

SISTEMI MECCANICI UNIDIMENSIONALI

(1 grado di libertà)

- $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$

- ci concentriamo su sistemi con $F = F(x)$

→ si conserva l'ENERGIA

$$E(x, v) = T(v) + V(x)$$

↑
en. cinetica

↑
en. potenziale

è una cost. del moto

$$\rightarrow E(x(t), v(t)) = E \quad \swarrow \text{costante}$$

- Le traiettorie sul piano di fase giacciono sulle curve di livello date dall'eq.

$$E(x, v) = E$$

ES

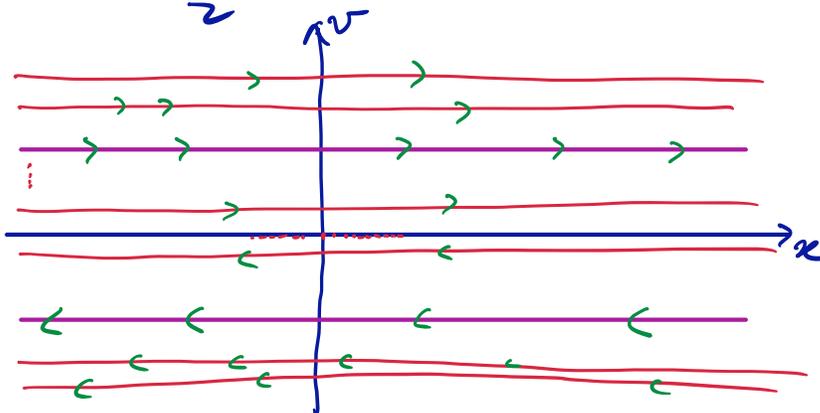
1) PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0 \quad E(x, v) = \frac{mv^2}{2}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Curve di livello sono date da eq.

$$\frac{mv^2}{2} = E \rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$v = \dot{x}$
 $v > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$
 $\Rightarrow x$ aumenta cont.

x_0 è il pto di attraversam. dell'asse delle ascisse
 \rightarrow se x_0 non è di equl. (cioè $f(x_0) \neq 0$),
 allora $\alpha \rightarrow \infty$ (inchi $v(x_0) \rightarrow 0$). //

$$(*) \quad \alpha = \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$$v(x) = v(t(x))$$

\uparrow $v(t)$ \nwarrow è l'inversa di $x(t)$

Analisi qualitative

$$E(x, v) = T(v) + V(x)$$

Le curve di livello: $T(v) + V(x) = E$
 \swarrow cost.

