Introduzione alla fisica
261SM
Cinematica

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it

Cinematica

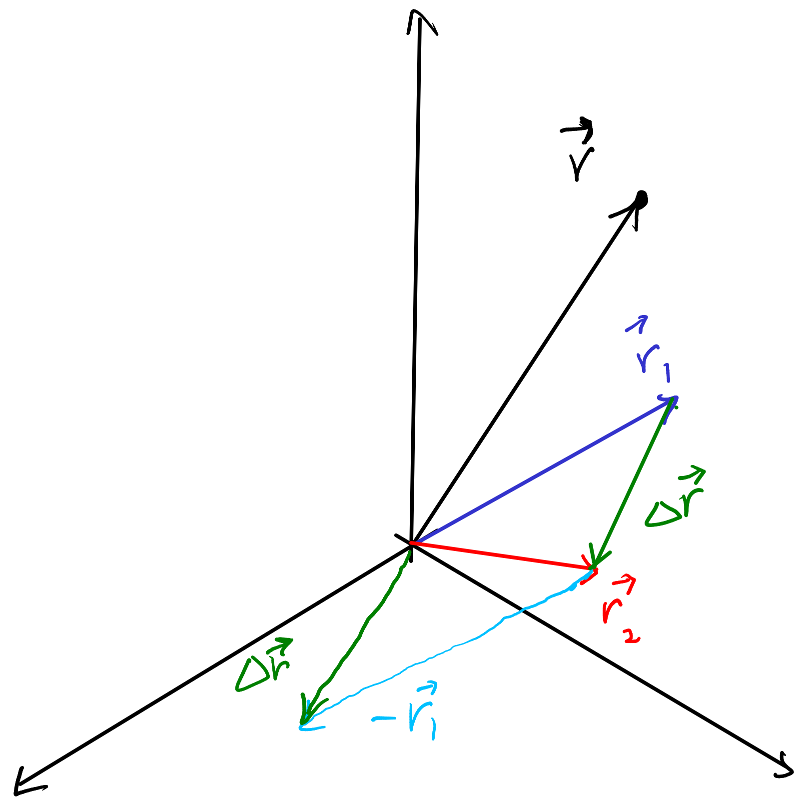
Lo studio del moto

dinamica : la causa del moto

statica : equilibrio mecanico
(la causa dell'immobilità)

approssimazione:
punto materiale

Posizione e spostamento



"vettore" posizione $\vec{r}$

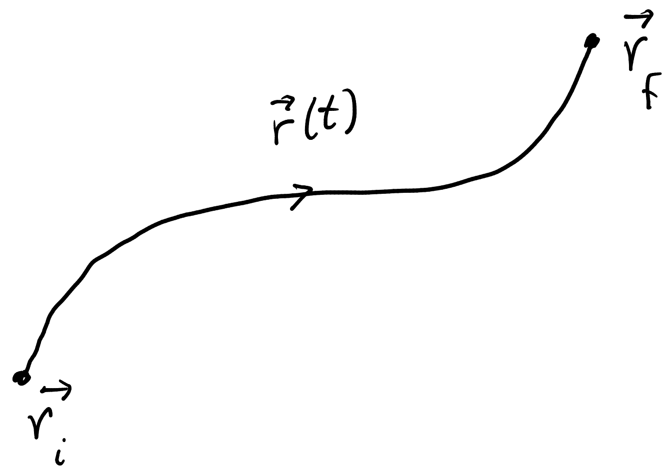
$|\vec{r}|$ non ha tanto significato (dipende dalla posizione dell'origine)

vettore spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

modulo: $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$

Posizione funzione del tempo

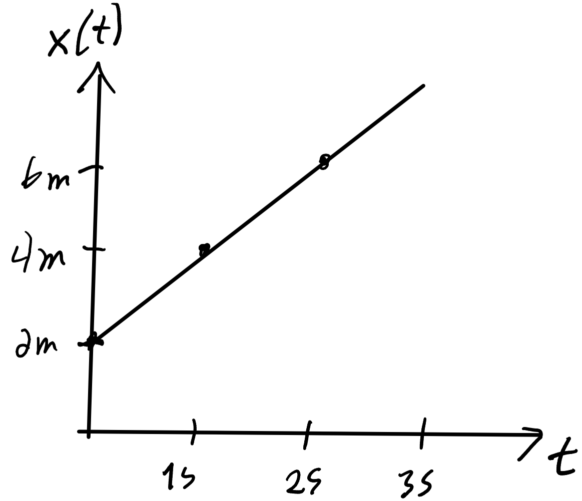


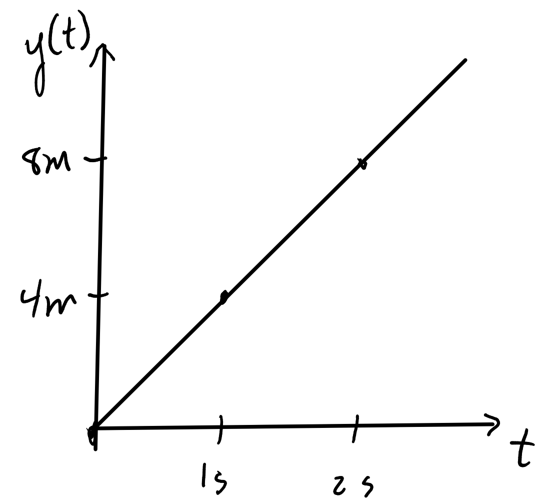
$$\vec r(t) = x(t)\,\hat i + y(t)\,\hat j$$

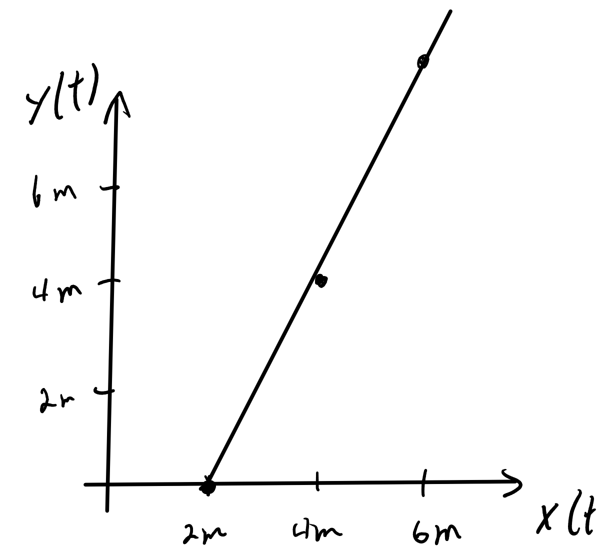
Esempio:

$$x(t) = 2m + 2\,m/s \cdot t$$

$$y(t) = 0m + 4\,m/s \cdot t$$



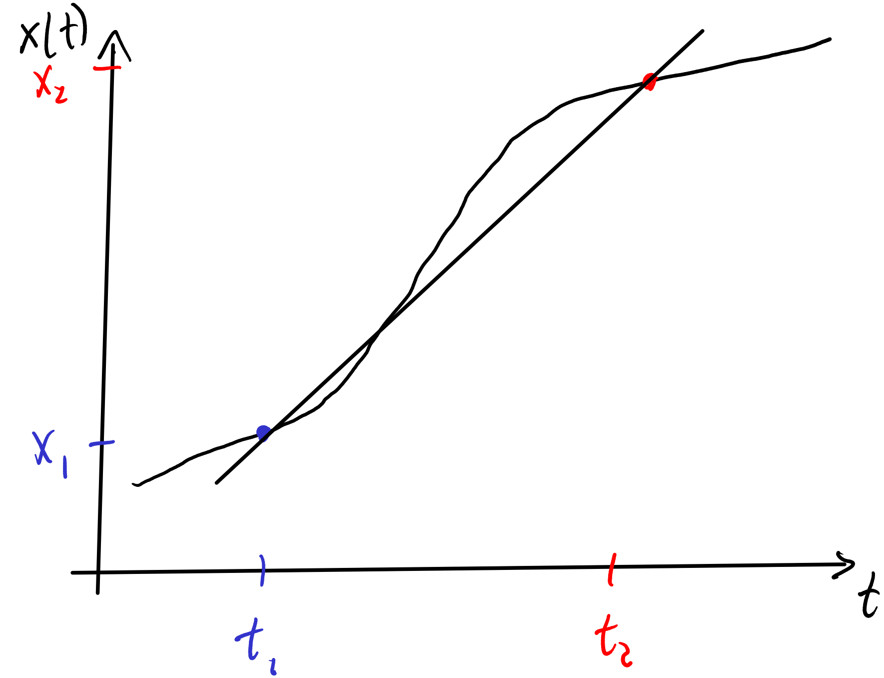




Velocità

Velocità media

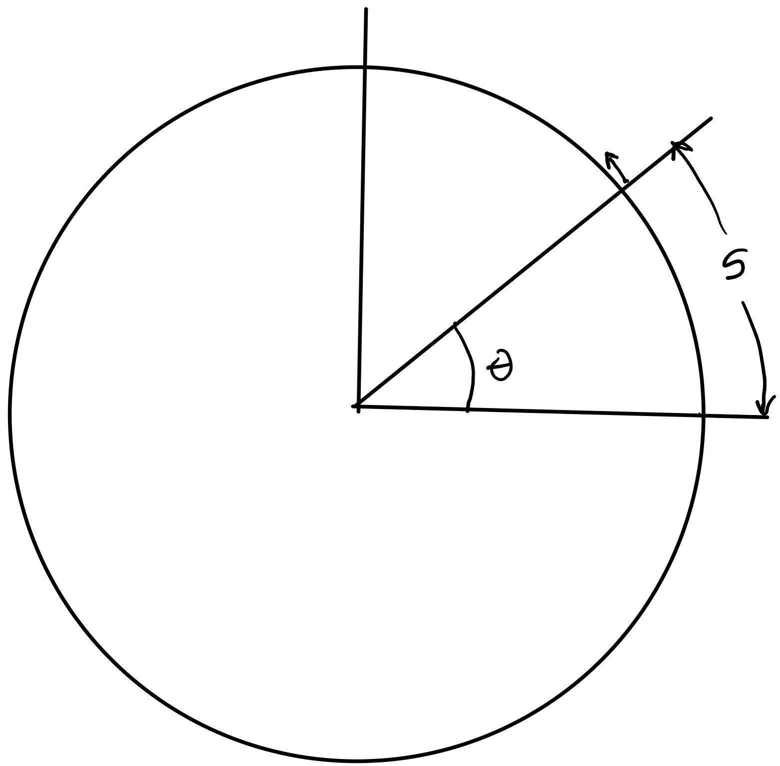
$$\langle v_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



