Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Fisica

a.a. 2023/2024

1 Serie numeriche

1.1 Definizione e prime proprietà.

Il concetto di **serie** formalizza un procedimento per sommare un'infinità numerabile di termini. Vediamo qualche esempio:

1. Sommiamo le potenze di 2:
   1
   $1 + 2$
   $1 + 2 + 4$
   $1 + 2 + 4 + 8$
   $1 + 2 + 4 + 8 + 16$
   $\dots$

Più andiamo avanti più la somma diventa grande; se consideriamo l'insieme dei numeri ottenuti così, cioè in maniera ricorsiva, sommando al risultato del passo n la successiva potenza di due, ci accorgiamo che esso è illimitato superiormente e possiamo dunque dire che la somma delle potenze di 2 è uguale a $+\infty$.

2. Sommiamo ora le potenze di $\frac{1}{2}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Osserviamo che se chiamiamo S questa somma allora

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = S - 1\,.$$

Da $\frac{1}{2}S = S - 1$ segue $S = 2$.
Lo stesso procedimento applicato in maniera acritica al primo caso porterebbe a:
$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ quindi $2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1$ e da $2S = S - 1$ segue $S = -1$ il che è ovviamente assurdo. L'assurdo chiaramente deriva dal aver supposto S un numero reale.

Definizione 1 *Sia $(a_n)_n$ una successione. Definiamo una successione $(S_n)_n$ nel seguente modo:*

$$\begin{aligned}
&S_0 = a_0 \\
&S_1 = a_0 + a_1 \\
&S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
&\ \dots \\
&S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\ \dots
\end{aligned}$$

ossia

$$S_0 = a_0 \quad e \quad S_n = S_{n-1} + a_n \quad \text{per ogni } n \geq 1\,.$$

La coppia di successioni $((a_n)_n, (S_n)_n)$ si dice **serie** *di termine generico a_n e si indica col simbolo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{oppure} \qquad \sum_n a_n\,.$$

L'elemento $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ si dice **somma parziale** *o* **ridotta n-esima**.
Se esiste il limite di S_n in $\mathbb{R}$ diciamo che la serie **converge**. *Il limite $S = \lim_n S_n$ viene chiamato* **somma della serie** *e si scrive:*

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

Se $\lim_n S_n = +\infty$ si dice che la serie **diverge positivamente** *e si scrive $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$, se $\lim_n S_n = -\infty$ si dice che la serie* **diverge negativamente** *e si scrive $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$, mentre si dice che la serie è* **indeterminata** *se il limite di S_n non esiste.*

Diremo che due serie hanno lo stesso carattere/comportamento se sono entrambe convergenti, entrambe divergenti a $+\infty$ o a $-\infty$, o entrambe indeterminate.

Osservazione: Se il termine generale a_k risulta ben definito solo per $k \geq k_0$ anche S_n sarà definito a partire da k_0: $S_n = \sum\limits_{k=k_0}^{n} a_k$.

Esempi banali: 1. Se $a_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $S = \lim_n S_n = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$.
2. Se $a_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $S_n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $S = \lim_n S_n = +\infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty$, la serie diverge positivamente.
3. Se $a_k = (-1)^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 1$ se n è pari, mentre $S_n = 0$ se n è dispari, quindi S_n non ha limite cioè la serie $\sum_n (-1)^n$ è indeterminata.

Serie telescopiche

1. $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, $n \geq 1$. Vogliamo calcolare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$.
Osserviamo che $\dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ e usiamo questa formula per calcolare le somme parziali:
$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$
$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

e a questo punto l'idea è che l'uguaglianza $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ potrebbe essere vera. Si verifica per induzione che effettivamente $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \geq 1$ e si conclude che $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$, cioè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$.

2. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log(1+\tfrac{2}{n})}_{a_n}$.

Osserviamo che usando le proprietà del logaritmo possiamo scrivere
$a_n = \log(1+\frac{2}{n}) = \log(\frac{n+2}{n}) = \log(n+2) - \log n$.
Allora:
$S_1 = a_1 = \log 3$
$S_2 = a_1 + a_2 = \log 3 + \log 4 - \log 2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = \log 3 + \log 4 - \log 2 + \log 5 - \log 3 = \log 4 + \log 5 - \log 2$
e a questo punto proviamo con $S_n = \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2$.
Verifichiamo questa formula per induzione:
passo base: già fatto sopra
passo induttivo: ipotesi del passo induttivo $S_n = \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2$
tesi del passo induttivo $S_{n+1} = \log(n+2) + \log(n+3) - \log 2$.
Dimostrazione del passo induttivo:
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} =_{\text{ipotesi}} \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2 + \log(n+3) - \log(n+1)$
$= \log(n+2) + \log(n+3) - \log 2$.
Conclusione: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha che $S_n = \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2$.
Allora $S = \lim_n S_n = \lim_n(\log(n+1)+\log(n+2)-\log 2) = +\infty$, cioè $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{2}{n}) = +\infty$.

