

Dispense del Corso di MECCANICA DEI SOLIDI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE PRIMA

Meccanica dei solidi elastici

Corsi di Laurea specialistici in
Ingegneria delle Infrastrutture e dei sistemi di trasporto
Strutture ed opere dell'ingegneria civile
Ingegneria edile

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Navale

Trieste, 23 settembre 2007

Indice

1 Cinematica e dinamica	3		
1.1 Deformazione e spostamento	3		
1.1.1 Gradienti della deformazione e degli spostamenti	4		
1.1.2 Proprietà della funzione di deformazione	5		
Iniettività	5		
Continuità	5		
Derivabilità e invertibilità locale	6		
Preservazione dell'orientazione	6		
1.2 Moto e velocità	6		
1.3 Equazioni di bilancio	8		
Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo	9		
1.3.1 Variabili dinamiche	9		
1.3.2 Estensione al caso continuo	9		
1.3.3 Massa	10		
1.3.4 Quantità di moto e momento della quantità di moto	10		
Appendice (Meccanica dei fluidi)	11		
1.3.5 Equazioni di bilancio in forma integrale	12		
1.4 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni	12		
1.4.1 Corpo rigido	13		
1.4.2 Teoria del primo ordine	13		
Equivalenza statica	13		
1.4.3 Teoria del secondo ordine	14		
1.4.4 Grandi spostamenti e piccole deformazioni	14		
2 Analisi della tensione	15		
2.1 Tensore degli sforzi di Cauchy	15		
2.2 Equazione del moto	17		
2.3 Equazione di equilibrio al contorno	19		
2.4 Simmetria del tensore degli sforzi	19		
2.5 Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali	21		
2.6 Significato fisico delle componenti del tensore degli sforzi	22		
		2.7 Significato fisico delle componenti dell'equazione di Cauchy	23
		2.8 Significato fisico delle componenti dell'equazione indefinita di equilibrio	24
		2.9 Autotensioni e configurazione naturale	25
		2.10 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni (teoria del primo ordine)	26
3 Analisi della deformazione	27		
3.1 Cinematica linearizzata	27		
3.2 Tensori di deformazione	27		
3.2.1 Tensori di deformazione e di rotazione infinitesime	27		
3.3 Dilatazione lineare e scorrimento tra due linee	28		
3.3.1 Dilatazione di una linea	28		
3.3.2 Scorrimento di due linee inizialmente ortogonali	29		
3.3.3 Significato fisico delle componenti del tensore di deformazione	30		
3.4 Scorrimento tra una linea ed una superficie	30		
3.4.1 Vettore di deformazione	31		
3.5 Coefficiente di dilatazione cubica	32		
4 Principio dei lavori virtuali	35		
5 Direzioni principali di tensione e di deformazione	39		
5.1 Proprietà di estremo	41		
5.2 Proprietà di ortogonalità	42		
5.3 Sottospazio ortogonale ad una direzione principale	43		
5.4 Calcolo delle direzioni principali	44		
5.5 Casi particolari	48		
5.5.1 Autovalori tutti distinti	48		
5.5.2 Un autovalore doppio e uno semplice	48		
5.5.3 Un autovalore triplo	49		
5.5.4 Sistema di riferimento principale e linee isostatiche	50		
5.6 Circonferenza di Mohr relativa ad una direzione principale	50		
5.7 Arbelo di Mohr	56		
5.8 Esercizio sulle direzioni principali di tensione	59		
5.9 Esercizio sulle direzioni principali di deformazione	67		
6 Stati elementari di tensione e di deformazione	69		
6.1 Trazione semplice	69		
6.2 Dilatazione semplice	70		
6.3 Trazione uniforme	70		

6.4	Dilatazione uniforme	71	10 Criteri di snervamento	129
6.5	Taglio semplice	72	10.1 Superficie di snervamento	129
6.6	Scorrimento semplice	74	10.2 Snervamento isotropo	129
6.7	stato di tensione monoassiale	74	10.3 Asse idrostatico e piano deviatorico	130
6.8	stato di deformazione monoassiale	76	10.4 Coordinate sul piano deviatorico	132
6.9	stato di tensione piano	76	10.5 Criterio della massima tensione normale o di Rankine . . .	133
6.10	stato di deformazione piano	77	10.5.1 Appendice (criterio della massima dilatazione o di Grashof	135
7	Elasticità lineare	79	10.6 Criteri di snervamento per i materiali metallici	136
7.1	Legame costitutivo elastico lineare	79	10.6.1 Criterio di snervamento di Huber-von Mises	138
7.2	Problema elastico lineare	81	10.6.2 Criterio di snervamento di Tresca	141
7.3	Autotensioni	82	10.6.3 Criterio di snervamento di Hill	142
7.4	Sovrapposizione degli effetti	83	10.7 Cenni sui criteri di snervamento per i materiali non metallici	144
7.5	Lavoro di deformazione	84	10.7.1 Criterio di Drucker-Prager	144
7.6	Energia elastica di deformazione	85	10.7.2 Criterio di Mohr-Coulomb	145
7.7	Teoremi sul lavoro di deformazione	87	10.8 Verifiche di resistenza alle tensioni ammissibili	146
7.7.1	Teorema di Clapeyron	87	10.8.1 Criterio di Rankine	147
7.7.2	Teorema di Betti	88	10.8.2 Criterio di Grashof	148
7.8	Energia complementare	89	10.8.3 Criteri di Huber-von Mises e di Tresca	148
7.9	Unicità della soluzione	90	10.8.4 Esercizio su un campo di spostamenti	149
7.10	Energia potenziale totale	92	Riferimenti bibliografici	153
7.10.1	Variazione del funzionale energia potenziale totale .	93		
7.10.2	Principi di stazionarietà e di minimo dell'energia potenziale totale	95		
7.11	Esistenza della soluzione	97		
8	Elasticità lineare isotropa	99		
8.1	Legge di Hooke	99		
8.2	Moduli tecnici	102		
8.3	Direzioni principali di elasticità (isotropa)	106		
8.4	Legge di Hooke inversa	108		
8.5	Limitazioni delle costanti elastiche	109		
8.6	Energia elastica di deformazione ed energia complementa- re elastica	110		
9	Compatibilità della deformazione	113		
9.1	Equazioni di compatibilità (di Saint Venant)	113		
9.1.1	Appendice (rotore di un campo tensoriale e tensore di incompatibilità)	120		
9.2	Soluzione del problema elastico col metodo delle forze . . .	123		
9.3	Equazioni di Beltrami	124		

Capitolo 1

Cinematica e dinamica

1.1 Deformazione e spostamento

Nel caso di un solido è possibile assumere una configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 per mappare i punti del solido il cui moto è oggetto di studio. Per es., nel caso della trave di fig. 1.1 è stata indicata quale configurazione di riferimento la configurazione rettilinea che idealmente la trave avrebbe se non fosse soggetta a forze.

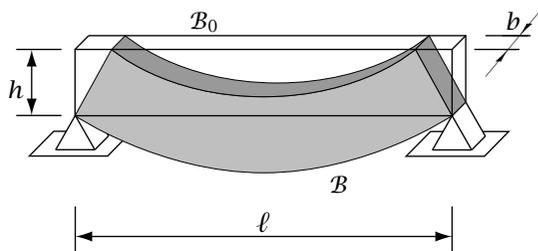


Figura 1.1: Deformazione di una trave

Per descrivere, da un punto di vista lagrangiano, la configurazione che un corpo solido assume ad un generico istante si può quindi utilizzare la funzione ϕ che mappa la configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento nella configurazione \mathcal{B} deformata:

$$\phi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}, \quad X \mapsto x = \phi(X), \quad (1.1)$$

dove la lettera X indica un generico punto materiale e x il corrispondente punto spaziale (fig. 1.2). Tale funzione è detta *funzione di*

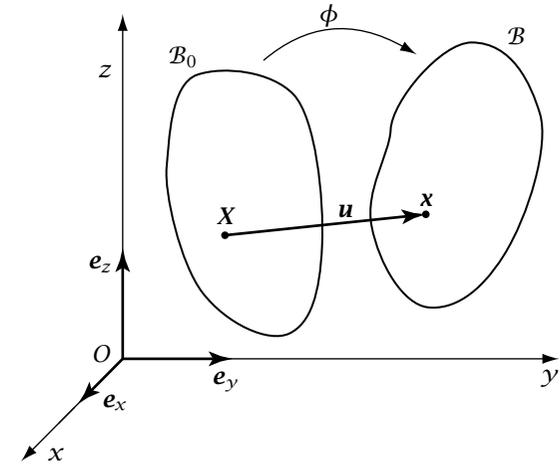


Figura 1.2: Deformazione e spostamento

deformazione o, più semplicemente, *deformazione*¹ del corpo.