Velocità istantanea

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

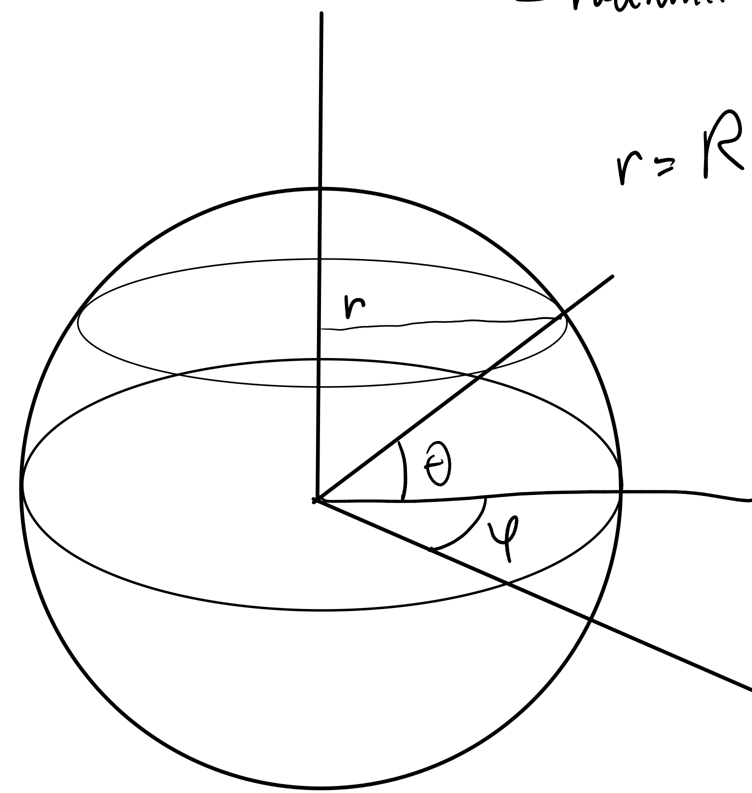


$$\theta\ (\mathrm{rad}) = \frac{s}{R}$$

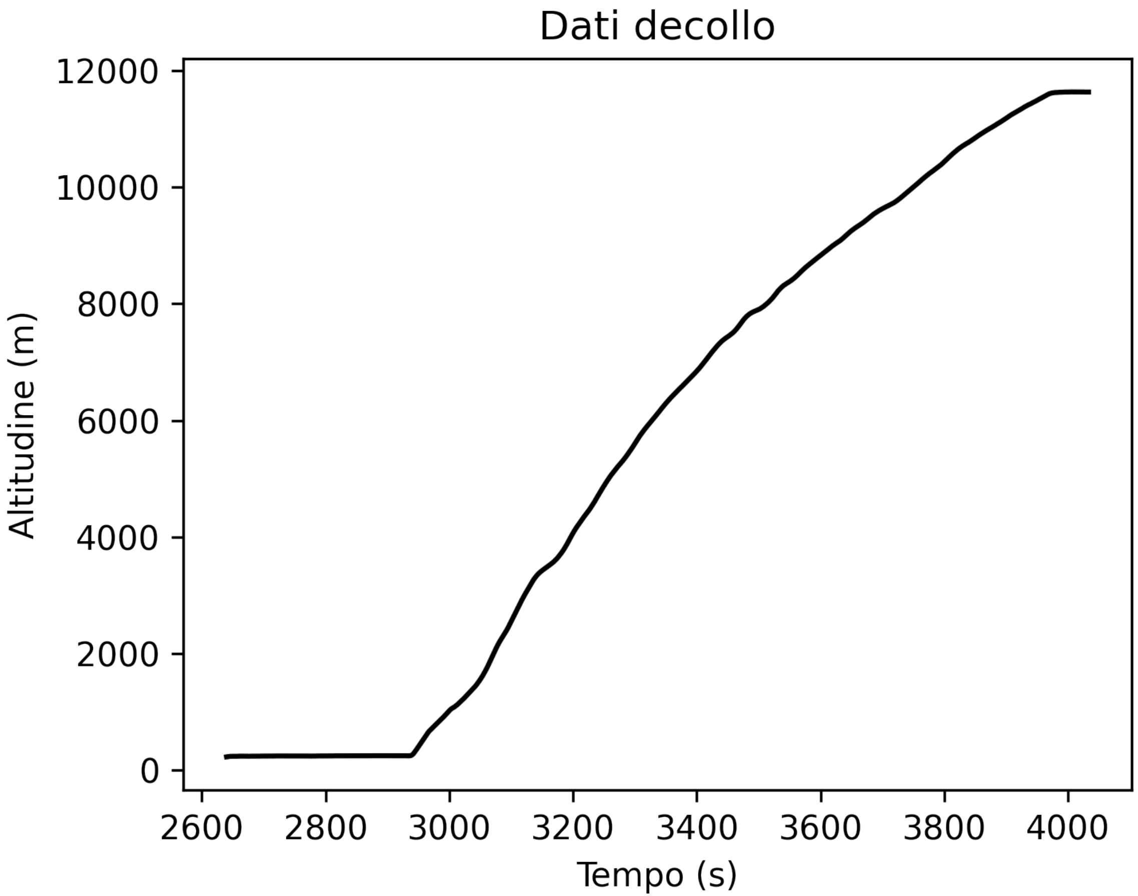
$$s = R\,\theta$$

radianti

$$r = R\cos\theta$$



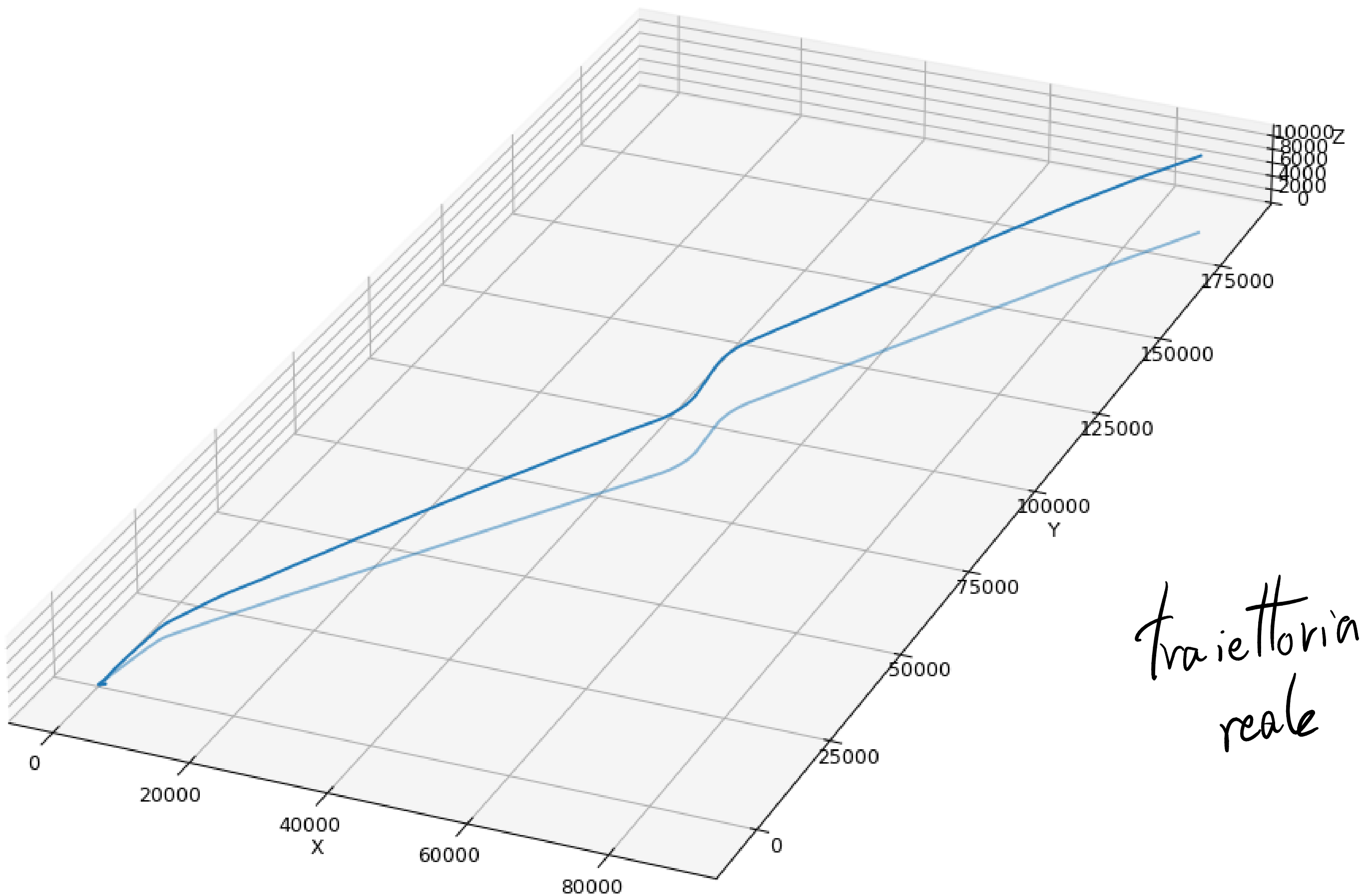
Velocità



$$v_z \simeq \frac{11000 \text{ m}}{1000 \text{ s}} \simeq 11 \text{ m/s}$$

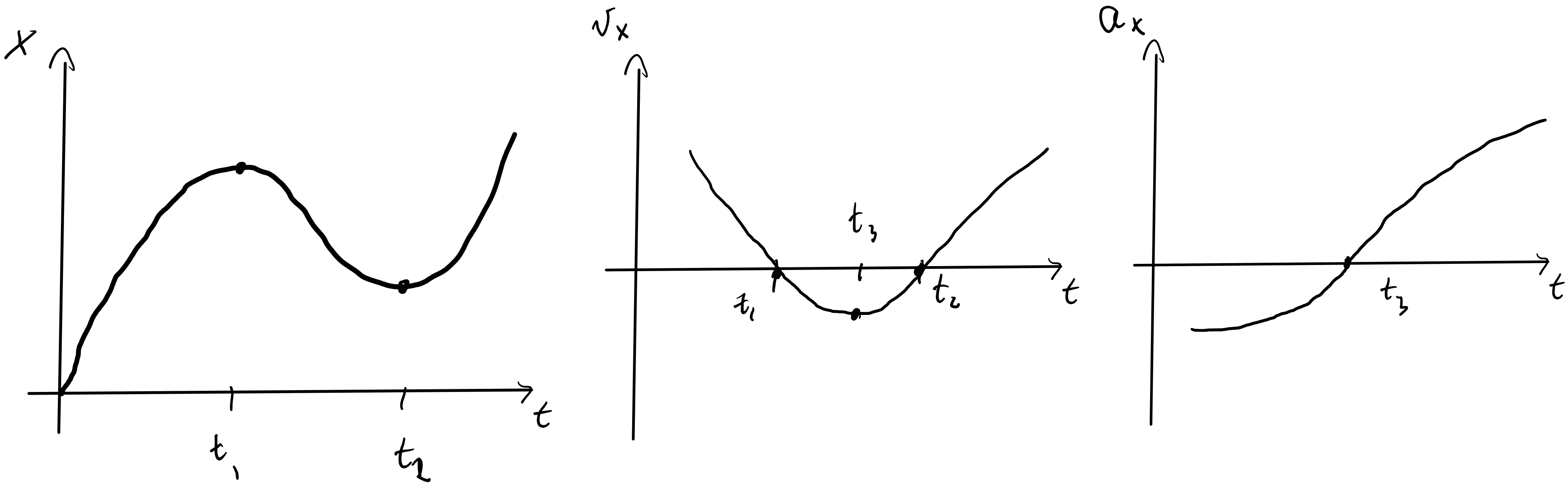
componente z

Velocità


10000
8000
6000
4000
2000
0
Z
175000
150000
125000
100000
Y
75000
50000
25000
0
0
20000
40000
X
60000
80000
Traiettoria
reale

Accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Accelerazione

esempio di calcolo dell'accelerazione

$[L] = m$

$[\omega] = 1/s$

senza unità

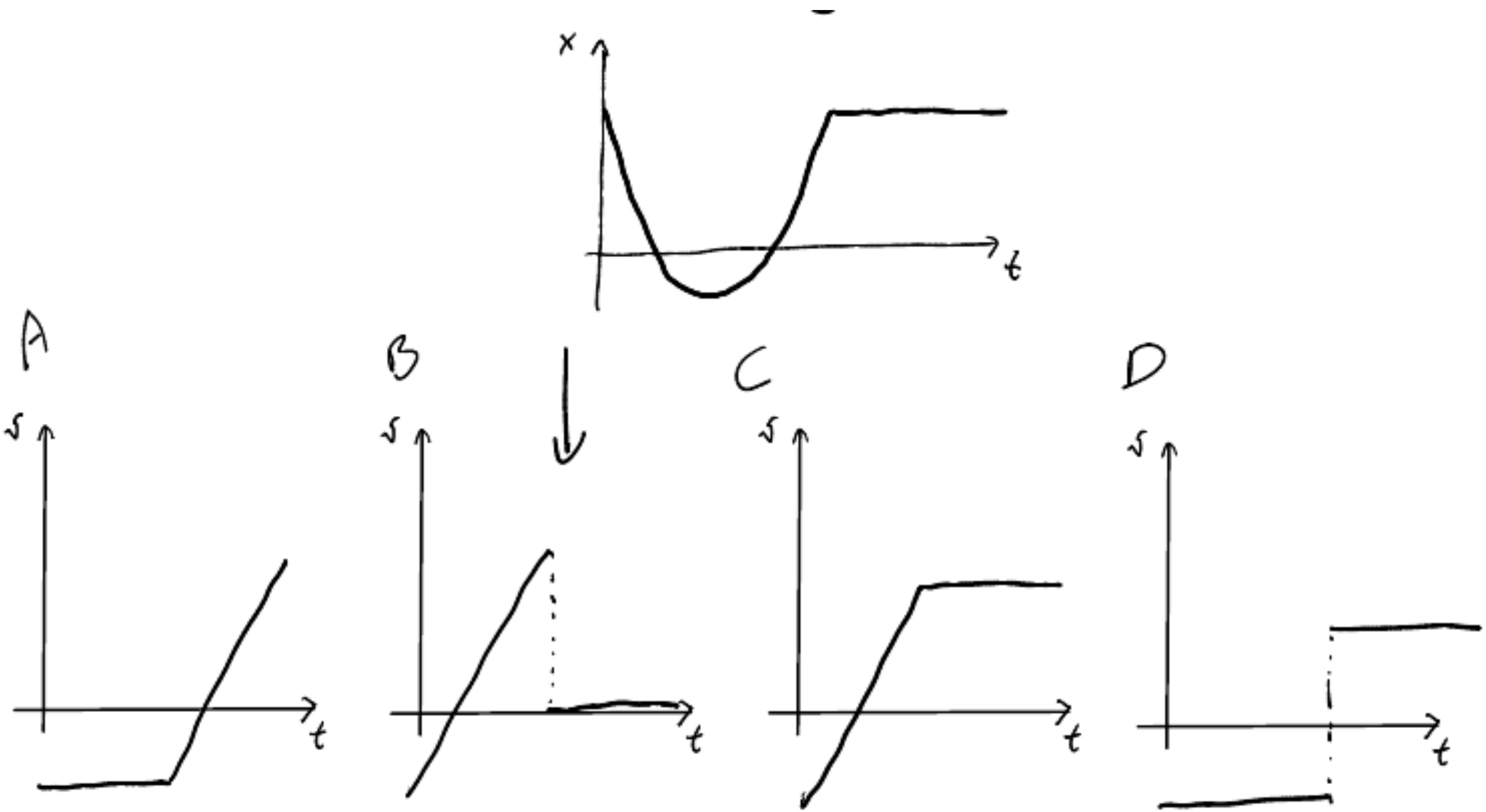
$$x(t) = L\cos(\boxed{\omega t})$$

$$v_x(t) = -L\omega\sin(\omega t)$$

$$a_x(t) = -L\omega^2\cos(\omega t)$$

$$= -\omega^2 x(t)$$

Derivata e integrazione



Derivata e integrazione

Moto con accelerazione costante

a : costante

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \rightarrow \quad dv = a\,dt$$

