Analisi Quantitativa – Preliminare

Consideriamo un sistema meccanico unidimensionale.

- Sia $I(x,v)$ una costante del moto.
- Prendiamo l'eq. $I(x,v) = I_0$ e la consideriamo come un'eq. in v. Risolvendola otteniamo

  moto sta su una tale ipersuperf.

  $$v = g(x, I_0) \qquad \text{(una soluz.)}$$

- Sappiamo che $v = \dot{x}$ $\Rightarrow$ l'eq. sopra diventa

  $$\dot{x} = g(x, I_0)$$

- Integro qta equazione

  $$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{g(x', I_0)}}_{\equiv\, G(x, I_0)} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'}_{=\, t - t_0}$$

- Ottengo $t = t_0 + G(x, I_0)$

- Inverto e ottengo $x(t)$.

Esempio. $I(x,v) = mv$ (quantità di moto)

$$I = I_0 \Rightarrow v = \frac{I_0}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{I_0}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{m\,dx'}{I_0} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow (x(t) - x_0)\frac{m}{I_0} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{I_0}{m} t + \text{const.}$$

ANALISI QUANTITATIVA

Siamo partiti considerando un'eq. diff. del 2° ord $\ddot{x} = -V'(x)$; vediamo come semplificarla a una 1° ord. usando una cost. del moto!

$$E(x,v) \equiv T(v) + V(x) \quad \text{cost. del moto}$$

traiettorie giacciono sulle curve di livello

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \leftarrow \text{cost.}$$

(cioè se $x(t)$ è una traiettoria, allora
$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E \quad)$$

Questa da relazione tra le funzioni $v(t)$ e $x(t)$

possiamo invertirla:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \quad \leftarrow \text{deve valere per ogni traiettoria}$$

segno dip. del verso di percorrenza (scegliamo +)

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))} \quad \leftarrow \text{Eq diff. 1° ordine in } x(t)$$

cost.

(Famiglia a 1 parametro (E) di eq. diff. del 1° ordine)

Se qta è soddisfatta anche eq moto soddisfatta

Questa equazione implica la seguente equazione diff. per la funzione $t(x)$, che è l'inversa di $x(t)$

$$(x(t(x)) = x) \Rightarrow \dot{x} \cdot \frac{dt}{dx} = 1$$

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$\Downarrow$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$\xrightarrow[\text{integrazione}]{}$ $$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}} \qquad x_0 = x(t_0)$$

$\xrightarrow[\text{invertiamo}]{}$ $$x(t)$$

"Risolvere l'eq. diff. originaria per QUADRATURE"

Es. OSC. ARMONICO $\quad V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \omega^2 \tilde{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \int_{x_0}^{x} \frac{d\hat{x}}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E}\tilde{x}^2}}$$

$y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,\tilde{x}$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x_0}^{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x\right) - \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\, \mathrm{sen}(\omega t - \varphi_0)$$

$$\text{con } \varphi_0 = \omega t_0 - \arcsin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}}_{\equiv A^{-1}} x_0\right)$$

Cioè ritroviamo solut. dell'oscillatore armonico.

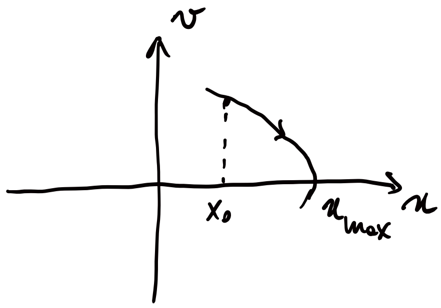
$x(t) = A\, \mathrm{sen}(\omega t - \varphi_0)$ $\rightarrow$ A qui è determinato in funzione dell'ENERGIA. Questo si può sempre fare a posteriori, mettendo $x(t)$ in $E(x(t), \dot{x}(t)) = E$:

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \varphi_0) = E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = E \quad \Rightarrow \quad A^2 = \frac{2E}{m\omega^2} .$$

- Nei pti di inversione $V(x) = E$, l'integrando diverge

⇝ cosa succede all'integrale ?