Alternativamente, si può utilizzare il vettore *spostamento* \mathbf{u} ² che mappa la configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento nello spazio vettoriale ordinario \mathcal{V} (fig. 1.2):

$$\mathbf{u} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \mathbf{u}(X) = \mathbf{x} - X, \quad (1.2)$$

e che costituisce pertanto un campo vettoriale sulla configurazione di riferimento. Dalle (1.1) e (1.2) si deduce immediatamente la seguente relazione tra la funzione ϕ di deformazione e il campo \mathbf{u} degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(X) = \phi(X) - X. \quad (1.3)$$

Scegliendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la funzione di deformazione (1.1) e il campo vettoriale (1.2) si scindono ognuno in tre campi scalari x_i e u_i ($i = x, y, z$) delle tre variabili scalari X, Y, Z , coordinate del punto materiale \mathbf{X} :

$$x_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto x_i = x_i(X, Y, Z), \quad (1.4)$$

$$u_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto u_i = u_i(X, Y, Z), \quad (1.5)$$

¹Se la configurazione deformata differisce da quella indeformata per un moto rigido, la funzione di deformazione ϕ descrive tale moto rigido e la "deformazione" del corpo è in tal caso nulla. In inglese si usa il termine *deformation function*.

²*Displacement vector* nella letteratura inglese.

dove x_i è la i -esima coordinata del punto spaziale \mathbf{x} mentre u_i rappresenta la i -esima componente del vettore spostamento \mathbf{u} rispetto alla base \mathbf{e}_i dei versori degli assi coordinati (fig. 1.2).

Si noti che la deformazione, lo spostamento e tutti i concetti che da questi derivano sono dipendenti dalla configurazione di riferimento. È infatti evidente che la medesima configurazione deformata viene individuata da diverse funzioni di deformazione e da diversi campi di spostamento relativamente a diverse configurazioni di riferimento.

1.1.1 Gradienti della deformazione e degli spostamenti

Dato un generico punto materiale X e il corrispondente punto spaziale $\mathbf{x} = \phi(X)$, si considerino gli incrementi $\Delta \mathbf{x}$ del punto spaziale e $\Delta \mathbf{u}$ del campo degli spostamenti in funzione dell'incremento ΔX del punto materiale (fig. 1.3):

$$\Delta \mathbf{x} = \phi(X + \Delta X) - \phi(X), \quad (1.6)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(X + \Delta X) - \mathbf{u}(X). \quad (1.7)$$

Ne risultano due funzioni definite nello spazio dei vettori e a valori vet-

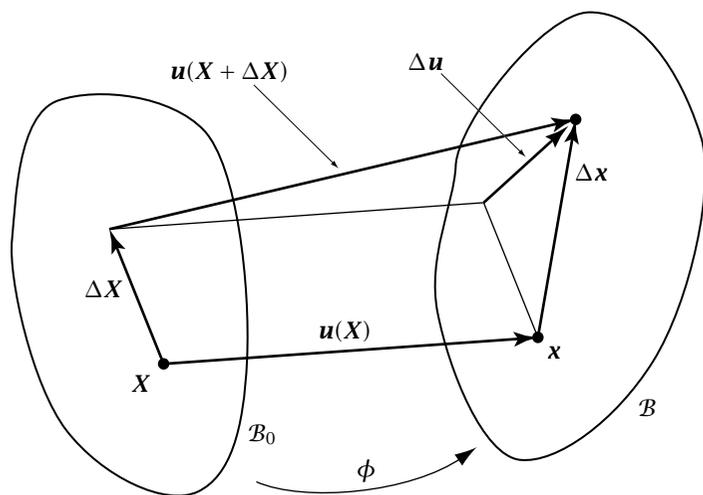


Figura 1.3: Incremento della deformazione e degli spostamenti

ti *gradiente della deformazione* e *gradiente (materiale) degli spostamenti* rispettivamente:³

$$\Delta \mathbf{x} = \text{Grad } \phi \Delta X + o(|\Delta X|), \quad (1.8a)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \text{Grad } \mathbf{u} \Delta X + o(|\Delta X|). \quad (1.8b)$$

La iniziale maiuscola del simbolo Grad sottolinea il fatto che l'operazione gradiente è fatta su una funzione definita nella configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 . Data l'importanza che i due gradienti definiti dalle (1.8) hanno nella meccanica del continuo è inoltre consuetudine diffusa ma non universale di riservare loro i due simboli speciali \mathbf{F} e \mathbf{H} :

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \phi, \quad \mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (1.9)$$

Indicando con dX l'elemento lineare uscente dal punto X della configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 e con $d\mathbf{x}$ l'analogo elemento lineare uscente dal punto \mathbf{x} corrispondente di X nella configurazione deformata \mathcal{B} , si ha (fig. 1.4):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} dX. \quad (1.10)$$

Se invece $d\mathbf{u}$ è il differenziale di \mathbf{u} (valutato nel punto materiale X) si ha:

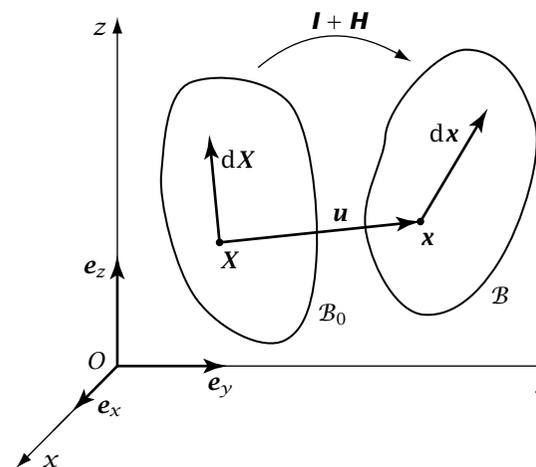


Figura 1.4: Elementi di linea

toriali le cui parti lineari, se esistono, definiscono due tensori doppi det-

³Deformation gradient e displacement gradient nella letteratura inglese.

$$d\mathbf{u} = \mathbf{H} d\mathbf{X}. \quad (1.11)$$

Dalla (1.10) e dalla uguaglianza:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{u} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}) d\mathbf{X}, \quad (1.12)$$

si ottiene poi la relazione tra i gradienti della deformazione e dello spostamento:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (1.13)$$

Per quel che riguarda le componenti di \mathbf{F} e \mathbf{H} in un generico sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si ha:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}. \quad (1.14)$$

Se u , v e w sono le componenti dello spostamento rispetto agli assi x , y e z , la forma matriciale delle (1.14) risulta:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

La matrice delle componenti del gradiente della deformazione coincide quindi con la matrice delle derivate parziali delle componenti della funzione ϕ di deformazione, nota come *matrice jacobiana della deformazione*. Il suo determinante J :

$$J = \det[\mathbf{F}]. \quad (1.16)$$

è noto quale *jacobiano* (oppure *determinante jacobiano*)⁴ della deformazione.

1.1.2 Proprietà della funzione di deformazione

La funzione di deformazione ϕ e conseguentemente, per via della (1.3), il campo degli spostamenti \mathbf{u} , non possono essere arbitrari, ma devono soddisfare delle condizioni di regolarità che fanno parte, insieme alla sua continuità geometrica, del modello di corpo continuo.

