→ Cinematica del punto materiale

Meccanica { Cinematica → studia il moto chinema, non le sue cause; Statica; Dinamica }

- punto materiale (p.m.): punto geometrico dotato di massa (e.s. dimensioni trascurabili rispetto al percorso*).

- Il moto di un p.m. è completamente noto ⇔ conosco la sua posizione nello spazio per ogni istante di tempo
- traiettoria: luogo delle posizioni assunte dal punto durante il suo moto

→ se conosco la traiettoria, posso descrivere completamente il moto con $s = s(t)$ ← durante l'intervallo di tempo t

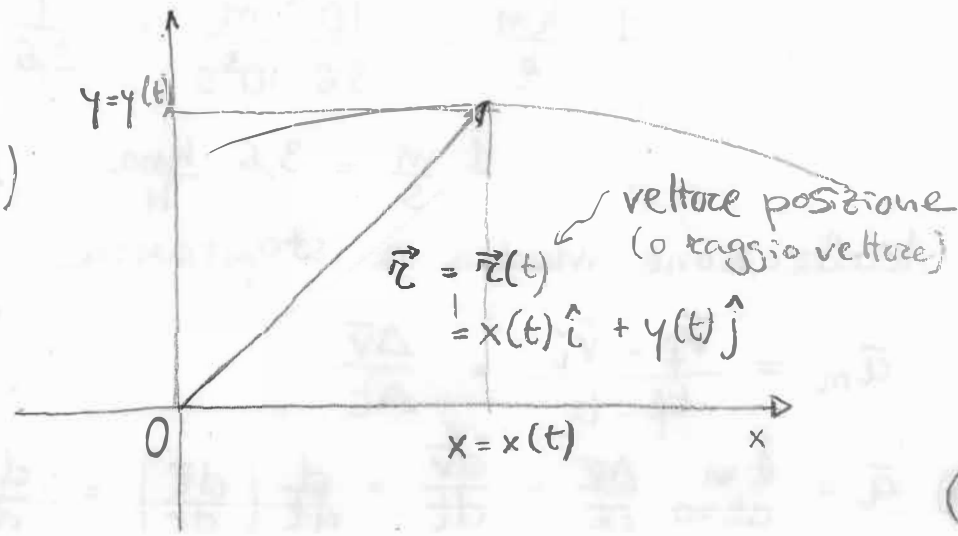
↑ lunghezza del tratto di traiettoria percorso

→ se non conosco la traiettoria (caso più generale) posso sempre indicare la posizione nello spazio istante per istante rispetto a opportuno sistema di riferimento

$x = x(t)$

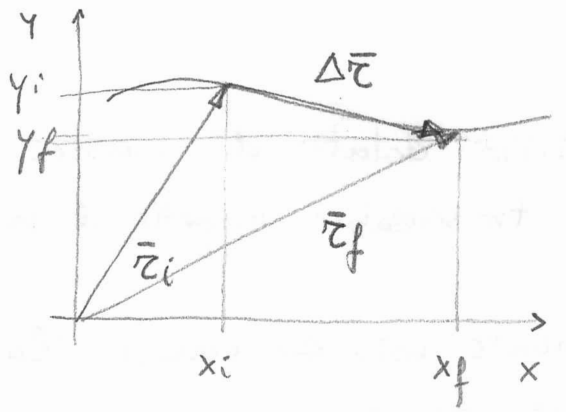
$y = y(t)$

$(z = z(t))$



→ Spostamento

Considero ora un istante "iniziale" t_i ed un istante "finale" t_f separati da un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$



$\Delta\bar{r} = \bar{r}_f - \bar{r}_i$

vettore spostamento

$= \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}$

con $\Delta x = x_f - x_i$

e $\Delta y = y_f - y_i$

→ Velocità media e istantanea

$$\boxed{\bar{v}_m \equiv \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_f - \bar{r}_i}{t_f - t_i}}$$

$$\left(\text{1D} \quad v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \right)$$

Se Δt è molto piccolo, $\bar{r}_f$ è molto vicino a $\bar{r}_i$ ⇒ al limite per $\Delta t \to 0$, definisco la velocità istantanea:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}}$$ derivata

$$\left(\text{1D} \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \right)$$

è un vettore: modulo: $\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$

direzione: tangente alla traiettoria

verso : quello del moto

unità SI per la velocità $\frac{m}{s}$, cgs $\frac{cm}{s}$, pratico $\frac{km}{h}$

$$1\ \frac{km}{h} = \frac{10^3\ m}{3{,}6 \cdot 10^3 s} = \frac{1}{3{,}6}\ \frac{m}{s}$$

$$1\ \frac{m}{s} = 3{,}6\ \frac{km}{h}$$

→ Accelerazione media e istantanea

derivata seconda

$$\boxed{\bar{a}_m = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}}$$

$$\left(\text{1D} \quad a_{xm} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \right)$$