$$- \quad T(v) = \frac{mv^2}{2} \geq 0$$

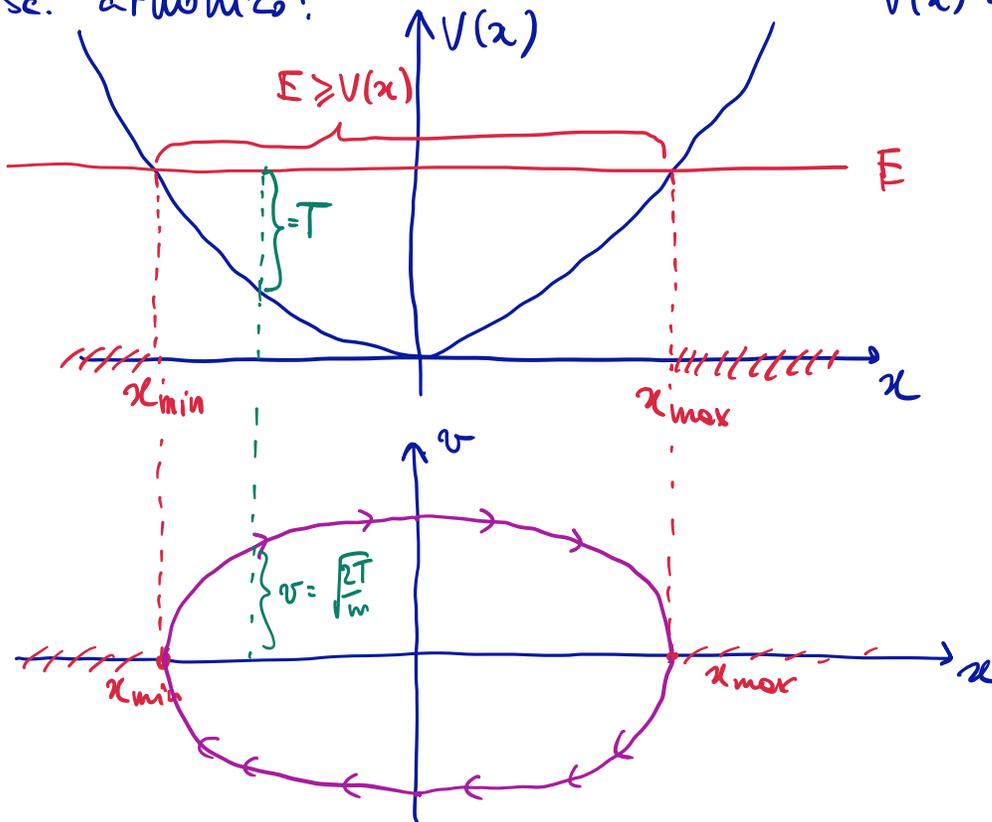
\Downarrow

$$\left(E - V(x) \geq 0 \quad (*) \right)$$

\rightarrow un pto x può stare su una curva di livello
 (e quindi essere un pto permesso, cioè un pto
 attraverso cui può passare una traiettoria)
 se soddisfa $(*)$, cioè $V(x) \leq E$

ES. Osc. armonico:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$



Differenza tra
E e V mi da
T. Dato $T = \frac{mv^2}{2}$
ho $v = \pm \sqrt{\frac{2T}{m}}$

$$- x(t) \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq E \right\}$$

in osc. armonico $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \leq E \rightarrow x^2 \leq \frac{2E}{m\omega^2}$

$$\hookrightarrow x(t) \in \left[\underbrace{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{\min}}, \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{\max}} \right]$$

- Nei pt. dove $V(x) = E$ (x_{\min} e x_{\max} in osc. arm.)

$$\hookrightarrow T = 0 \Rightarrow v = 0$$

Tali pt. sono chiamati PUNTI D'INVERSIONE.

$$\ddot{x} = f(x) = -\frac{1}{m} V'(x)$$

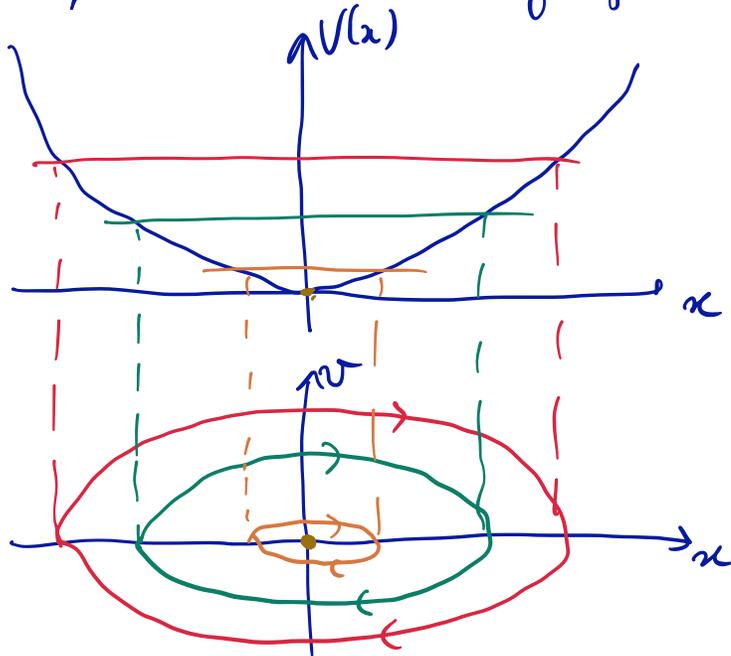
pt. invers. $V'(x) \neq 0$

\Rightarrow anche se $v=0$ la traiettoria
transita in questi pt.
(forza non nulla)