⁴Nella letteratura inglese jacobiano si rende con il termine *Jacobian*.

Iniettività. Si assume che la funzione di deformazione ϕ sia iniettiva, ovvero che a due punti distinti P_0 e Q_0 in \mathcal{B}_0 corrispondano due punti distinti P e Q in \mathcal{B} . Tale ipotesi garantisce l'esistenza della funzione inversa $\phi^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$.

Fisicamente l'iniettività della funzione di deformazione garantisce l'*impenetrabilità della materia*,⁵ ovvero che parti distinte della configurazione di riferimento del corpo non si sovrappongano nella configurazione deformata.

Si noti che il campo degli spostamenti può non essere iniettivo e quindi non invertibile, come nel caso banale di una traslazione rigida a cui corrisponde un campo di spostamenti costante. ■

Continuità. Si assume che la funzione di deformazione ϕ sia continua.

Tale proprietà garantisce la *continuità della materia*,⁶ ovvero che parti del corpo a contatto prima della deformazione restino a contatto dopo la deformazione. Ne consegue che gli intorni dei punti del corpo vengono preservati nel corso del moto. Infatti è importante non dimenticare che nel modello di corpo continuo non è possibile isolare dei singoli punti ma solo degli intorni dei punti stessi, intorni che assumono quindi il ruolo di punti materiali. È quindi indispensabile che la materia che compone l'intorno di un punto non si disperda nel corso del moto, rendendo quindi l'ipotesi di continuità parte integrante del modello di corpo continuo.

Si noti che l'ipotesi di continuità della deformazione è fisicamente soddisfatta nel caso dei solidi, definiti infatti come corpi che preservano la disposizione della materia, mentre non lo è in generale nel caso dei fluidi. Se il fluido è, per es., in moto turbolento le diverse parti del fluido scorrono le une rispetto alle altre e il fluido è soggetto, almeno localmente, ad un continuo rimescolamento. Se la posizione delle singole particelle del fluido nel corso del moto fosse importante, non si potrebbe prescindere quindi dall'uso di un modello discreto, rappresentato da un insieme molto grande di punti materiali interagenti tra loro e con l'esterno. Purtroppo modelli discreti di questo tipo raggiungono livelli di complessità teorica e computazionale ampiamente al di fuori della portata dei mezzi odierni e ciò giustifica il fatto che finora siano stati

⁵Nella letteratura inglese si usa il termine *impenetrability of matter*.

⁶*Continuity of matter* nella letteratura inglese.

utilizzati esclusivamente nell'ambito della *meccanica statistica* che infatti, come dice il nome, si interessa solo di proprietà medie e non puntuali. Tuttavia nel caso del moto di un fluido le singole particelle sono fisicamente indistinguibili l'una dalle altre, salvo che alcune non siano state, per es., opportunamente colorate proprio allo scopo di seguirne la traiettoria. Ne consegue che il moto delle singole particelle di un fluido è spesso privo di importanza. Al modello continuo, come del resto al modello discreto nell'ambito della meccanica statistica, si richiede pertanto di determinare quelle proprietà del fluido che sono importanti e che per la natura stessa di un fluido non possono che essere, in generale, delle proprietà medie. La stessa funzione di deformazione, nel caso di moto turbolento, può spesso interpretarsi fisicamente come descrittiva il moto medio delle particelle del fluido, moto medio a cui quindi si riferisce la continuità della deformazione.

Si noti inoltre che l'ipotesi di continuità della deformazione esclude, nell'ambito dei solidi, molte singolarità di interesse fisico. Tuttavia questa esclusione è giustificata dal fatto che tali singolarità sono normalmente localizzate in un numero ristretto di punti oppure di linee o superfici. A questi punti, linee o superfici si dovrà allora prestare una particolare attenzione nel caso si vogliano mettere in gioco tali singolarità. Un esempio importante dal punto di vista strutturale è quello dello sviluppo di superfici di frattura in un solido. In tal caso i punti interni del solido lungo i quali si sviluppa la superficie di frattura vengono a sdoppiarsi nel corso della deformazione, e quindi la funzione ϕ non è definita su tali punti. La continuità è comunque preservata per le parti del solido non interessate dal processo di frattura e quindi per tali parti si applica tutto ciò che dipende dall'ipotesi di continuità.

Si noti infine che per via della relazione (1.3) tra deformazione e spostamento anche il campo degli spostamenti risulta continuo. ■

Derivabilità e invertibilità locale. *Si assume l'esistenza, la continuità e l'invertibilità del gradiente della deformazione.*

Tale assunzione è equivalente a richiedere che, in ogni punto del solido, le componenti x_i della funzione ϕ di deformazione siano derivabili almeno una volta, con derivate prime continue, e che lo jacobiano della deformazione sia diverso dallo zero.

Tenendo conto che per via della (1.10) il gradiente della deformazione trasforma gli elementi di linea materiali in elementi di linea spaziali, ne consegue che tale proprietà preserva l'individualità locale degli enti

geometrici (linee, superfici e volumi) nell'intorno di un punto. È quindi garantita l'esistenza delle misure di deformazione locali ed esclusa la possibilità che queste possano annullarsi. Le proprietà di regolarità precedenti assicurano poi la continuità delle misure di deformazione.

Le ipotesi di continuità, di derivabilità e di invertibilità locale assicurano l'invertibilità locale della funzione di deformazione e che tale funzione locale inversa sia continua, derivabile fino allo stesso ordine della funzione ϕ e con derivate continue (*teorema dell'invertibilità locale*). La funzione inversa globale $\phi^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$, la cui esistenza è assicurata dalla ipotesi di iniettività, è dunque continua, derivabile fino allo stesso ordine della funzione ϕ e con derivate continue, e soddisfa quindi tutte le proprietà richieste ad una funzione di deformazione. Non solo, ma ogni linea, ogni superficie ed ogni volume appartenenti alla configurazione di riferimento si trasformano rispettivamente in linee, superfici e volumi appartenenti alla configurazione deformata del corpo, e viceversa.⁷ ■

Preservazione dell'orientazione. *Si assume che lo jacobiano J della deformazione sia positivo in ogni punto del solido.*

Tale proprietà garantisce che la funzione di deformazione preservi l'*orientazione della materia*.⁸ Affinché vi sia preservazione dell'orientazione della materia occorre che tre linee orientate uscenti da un punto e costituenti, prese in un certo ordine, una terna destra siano trasformate dalla deformazione ϕ in tre linee orientate ancora costituenti, prese nello stesso ordine, una terna destra.

Le proprietà precedenti assicurano la conservazione della disposizione delle diverse parti del solido ma non la loro *orientazione*. Infatti, per es., una riflessione è continua, derivabile con derivate continue e iniettiva ma inverte la destra con la sinistra, modificando l'orientazione del solido. ■

1.2 Moto e velocità

Se ora si considera un moto del corpo la configurazione deformata \mathcal{B} diventa funzione del tempo, così come la deformazione ϕ e il vettore spostamento \mathbf{u} . Si indichi con \mathbf{x} la *funzione del moto*, che fornisce la

⁷Si veda, per es., Gurtin (1981, p. 22) oppure Sedov (1971, p. 21).