$$v = \int dv = \int a\,dt = at + C$$

$$v(t) = at + C$$

velocità iniziale

$$v(0) = v_0 = C$$

$$C = v_0$$

$$v(t) = at + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at$$

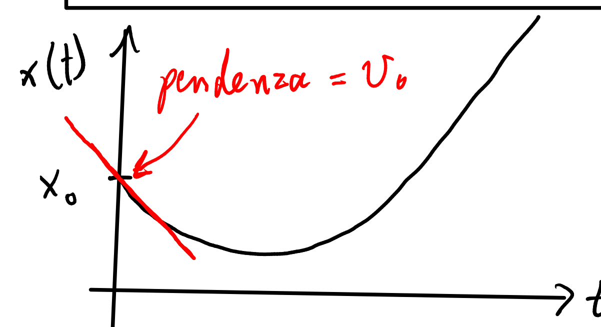
$$x(t) = \int dx = \int (v_0 + at)\,dt = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 + C$$

posizione iniziale

$$x(t=0) = x_0$$

legge oraria

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$



8. •• *Fuga per panico.* La **Figura 2.23** mostra una tipica situazione in cui un flusso di persone cerca di fuggire da una porta che scopre essere chiusa. Le persone si muovono verso la porta alla velocità $v_s = 3{,}50$ m/s e ciascuna occupa uno spessore $d = 0{,}25$ m ed è separata dall'altra da una distanza $L = 1{,}75$ m. La **Figura 2.23** mostra la situazione all'istante $t = 0$. (a) In media, con quale rapidità lo spessore occupato dalle persone davanti alla porta aumenta? (b) In quale istante lo spessore dello strato di persone raggiunge 5,0 m? (La risposta mostra quanto velocemente una situazione del genere diventi pericolosa.)