(10) $$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\left(\text{1D} \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

$\bar{a}$ è un vettore : modulo : $\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right|$

direzione : se il moto è rettilineo, è tangente alla traiettoria.
se il moto è curvilineo (in generale) ha una componente tangente e una normale

verso : dipende da $d\bar{v}$ ⊛ VEDI NOTA A PIÈ PAGINA

9/10/2019

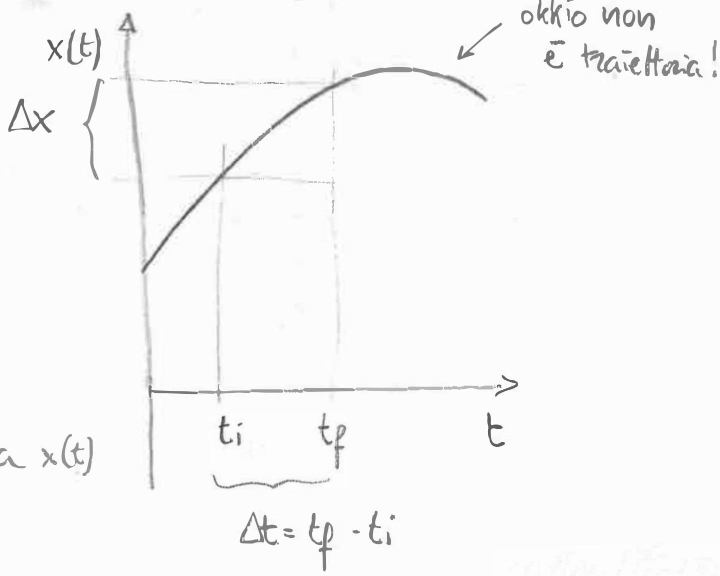
→ Diagramma della legge oraria

Per semplicità considero un moto 1D, tipo $x = x(t)$

[Molte delle considerazioni che seguono si possono estendere a 2D o 3D e valgono in particolare se descrivo il moto con una equazione $s = s(t)$ lungo la traiettoria]

legge oraria : $x = x(t)$

diagramma della legge oraria



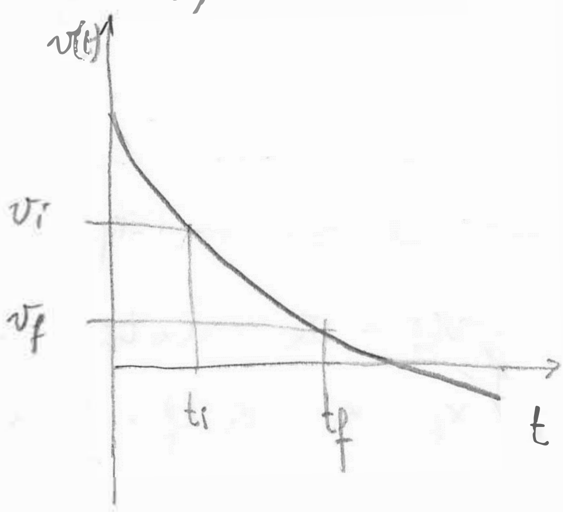
$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ → pendenza media della curva $x(t)$

$v = \frac{dx}{dt}$ → pendenza della curva $x(t)$

Posso fare un diagramma simile per $v = v(t)$

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ pendenza media ...

$a = \frac{dv}{dt}$ pendenza ...



⊛ NOTA

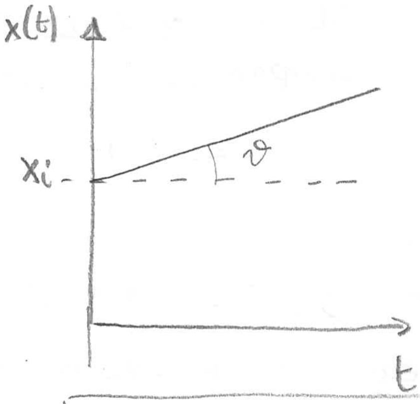
→ unità SI per accelerazione

$$\frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2} \quad \text{in cgs} \quad \frac{cm}{s^2} \quad \text{e infine} \quad g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

→ Moto rettilineo uniforme $(\bar{v} = \bar{v}_i$ costante nel tempo$)$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_m = \bar{v} = \bar{v}_i$$