⁸*Orientation of matter* nella letteratura inglese.

posizione spaziale del punto materiale X al tempo t :

$$\mathbf{x} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{E}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t), \quad (1.17)$$

dove T rappresenta l'asse del tempo, mentre \mathcal{E} indica lo spazio (euclideo) in cui avviene il moto del solido. Se si tiene costante il tempo t si ottiene la deformazione ϕ al tempo t . Se invece si tiene costante il punto materiale X si ottiene la sua *traiettoria*,⁹ descritta dalla funzione del tempo:

$$\mathbf{x}_X : T \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto \mathbf{x}(X, t). \quad (1.18)$$

Si faccia ora riferimento alla fig. 1.5, dove sono indicate sia la traietto-

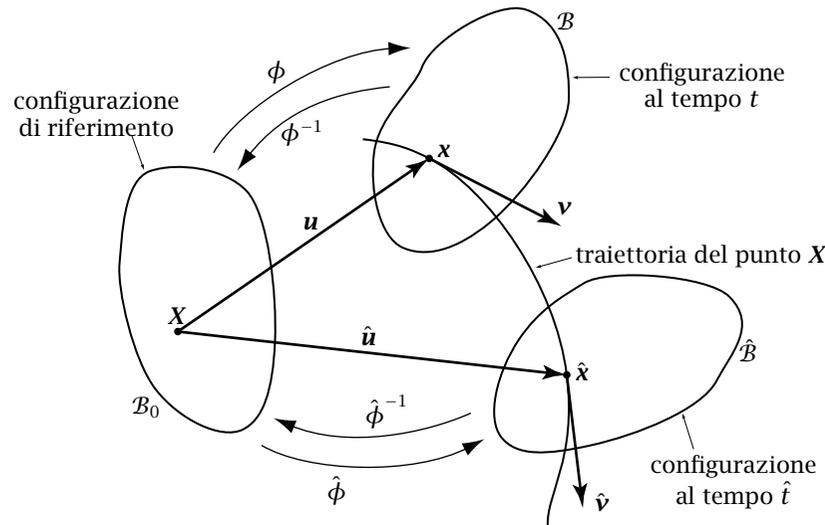


Figura 1.5: Moto di un corpo solido

ria di un generico punto materiale X che le posizioni spaziali $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t)$ e $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(X, \hat{t})$ che questo punto occupa all'istante generico t e rispettivamente ad un istante successivo variabile \hat{t} , posizioni individuate dai vettori spostamento \mathbf{u} e $\hat{\mathbf{u}}$ rispettivamente. Allora la *velocità*¹⁰ \mathbf{v} del

⁹Trajectory nella letteratura inglese.

¹⁰In inglese velocità si indica prevalentemente con il termine *velocity*, ma a volte è anche utilizzato il termine *speed*.

punto materiale X è definita come segue:¹¹

$$\mathbf{v} = \lim_{\substack{\hat{t} \rightarrow t \\ X = \text{cost}}} \frac{\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{\hat{t} - t} = \frac{d\mathbf{x}_X}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad (1.19)$$

dove $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ rappresenta lo spostamento del punto materiale X nell'intervallo di tempo $\hat{t} - t$, mentre \mathbf{x} e \mathbf{x}_X sono le funzioni rispettivamente del moto e della traiettoria del punto X . La fig. 1.5 rende anche evidente il ruolo di vettore posizione assunto dal vettore spostamento relativamente alla descrizione della traiettoria di un generico punto materiale X :

$$\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

Ne consegue la seguente espressione della velocità:

$$\mathbf{v} = \lim_{\substack{\hat{t} \rightarrow t \\ X = \text{cost}}} \frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}}{\hat{t} - t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (1.21)$$

dove la funzione \mathbf{u} è ora intesa dipendere anche del tempo:

$$\mathbf{u} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{u}(X, t). \quad (1.22)$$

Come già detto, gli spostamenti \mathbf{u} a un dato tempo t risultano un campo materiale, cioè un campo definito nel riferimento materiale \mathcal{B}_0 , e così risulta di conseguenza il campo delle velocità al tempo t , ottenuto tramite la (1.21). L'esistenza della deformazione inversa ϕ^{-1} al tempo t generico permette di esprimere il campo delle velocità \mathbf{v} nella configurazione spaziale \mathcal{B} . Indicando con \mathbf{v}_{ref} e \mathbf{v}_{sp} le versioni rispettivamente materiale e spaziale della velocità:

$$\mathbf{v}_{\text{ref}} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{v}_{\text{ref}}(X, t), \quad (1.23)$$

$$\mathbf{v}_{\text{sp}} : \mathcal{B} \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.24)$$

risulta:

$$\mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\text{ref}}(\phi^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad (1.25)$$

dove si è utilizzata la deformazione inversa ϕ^{-1} corrispondente al tempo t per ottenere il punto materiale X che al tempo t occupa la posizione spaziale \mathbf{x} , dopodiché si è applicata la funzione velocità materiale per

¹¹Si veda per es. Levi-Civita e Amaldi (1949, § 3, pp. 95-96) oppure Kittel et al. (1970, § 2.6, pp. 37-38).

ottenere la velocità di tale punto materiale al tempo t . Inversamente, si può esprimere la funzione velocità materiale \mathbf{v}_{ref} in termini di quella spaziale \mathbf{v}_{sp} :

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}_{\text{sp}}(\phi(\mathbf{X}), t) = \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \quad (1.26)$$

dove ora è stata utilizzata la funzione di deformazione ϕ corrispondente al tempo t per ottenere il punto spaziale \mathbf{x} che al tempo t è occupato dal punto materiale \mathbf{X} , dopodiché si è applicata la funzione velocità spaziale per ottenere la velocità del punto materiale che al tempo t si trova nella posizione spaziale \mathbf{x} .

Il campo delle *accelerazioni*¹² \mathbf{a} si ottiene poi derivando rispetto al tempo la velocità lungo le traiettorie, cioè eseguendo la cosiddetta *derivazione materiale*¹³ del campo delle velocità, derivazione indicata con il simbolo $\dot{\mathbf{v}}$. Nel caso in cui il campo delle velocità \mathbf{v} è quello materiale (1.23), come di solito avviene nella meccanica dei solidi, la derivazione materiale si ottiene facendo la derivata parziale della velocità rispetto al tempo e ne risulta il campo materiale delle accelerazioni:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{ref}}}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Se invece il campo delle velocità \mathbf{v} è quello spaziale (1.24), come di solito avviene nella meccanica dei fluidi, la derivazione materiale si ottiene utilizzando la (1.26) nella (1.27), applicando la regola di derivazione delle funzioni di funzione e passando dalla descrizione materiale a quella spaziale tramite la funzione di deformazione, ottenendo così il campo spaziale delle accelerazioni:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{sp}}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}_{\text{sp}}) \mathbf{v}_{\text{sp}}. \quad (1.28)$$

Per quel che riguarda le condizioni di regolarità della funzione del moto relativamente alla sua dipendenza dal tempo, alla generica traiettoria \mathbf{x}_X si richiederà sia di essere continua che di possedere derivate continue fino all'ordine richiesto. Si noti che mentre una traiettoria discontinua è priva di qualunque significato fisico, così non è in generale per una traiettoria che presenti delle discontinuità nelle sue derivate, potendo queste discontinuità interpretare fenomeni fisici ben precisi. Per es., nel caso di un impulso concentrato ad un dato istante, fornito

da un colpo di martello od altro, la velocità, che rappresenta la derivata prima della funzione traiettoria, subisce una discontinuità a quell'istante. Comunque tali eventuali discontinuità sono normalmente localizzate in un numero ristretto di istanti di tempo, ai quali si dovrà allora prestare una particolare attenzione nel caso si vogliano mettere in gioco le discontinuità stesse. La continuità è comunque preservata per gli intervalli di tempo compresi tra due discontinuità successive.

Si considerino ora sia le ipotesi di continuità delle traiettorie e delle sue derivate prime che le ipotesi della continuità della funzione di deformazione e delle sue derivate prime assieme all'ipotesi che lo jacobiano della deformazione sia diverso da zero. Ne consegue allora che nel corso di un moto lo jacobiano della deformazione, dipendendo in modo continuo dal tempo e non annullandosi mai, ha sempre lo stesso segno. Se la configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 appartiene al moto, ovvero sia se:

$$\mathcal{B}(t_0) = \mathcal{B}_0, \quad (1.29)$$

per almeno un tempo t_0 non necessariamente coincidente con il tempo iniziale, lo jacobiano della deformazione deve sempre essere strettamente positivo. Infatti questa conclusione è richiesta dalla permanenza del segno dello jacobiano e dal fatto che $J = 1$, e quindi positivo, per la configurazione di riferimento, dato che la matrice jacobiana coincide in tal caso con la matrice identità. Ne consegue quindi che, sotto l'ipotesi (1.29), la preservazione dell'ordine è una conseguenza diretta delle ipotesi di regolarità della deformazione e delle traiettorie.