Esercizio: Trovare la somma delle seguenti serie:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

Serie geometriche: sono del tipo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro $(= 1 + a + a^2 + \dots)$.

Se $a = 1$ allora $S_n = n$ e la serie diverge positivamente;
se $a \neq 1$ allora $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo:
caso $a > 1$: $S = \lim_n S_n = +\infty$, dunque la serie diverge positivamente
caso $-1 < a < 1$: $S = \lim_n S_n = \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$, dunque la serie converge a $\frac{1}{1-a}$
caso $a = -1$: è il caso visto prima, la serie è indeterminata
caso $a < -1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = +\infty$ mentre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = -\infty$, la serie è indeterminata.

1.2 Convergenza

In generale non si riesce a calcolare la somma di una serie, ci limitiamo a stabilire se la serie converge o meno. Per determinare il carattere di una serie (convergente/divergente/indeterminato) abbiamo a disposizione i seguenti **strumenti**:

- teoremi algebrici
- la condizione necessaria
- l'elenco di serie il cui comportamento è noto
- diversi criteri di convergenza: due casi

serie a termini di segno costante ($a_n \geq 0$)	serie a termini di segno variabile
– criterio della radice	- criterio di Leibniz
– criterio del rapporto	- criterio di convergenza assoluta
– criterio del confronto	
– **criterio del confronto asintotico**	
– ...	

Teoremi algebrici: seguono dal fatto di essere una sommatoria
1. Sia $(a_n)_n$ una successione e sia λ un numero reale diverso da zero. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (\text{in } \overline{\mathbb{R}}).$$

2. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad (\text{con tutte le eccezioni viste in } \overline{\mathbb{R}}).$$

Dimostrazione. 1. Basta ricordare che $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$.
2. Sia $c_n = a_n + b_n$. Poniamo $S_n^c = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$, $S_n^a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, e $S_n^b = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$. Allora $S_n^c = S_n^a + S_n^b$ e quindi $\lim_n S_n^c = \lim_n S_n^a + \lim_n S_n^b$ in tutti i casi in cui vale il teorema sul limite della somma.

Attenzione: non è vero che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Condizione necessaria: Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $a_n \to 0$.
Dimostrazione. Sia $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Per ipotesi $S \in \mathbb{R}$. Allora $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$.
Come si usa questo risultato:
Se a_n NON CONVERGE A 0 allora la serie $\sum_n a_n$ NON CONVERGE.
Se a_n CONVERGE A 0 allora la serie $\sum_n a_n$ POTREBBE CONVERGERE, ma non sappiamo ancora se converge o no.
Serie note: Sono sostanzialmente soltanto le seguenti:
1. serie telescopiche
2. serie geometriche
3. serie armoniche generalizzate

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \qquad \begin{array}{ll} \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1\,. \end{array}$$

(la serie armonica classica è $\sum_n \frac{1}{n}$) e loro varianti come:

$$\sum_n \frac{1}{n \log^\alpha n} \qquad \begin{array}{ll} \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1\,. \end{array}$$

Vedremo più avanti una dimostrazione.

Serie a termini di segno costante È sufficiente considerare le serie a termini positivi (altrimenti $-a_n \geq 0$)

Osservazione: sommando sempre numeri maggiori o uguali a zero, la successione S_n delle somme parziali è **crescente** quindi **ha limite** e questo limite può essere
· un numero reale positivo, e in questo caso la serie converge,
· oppure $+\infty$, e in questo caso la serie diverge positivamente.

Diciamo che una proprietà è vera **definitivamente** se è vera per tutti gli n maggiori di un certo n_0. Se ad una serie cambiamo un numero finito di termini, il comportamento della serie non cambia, cambia eventualmente la somma nel caso delle serie convergenti. Quindi è sufficiente che la successione a_n abbia definitivamente i termini di segno costante.

Criteri di convergenza per serie a termini POSITIVI

1. criterio della radice
Sia $a_n \geq 0$ (definitivamente). Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in \overline{R}$. Allora

- se $\ell > 1$ allora la serie diverge (non verifica nemmeno la condizione necessaria)
- se $\ell < 1$ allora la serie converge.