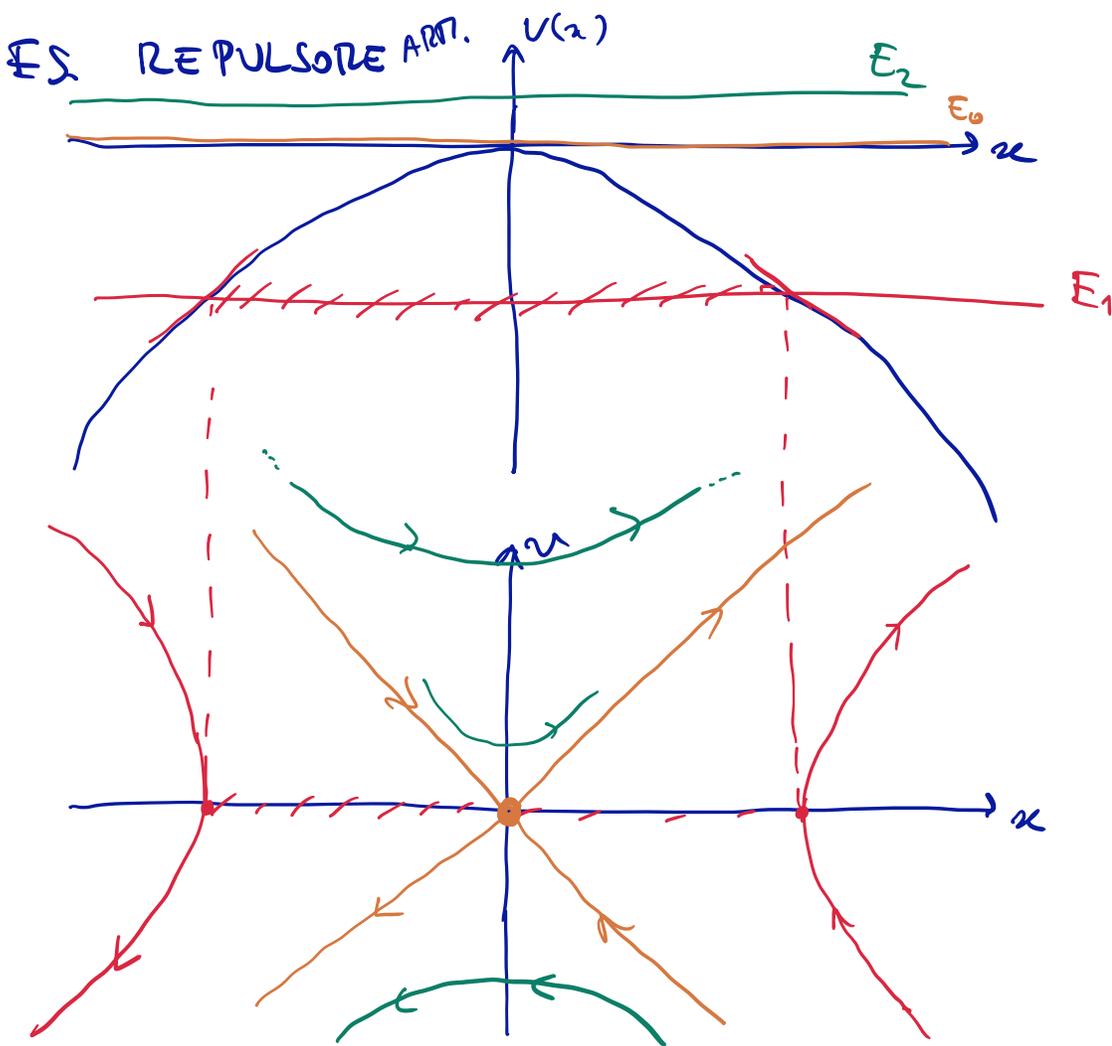
- Per osc. arm.

$E > 0$: il moto è dato da una curva CHIUSA
→ il moto $x(t)$ è una funt. PERIODICA

→ Tramite si possono ottenere (qualitativa-
mente) semplicemente dal grafico di $V(x)$



$E = 0$) l'unico pt in cui $V(x) \leq E$ è $x=0$ → il pt
equil.



$$V(x) = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$(x, v) = (0, 0)$ è pto di equil.

Notiamo delle traiettorie in \mathbb{R}^2 che si intersecano (non ce le aspettiamo perché il sist. è autonomo) → questo può avvenire solo per $t \rightarrow \pm\infty$

Vediamo se effettivamente le curve di livello sono quelle ricavate con l'analisi qualitativa:

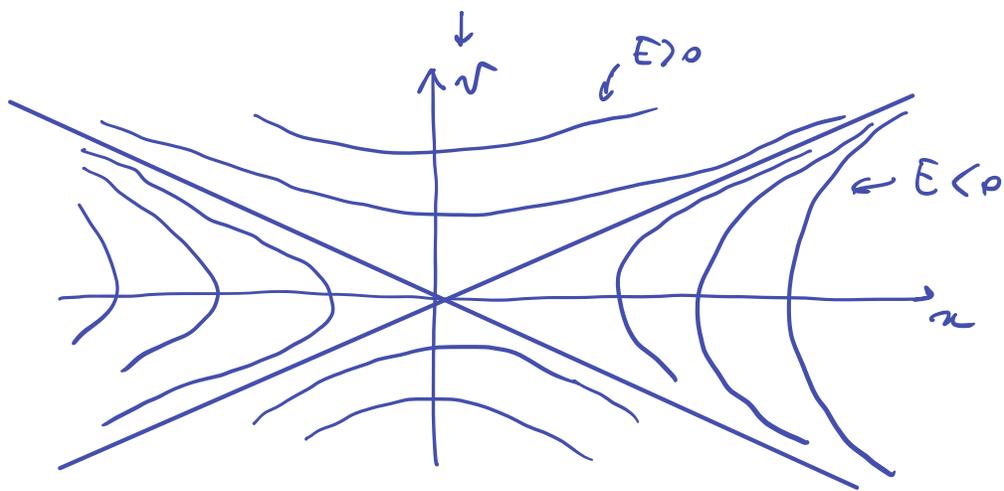
Rep. arm. $\dot{x} = \omega^2 x$ $E(x, v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

Curve di livello: $E(x, v) = E^{\text{const.}}$

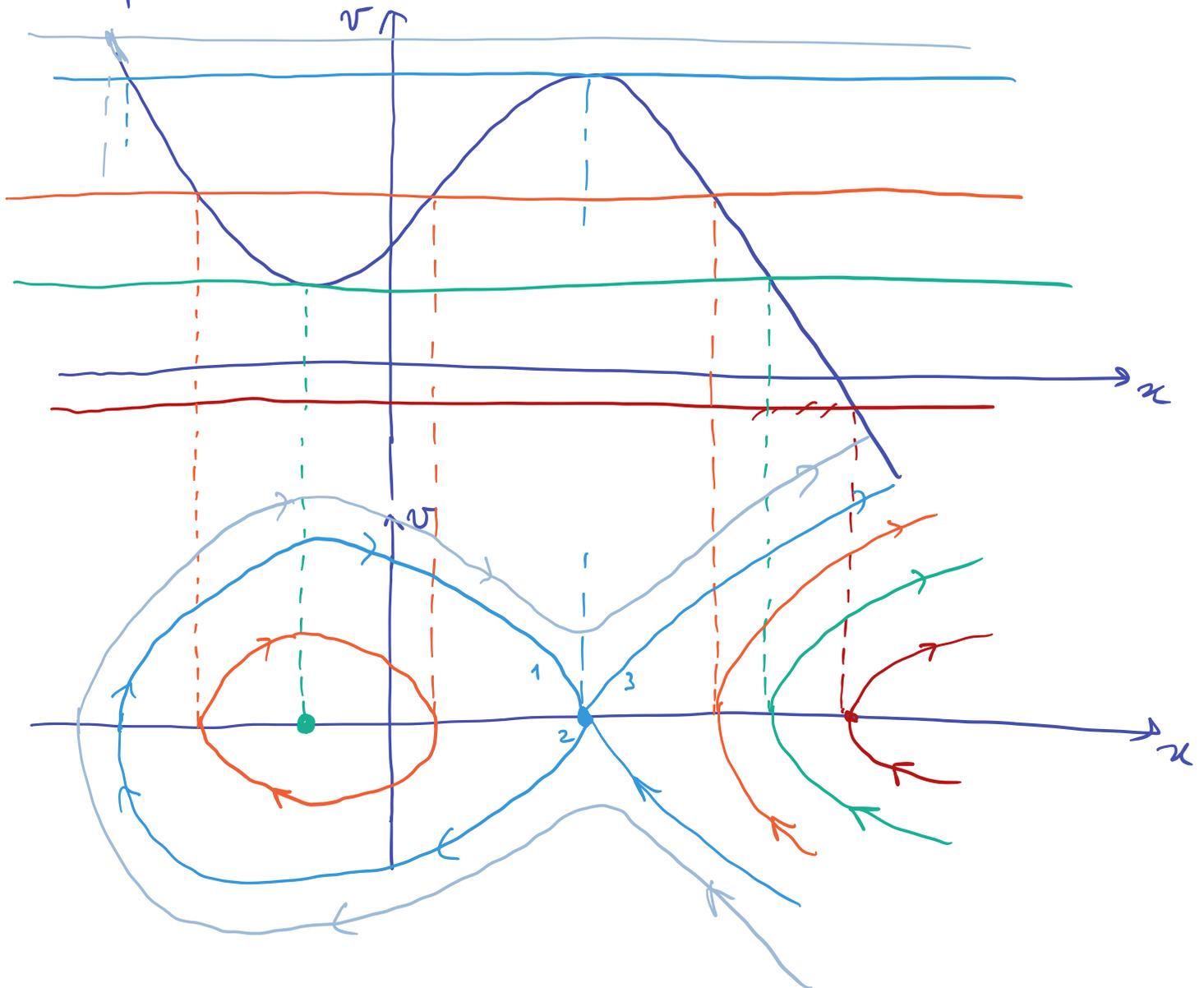
$E \neq 0$ $\frac{v^2}{2E/m} - \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1$ IPERBOLE