1.3 Equazioni di bilancio

Le variabili dinamiche descrivono le cause del moto di un corpo. In altri termini, descrivono le azioni che l'ambiente esterno al corpo esercita sul corpo stesso oppure sulle sue parti. Per poter descrivere le azioni esercitate su una parte del corpo, occorre isolare, almeno in via concettuale, tale parte dal resto del corpo. Questo fatto impone che le variabili dinamiche siano legate ai volumi e non ai punti, dato che i punti non sono isolabili da un corpo continuo.

Poiché si suppone che un corpo continuo sia indefinitamente suddivisibile, esso non è assimilabile ad un sistema di punti materiali. Infatti un insieme di particelle può assimilarsi ad un sistema di punti materiali se le dimensioni delle particelle stesse sono piccole rispetto alle loro

¹² *Acceleration* nella letteratura inglese.

¹³ *Material derivative* nella letteratura inglese.

distanze. D'altronde, comunque si suddivida in parti un corpo continuo, le singole parti sono sempre a contatto, e quindi le distanze sono nulle. Tuttavia ciò non toglie che una singola parte del corpo continuo, sufficientemente piccola, possa assimilarsi ad un punto materiale.

Alla base della dinamica di un sistema di punti materiali, come noto, possono porsi le *leggi di Newton*,¹⁴ e tali leggi sono equivalenti alle *equazioni di bilancio della quantità di moto*¹⁵ e del *momento della quantità di moto o momento angolare*.¹⁶ Di conseguenza, le equazioni di bilancio possono essere poste alla base della dinamica dei sistemi di punti materiali ed è in questa forma che la dinamica dei sistemi di punti materiali si presta ad una generalizzazione alla dinamica dei mezzi continui:

Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo. *Ad ogni parte, cioè ad ogni volume, di un corpo continuo si richiede di soddisfare le due equazioni di bilancio.*

1.3.1 Variabili dinamiche

Per inquadrare il problema nella giusta prospettiva, come prima cosa si farà un excursus sulle variabili dinamiche associate ai sistemi di particelle e sulle loro interrelazioni. Una particella in moto è caratterizzata fondamentalmente dalla sua velocità \mathbf{v} e dalla resistenza che presenta alle variazioni di velocità. L'azione \mathbf{I} che in un dato intervallo di tempo Δt agisce sulla particella modificandone la sua velocità è detta *impulso*.¹⁷ L'impulso per unità di tempo rappresenta la forza \mathbf{F} applicata alla particella ad un dato istante di tempo t : $\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} (\mathbf{I}/\Delta t)$. L'impulso necessario per annullare la velocità della particella ad un dato istante rappresenta infine la quantità di moto \mathbf{P} a quell'istante. Ne consegue che nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'impulso vale la differenza della quantità di moto: $\mathbf{I}(\Delta t) = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1)$, e che quindi la forza \mathbf{F} rappresenta la derivata della quantità di moto: $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$, relazione nota come *prima equazione di bilancio*.

La quantità di moto, impulso necessario ad un dato istante per annullare la velocità della particella, rappresenta una funzione della velocità

¹⁴Le leggi di Newton, *Newton's laws* nella letteratura inglese, comprendono il principio di inerzia, la proporzionalità tra forza ed accelerazione ed infine la legge di azione e reazione.

¹⁵*Linear momentum* o, più semplicemente, *momentum* nella letteratura inglese.

¹⁶*Angular momentum* oppure *moment of momentum* nella letteratura inglese.

¹⁷*Impulse* nella letteratura inglese.

della particella. Per velocità sufficientemente piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto tale legame può ritenersi lineare: $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$, dove il coefficiente di proporzionalità m rappresenta la *massa*¹⁸ della particella.

Nel caso di un sistema di particelle occorre aggiungere il *momento degli impulsi* \mathbf{H} , il *momento delle forze* \mathbf{M} , che risulta essere il momento degli impulsi per unità di tempo: $\mathbf{M} = \lim_{\Delta t \rightarrow t} (\mathbf{H}/\Delta t)$, e infine il momento della quantità di moto \mathbf{L} , il cui incremento in un intervallo di tempo uguaglia il momento degli impulsi: $\mathbf{H}(\Delta t) = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1)$. Ne risulta la *seconda equazione di bilancio*: $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$.

1.3.2 Estensione al caso continuo

Ciò premesso, si tratta ora di estendere le due equazioni di bilancio al caso di un corpo continuo. Si consideri allora un volume V interno alla generica configurazione deformata \mathcal{B} del corpo (fig. 1.6). Detta \mathbf{F} la

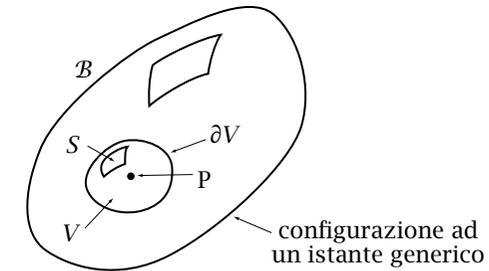


Figura 1.6: Volume V generico

*forza*¹⁹ totale agente nel volume V , e detta \mathbf{P} la quantità di moto totale relativa a tale volume, il bilancio della quantità di moto si scrive:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}, \quad (1.30)$$

dove il punto indica derivazione materiale, cioè valutata seguendo l'evoluzione del volume V nel corso del tempo. Se poi si indica con \mathbf{M} il *momento delle forze*²⁰ e con \mathbf{L} il momento della quantità di moto entrambi relativi al volume V , il bilancio del momento della quantità di

¹⁸*Mass* nella letteratura inglese.

¹⁹*Force* nella letteratura inglese.

²⁰*Moment of forces* nella letteratura inglese.

moto analogamente si scrive:

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}. \quad (1.31)$$

Per rendere operative le equazioni di bilancio (1.30) e (1.31) occorre precisare, relativamente al modello di corpo continuo, i concetti di quantità di moto, di momento della quantità di moto, di forza e di momento delle forze, concetti che in tali equazioni compaiono.

Nel caso statico, ovvero in assenza di variazioni della quantità di moto e del momento della quantità di moto, le due equazioni di bilancio (1.30) e (1.31) si riducono alle due *equazioni di equilibrio* alla *traslazione* e alla *rotazione* rispettivamente:²¹

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (1.33)$$

note come *equazioni cardinali della statica*. Si ribadisce che le equazioni di bilancio (1.30) e (1.31), oppure quelle di equilibrio (1.32) e (1.33), devono essere valide per ogni volume V estraibile dal corpo: le sole equazioni di bilancio, o di equilibrio, globali (relative a tutto il corpo \mathcal{B}) sono sufficienti a stabilire la dinamica, o la statica, del corpo rigido ma non del corpo continuo deformabile.

1.3.3 Massa

Ad ogni volume V estraibile dal corpo (fig. 1.6) viene associata la sua massa $m(V)$. La massa risulta quindi una *funzione scalare di dominio*: $V \mapsto m(V)$.