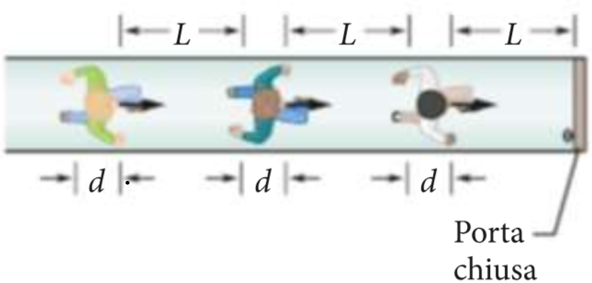
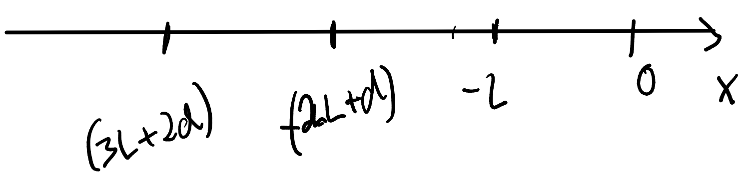
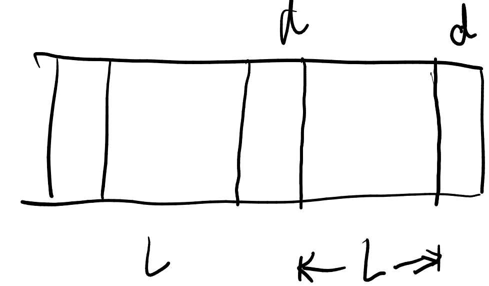


Figura 2.23 Problema 8.



a)



In quanto tempo raggiunge la porta la prima persona?

$$t_1 = \frac{L}{v_s} = 0{,}5\ s \qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \;\rightarrow\; \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

second persona:

$$t_2 = \frac{2L}{v_s} \qquad t_2 - t_1 = \frac{L}{v_s}$$

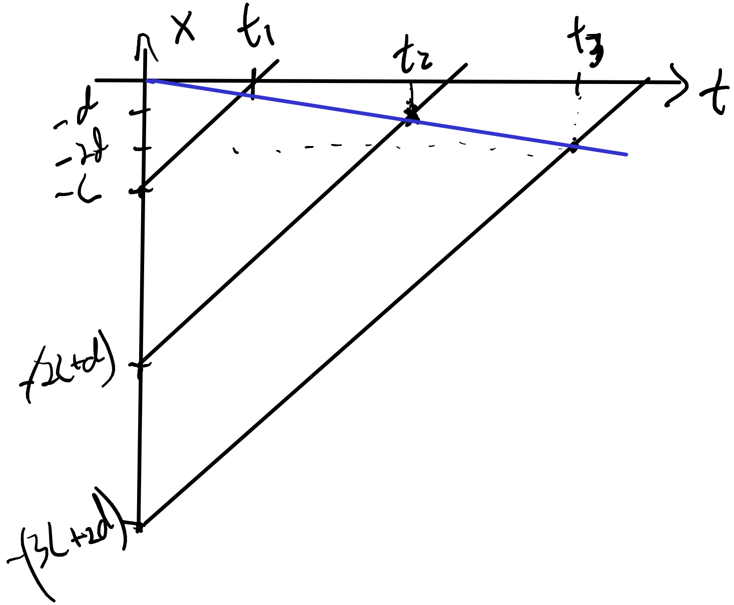
$\Rightarrow$ 0,5 s per ogni persona

una persona si aggiunge al gruppo ogni 0,5 s

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica 8e - Meccanica, Onde, Termodinamica, Elettromagnetismo, Ottica*, 2023

$\Rightarrow$ 2 persone/s

tasso di aumento dello spessore $= 2$ persone/s $\cdot$ $0{,}25$ m/persona $= 0{,}5$ m/s



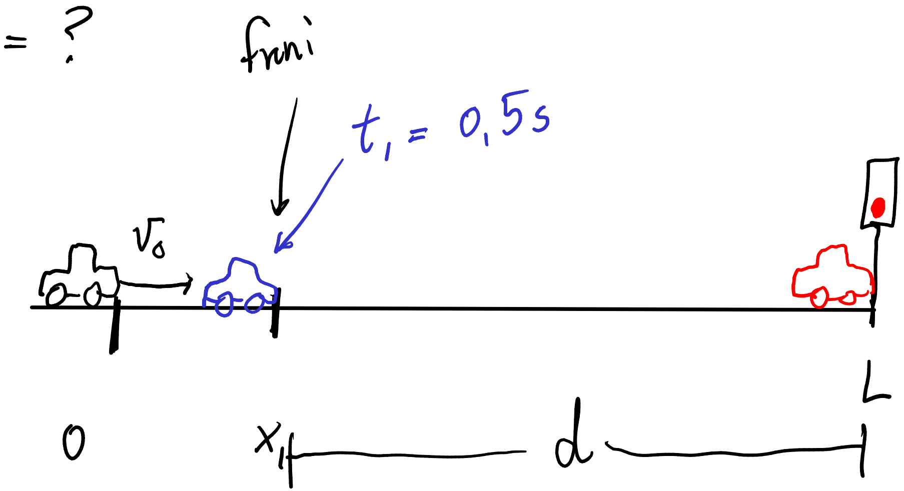
b) spessore $= 5\,m = 0{,}5\,m/s \cdot t_a$

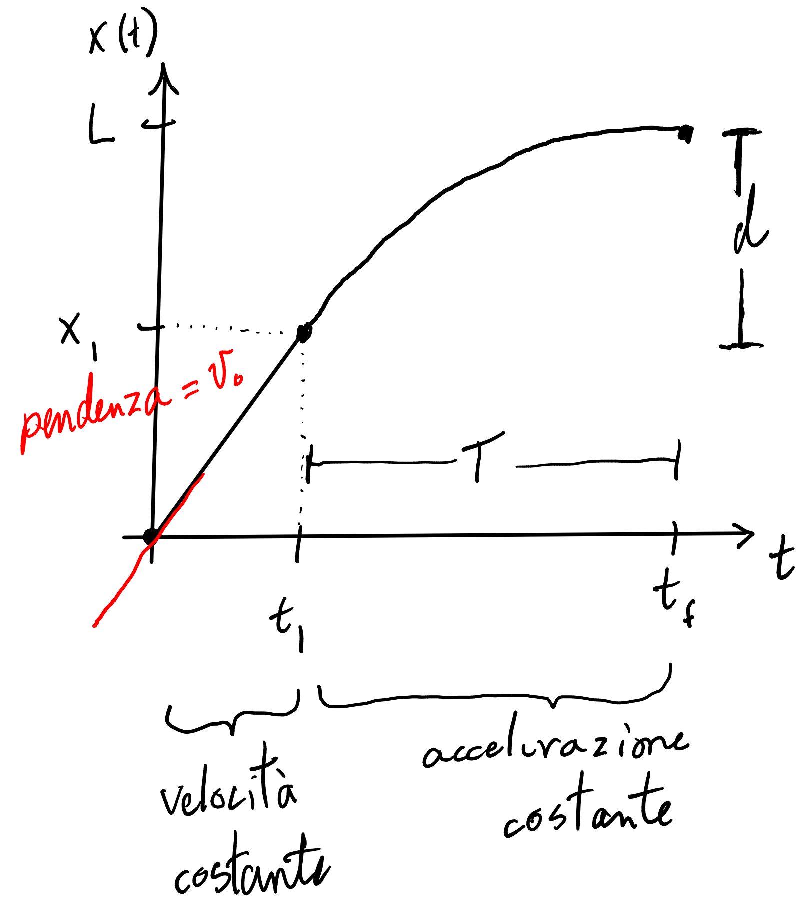
$\Rightarrow t_a = 10\ s$

Un guidatore viaggando a velocità v vede un semaforo rosso 100 metri più avanti e frena bruscamente. I freni dell'auto forniscono una decelerazione costante di $5 \mathrm{m/s^2}$. Se il tempo di reazione del conducente è di 0,5 secondi, a quale velocità v massima poteva andare l'auto per riuscire a fermarsi prima del semaforo rosso?

$L = 100 \text{ m}$

$v_0 = ?$





$x_1 = v_0 t_1$

* tempo di frenata T

$$v(t) = at + v_0$$

$$v(T) = 0 = aT + v_0$$

$$\Rightarrow T = \frac{-v_0}{a}$$

* distanza di frenata

"$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$"

$$d = 0 + v_0 T + \frac{1}{2} a T^2$$

$$d = \frac{-v_0^2}{a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{v_0^2}{a^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} \quad \left(\frac{\frac{m^2}{\cancel{s^2}}}{\frac{m}{\cancel{s^2}}} \right)$$

$$L \geq x_1 + d = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$$

risolvere:

$$\frac{1}{2a} v_0^2 - t_1 v_0 + L = 0$$

"$ax^2 + bx + c = 0$"

$$\hookrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(b^2 - 4ac) \rightarrow (t_1^2 - 2L/a)$$

$$v_0 = at_1 \pm a\sqrt{t_1^2 - \frac{2L}{a}}$$

$$= a\left[t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - \frac{2L}{a}}\right]$$

Supponiamo che $t_1 = 0$

$$\Rightarrow v_0 = \pm a \sqrt{\frac{-2L}{a}} > 0 \quad \Rightarrow \text{radice negativa ci interessa}$$

$$v_0 = a\left[t_1 - \sqrt{t_1^2 - \frac{2L}{a}}\right]$$

$$v_0 = -5\,\mathrm{m/s^2}\left[0{,}5\,\mathrm{s} - \sqrt{(0{,}5\,\mathrm{s})^2 + \frac{200\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s^2}}}\right]$$

$$= 105\ \mathrm{km/h}$$

Moto con accelerazione costante

$* \; v(t) = at + v_0$

$** \; x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

Proviamo ad eliminare t

$(*) \quad t = \frac{v - v_0}{a}$

$(**) \quad x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0$

$= \frac{1}{2a}\left(v^2 \cancel{- 2vv_0} + v_0^2\right) + \cancel{\frac{vv_0}{a}} - \frac{v_0^2}{a} + x_0$

$= \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$

$x - x_0 = \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2)$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

e.g. distanza di frenata

$v^2 = 0$

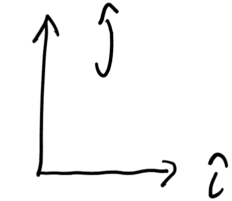
$-v_0^2 = 2ad$

$\Rightarrow d = -\frac{v_0^2}{2a}$

Valido solo se a è costante!