$E = 0$ $v^2 - \omega^2 x^2 = 0$

$(v - \omega x)(v + \omega x) = 0 \rightarrow$ UNIONE di due RETTE



ES) Dato l'andam. qualitativo di $V(x)$, determinare qualitativamente le traiettorie nel piano di fase (x, v) .



ANALISI QUANTITATIVA - PRELIMINARE

Consideriamo un sistema meccanico unidimensionale.

- Sia $I(x, v)$ una costante del moto.
- Prendiamo l'eq. $I(x, v) = I_0$ e la consideriamo come un'eq. in v . Risolvendola otteniamo

$$v = g(x, I_0) \quad (\text{una soluz.})$$

- Sappiamo che $v = \dot{x} \Rightarrow$ l'eq. sopra diventa

$$\dot{x} = g(x, I_0)$$

- Integro qta equazione

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x', I_0)} = \int_{t_0}^t dt'$$

\parallel \parallel
 $G(x, I_0)$ $t - t_0$

- Ottengo $t = t_0 + G(x, I_0)$

- Inverte e ottengo $x(t)$.

Esempio. $I(x, v) = mv$ (quantità di moto)

$$I = I_0 \Rightarrow v = \frac{I_0}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{I_0}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{m dx'}{I_0} = \int_{t_0}^t dt \Rightarrow (x(t) - x_0) \frac{m}{I_0} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{I_0}{m} t + \text{const.}$$

ANALISI QUANTITATIVA

Siamo partiti considerando un'eq. diff. del 2° ord $\ddot{x} = -V'(x)$; vediamo come semplificarla a una 1° ord. usandoci un COST. del moto!

$$E(x, v) \equiv T(v) + V(x) \quad \text{cost. del moto}$$

traiettorie piacenti sulle curve di livello

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = E \quad \leftarrow \text{cost.}$$

(cioè se $x(t)$ è una traiettoria, allora

$$\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E$$

Questo da relazione tra le funzioni $v(t)$ e $x(t)$

possiamo invertirla:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$

segno dip. dal verso (scegliamo +)
di percorrenza

← deve valere per ogni traiettoria

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x(t)))}$$

← Eq. diff. 1° ordine in $x(t)$

Se qta è soddisfatta anche eq moto soddisfatta

(Famiglia a 1 parametro d'eq. d'ff. del 1° ordine)

Questa equazione implica la seguente equazione diff. per la funzione $t(x)$, che è l'inversa di $x(t)$

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$$

$$(x(t(x)) = x)$$

$$\dot{x} \cdot \frac{dt}{dx} = 1$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$$

→
integrazione

$$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}} \quad x_0 = x(t_0)$$

→
invertiamo

$$x(t)$$

"Risolvere l'eq. diff. originaria
in QUADRATURA"

Es. OSC. ARMONICO

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 \tilde{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} \tilde{x}^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \tilde{x}$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x_0}^{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right) - \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x_0 \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_0)$$

$$\text{con } \varphi_0 = \omega t_0 - \arcsin \left(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x_0}_{\equiv A^{-1}} \right)$$

Cioè ritroviamo solut. dell'oscillatore armonico.

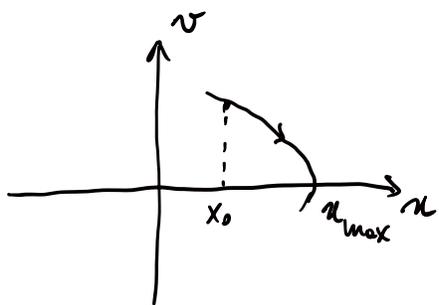
$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_0) \rightarrow A$ qui è determinato in funzione dell'ENERGIA. Questo si può sempre fare a posteriori,

mettendo $x(t)$ in $E(x(t), \dot{x}(t)) = E$:

$$\rightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi_0) = E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = E \Rightarrow A^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

- Nei pti di inversione $V(x) = E$, l'integrando diverge
 \rightarrow cosa succede all'integrale ?