Osservazione Se $\ell = 1$, non possiamo decidere se la serie converge o meno usando questo criterio.

2. criterio del rapporto
Sia $a_n > 0$ (definitivamente). Supponiamo che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \overline{R}$. Allora

- se $\ell > 1$ allora la serie diverge (non verifica nemmeno la condizione necessaria)
- se $\ell < 1$ allora la serie converge.

Osservazione Se $\ell = 1$, non possiamo decidere se la serie converge o meno usando questo criterio.

3. criterio del confronto
Supponiamo che $a_n \geq b_n \geq 0$ (definitivamente). Allora valgono le seguenti due implicazioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge.}$$

4. criterio del confronto asintotico
Supponiamo che $a_n \geq 0$ (definitivamente), $b_n > 0$ (definitivamente) e che

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[\,.$$

Allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè una converge se e solo se converge l'altra (il valore della somma potrebbe essere diverso).

Come si usa: dobbiamo studiare $\sum_n a_n$, cerchiamo una serie nota $\sum_n b_n$ in modo tale che $\dfrac{a_n}{b_n} \to \ell$ con $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty$; se la troviamo, allora la serie iniziale si comporta come la serie $\sum_n b_n$.

Vediamo ora cosa si riesce a dire se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ o se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$.
• se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ allora (definitivamente) $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$ e possiamo usare il criterio del confronto;
• se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$ allora (definitivamente) $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ e anche in questo caso possiamo usare il criterio del confronto.

Esempi di applicazione dei criteri di convergenza

1. $\displaystyle\sum_n \underbrace{\frac{n^2+3n+5}{n^2+2}}_{a_n}$.

   Osserviamo che $a_n > 1$ quindi non è soddisfata la condizione necessaria. Si ha $\sum_n \frac{n^2+3n+5}{n^2+2} = +\infty$.

2. $\displaystyle\sum_n \underbrace{\frac{n^3+5}{2^n}}_{a_n}$.

   Osserviamo che $a_n > 0$ sempre e che $a_n \to 0$ quindi la serie POTREBBE convergere. Provìamo a usare il criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{n^3+5} \to \frac{1}{2}$ perchè $\sqrt[n]{n^3+5} \to 1$ (radice n-esima di polinomio). Siccome $\frac{1}{2} < 1$ la serie data converge.
   Con il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3+5}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^3+5} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^3+5}{n^3+5} \to \frac{1}{2}$. Come sopra, essendo $\frac{1}{2} < 1$ concludiamo che la serie data converge.

3. $\displaystyle\sum_n \underbrace{\frac{n^2+3n+5}{7n^3+1}}_{a_n}$.

   Osserviamo che $a_n > 0$ sempre e che $a_n \to 0$ quindi la serie POTREBBE convergere. I criteri della radice e del raporto non funzionano perchè il limite è uguale a 1.
   Informale: $a_n \approx \frac{n^2}{7n^3} = \frac{1}{7n} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{n}$, per cui la serie si comporta come $\sum_n \frac{1}{n}$ che diverge (armonica o volendo armonica generalizzata con $\alpha = 1$).
   Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n}$.
   $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n^2+3n+5}{7n^3+1}\cdot n = \frac{1}{7} \in]0,+\infty[$ quindi la serie data si comporta con $\sum_n b_n$, ossia diverge.

4. $\displaystyle\sum_n \frac{n^{33}+7}{5n^{36}+1}$.

   Osserviamo che $a_n > 0$ sempre e che $a_n \to 0$ quindi la serie POTREBBE convergere. Informale: $a_n \approx \frac{n^{33}}{5n^{36}} = \frac{1}{5n^3} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^3}$, per cui la serie si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^3}$ - armonica generalizzata con $\alpha = 3$, quindi converge.
   Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n^3}$.
   $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n^{33}+7}{5n^{36}+1}\cdot n^3 = \frac{1}{5} \in]0,+\infty[$, per cui la serie data si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^3}$ quindi converge.

5. $\displaystyle\sum_n \frac{3^n}{n!}$

   $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$
   criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$ quindi la serie converge.

6. $\displaystyle\sum_n \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$

   $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$
   Informale: $a_n \approx \frac{3^n}{5^n} = (\frac{3}{5})^n$ e $\sum_n (\frac{3}{5})^n$ converge (serie geometrica con $a \in]-1,1[$).
   Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = (\frac{3}{5})^n$
   $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}\cdot\frac{5^n}{3^n} = \lim_n \frac{3^n((\frac{2}{3})^n+1)}{5^n((\frac{4}{5})^n+1)}\cdot\frac{5^n}{3^n} = 1 \in]0,+\infty[$ per cui la serie data si

comporta come $\sum_n b_n$, quindi converge.