La *massa per unità di volume* ρ , detta *densità* o *massa specifica*,²² definita in un qualunque punto P del corpo, risulta:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow P} \frac{m(V)}{V}. \quad (1.34)$$

Se la massa per unità di volume esiste, ovvero se esiste il limite (1.34), la massa associata ad un dato volume V viene recuperata via integrazione:

$$m(V) = \int_V \rho \, dV. \quad (1.35)$$

Un caso in cui il limite (1.34) non esiste è quello di una massa concentrata \bar{m} in un punto P :

$$m(V) = \begin{cases} \bar{m} & \text{se } P \in V \\ 0 & \text{se } P \notin V \end{cases}. \quad (1.36)$$

1.3.4 Quantità di moto e momento della quantità di moto

Con riferimento alla fig. 1.7, si suddivida il volume generico V , appar-

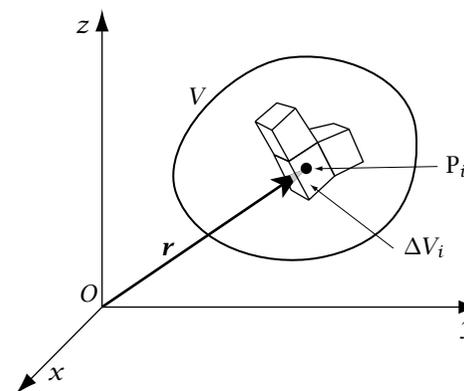


Figura 1.7: Partizione di V

tenente al corpo \mathcal{B} , in un certo numero di parti ΔV_i , e siano P_i un punto interno alla generica parte ΔV_i , $\mathbf{v}(P_i)$ la sua velocità ed infine $\mathbf{r}(P_i)$ il vettore posizione del punto P_i rispetto al polo O di riduzione dei momenti. La “finezza” δ della partizione può essere caratterizzata dal massimo diametro delle sfere circoscritte ai volumi ΔV_i .

Nell’ambito della meccanica newtoniana la quantità di moto e il momento della quantità di moto (rispetto al polo O) della parte ΔV_i si possono “approssimativamente” porre nella forma:

$$\mathbf{P}_i \approx m(\Delta V_i) \mathbf{v}(P_i) = \frac{m(\Delta V_i)}{\Delta V_i} \mathbf{v}(P_i) \Delta V_i, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{L}_i \approx \mathbf{r}(P_i) \times [m(\Delta V_i) \mathbf{v}(P_i)] = \frac{m(\Delta V_i)}{\Delta V_i} \mathbf{r}(P_i) \times \mathbf{v}(P_i) \Delta V_i, \quad (1.38)$$

²¹Equilibrium equations nella letteratura inglese.

²²Mass per unit volume oppure mass density, o più semplicemente density, nella letteratura inglese.

Tenendo conto della definizione (1.34) di densità la quantità di moto e il momento della quantità di moto (rispetto al polo O) globali (di tutto il volume V) saranno allora approssimati dalle seguenti somme:

$$\mathbf{P} \approx \sum_i \rho(\mathbf{P}_i) \mathbf{v}(\mathbf{P}_i) \Delta V_i, \quad (1.39a)$$

$$\mathbf{L} \approx \sum_i \rho(\mathbf{P}_i) \mathbf{r}(\mathbf{P}_i) \times \mathbf{v}(\mathbf{P}_i) \Delta V_i. \quad (1.39b)$$

Le due somme (1.39) definiscono due integrali tripli (secondo Riemann) che è naturale assumere quali definizioni di quantità di moto e di momento della quantità di moto nel caso di un corpo continuo:

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{v} dV, \quad \mathbf{L} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (1.40)$$

Dato che il volume V spaziale varia in generale nel tempo, essendo il corrispondente di un dato volume materiale V_0 , per il calcolo delle derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto serve il *teorema del trasporto (di Reynolds)*, nella forma particolare che assume quando sotto il segno di integrale compare la densità ρ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{f} = \int_V \rho \dot{\mathbf{f}} dV, \quad (1.41)$$

dove \mathbf{f} è una qualunque funzione vettoriale. Le derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto valgono allora:

$$\dot{\mathbf{P}} = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV, \quad \dot{\mathbf{L}} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} dV, \quad (1.42)$$

avendo tenuto conto che:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}, \quad (1.43)$$

poiché $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$.

Appendice (Meccanica dei fluidi). Nella meccanica dei fluidi si adotta un punto di vista euleriano, ovvero la descrizione del moto e dello stato del fluido è fatta utilizzando campi spaziali, che quindi descrivono, ad un dato istante e in una data parte di spazio, lo stato del fluido che in quell'istante si trova in quella parte di spazio. Si noti che la derivazione materiale di un qualunque campo spaziale può sempre eseguirsi, analogamente alla (1.28), senza fare

riferimento alla funzione di deformazione (o al campo degli spostamenti), ma semplicemente basandosi sul campo spaziale delle velocità e che la scrittura delle equazioni di bilancio necessita della conoscenza del solo campo spaziale delle velocità.

Per descrivere, da un punto di vista euleriano, lo stato di un fluido ad un generico istante si può quindi utilizzare il campo spaziale delle velocità \mathbf{v} che mappa una regione \mathcal{R} dello spazio euclideo \mathcal{E} nello spazio vettoriale ordinario \mathcal{V} :

$$\mathbf{v}: \mathcal{R} \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.44)$$

dove \mathbf{x} è il generico punto spaziale appartenente alla regione \mathcal{R} . Naturalmente si suppone che il campo delle velocità sia regolare, secondo le richieste del modello continuo.

Il compito principale riservato al campo (1.44) è quello di fornire la quantità di moto e il momento della quantità di moto di un qualunque volume finito V tramite le (1.40). Ci si rende quindi conto che il significato di tale campo continuo di velocità non è quello di fornire le velocità locali dei singoli elementi di fluido, bensì quello di riprodurre, ad una scala macroscopica, la quantità di moto e il momento della quantità di moto di un qualunque volume V . In questo senso il campo delle velocità è una variabile virtuale non direttamente osservabile ma capace di fornire, tramite le (1.40), delle quantità suscettibili di misura diretta. In altri termini, la velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, deve intendersi approssimativamente quale limite del rapporto $\mathbf{P}(V)/m(V)$, limitatamente a volumi V macroscopici. D'altronde questo è il caso di tante altre variabili fisiche, anche se questo non viene quasi mai detto esplicitamente, come nel caso della densità ρ definita dalla (1.34).

Naturalmente, scelto un dato volume materiale di fluido, individuato per es. dalla sua posizione $V(t_0)$ ad un dato istante t_0 , è sempre possibile integrare il campo delle velocità in un campo di spostamenti ed ottenere così le traiettorie degli elementi fluidi del dato volume. Occorre però ricordarsi che queste traiettorie hanno in generale solo un significato medio, e che non è in tal modo possibile in generale prevedere dove un elemento di fluido si troverà ad un dato istante di tempo.

Si conclude dimostrando il teorema del trasporto (1.41). A tale scopo occorre innanzitutto osservare che, per il teorema di cambiamento di variabile, la (1.35) diventa:

$$m(V) = \int_V \rho dV = \int_{V_0} \rho J dV_0. \quad (1.45)$$

dove J è lo jacobiano della deformazione. Se il volume V spaziale, funzione in generale del tempo, corrisponde sempre al dato volume materiale V_0 , l'ipotesi che la massa si conservi impone che la massa $m(V)$ associata al volume sia indipendente dal tempo. Dalla (1.45) si deduce allora che l'integrale $\int_{V_0} \rho J dV_0$ non dipende dal tempo e questo per ogni V_0 . Tale invarianza deve quindi valere anche localmente, cioè la quantità ρJ , se valutata ad ogni istante per la

stessa particella materiale ($\mathbf{X} = \text{cost}$), deve essere indipendente dal tempo. Ne consegue infine:

$$\dot{\overline{\rho J}} = 0. \quad (1.46)$$

Ciò premesso si ha, applicando due volte il teorema di cambiamento di variabile e tenendo conto della (1.46):

$$\int_V \overline{\rho \mathbf{f}} = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho J \mathbf{f}) dV = \int_{V_0} \rho J \dot{\mathbf{f}} dV = \int_V \rho \dot{\mathbf{f}} dV, \quad (1.47)$$

come volevasi dimostrare. Si noti che è sottinteso che nel termine $\int_{V_0} \rho J \dot{\mathbf{f}} dV$ le funzioni in gioco siano materiali, per cui in tal caso risulta $\dot{\mathbf{f}} = \partial \mathbf{f} / \partial t$. Invece nel termine $\int_V \rho \dot{\mathbf{f}} dV$ è sottinteso che le funzioni siano spaziali e dunque in tal caso si ha $\dot{\mathbf{f}} = \partial \mathbf{f} / \partial t + (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{f}$.