$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}}$$

Mi concentro sul caso $|x_{max} - x_0| \ll 1$ →

→ posso espandere $V(\tilde{x})$ attorno a x_{max}

$$V(\tilde{x}) = \overset{E}{\overset{\parallel}{V(x_{max})}} + V'(x_{max})(\tilde{x} - x_{max}) + O(|\tilde{x} - x_{max}|^2)$$

• denom : $\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{V'(x_{max})} \sqrt{x_{max} - \tilde{x}}$

• cambiamo variabile di integraz. $\xi = x_{max} - \tilde{x}$

$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{0}^{x_{max} - x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2V'(x_{max})}{m}}\, \xi^{1/2}}$$

$\frac{1}{\xi^{1/2}}$ è integrabile in $\xi \sim 0$

⇒ il pto arriva in x_{max} (pto di inversione) in un tempo FINITO.

- Nei pti $x = c$ di massimo di $V(x)$ con $E = V(c)$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}} \qquad |c - x_0| \ll 1$$

$$\rightarrow V(\tilde{x}) = \underset{\overset{\|}{E}}{V(c)} + \underset{\overset{\|}{0}}{V'(c)}\,(\tilde{x}-c) + \frac{1}{2}\underset{\overset{\uparrow}{V''(c) < 0}}{V''(c)}\,(\tilde{x}-c)^2 + \dots$$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(-V''(c)\right)(\hat{x}-c)^2}} = t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{c - \tilde{x}} =$$

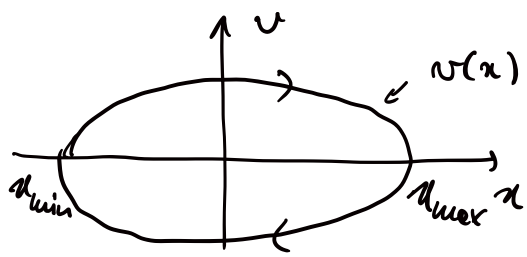
$$\underset{\xi \equiv c - \tilde{x}}{=} t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{0}^{c - x_0} \frac{d\xi}{\xi}$$

$\frac{1}{\xi}$ non è integrabile a $\xi \sim 0$

$\Rightarrow$ INTEGRALE DIVERGE

$\Rightarrow$ il pto materiale arriva al pto di equilibrio (instabile) in un TEMPO INFINITO.

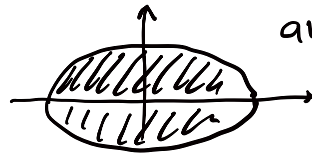
- Moti periodici:



Periodo T_E è il tempo impiegato per andare da x_{min} a x_{max} e ritorno:

$$T_E = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}}$$

Def. $S_E = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E-V(\tilde{x}))}\, d\tilde{x} = 2\int_{x_{min}(E)}^{x_{max}(E)} v(\tilde{x};E)\, d\tilde{x}$



area dentro la curva

E appare sia in integrando che in estremi d'integrazione

$\hookrightarrow$ S_E è funzione del tipo $S_E = F(E, x_{max}(E), x_{min}(E))$

Ora vogliamo vedere cosa otteniamo se deriviamo S_E rispetto ad E

$$\frac{dS_E}{dE} = \frac{\partial F}{\partial E} + \frac{\partial F}{\partial x_{max}}\frac{dx_{max}}{dE} + \frac{\partial F}{\partial x_{min}}\frac{dx_{min}}{dE}$$

$$m\frac{dS_E}{dE} = m\, 2\, \frac{d}{dE}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}\, dx + 2\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(E-V(x_{max}))}_{=0}}\frac{dx_{max}}{dE} - 2\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(E-V(x_{min}))}_{=0}}\frac{dx_{min}}{dE}$$

$$= 2\cancel{m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1\cdot \cancel{2}/\cancel{m}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}\, dx = T_E$$

$T_E = m\frac{dS_E}{dE}$ dove S_E è l'area dentro la curva chiusa nel piano di fase.

ES.) Osc. arm.