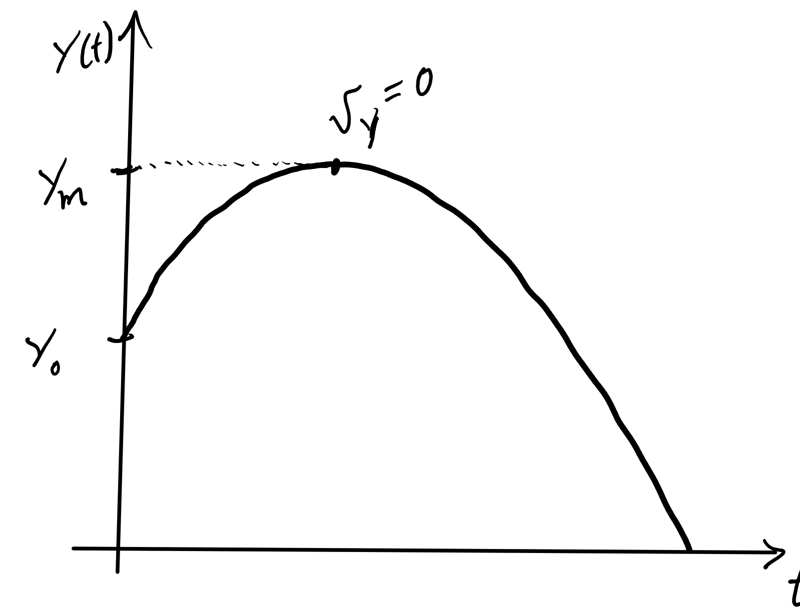
Caduta libera

La caduta libera succede con la stessa accelerazione per qualsiasi corpo



$\vec{a} = -g\hat{j}$ $\qquad$ $g = 9.8\ m/s^2$

$\underbrace{v_y(t) = -gt + v_{0y}}_{\text{componente y di}}$ $\qquad$ $\vec{v}(t) = -gt\hat{j} + \vec{v}_0$



posizione (componente y):

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \rightarrow 0 - v_{0y}^2 = -2g(y_m - y_0) \rightarrow \boxed{Y_m = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}}$$

Il moto dei proiettili

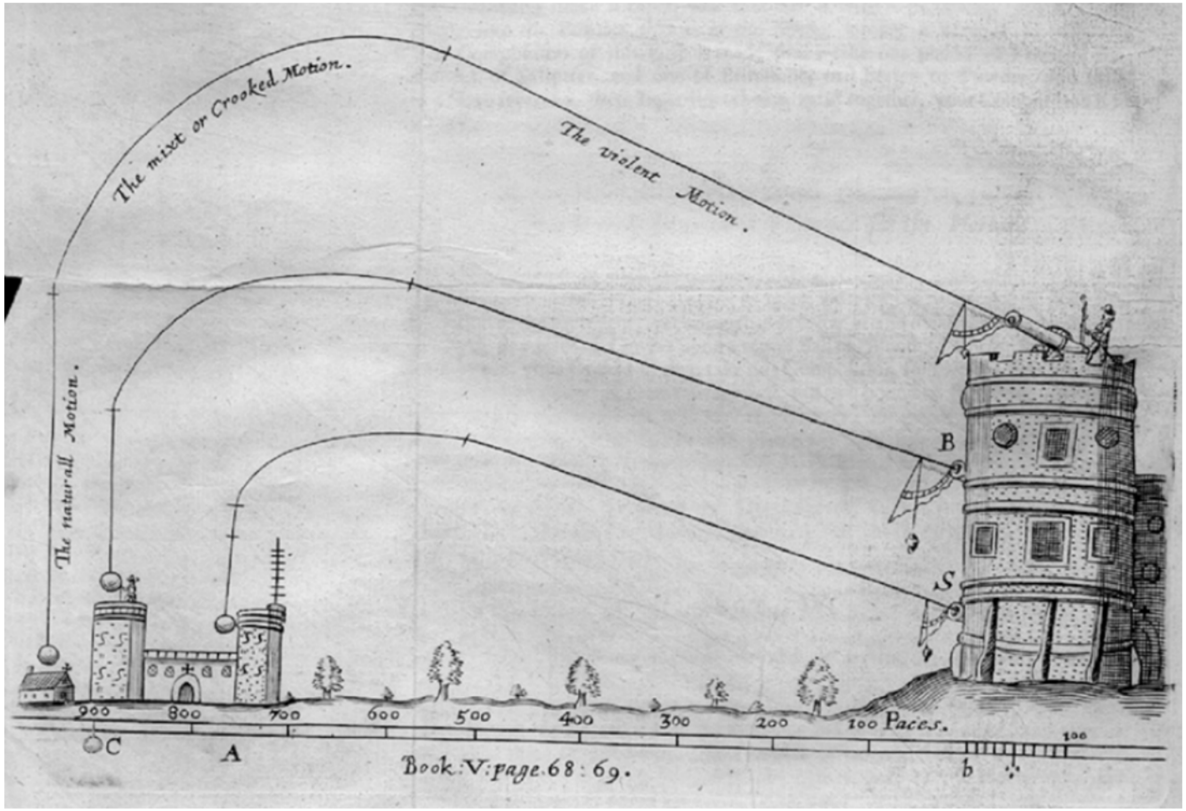


Figure 5. Diagram of projectile motion in Samuel Sturmy's 'The Mariners Magazine. 5: Mathematical and Practical Arts' published in 1669.

Importanza storica

- Aristotele (340 AEC)
  ↳ moto "naturale" e "forzato"
  ↳ proiettili: forzato da cosa?
- Filipono (490-570 EC)
  "impeto"
- Galileo: si è impiegato ad osservare e misurare invece di spiegare

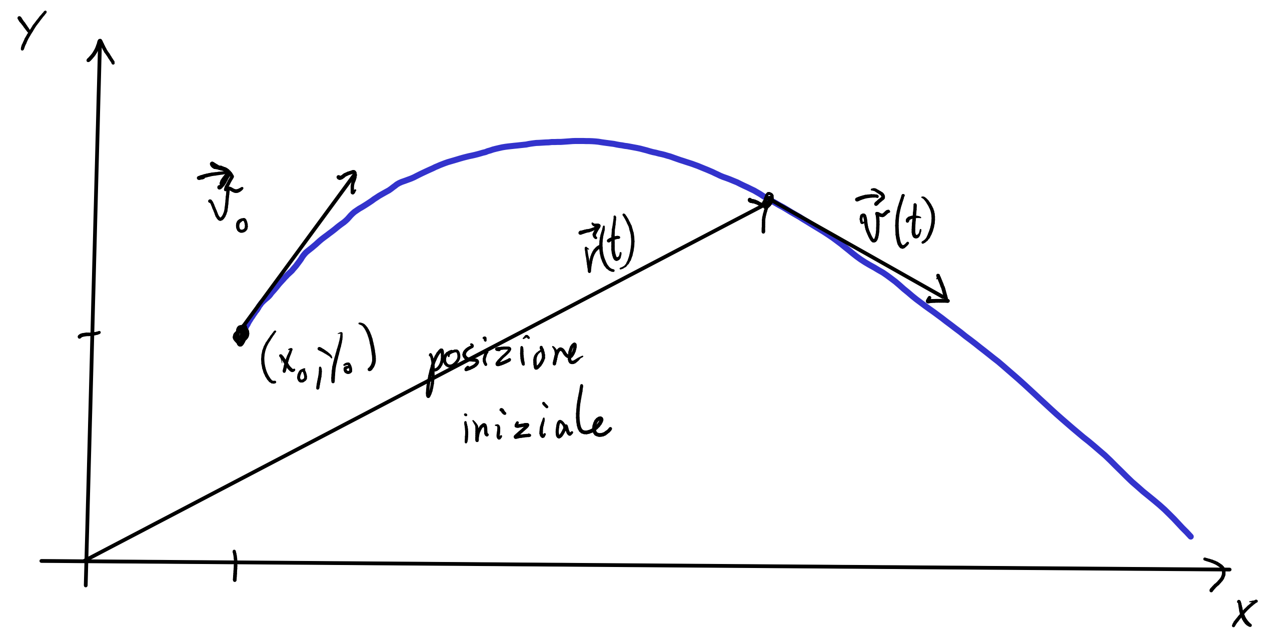
Il moto dei proiettili

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = 0\hat{i} - g\hat{j} + \cancel{0\hat{k}}$$

lavoriamo in 2D

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\hat{i} + (v_{0y} - gt)\hat{j}$$

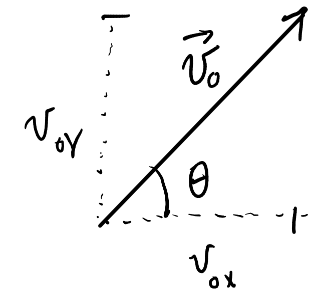
$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{i} + \left(y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$$



Il moto dei proiettili

Spesso v_0, θ sono dati invece di v_{0x} e v_{0y}

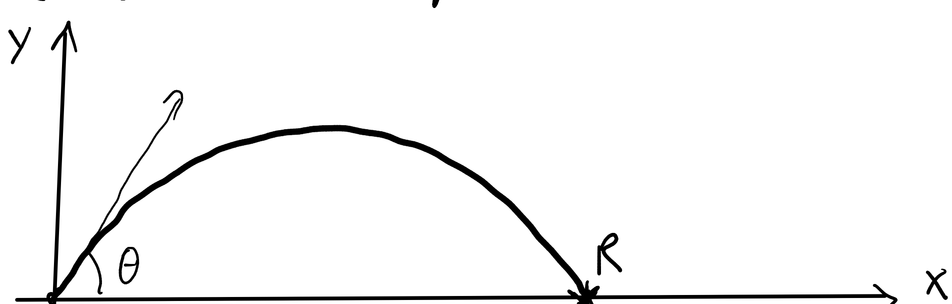
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$



* Altezza massima di un proiettile:

$$y_m = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$$

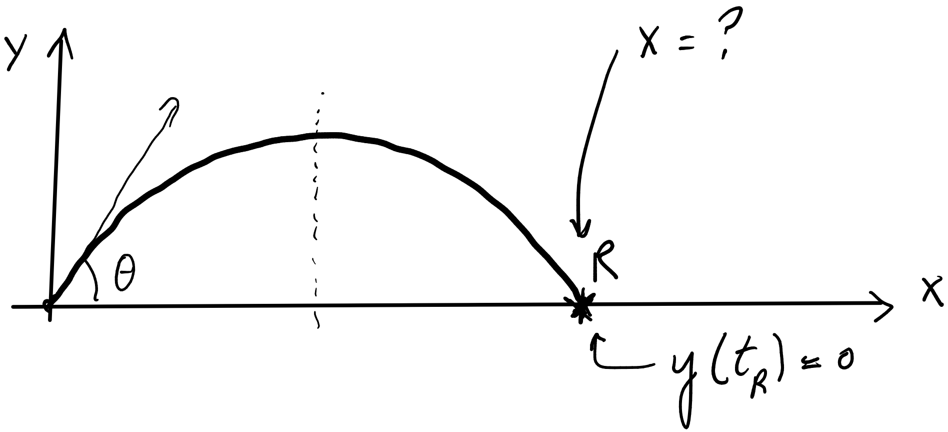
* Gittata: distanza orizzontale percorsa da un corpo lanciato in aria