7. $\displaystyle\sum_n \sin\left(\frac{n+3}{n^2+4}\right)$

$a_n \geq 0$: infatti, $\frac{n+3}{n^2+4} \to 0+$, quindi $0 < \frac{n+3}{n^2+4} < \pi$ e $a_n \geq 0$, si ha anche $a_n \to 0$
Informale: $a_n \approx \sin\frac{n}{n^2} = \sin(\frac{1}{n}) \approx \frac{1}{n}$ e $\sum_n a_n$ si comporta come $\sum_n \frac{1}{n}$ quindi diverge
Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n}$

8. $\displaystyle\sum_n \left(\sin\frac{1}{3n} - \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{n}\right)$

Osserviamo che $\lim_n a_n = \lim_n(\sin\frac{1}{3n} - \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{n}) = 0$,
quindi la serie POTREBBE convergere.
Informale: $\sin\frac{1}{3n} \approx \frac{1}{3n}$, $\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}$, quindi $a_n \approx \frac{1}{3n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} = 0$ NO
non basta, per capire il comportamento della serie dobbiamo sviluppare ulteriormente:
$\sin\frac{1}{3n} \approx \frac{1}{3n} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(3n)^3}$, $\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}\right)$, quindi
$a_n \approx \frac{1}{3n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{27n^3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{n^3} = (\frac{1}{9} - \frac{1}{6\cdot 27})\frac{1}{n^3} = \frac{17}{162}\frac{1}{n^3}$
e $\sum_n a_n$ si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^3}$ quindi converge.
Rigoroso: riprendiamo i calcoli fatti sopra tenendo conto del resto:
$a_n = \frac{17}{162}\frac{1}{n^3} + r_3(\frac{1}{n})$, con $\lim_n \frac{r_3(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = 0$, quindi almeno per n grande
$|r_3(\frac{1}{n})| < \frac{17}{162}\frac{1}{n^3}$ e di conseguenza $a_n > 0$.
Facciamo ora il confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n^3}$:
$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n(\sin\frac{1}{3n} - \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{n})\cdot n^3 = \frac{17}{162} \neq 0, \neq +\infty$ per cui la serie data si comporta come $\sum_n b_n$ che è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 3$, quindi converge.

Serie armonica e serie armoniche generalizzate.

1. Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$. Essa viene chiamata serie armonica perchè il termine $\dfrac{1}{n}$ è la media armonica dei due termini adiacenti: $\dfrac{1}{n-1}$ e $\dfrac{1}{n+1}$. Si ha

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

ed è chiaro che questa successione non è limitata superiormente. Quindi per confronto, la serie armonica diverge.
Si può dimostrare che la serie armonica è divergente anche osservando che la successione delle somme parziali non è di Cauchy. Infatti, $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n-1} + \dots + \dfrac{1}{n+1} \geq n\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

2. Consideriamo ora la serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2}$. Essa converge per confronto con la serie telescopica $\displaystyle\sum_n \frac{2}{n(n+1)}$ in quanto per ogni numero naturale $n > 0$ si ha $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{2}{n(n+1)}$.

Abbiamo visto che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$. Si dimostrerà più avanti usando le serie di Fourier che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Consideriamo la serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$. Per confronto con la serie armonica deduciamo che la serie $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \leq 1$, mentre per confronto con $\sum_n \frac{1}{n^2}$ otteniamo la convergenza per $\alpha \geq 2$. Resta da capire il comportamento della serie nel caso in cui $1 < \alpha < 2$.
Proviamo a ripetere il procedimento usato per dimostrare la divergenza della serie armonica, confrontando la serie data con una serie ottenuta usando questa volta le potenze di $\frac{1}{2^\alpha}$.
Allora:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{9^\alpha}+\frac{1}{10^\alpha}+\frac{1}{11^\alpha}+\frac{1}{12^\alpha}+\frac{1}{13^\alpha}+\frac{1}{14^\alpha}+\frac{1}{15^\alpha}+\frac{1}{16^\alpha}+\dots$$

$$\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}}_{2\frac{1}{2^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}}_{4\frac{1}{4^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}}_{8\frac{1}{8^\alpha}}+\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Quindi per $1 < \alpha < 2$ la serie $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Il procedimento usato per questa dimostrazione si applica in casi più generali, infatti vale il seguente **criterio della serie condensata:**
Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi con $(a_n)_n$ una successione decrescente. Allora le due serie

$$\sum_n a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_n a_{2^n} 2^n$$

hanno lo stesso comportamento.
Esercizi proposti.
[A-B] esercizio 9.4: Dire se sono convergenti, divergenti, o indeterminate le seguenti serie, al variare dell'eventuale parametro reale α.