1.3.5 Equazioni di bilancio in forma integrale

Nel caso di un mezzo continuo, le equazioni di bilancio si specializzano nella seguente forma finita:

$$\mathbf{F}(\partial V) + \mathbf{F}(V) = \dot{\mathbf{P}}, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{M}(\partial V) + \mathbf{M}(V) = \dot{\mathbf{L}}, \quad (1.49)$$

dove $\mathbf{F}(\partial V)$ e $\mathbf{M}(\partial V)$ sono le forze e i momenti globali trasmessi attraverso il contorno ∂V , mentre $\mathbf{F}(V)$ e $\mathbf{M}(V)$ sono le forze e i momenti globali che competono al volume V .

Queste due equazioni devono valere per ogni volume V di \mathcal{B} . Introducendo le forze e i momenti specifici e tenendo conto delle (1.42), le equazioni di bilancio assumono la seguente forma integrale:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} dS + \int_V (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV + \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad (1.50)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (1.51)$$

dove \mathbf{t} indica la *tensione interna*, \mathbf{f} la *forza per unità di volume* e si è tenuto conto che per i corpi semplici i momenti specifici sono ottenuti quali momenti delle forze specifiche. Nelle equazioni (1.50) e (1.51) si è anche tenuto conto della presenza di eventuali forze concentrate \mathbf{F}_i in un numero finito di punti di V . Si noti che la presenza di forze

concentrate nella versione integrale (1.50) e (1.51) delle equazioni di bilancio non crea alcuna difficoltà formale, a differenza di quello che succede nel caso delle *equazioni del moto*, che invece rappresentano la versione differenziale delle equazioni di bilancio.

Nel caso statico, cioè quando le accelerazioni sono nulle, le (1.50) e (1.51) si specializzano nelle *equazioni di equilibrio*:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV + \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad (1.52)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0, \quad (1.53)$$

equazioni che rappresentano le equazioni cardinali della statica nel caso del corpo continuo. Si ricorda che tali equazioni devono valere per un qualunque volume V contenuto nel corpo.

1.4 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni

È noto che molti corpi solidi reali si deformano poco anche se soggetti ad azioni esterne notevoli e questo conduce alla possibilità di notevoli semplificazioni. È però necessario essere più precisi, in quanto è evidente che diminuendo opportunamente l'entità delle azioni esterne si può sempre fare in modo che le deformazioni siano sufficientemente piccole. La chiave è naturalmente nella espressione "azioni esterne notevoli", che indica genericamente azioni senz'altro non inferiori a quelle a cui il corpo si trova normalmente ad essere soggetto. In altri termini, per parlare di piccole deformazioni queste devono essere dovute agli effettivi carichi normalmente agenti.

Se un corpo solido reale è vincolato in modo tale da non poter subire degli spostamenti rigidi, non solo le deformazioni, ma anche gli spostamenti che conseguono all'applicazione delle azioni esterne effettive sono spesso di piccola entità. D'altronde se il corpo, non sufficientemente vincolato, può subire degli spostamenti rigidi di notevole entità, mentre le deformazioni continuano ad essere spesso ancora di piccola entità, ciò non può dirsi in generale per gli spostamenti. Tuttavia è in tal caso spesso possibile ottenere un campo di spostamenti di piccola entità se agli spostamenti complessivi vengono tolti i contributi di un opportuno campo di spostamenti rigidi.

Ciò premesso, si può allora ottenere una notevole semplificazione dei problemi di meccanica dei solidi sviluppandoli sotto l'*ipotesi di piccoli*

spostamenti e piccole deformazioni, con l'avvertenza che per “spostamenti” deve intendersi in generale “spostamenti a meno di un opportuno campo di spostamenti rigidi”. Naturalmente la “piccolezza” sia degli spostamenti che delle deformazioni può essere più o meno pronunciata e quindi più o meno accettabile nelle varie circostanze. Si comprende quindi come vi possano essere diversi gradi di applicazione delle semplificazioni che ne derivano. Nel seguito elencheremo alcune possibilità di semplificazione basate sulla ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, chiarendo così i limiti di applicabilità che ne conseguono.

1.4.1 Corpo rigido

La semplificazione più drastica è naturalmente quella di trascurare completamente le deformazioni, il che conduce direttamente al modello di corpo rigido. Se il corpo è sufficientemente vincolato gli spostamenti sono nulli e la configurazione finale coincide con quella iniziale. Se invece il corpo è libero di muoversi il suo moto è rigido, il campo degli spostamenti a meno del moto rigido è nullo, e la configurazione finale differisce da quella iniziale. In entrambi i casi l'equilibrio (o più in generale il bilancio) viene scritto nella configurazione finale, che è quella in cui sussiste l'equilibrio (o il bilancio). Nel primo caso la configurazione finale coincide, come detto, con quella iniziale, mentre in entrambi i casi si tratta di una configurazione indeformata. L'*ipotesi di indeformabilità* può quindi essere separata nelle tre ipotesi seguenti:

1. Spostamenti nulli, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. Deformazioni nulle;
3. Equilibrio scritto in una configurazione indeformata (nella configurazione iniziale indeformata se è impedito il moto rigido).

Come già detto, il modello di corpo rigido è una semplificazione troppo drastica, poiché elimina la possibilità di poter calcolare non solo la deformazione e gli spostamenti aggiuntivi dovuti a questa, il che è evidente, ma anche le tensioni interne.

1.4.2 Teoria del primo ordine

Per poter calcolare sia la deformazione che la sollecitazione di un corpo solido occorre quindi mettere in conto la deformazione stessa. Il modo più semplice per farlo è di assumere l'ipotesi di piccolezza sia degli

spostamenti che della deformazione con tutte le conseguenti approssimazioni. Il che poi da una parte significa linearizzare le relazioni dipendenti dagli spostamenti e dalle deformazioni trascurando tutto ciò che è di ordine superiore al primo negli stessi spostamenti e deformazioni. Dall'altra parte significa invece approssimare, ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio (oppure di bilancio), la configurazione finale deformata con una configurazione indeformata vicina, grazie all'ipotesi di piccolezza degli spostamenti che conducono dalla configurazione indeformata a quella deformata.

A questo punto è bene segnalare che anche ad eventuali spostamenti rigidi di piccola entità vanno applicate le approssimazioni di cui sopra. In altri termini, un campo di spostamenti rigidi piccolo può essere linearizzato, trascurando tutto ciò che è di ordine superiore al primo nei parametri lagrangiani che lo descrivono. Non solo, ma anche la configurazione finale può essere approssimata dalla configurazione iniziale. Se allora il corpo è vincolato a non subire spostamenti rigidi di notevole entità (potendoli però in generale subire di piccola entità) la configurazione finale deformata può confondersi con quella indeformata iniziale.

Un modello sviluppato utilizzando queste approssimazioni prende il nome di *teoria del primo ordine*. Riassumendo, una teoria del primo ordine è basata sulle seguenti ipotesi:

1. Piccoli spostamenti, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. Piccole deformazioni;
3. Equilibrio scritto in una configurazione indeformata vicina a quella deformata (nella configurazione iniziale indeformata se sono impediti spostamenti rigidi di notevole entità).

Si noti che in una teoria del primo ordine l'equilibrio viene scritto in una configurazione indeformata, come se il corpo fosse rigido. Si può quindi enunciare la seguente

Equivalenza statica. *La statica di un corpo deformabile, sviluppata con le approssimazioni di una teoria del primo ordine, coincide con quella dello stesso corpo considerato rigido.*

La meccanica dei solidi usualmente sviluppata nella scienza delle costruzioni è una teoria del primo ordine, quindi basata sull'ipo-

tesi di piccoli spostamenti e piccole deformazione e su tutte le sue conseguenze.

1.4.3 Teoria del secondo ordine

Vi sono casi in cui le azioni esterne applicate sono tali che non è lecito scrivere l'equilibrio in una configurazione indeformata vicina a quella deformata, nonostante gli spostamenti (eventualmente a meno di un moto rigido) e le deformazioni dovute alle stesse forze possano ancora essere considerati piccoli. La piccolezza degli spostamenti e delle deformazioni permettono ancora di trascurare i termini di ordine superiore negli spostamenti e nelle deformazioni stesse ma non vi è più l'equivalenza statica tra sistemi deformabili e sistemi rigidi.

