Esercizio 1

Considera un problema di meccanica quantistica unidimensionale con azione

$$S = \int dt \left[\frac{m\,\dot{q}^2}{2} - V(q) \right] . \tag{1}$$

Nella pittura di Schrödinger per l'evoluzione temporale, dato uno stato $|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\alpha\rangle$ definiamo la sua funzione d'onda $\Psi_\alpha(t, q) = \langle q|\alpha, t\rangle$ come l'overlap con l'autostato $|q\rangle$ dell'operatore posizione $\hat{q}$ (indipendente dal tempo nella pittura di Schrödinger).

(i) Scrivi un'espressione per la funzione $\Psi_\alpha(t, q)$ come integrale sui cammini, nel caso in cui $|\alpha\rangle = |\bar{q}\rangle$ autostato dell'operatore posizione all'autovalore $\bar{q}$.

(ii) Considera ora $|\alpha\rangle = |\Omega\rangle$, il ground state del sistema. Fissando la sua energia a $E = 0$, in questo caso la funzione d'onda è indipendente dal tempo ed è data da $\Psi_\alpha(t, q) = \langle q|\Omega\rangle$. Parti dall'integrale sui cammini definiti sull'intervallo temporale $[-T, t]$ con condizioni $q(-T) = q_0$ e $q(t) = q$. Prendi il limite $T \to +\infty$ e mostra che questo integrale converge, a meno di una costante di normalizzazione indipendente da q, alla funzione d'onda del ground state del sistema. Puoi assumere che l'autostato $|q_0\rangle$ della posizione abbia un prodotto scalare non nullo con il ground state $\langle\Omega|q_0\rangle \neq 0$.

(iii) Usa l'espressione in termini di integrale sui cammini, e la definizione di integrale sui cammini come limite di integrali sulle posizioni in tempi successivi, per ottenere

$$\Psi_\alpha(t, q) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq'\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(q-q')^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q)\right]} \Psi_\alpha(t - \epsilon, q') . \tag{2}$$

dove $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}}$ è un fattore di normalizzazione. Usa questa espressione per riscrivere

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(t, q) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq'\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(q-q')^2}{2\epsilon}} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q)}\Psi_\alpha(t - \epsilon, q') - \Psi_\alpha(t - \epsilon, q)}{\epsilon} . \tag{3}$$

Effettua il cambio di variabile da q' a $\delta q = \frac{q'-q}{\sqrt{\epsilon}}$, espandi $e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q)}\Psi_\alpha(t-\epsilon, q+\sqrt{\epsilon}\,\delta q)$ in ϵ fino all'ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$, quindi calcola l'integrale Gaussiano in δq e deriva che $\Psi_\alpha(t, q)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(t, q) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \Psi_\alpha(t, q) . \tag{4}$$

(iv) Generalizza al caso di una teoria di campo scalare con azione

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] . \tag{5}$$

Usando l'integrale sui cammini, scrivi il funzionale d'onda $\Psi_\alpha(t,\phi)$, che dipende da una funzione $\phi(\vec{x})$ di $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, nei due casi: a) $|\alpha\rangle = |\bar{\phi}\rangle$ autostato dell'operatore $\hat{\phi}(\vec{x})$ all'autovalore $\bar{\phi}(\vec{x})$; b) $|\alpha\rangle = |\Omega\rangle$ stato fondamentale (vuoto). Quindi segui step analoghi a quelli del punto (iii) per mostrare che il funzionale d'onda soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(t,\phi) = \int d^{d-1}\vec{x}\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(\vec{x})\delta\phi(\vec{x})} + \frac{1}{2}(\partial_{\vec{x}}\phi(\vec{x}))^2 + V(\phi(\vec{x}))\right]\Psi_\alpha(t,\phi)\ . \tag{6}$$

Esercizio 2

Per le due seguenti teorie di campo si trovino le regole di Feynman per i vertici e i propagatori, e si disegnino tutti i diagrammi di Feynman *connessi* che contribuiscono alla funzione a due punti $\langle\phi\phi\rangle$ e alla funzione a quattro punti $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ fino all'ordine indicato nelle costanti di accoppiamento. Per ciascun diagramma si calcoli il fattore di simmetria.

(i) Per la teoria del campo ϕ con azione

$$S[\phi] = \int d^dx\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{6!}\phi^6\right]$$

- $\star$ $\langle\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(g^2)$;
- $\star$ $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(g)$.

(ii) Per la teoria dei campi ϕ e Φ con azione

$$S[\phi,\Phi] = \int d^dx\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{M^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_1}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda_2}{4!}\Phi^4 - \frac{y}{2}\phi^2\Phi\right]$$

- $\star$ $\langle\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(y^4,\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_1 y^2,\lambda_2 y^2,\lambda_1\lambda_2)$;
- $\star$ $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(y^2,\lambda_1,\lambda_2)$.