$S_E = \text{Area ellisse} = \pi\frac{2E}{m\omega}$

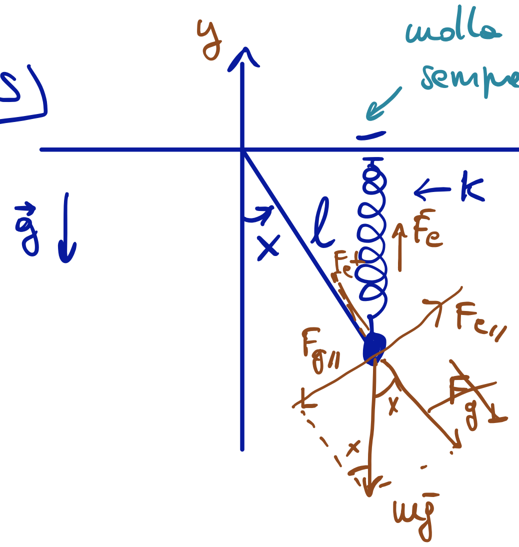
$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ $\curvearrowright$ $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$T_E = m\frac{dS_E}{dE} = \frac{2\pi}{\omega}$

BIFORCAZIONI

ES)



$\vec{F}_e = k\ell\cos x\ \bar{e}_y \qquad \vec{F}_g = -mg\ \bar{e}_y$

$F_{e\parallel} = k\ell\cos x\,\mathrm{sen}\,x \qquad F_{g\parallel} = -mg\,\mathrm{sen}\,x$

Eq. Newton:

$$\ddot{x} = -\omega^2\,\mathrm{sen}\,x + \Omega^2\cos x\,\mathrm{sen}\,x$$

$$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2 x$$

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{\ell} \qquad \Omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\tilde{V}(x) = \frac{V(x)}{m\ell^2} = \omega^2(1-\cos x) + \frac{1}{2}\Omega^2\cos^2 x$$

Disegnamo il grafico di questo potenziale

- $V(x)$ è periodico per $x \to x+2\pi$

- $\tilde{V}'(x) = \omega^2\,\mathrm{sen}\,x - \Omega^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,x\,(\omega^2 - \Omega^2\cos x)$

  $\tilde{V}''(x) = \omega^2\cos x + \Omega^2\,\mathrm{sen}^2 x - \Omega^2\cos^2 x = \omega^2\cos x + \Omega^2 - 2\Omega^2\cos^2 x$

  PTI estremali : $x = 0, \pi$ ← C_1, C_2

  $x = \pm\arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$ ← $\exists$ se $\frac{\omega^2}{\Omega^2} < 1$