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$ [divergente a $+\infty$]

b. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+(-1)^n n^2}$ [convergente]

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cos n}{1-\sin n}$ [divergente a $+\infty$]

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^2}$ [divergente a $+\infty$]

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ [convergente]

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sin^2 n}$ [divergente a $+\infty$]

g. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+e^n}{n!}$ [convergente]

h. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin n$ [indeterminata]

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$ [convergente]

j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ [divergente a $+\infty$]

k. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right)$ [convergente]

l. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+5^n}{n!}$ [convergente]

m. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^n}{n!}$ [convergente]

n. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ [divergente a $+\infty$]

o. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+n}-n}{n^\alpha}$ [conv. se e solo se $\alpha > 2$.]

p. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\log(1+\alpha)}$ [conv. se $\alpha > e-1$, altrimenti div.]

q. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}$ [conv. se $\alpha < e$, div. se $\alpha > e$]

[G] Dire se convergono le serie seguenti

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$ [sì]

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ [sì]

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n+1}$ [sì]

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$ [sì]

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ [sì]

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$ [sì]

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ [sì]

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n!}$ [sì]

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ [sì]

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(\sin n))^n$ [sì]

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$ [no]

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$ [sì]

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(\frac{1}{n^2})$ [sì]

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$ [sì]

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ [sì]

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ non è un cubo} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ è un cubo} \end{cases}$ [sì]

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\sqrt{n}}$ [sì]

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n!)^{-1/n}$ [no]

[G] Trovare la somma delle serie seguenti (tratto da Pietro Mengoli: Novae quadraturae aritmeticae, 1651)

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(an+b)(a(n+1)+b)}$, supponendo $an+b \neq 0$ per tutti i numeri naturali n

$$\left[\frac{1}{ab}\right]$$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ $\quad\left[\frac{1}{12}\right]$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}\dots a_{n+7}}$ dove $a_k = ak+b$, supponendo $a_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\left[\frac{1}{7a}\frac{1}{a_0 a_1 \dots a_6} = \frac{1}{7ab(a+b)\dots(a+6a)}\right]$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ $\quad\left[\frac{3}{4}\right]$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_{n+s}-b_n}{b_n b_{n+1}\dots b_{n+s}}$ dove b_n è una successione crescente con $b_n > 0$ e $\lim_n b_n = b$.

$$\left[\frac{b^s - b_0 b_1 \dots b_{s-1}}{b^s b_0 b_1 \dots b_{s-1}}\right]$$

Dimostrazione dei criteri di convergenza.

Criterio del confronto: Per ipotesi $0 \leq b_n \leq a_n$ per ogni n (pur di modificare eventualmente un numero finito di termini). Allora
$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n \geq b_0 + b_1 + \dots + b_n = S_n^b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (come esercizio, provate a verificare per induzione).
• se $S_n^b \to +\infty$ allora, per il confronto tra limiti anche $S_n^a \to +\infty$, cioè anche la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$
• se la serie $\sum_n a_n$ converge, cioè $S_n^a \to \ell$ per un certo $\ell < +\infty$, allora S_n^b non può tendere a $+\infty$. Siccome per monotonia S_n^b ha limite, concludiamo che S_n^b converge ad un certo numero reale, cioè la serie $\sum_n b_n$ è convergente.

Criterio della radice: Supponiamo sia $a_n \geq 0$ e $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, in modo da avere $\ell + \varepsilon < 1$. Allora per la definizione di limite, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$, cioè definitivamente, si abbia:
$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$, quindi $a_n < (\ell + \varepsilon)^n$. Essendo $\ell + \varepsilon < 1$, la serie $\sum_n (\ell+\varepsilon)^n$ converge, quindi per il criterio del confronto anche $\sum_n a_n$ converge.
Supponiamo sia $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$. Allora scegliamo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, in modo da avere $1 < \ell - \varepsilon$. Per la definizione di limite, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$, cioè definitivamente, si abbia:
$1 < \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$, quindi $(\ell - \varepsilon)^n < a_n$. Essendo $1 < \ell - \varepsilon$, la serie $\sum_n (\ell - \varepsilon)^n$ diverge a $+\infty$, quindi per il criterio del confronto anche $\sum_n a_n$ diverge.