$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

Mi concentro sul caso $|x_{max} - x_0| \ll 1 \rightarrow$

\rightarrow posso espandere $V(\tilde{x})$ attorno a x_{max}

$$V(\tilde{x}) = \underbrace{V(x_{max})}_E + V'(x_{max})(\tilde{x} - x_{max}) + O(|\tilde{x} - x_{max}|^2)$$

• denom : $\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{V'(x_{max})} \sqrt{x_{max} - \tilde{x}}$

• cambiamo variabile d'integraz. $\xi = x_{max} - \tilde{x}$

$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_{max} - x_0}^0 \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2V'(x_{max})}{m} \xi^{1/2}}} \quad \begin{matrix} \frac{1}{\xi^{1/2}} \text{ è integrabile} \\ \ln \xi \sim 0 \end{matrix}$$

\Rightarrow il pto arriva in x_{max} (pnto di inversione) in un tempo FINITO.

- Nei pti $x=c$ di massimo di $V(x)$ con $E = V(c)$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^c \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}} \quad |c - x_0| \ll 1$$

$$\rightarrow V(\tilde{x}) = \underbrace{V(c)}_E + \underbrace{V'(c)}_0 (\tilde{x} - c) + \frac{1}{2} \underbrace{V''(c)}_{V''(c) < 0} (\tilde{x} - c)^2 + \dots$$

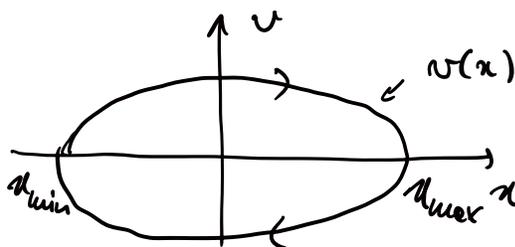
$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^c \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{1}{m} (-V''(c)) (\tilde{x} - c)^2}} = t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{x_0}^c \frac{d\tilde{x}}{c - \tilde{x}} =$$

$$\underset{\xi = c - \tilde{x}}{=} t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{\xi}^{c-x_0} \frac{d\xi}{\xi} \quad \frac{1}{\xi} \text{ non \u00e8 integrabile a } \xi \sim 0$$

\Rightarrow INTEGRALE DIVERGE

\Rightarrow il pto materiale arriva al pto di equilibrio (instabile) in un TEMPO INFINITO.

- Moti periodici:

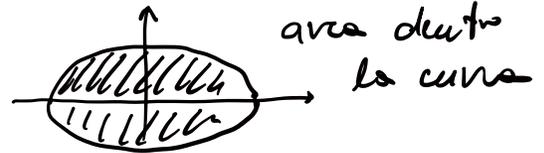


Periodo T_E \u00e8 il tempo impiegato per andare da x_{min} a x_{max} e ritorno:

$$T_E = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

Def. $S_E = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} dx = 2 \int_{x_{\min}(E)}^{x_{\max}(E)} v(x; E) dx$

E appare sia in integrando che in estremi d'integrazione



S_E è funzione del tipo $S_E = F(E, x_{\max}(E), x_{\min}(E))$

Ora vogliamo vedere cosa otteniamo se deriviamo S_E rispetto ad E

$$\frac{dS_E}{dE} = \frac{\partial F}{\partial E} + \frac{\partial F}{\partial x_{\max}} \frac{dx_{\max}}{dE} + \frac{\partial F}{\partial x_{\min}} \frac{dx_{\min}}{dE}$$

$$\begin{aligned} m \frac{dS_E}{dE} &= m \cdot 2 \frac{d}{dE} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} dx + \\ &+ 2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x_{\max}))} \frac{dx_{\max}}{dE} - 2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x_{\min}))} \frac{dx_{\min}}{dE} \\ &= 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1 \cdot \frac{2}{m}}{2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} dx = T_E \end{aligned}$$

$T_E = m \frac{dS_E}{dE}$ dove S_E è l'area dentro la curva chiusa nel piano di fase.

ES.) Osc. arm.

$$S_E = \text{Area ellisse} = \pi \frac{2E}{m\omega}$$

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \rightarrow E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$T_E = m \frac{dS_E}{dE} = \frac{2\pi}{\omega}$$