Nel diagramma orario 1D $x = x(t)$ la pendenza è costante

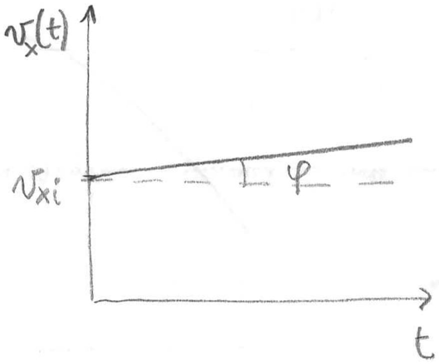


pendenza $= \mathrm{tg}\,\vartheta = v_i$

$$\boxed{x(t) = x_i + v_i t}$$

In generale $\boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_i + \bar{v}_i t}$

→ Moto uniformemente accelerato $(\bar{a} = \bar{a}_i$ costante nel tempo$)$ in 1D:



pendenza $= \mathrm{tg}\,\varphi = a_{xi}$

$$\boxed{v_x(t) = v_{xi} + a_{xi} t} \quad (\mathrm{I})$$

Inoltre, si ha: $\boxed{x(t) = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_{xi} t^2}$ (II)

NOTA: non dimostro questa formula. Si noti tuttavia che essa è compatibile con $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$

e con $x(t=0) = x_i$

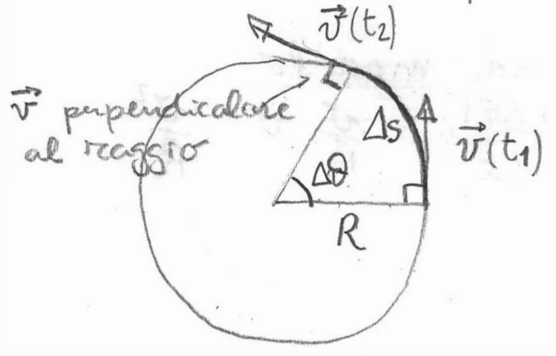
Infine se ricavo $t = t_f$ da (I) e sostituisco in (II) ottengo:

$$\begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_{xi} t_f \\ x_f = x_i + v_{xi} t_f + \frac{1}{2} a_{xi} t_f^2 \end{cases}$$

$$\boxed{v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_{xi}(x_f - x_i)} \quad (\mathrm{III})$$

In generale ho pure
$$\bar{v} = \bar{v}_i + \bar{a}_i t$$
$$\bar{r} = \bar{r}_i + \bar{v}_i t + \frac{1}{2} \bar{a}_i t^2$$

Moto circolare uniforme



uniforme: la velocità lineare

$$|\vec{v}(t_1)| = |\vec{v}(t_2)| = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

v è costante nel tempo, anche se il vettore $\vec{v}$ cambia costantemente direzione

- Altra grandezza che resta costante è la velocità angolare:

$$\omega_m = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \quad \text{(velocità angolare media)}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{(v. a. istantanea)}$$

coincidono! (si noti l'unità di misura: $\frac{rad}{s}$)

Poiché $\boxed{\Delta\vartheta = \frac{\Delta s}{R}}$

si ha

$$\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}} \quad \text{o} \quad \boxed{v = \omega R}$$

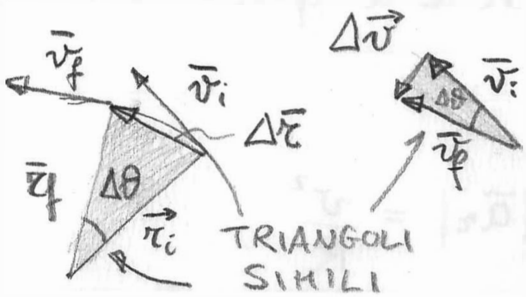
- Analogamente si può definire anche l'accelerazione angolare:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{(acc. ang. media)}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{(acc. ang. istantanea)}$$

nulle perché $\omega = \text{cost.}$

- Per quanto riguarda l'accelerazione lineare



$$\bar{a}_m = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\frac{|\Delta\vec{r}|}{R} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v}$$

con $|\bar{r}_i| = |\bar{r}_f| = R$ e $|\bar{v}_i| = |\bar{v}_f| = v$

Quindi

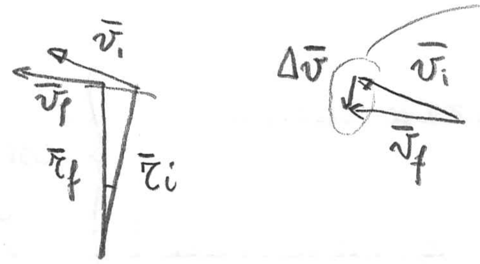
$$|\bar{a}m| = \frac{|\Delta \bar{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t}$$