  ↑ C_3, C_4

$$V''(0) = \omega^2 - \Omega^2$$

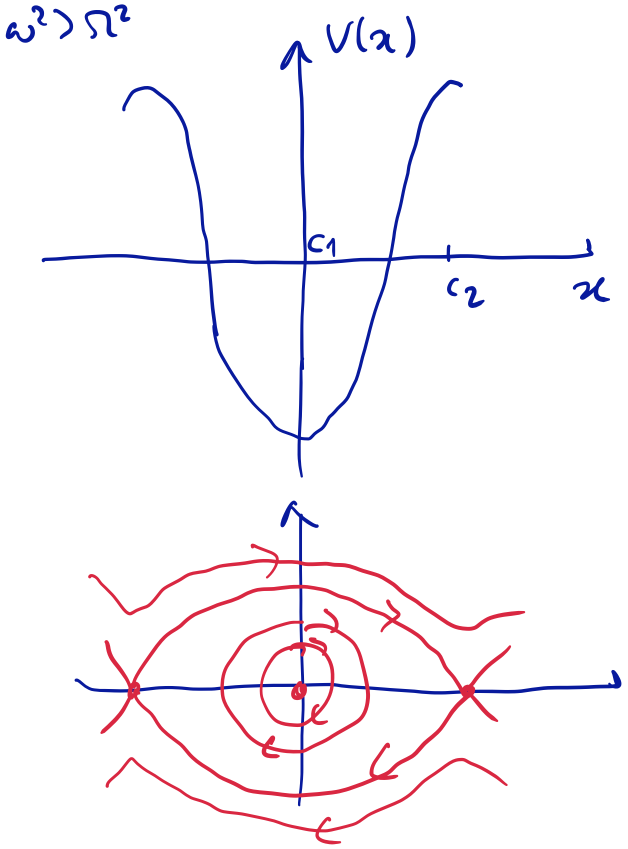
$$V''(\pi) = -\omega^2 - \Omega^2$$

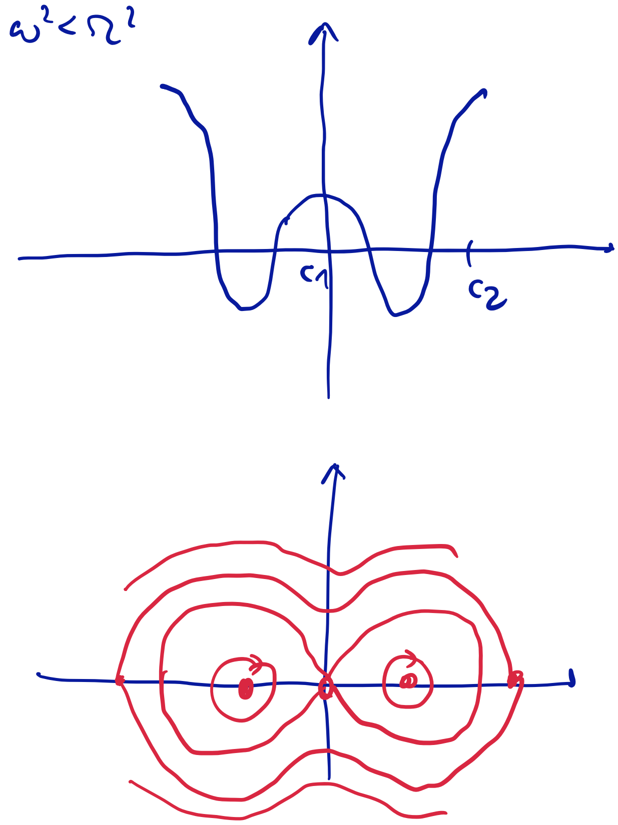
$$V''\left(\pm\arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)\right) = \frac{\omega^4}{\Omega^2} + \Omega^2 - 2\cancel{\Omega^2}\frac{\omega^4}{\Omega^{\cancel{4}2}} = \frac{1}{\Omega^2}(\Omega^2 - \omega^2)$$

→ Ci sono due potenziali qualitativamente distinti

Quando $\omega^2 > \Omega^2$ c_1 è MIN ← stab.
c_2 è MAX ← instab.
$c_{3,4}$ non sono soluz.

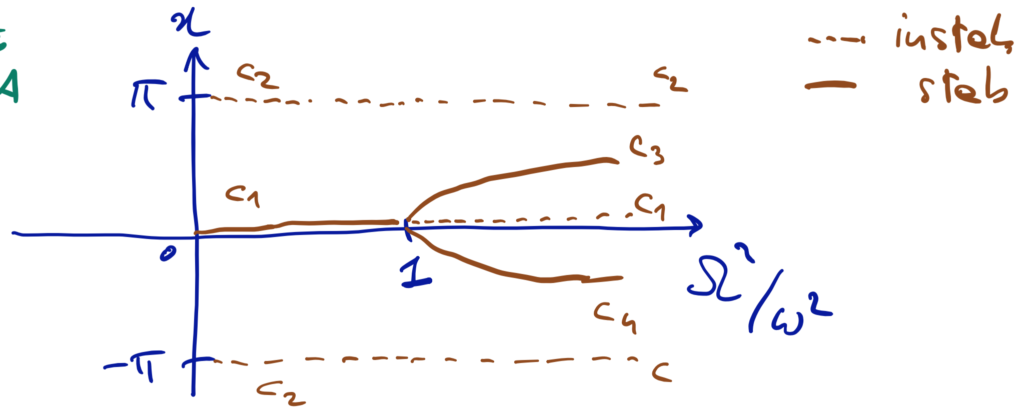
Quando $\omega^2 < \Omega^2$ c_1 è MAX ← inst.
c_2 è MAX ← inst.
$c_{3,4}$ sono MINIMI ← stab.





BIFORCAZIONE A FORCHETTA

"Grafico di biforcazione" →



Al variare del parametro, cambia il numero e il tipo di pti di equilibrio.