("range")

Gittata

Valori conosciuti: v_0, θ



per simmetria $\longrightarrow v_y(t_R) = -v_y(0)$

$$v_y(t) = v_{y0} - gt$$

$$v_y(t_R) = \underbrace{v_{y0} - g t_R = -v_{y0}}_{t_R = \frac{2 v_{y0}}{g}}$$

$$R = x(t_R) = v_{x0} t_R$$

$$\boxed{R = \frac{2 v_{x0} v_{y0}}{g}}$$

$$R = \frac{2}{g} v_0^2 \cos\theta \sin\theta$$

$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

$$\boxed{\sin 2\theta = 2 \cos\theta \sin\theta}$$

42. •• Nel 1939 o 1940, Emanuel Zacchini portò il suo spettacolo dell'uomo cannone all'estremo: dopo essere stato lanciato da un cannone, volò sopra tre ruote panoramiche e atterrò in una rete (**Figura 4.39**). Supponete che sia stato lanciato con una velocità di modulo 26,5 m/s a un angolo di 53,0°. (a) Trattandolo come una particella, calcolate a quale distanza in verticale si trovava Zacchini dalla prima ruota quando la superò. (b) Se raggiunse l'altezza massima al di sopra della ruota di mezzo, quanto più in alto arrivò rispetto ad essa? (c) A quale distanza dal cannone deve essere stato posizionato il centro della rete (trascurate la resistenza dell'aria)?

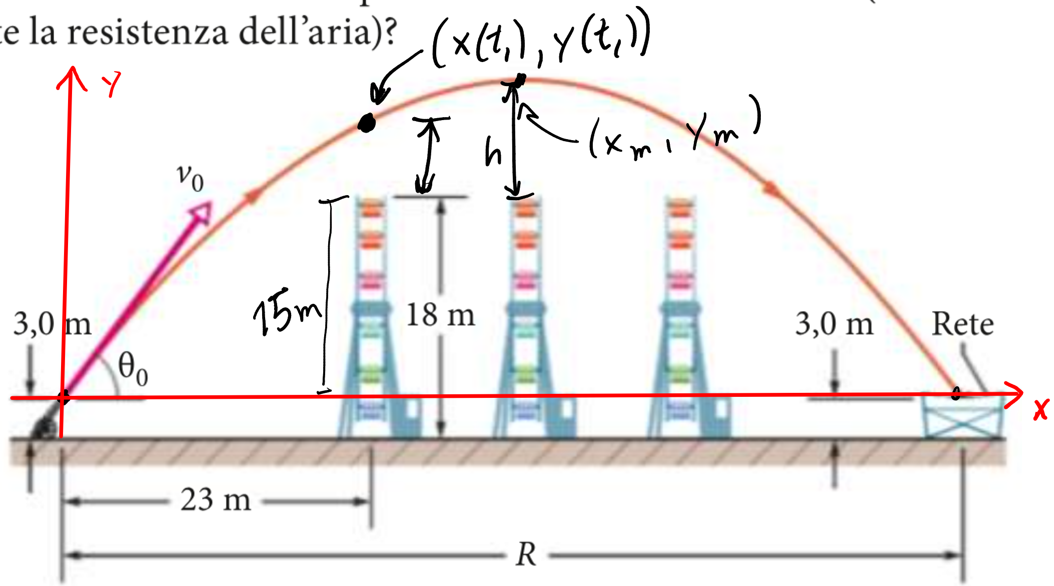


Figura 4.39 Problema 42.

a) $v_0 = 26{,}5 \ m/s$ $\quad$ $v_{0x} = 15{,}9 \ m/s$

$\theta_0 = 53{,}0 \ m/s$ $\quad$ $v_{0y} = 21{,}2 \ m/s$

$y(t_1) = ?$

$$y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$t_1 = ?$ ← usiamo x

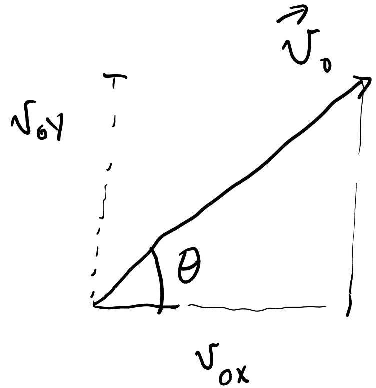
$$x(t_1) = \underbrace{23 \ m}_{L_1} = v_{0x} t_1$$

$$t_1 = \frac{L_1}{v_{0x}}$$

$$y(t_1) = v_{0y} \frac{L_1}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{L_1^2}{v_{0x}^2}$$

$$= L_1 \tan\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{L_1^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$= 20{,}3 \ m$$



$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan\theta_0$$

a) $d = 20{,}3\ m - 15\ m = \underline{5{,}3\ m}$

b) $y_m = ?$ al punto più alto, $v_y(t_m) = 0$

$$v_y(t_m) = 0 = v_{0y} - g t_m \Rightarrow t_m = \frac{v_{0y}}{g}$$

$$y_m = y(t_m) = v_{0y} t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$y_m = \underline{22.9}\ m$ $\qquad h = (22{,}9 - 15)\ m = \underline{7{,}9\ m}$

c) gittata: $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \underline{68.9\ m}$

91. Durante le eruzioni vulcaniche, frammenti di roccia solida possono essere sparati fuori con violenza dal vulcano: questi proiettili sono chiamati *bombe vulcaniche*. La **Figura 4.51** mostra una sezione verticale del monte Fuji in Giappone. (a) Quale modulo dovrebbe avere la velocità iniziale affinché la bomba espulsa dall'apertura *A* del vulcano con un angolo di 35° rispetto all'orizzontale cada ai piedi del vulcano in *B*, che si trova a una distanza verticale *h* = 3,30 km e a una distanza orizzontale *d* = 9,40 km? Trascurate, per il momento, gli effetti dell'aria sul moto della bomba. (b) Quale sarebbe il tempo di volo? (c) Gli effetti dell'attrito dell'aria aumenterebbero o diminuirebbero il valore trovato in (a)?

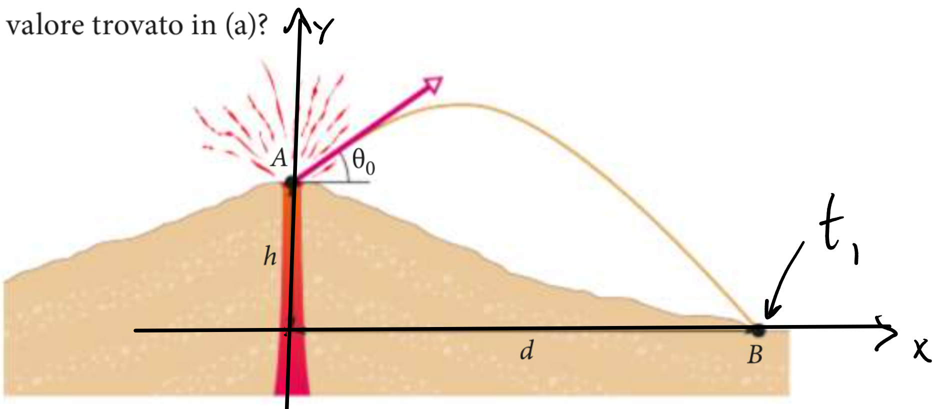


Figura 4.51 Problema 91.

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t = 0 + (v_0 \cos\theta_0) t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= h + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x(t_1) = d \longrightarrow t_1 = \frac{d}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$y(t_1) = 0$$

$$0 = h + \frac{\cancel{v_0} \sin\theta_0 \, d}{\cancel{v_0} \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$h + \tan\theta_0 \, d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} = 0$$

$$\frac{1}{2} g \frac{d^2}{\cos^2\theta_0} \frac{1}{v_0^2} = h + d\tan\theta_0$$

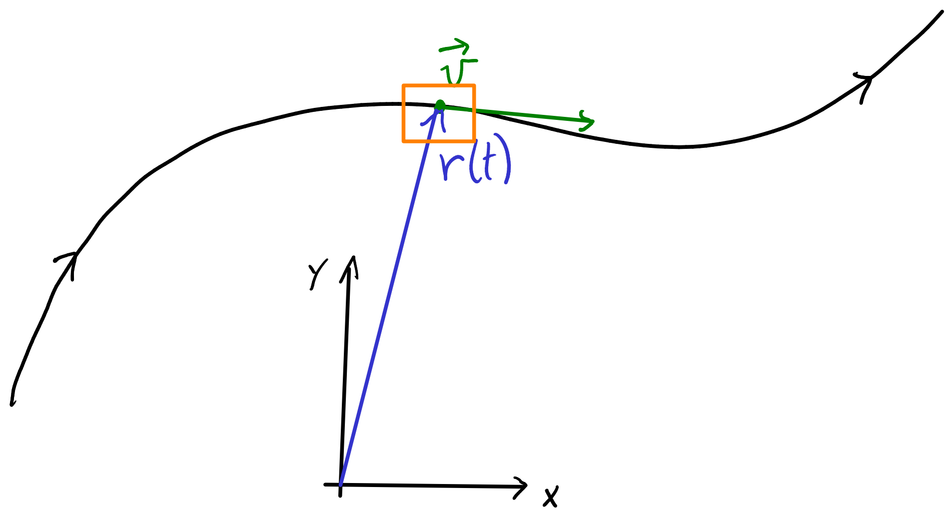
$$v_0^2 = \frac{g d^2}{2\cos^2\theta_0 (h + d\tan\theta_0)}$$