Criterio del rapporto: Supponiamo sia $a_n > 0$. Vediamo prima che
se esiste un numero q con $0 < q < 1$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge.

Sotto questa ipotesi si ha $a_1 \leq a_0 q$, $a_2 \leq a_1 q \leq a_0 q^2$, ..., $a_{n+1} \leq a_n q \leq a_0 q^{n+1}$, per cui la serie $\sum_n a_n$ è maggiorata dalla serie $a_0 \sum_n q^n$ che è convergente, essendo $0 < q < 1$.

Come abbiamo già visto, il comportamento di una serie non cambia se modifichiamo solo un numero finito di termini, per cui è sufficiente richiedere che la disuguaglianza $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ sia verificata definitivamente, ossia da un certo $\overline{n}$ in poi.

Nello stesso modo si dimostra che
se esiste un numero $q > 1$ *tale che* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ *(definitivamente), allora la serie* $\sum_n a_n$ *diverge a* $+\infty$.

Dimostriamo ora il criterio del rapporto. Supponiamo che $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da avere $\ell + \varepsilon < 1$. Per la definizione di limite esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon < 1$, quindi per quanto visto sopra la serie $\sum_n a_n$ converge.

Se invece $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da avere $\ell - \varepsilon > 1$ ed esiste un $\overline{n}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \ell - \varepsilon > 1$. Concludiamo come prima che la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto asintotico: Se $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0, \neq +\infty$ allora, dalla definizione di limite segue che
$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$ per n abbastanza grande.
Moltiplicando per $b_n > 0$ otteniamo: $\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell b_n$ definitivamente.
Allora, per il criterio del confronto, le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento. Infatti,
• se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n 2\ell b_n = 2\ell \sum_n b_n$ converge, dunque, per confronto, $\sum_n a_n$ converge;
• se $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$, anche $\sum_n \frac{\ell}{2} b_n$ diverge, dunque, per confronto, $\sum_n a_n$ diverge.

Criteri per serie a termini di segno variabile

Per definizione una serie converge se la successione $(S_n)_n$ corrispondente ha un limite reale. Essendo $\mathbb{R}$ uno spazio metrico completo, questo succede se e solo se $(S_n)_n$ è una successione di Cauchy, ovvero se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq \bar{n} \;\; \forall p > 0 \quad |S_{n+p} - S_n| = \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \Big| < \varepsilon \, .$$

Definizione. Si dice che la serie $\sum_n a_n$ **converge assolutamente** se converge la serie $\sum_n |a_n|$.
Criterio di convergenza assoluta: Se $\sum_n |a_n|$ converge allora anche $\sum_n a_n$ converge.

Quindi, dovendo studiare la convergenza di una serie $\sum_n a_n$ a termini di segno variabile, si può provare a studiare la convergenza della serie a termini positivi $\sum_n |a_n|$. Per questa si possono applicare tutti i criteri studiati per le serie a termini positivi.
• Se $\sum_n |a_n|$ converge allora per il criterio di convergenza assoluta anche $\sum_n a_n$ converge.
• Se $\sum_n |a_n| = +\infty$ allora restano aperte tutte le quattro possibilità per la serie di partenza: convergente, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$, indeterminata.

Attenzione: l'assoluta convergenza implica la convergenza, ma non viceversa.

Criterio di Leibniz (criterio per le serie a segno alterno)
Consideriamo la serie $\sum_n (-1)^n \alpha_n$ [cioè $a_n = (-1)^n \alpha_n$]
Supponiamo che

a) $\alpha_n \geq 0$ (definitivamente) [la serie è a segni alterni]

b) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ (definitivamente) [α_n è decrescente (debolmente)]

c) $\alpha_n \to 0$ [α_n è infinitesima]

Allora la serie $\sum_n (-1)^n \alpha_n$ converge.

Siccome $a_n \to 0$ se e solo se $\alpha_n \to 0$, la terza ipotesi è semplicemente la condizione necessaria.

Esempi

1. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$

Con le notazioni sopra: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ e $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Osserviamo che sono verificate tutte le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi la serie converge.
Convergenza assoluta? No: $|a_n| = \frac{1}{n}$ e la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.
Quindi la serie data converge, ma non converge assolutamente.

2. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2}$

converge assolutamente

3. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Con le notazioni sopra: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ e $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Per $\alpha > 0$ la successione $\frac{1}{n^\alpha}$ soddisfa tutte le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Siccome $|a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, la serie $\sum_n |a_n|$ è la serie armonica generalizzata che converge per $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha \leq 1$.
Quindi la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$, mentre converge per ogni $\alpha > 0$.

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+2}$. Si vede facilmente che $\alpha_n = \frac{n^2+1}{n^3+2} > 0$ e che $\alpha_n \to 0$. Verifichiamo la monotonia:

$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{n^2+1}{n^3+2} - \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+2} = \frac{(n^2+1)((n+1)^3+2)-(n+1)^2+1)(n^3+2)}{(n^3+2)((n+1)^3+2)}$
$= \frac{(n^2+1)(n^3+3n^2+3n+1+2)-(n^2+2n+2)(n^3+2)}{(n^3+2)((n+1)^3+2)}$
$= \frac{n^5+3n^4+3n^3+3n^2+n^3+3n^2+3n+3-n^5-2n^2-2n^4-4n-2n^3-4}{(n^3+2)((n+1)^3+2)} = \frac{n^4+2n^3+4n^2-n-1}{(n^3+2)((n+1)^3+2)} > 0$

quindi la successione α_n è decrescente e si può applicare il criterio di Leibniz per concludere che la serie data converge.
La serie non converge assolutamente, come si può vedere dal criterio del confronto asintotico con $\sum_n \frac{1}{n}$.
Per la serie iniziale non possiamo fare il confronto asintotico con $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ perchè il criterio del confronto asintotico è valido solo per serie a termini **positivi**.
Si può comunque usare l'osservazione $\alpha_n \approx \frac{1}{n}$ per dimostrare la convergenza della serie $\sum_n a_n$ senza usare il criterio di Leibniz.
Possiamo infatti scrivere
$a_n = (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+2} - (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^n \left(\frac{n^2+1}{n^3+2} - \frac{1}{n} \right) + (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{n-2}{n^4+2n} + (-1)^n \frac{1}{n}$.
Siccome la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente, se risulterà convergente la serie $\sum_n (-1)^n \frac{n-2}{n^4+2n}$, allora, per il teorema sulla somma di serie convergenti, si potrà concludere la convergenza della serie data.
Vediamo dunque quale è il comportamento della serie $\sum_n (-1)^n \frac{n-2}{n^4+2n}$.
Per usare il criterio di Leibniz, dobbiamo dimostrare la monotonia come prima.
Possiamo invece usare il criterio di assoluta convergenza:
$\sum_n |(-1)^n \frac{n-2}{n^4+2n}| = \sum_n \frac{n-2}{n^4+2n}$ e questa serie converge per confronto asintotico con $\sum_n \frac{1}{n^3}$ in quanto $\lim_n \frac{n-2}{n^4+2n} \cdot n^3 = 1$.
In conclusione, la serie di partenza $\sum_n a_n$ è somma tra una serie convergente assolutamente e una serie convergente, quindi è convergente.

Dimostrazione dei criteri di convergenza

Criterio di convergenza assoluta: La successione delle somme parziali relative ad $|a_n|$ è convergente per ipotesi (la serie converge assolutamente), quindi è una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$:
$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$.
Dalla disuguaglianza triangolare segue che
$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$,
cioè la successione delle somme parziali relative ad a_n è di Cauchy, quindi convergente, ossia la serie $\sum_n a_n$ converge.

Criterio di Leibniz Sia $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha_k$. Usando la monotonia della successione $(\alpha_n)_n$ si osserva che $(S_{2n})_n$ è una successione decrescente (debolmente) di numeri positivi, quindi ha un limite finito (compreso tra 0 è α_0), mentre la successione $(S_{2n+1})_n$ è crescente (debolmente), quindi ha limite. Essendo $S_{2n+1} = S_{2n} - \alpha_{2n+1}$, siccome $\alpha_{2n+1} \to 0$ concludiamo che le successioni $(S_{2n})_n$ e $(S_{2n+1})_n$ hanno lo stesso limite finito, quindi la serie $\sum_n(-1)^n\alpha_n$ converge.

Esercizi.