L'accelerazione lineare istantanea ha quindi modulo

$$|\bar{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R}\frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\cdot v = \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

Direzione e verso di $\vec{a}$ sono dati da $\Delta\vec{v}$. Per Δt piccoli



direzione: radiale
verso: verso il centro
(accelerazione centripeta)

Il moto circolare uniforme è <u>periodico</u> con periodo T

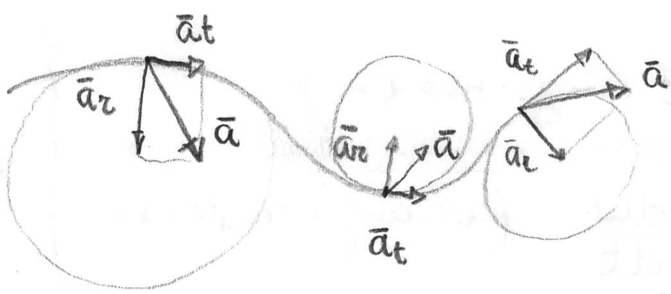
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$ detta anche pulsazione

$$T = \frac{1}{\nu}$$ "ni"

frequenza, si misura in $s^{-1} = Hz$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

<u>Moto generico curvo</u>



Dato un punto, trovo un cerchio che approssima la traiettoria nel punto

Tali cerchi però non vengono percorsi con v costante
$\Rightarrow$ ho anche acc. tangenziale oltre a quella radiale (centripeta)

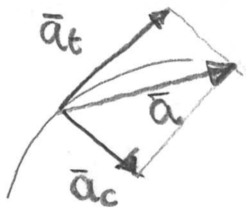
$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_t$$

$\bar{a}_r$ è centripeta e vale $|\bar{a}_r| = \frac{v^2}{R}$

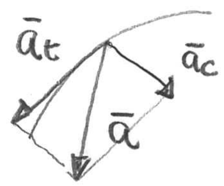
Per quanto riguarda $|\bar{a}_t|$ si ha:

$$|\bar{a}_t| = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}R\frac{d\vartheta}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Il verso dipende dalla variazione di $|\bar{v}|$. Esempio

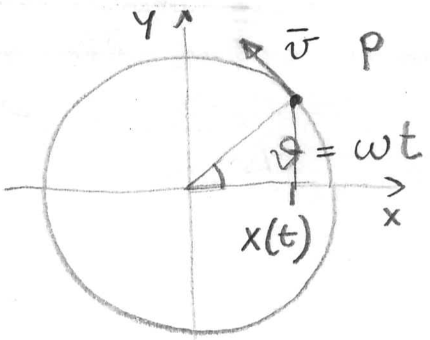


automobile che curva premendo l'acceleratore ($|\bar{v}|$ aumenta)



automobile che curva premendo il freno ($|\bar{v}|$ diminuisce)

→ Moto armonico



Riprendiamo il moto circolare uniforme

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$

è un moto armonico (molto frequente in natura)

In generale, è moto armonico ogni moto del tipo

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

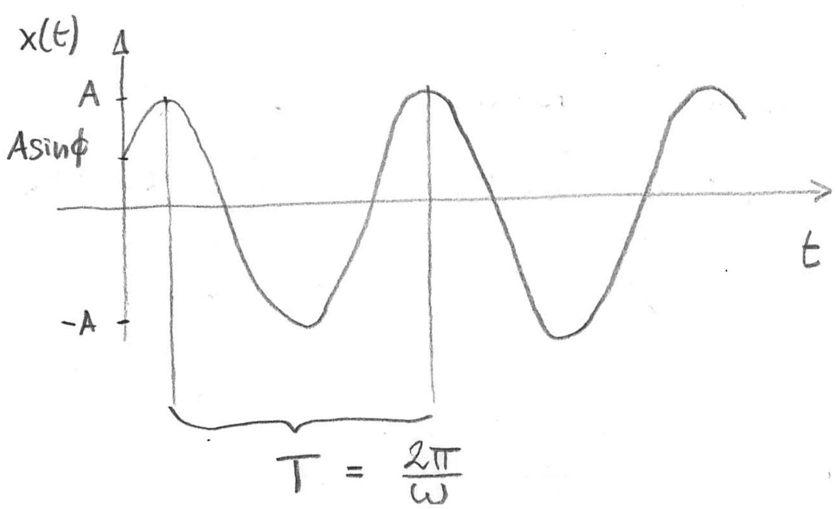
fase (iniziale)

(cos)

Ampiezza

pulsazione $\omega = 2\pi\nu$ ← frequenza

$\nu = \frac{1}{T}$



$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

NB: NON abbiamo trattato il "moto di un proiettile"