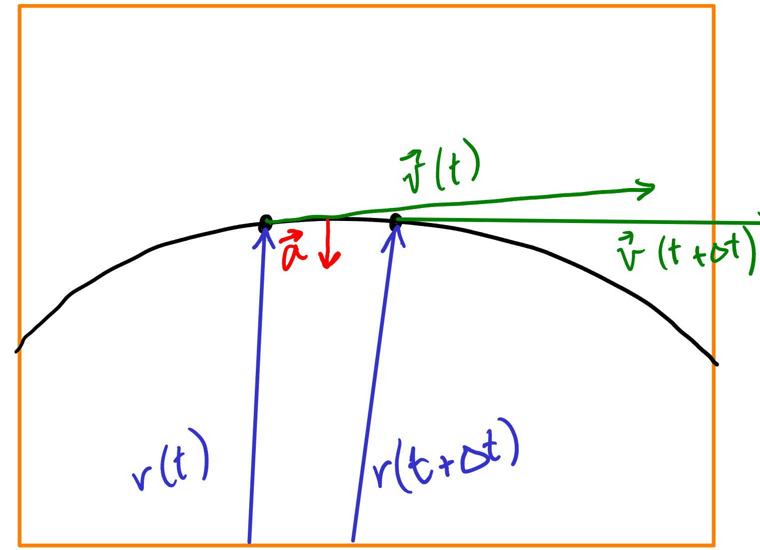
a) $v_0 = \sqrt{\dfrac{g d^2}{2\cos^2\theta\,(h + d\tan\theta_0)}} = 256 \ m/s$

b) $t_1 = 44{,}8 \ s$

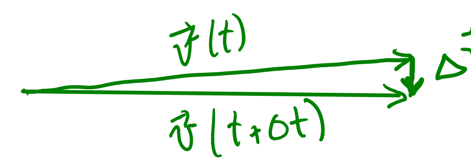
c) più grande

Moto in 2 e 3D





$\vec{v}(t)$: sempre parallela alla tangente della curva $r(\vec{t})$

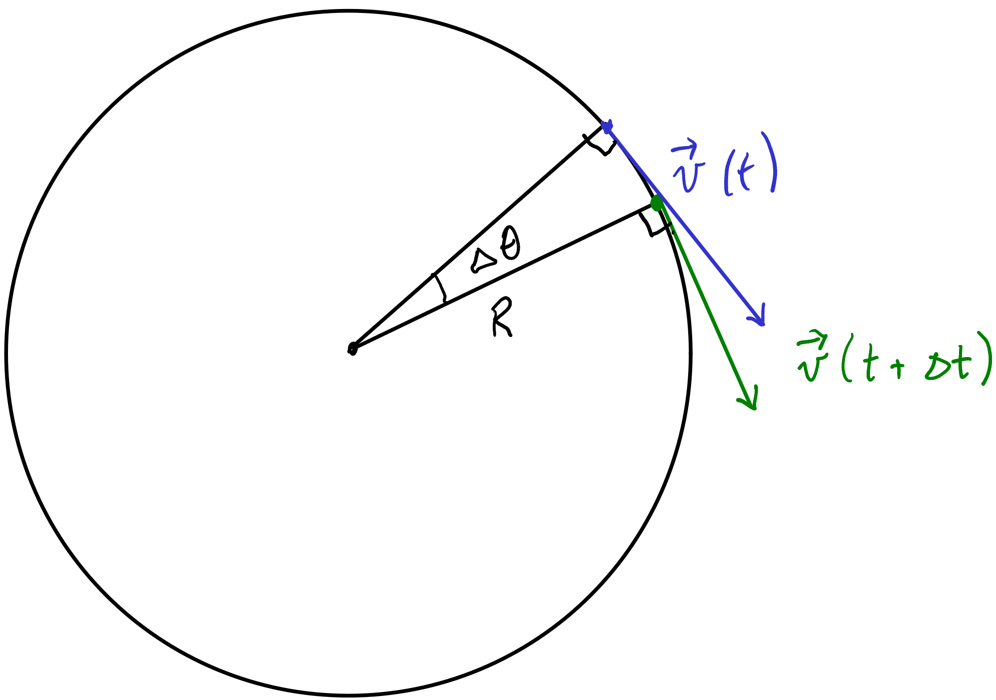


$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \vec{a}$$

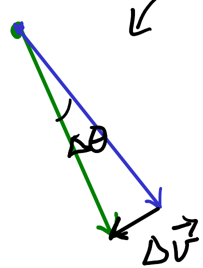
$\vec{a}(t)$: può sempre essere scomposta tra:

* componente parallela a $\vec{v}$ ($\vec{a}_{\parallel}$) $\longrightarrow$ cambia il modulo di $\vec{v}$
* componente perpendicolare a $\vec{v}$ ($\vec{a}_{\perp}$) $\longrightarrow$ cambia la direzione di $\vec{v}$

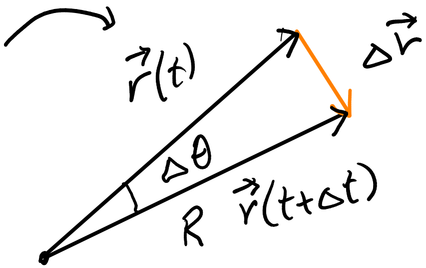
Moto circolare uniforme ← a velocità (modulo) costante



$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



triangoli simili



$$\frac{|\Delta \vec{r}|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}$$

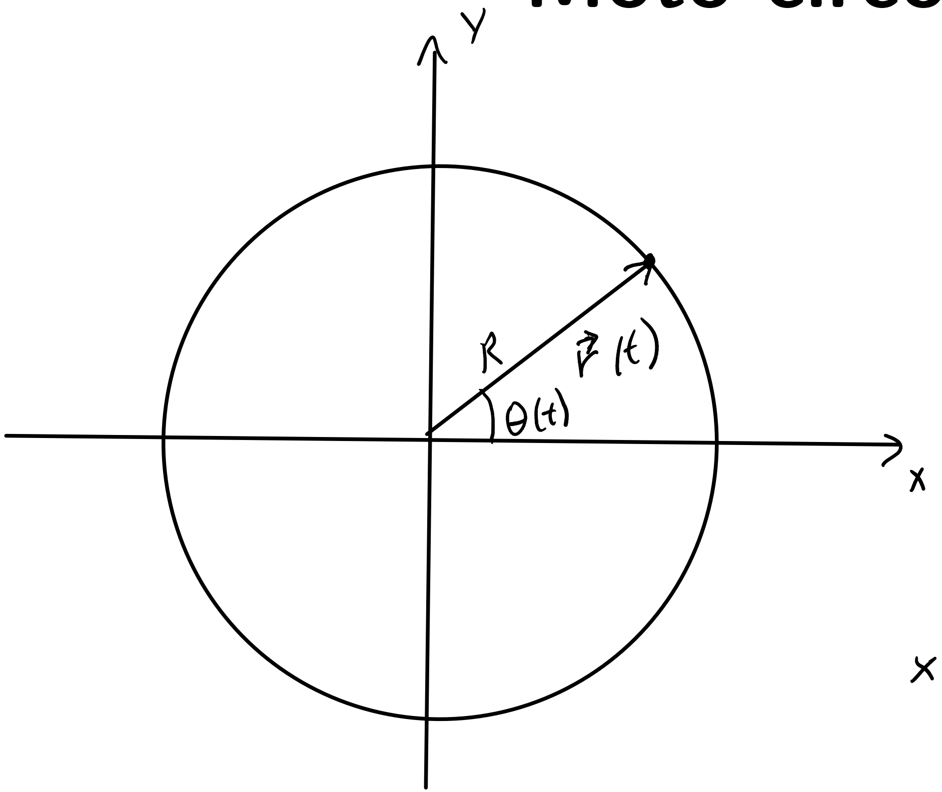
$$\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}\,\frac{1}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}\,\frac{1}{v}$$

$$\downarrow$$

$$v \cdot \frac{1}{R} = a \cdot \frac{1}{v}$$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

Moto circolare uniforme



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$\theta(t) = \omega t$ l'angolo aumenta proporzionalmente con il tempo

ω: "velocità angolare"

$$x(t) = R\cos(\omega t) \qquad y(t) = R\sin(\omega t)$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega R\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \omega R\cos(\omega t)$$

$$|\vec{v}| = \omega R$$

$$a_x(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$$

$$a_y(t) = -\omega^2 R\sin(\omega t)$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$= -\omega^2\vec{r}$$

$$\rightarrow \boxed{a = \omega^2 R}$$

Moto circolare uniforme

56. • Un satellite artificiale viaggia su un'orbita circolare alla quota di 640 km sopra la superficie terrestre (compie un moto circolare uniforme) con un periodo di rivoluzione di 98,0 min. Quali sono (a) il modulo della velocità del satellite e (b) il modulo dell'accelerazione centripeta del satellite?