1. Discutere la convergenza delle serie:

(a) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(2n+1)!}$ [converge]

(b) $\displaystyle\sum_n \frac{n}{2^n}$ [converge]

(c) $\displaystyle\sum_n \frac{3^n}{n^2}$ [diverge a $+\infty$]

(d) $\displaystyle\sum_n \frac{n^2}{n!}$ [converge]

(e) $\displaystyle\sum_n n^2\frac{2^{n+1}}{3^n}$ [converge]

(f) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ [diverge a $+\infty$]

(g) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}$ [converge]

(h) $\displaystyle\sum_n \frac{1+2+\cdots+n}{n^3}$ [diverge a $+\infty$]

(i) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!}$ [converge]

(j) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{n^{3+(-1)^n}}\right)$ [converge]

(k) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}$ [converge]

(l) $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{(2n)!}$ [converge]

2. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ [1]

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1/2}{n^2(n+1)^2}$ [1/2]

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$. [3/4]

3. Sia $x > 0$. Dalla somma della serie geometrica si deduce che $x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{x}{1-x}$ e

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}\,,$$

quindi sommando si ottiene

$$\cdots + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0\,.$$

Dove è l'errore? [La prima converge per $|x| < 1$, la seconda per $|x| > 1$]

4. Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri positivi tali che la serie $\sum_n a_n^2$ sia convergente e si abbia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{per ogni } n > 1.$$

Dimostrare che la serie $\sum_n a_n$ è convergente.

[$a_n \to 0$, $a_n > 0$, quindi a_n non può essere crescente; sia k tale che $a_k < a_{k-1}$. Per $n > k$ si ha

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_k}{a_{k-1}}a_{k-1} < \left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^{n-k+1} a_{k-1}$$

$\sum_n a_n$ converge per confronto con la serie geometrica.]

5. Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente. Dimostrare che anche la serie $\sum_n a_n^2$ è convergente.

[Allora $a_n \to 0$, quindi $a_n^2 < a_n$ e per confronto la serie $\sum_n a_n^2$ è convergente.]

È vero che se $\sum_n a_n^2$ è convergente anche $\sum_n a_n$ è convergente?

[No, si veda la serie armonica.]

1.3 Riordinamento di una serie.

Le seguenti osservazioni dovrebbero far capire che c'è una differenza fondamentale tra somme finite e serie.

Data una serie $\sum_n a_n$ si dice che la serie $\sum_n b_n$ è un **riordinamento** della serie $\sum_n a_n$ se ad ogni termine della prima corrisponde uno e un solo termine della seconda, cioè se esiste una funzione biiettiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $b_n = a_{\varphi(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, la serie $\sum_n b_n$ è un riordinamento della serie $\sum_n a_n$ se le due serie hanno gli stessi termini, eventualmente sommati in ordine diverso.

Se sommiamo un numero finito di termini l'ordine in cui vengono sommati non conta, il risultato è lo stesso, in base alle proprietà di associatività e di commutatività dell'addizione. Nel caso in cui si tratta di sommare infiniti numeri queste proprietà non valgono più.

Se una serie è convergente, ma non assolutamente convergente, allora un suo riordinamento potrebbe avere una somma diversa, come mostra il seguente esempio.

Consideriamo la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_n (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = -\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Si vede subito con il criterio di Leibniz che si tratta di una serie convergente. Usando le serie di Taylor si può calcolare la sua somma. Questa serie non è assolutamente convergente: $|(-1)^n \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$ e, come abbiamo già visto, la serie armonica è divergente.
Moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ la serie data e otteniamo

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \dots$$

questa nuova serie è una serie convergente e ha come somma $\frac{1}{2}$ per la somma della serie iniziale. La sommiamo termine a termine alla serie data e otteniamo ancora una serie convergente che ha come somma $\frac{3}{2}$ per la somma della serie di partenza:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \dots$$
$$+$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \dots$$
$$=$$
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{2}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{2}{16} + \frac{1}{17} + \dots$$
$$=$$
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \dots$$

Si osserva però che questa serie è un riordinamento della serie iniziale e come abbiamo notato ha come somma $\frac{3}{2}$ per la somma della serie iniziale. Vale il seguente risultato.

Teorema 1 (di Riemann) *Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente ma non assolutamente convergente. Per ogni numero S esiste un riordinamento della serie data che è convergente con somma S. Esistono anche riordinamenti di $\sum_n a_n$ che sono divergenti a $+\infty$, che sono divergenti a $-\infty$ ed altri che sono indeterminati.*

Questo fenomeno non si presenta nel caso delle serie assolutamente convergenti:

Teorema 2 (di Dirichlet) *Se la serie $\sum_n a_n$ è assolutamente convergente e $\sum_n b_n$ è un suo riordinamento, allora $\sum_n b_n$ è assolutamente convergente e le due serie hanno la stessa somma: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.*