polar simmetrico e polar emisimmetrico:
 - (a) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
 - (b) Disegnare il diagramma della forza normale;
 - (c) Disegnare la curva delle pressioni;
 - (d) Calcolare la rotazione del nodo B;
3. Disegnare la deformata elastica per il solo schema polar simmetrico



Dato il telaio ad un nodo spostabile di figura:

1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Risolvere la struttura;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Calcolare la rotazione in B e lo spostamento della travata AB;
5. Disegnare la deformata elastica della struttura;
6. Disegnare la curva delle pressioni.



Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad una distorsione termica uniforme lungo il pendolo CD:

1. Risolvere la struttura trascurando l'effetto della forza normale sulla deformazione del pendolo CD;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
3. Disegnare la curva delle pressioni;
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
5. Calcolare lo spostamento orizzontale del punto B utilizzando il metodo cinematico.