$R_T = 6378 \text{ km}$

$R = R_T + 640 \text{ km}$

a) $T = 98 \text{ min} = 5880 \text{ s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

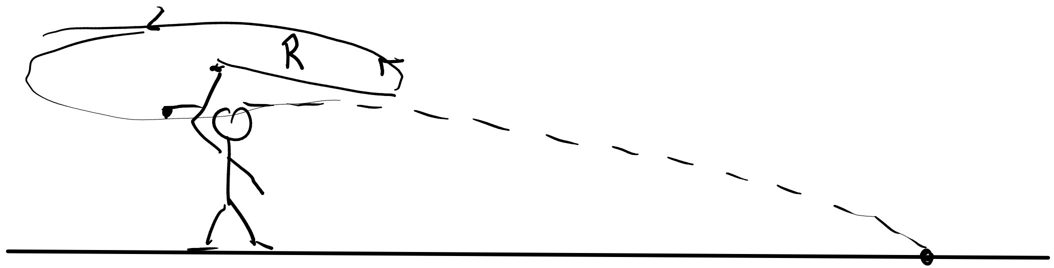
$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = 7{,}5 \times 10^3 \text{ m/s}$$

b)

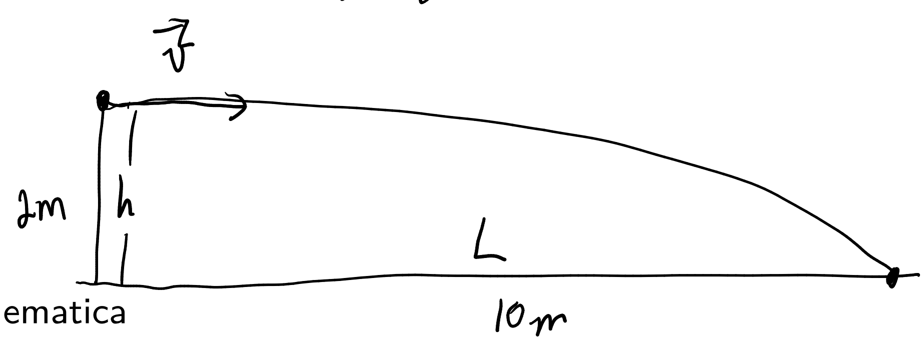
$$a = \frac{v^2}{R} = 8{,}0 \text{ m/s}^2$$

Moto circolare uniforme

67. ••• MS Un ragazzo fa ruotare un sasso legato a una cordicella su una circonferenza orizzontale di raggio 1,5 m a un'altezza di 2,0 m dal suolo. La cordicella si rompe e il sasso vola via orizzontalmente e colpisce il terreno dopo aver percorso una distanza orizzontale di 10 m. Qual è il modulo dell'accelerazione centripeta del sasso durante il moto circolare?



$$a = \frac{v^2}{R}$$ ← dobbiamo trovare il modulo della velocità



$L = \dots (v, g)$

Moto circolare uniforme

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x} t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} L &= v t_1 \qquad * \\ y(t_1) = 0 &= h - \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad ** \end{aligned}$$

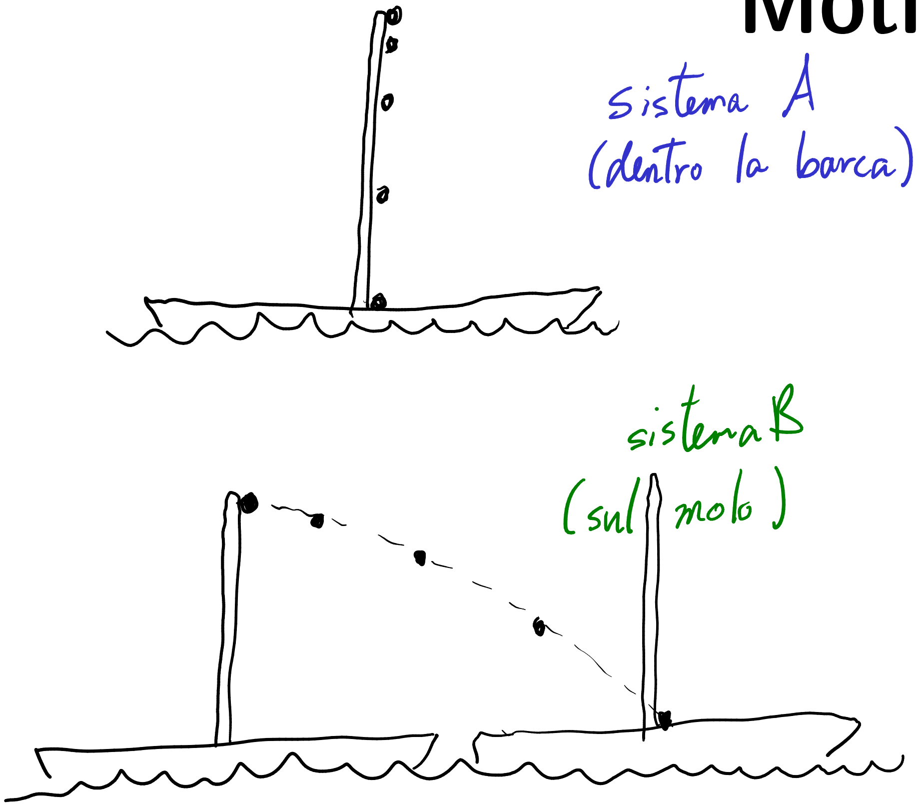
$$** \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

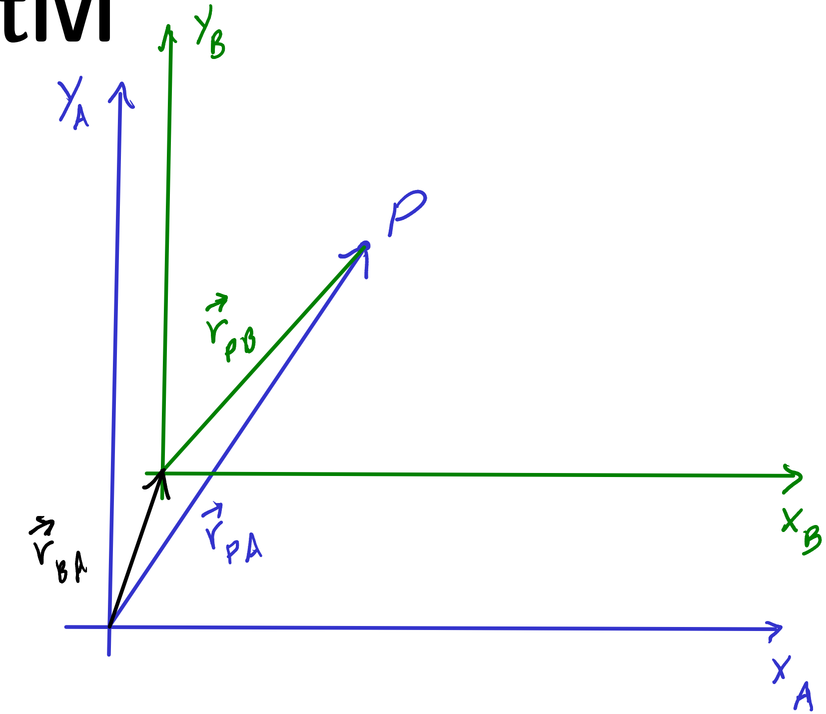
$$* \qquad L = v \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = L \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{L^2}{R} \frac{g}{2h} = 160 \ m/s^2$$

Moti relativi





"P secondo A = P secondo B + B secondo A"

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB} \qquad \vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \qquad \vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$$

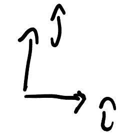
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA} \qquad \vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{BA}$$

Spesso, vedremo sistemi per quali $\vec{a}_{BA} = 0$

Moti relativi

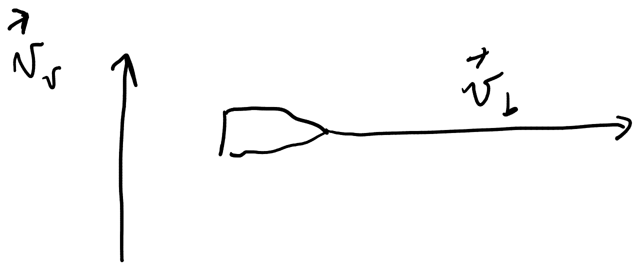
Un velista sta navigando a 10 nodi in direzione est in un punto dove il vento soffia a 5 nodi in direzione nord. Qual è la velocità e la direzione dell'~~apparente~~ vento rispetto alla barca?

apparente



$\vec{v}_b = 10\ kn\ \hat{\imath}$

$\vec{v}_v = 5\ kn\ \hat{\jmath}$



sistema A : barca

sistema B : fermo

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

P : un punto qualunque che si sposta con il vento

$$\vec{v}_{PB} = \vec{v}_v$$

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_b$$

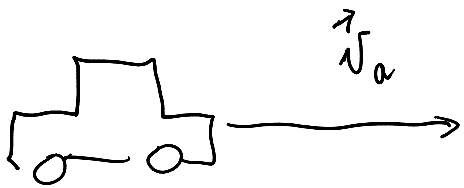
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_v - \vec{v}_b$$

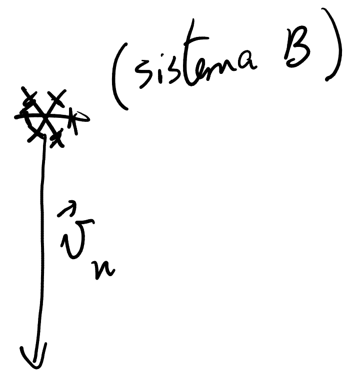
$$= -10\ kn\ \hat{\imath} + 5\ kn\ \hat{\jmath}$$

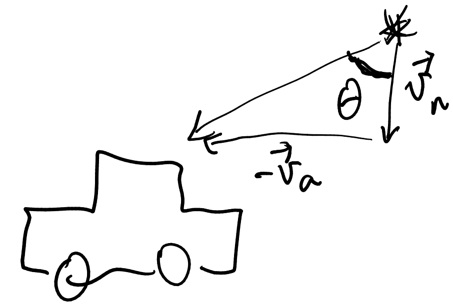
(11 kn ONO)

$$|\vec{v}_{PA}| = \sqrt{10^2 + 5^2} \simeq 11\ kn$$

77. •• **MS** La neve sta cadendo verticalmente a una velocità costante di 8,0 m/s. A quale angolo rispetto alla verticale sembrano cadere i fiocchi di neve per il conducente di un'auto che viaggia su una strada diritta e in piano alla velocità di 50 km/h?







$$\vec{v}_{nA} = \vec{v}_{nB} + \vec{v}_{BA}$$

$$= \vec{v}_{nB} - \vec{v}_{AB}$$

$$= \vec{v}_n - \vec{v}_a$$

$$\tan\theta = \frac{|v_a|}{|v_n|}$$

$$\theta = \arctan \frac{|v_a|}{|v_n|} = 60^\circ$$

Riassunto

cinematica

* posizione, velocità, accelerazione sono vettori (!)
* $\vec{a} = d\vec{v}/dt \qquad \vec{v} = d\vec{r}/dt$
* Caso speciale #1: moto uniformemente accelerato

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

* Caso speciale #2: proiettili

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t \qquad y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

* Caso speciale #3: moto circolare uniforme

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = v^2/R \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$ velocità angolare

* Moti relativi: "P secondo A = P secondo B + B secondo A"