Questi casi si presentano quando la coincidenza della struttura deformata con quella indeformata si ottiene al prezzo di trascurare termini piccoli negli spostamenti (anche del primo ordine) che però modificano quantità altrimenti nulle. Se tali quantità intervengono nelle equazioni di equilibrio, non sempre la loro piccolezza garantisce la loro trascurabilità. In tale ottica la singola quantità può essere sì semplificata, però trascurando termini di ordine superiore rispetto ad altri che devono in ogni caso comparire nelle equazioni di equilibrio.

Un modello sviluppato utilizzando queste approssimazioni prende il nome di *teoria del secondo ordine*. Quindi una teoria del secondo ordine è basata solo sulle prime due ipotesi alla base di una teoria del primo ordine:

1. Piccoli spostamenti, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. Piccole deformazioni.

1.4.4 Grandi spostamenti e piccole deformazioni

Vi sono casi, come quelli relativi a *travi molto snelle*, in cui gli spostamenti possono facilmente diventare grandi non tanto perché le deformazioni sono grandi, ma in quanto queste sono distribuite su una notevole lunghezza. Ne risulta che in tal caso non sono più possibili le linearizzazioni dovute all'ipotesi di piccoli spostamenti, ma continuano ad essere lecite quelle dovute all'ipotesi di piccole deformazioni. Poiché l'equilibrio può essere scritto in una configurazione indeformata vicina a quella deformata solo se gli spostamenti sono piccoli, in tal caso tale approssimazione non è di conseguenza mai lecita.

Quindi un modello di trave molto snella può essere basato solo sulla seconda ipotesi alla base di una teoria del primo ordine, e cioè quella di *piccole deformazioni*.

Capitolo 2

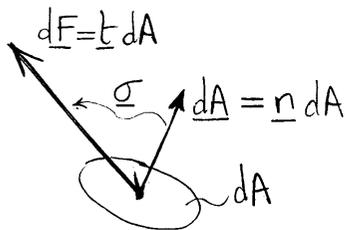
Analisi della tensione

2.1 Tensore degli sforzi di Cauchy

In corrispondenza di un generico punto del solido, la tensione interna è funzione della normale \underline{n} alla superficie su cui la tensione stessa si esercita. Se con \mathcal{U} indichiamo l'insieme dei versori e con \mathcal{V} l'insieme dei vettori, la tensione interna rappresenta dunque, nell'intorno di un punto, una funzione del tipo:

$$\underline{t}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \underline{n} \mapsto \underline{t}(\underline{n})$$

D'altronde, se con $d\underline{F} = \underline{t} dA$ si indica la forza che



globalmente si esercita su un elemento dA di superficie, di normale \underline{n} , viene ad istituirsi una funzione del tipo:

$$\underline{\sigma}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \underline{v} \mapsto |\underline{v}| \underline{t} \left(\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right)$$

che, in modo evidente, è omogenea di grado 1:

$$\underline{\sigma}(\alpha \underline{v}) = \alpha \underline{\sigma}(\underline{v}).$$

Vogliamo mostrare che tale funzione è anche additiva, ovvero che vale la relazione:

$$\underline{\sigma}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{\sigma}(\underline{v}_1) + \underline{\sigma}(\underline{v}_2),$$

e che quindi $\underline{\sigma}$ risulta essere un tensore doppio, cioè una trasformazione lineare nell'insieme dei vettori ordinari. Tale tensore doppio è detto tensore degli sforzi, rappresentando lo sforzo interno nell'intorno di un punto. Per dimostrare l'additività di $\underline{\sigma}$, si

considerino due generici vettori \underline{v}_1 e \underline{v}_2 e sia \underline{v} la loro somma:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 .$$

Si costruisca, nell'intorno del punto in cui $\underline{\sigma}$ è definito, un solido prismatico di base triangolare, con i lati del triangolo perpendicolari ai tre vettori \underline{v} , \underline{v}_1 e \underline{v}_2 e di altezza $d\tau$ pari alla

lunghezza del lato perpendicolare a \underline{v} .

Il triangolo di base del prisma e il triangolo di lati \underline{v} , \underline{v}_1 e \underline{v}_2 sono simili e quindi:

$$\frac{d\tau_1}{d\tau} = \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}|}, \quad \frac{d\tau_2}{d\tau} = \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}|} .$$

Il bilancio della quantità di moto del prisma, a meno di termini di ordine superiore a $d\tau^2$,

si scrive:

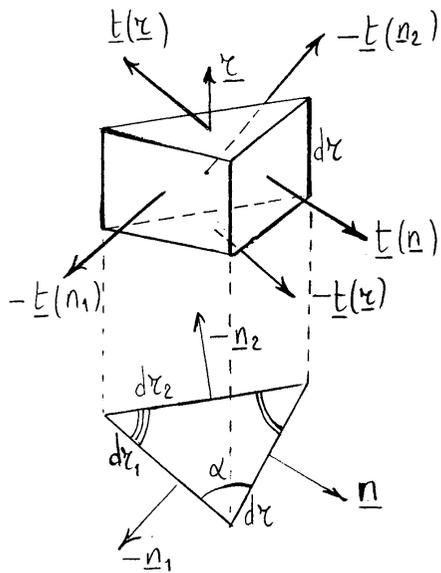
$$t(\underline{n}) d\tau^2 - t(\underline{n}_1) d\tau d\tau_1 - t(\underline{n}_2) d\tau d\tau_2 = 0 ,$$

poiché le forze agenti sulle due basi differiscono di termini di ordine superiore a $d\tau^2$:

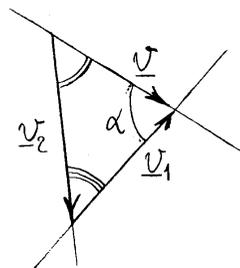
$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \right) \frac{1}{2} d\tau d\tau_1 \sin \alpha + o(d\tau^3) ,$$

così come i termini di volume:

$$(\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \frac{1}{2} d\tau^2 d\tau_1 \sin \alpha + o(d\tau^3) .$$



$$\begin{cases} \underline{n} = \underline{v} / |\underline{v}| \\ \underline{n}_1 = \underline{v}_1 / |\underline{v}_1| \\ \underline{n}_2 = \underline{v}_2 / |\underline{v}_2| \end{cases}$$



Risulta quindi, dividendo per dV :

$$\underline{t}(\underline{n}) - \underline{t}(\underline{n}_1) \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}|} - \underline{t}(\underline{n}_2) \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}|} = \underline{0}.$$

Moltiplicando infine per $|\underline{v}|$:

$$|\underline{v}| \underline{t} \left(\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right) - |\underline{v}_1| \underline{t} \left(\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} \right) - |\underline{v}_2| \underline{t} \left(\frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|} \right) = \underline{0},$$

ovvero:

$$\underline{\sigma}(\underline{v}) - \underline{\sigma}(\underline{v}_1) - \underline{\sigma}(\underline{v}_2) = \underline{0},$$

come volevasi dimostrare.

La tensione \underline{t} agente su una giacitura di normale \underline{n} risulta quindi esprimibile nella forma:

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n},$$

espressione detta equazione di Cauchy.

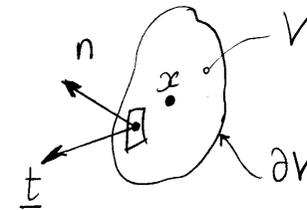
2.2 Equazione del moto

Come visto, il bilancio di un volume V si scrive:

$$\int_{\partial V} \underline{t} dS + \int_V (\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) dV = \underline{0},$$

dove:

$$\int_{\partial V} \underline{t} dS \stackrel{\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}}{=} \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS.$$



Divergenza di $\underline{\sigma}$:

$$\text{div } \underline{\sigma} = \lim_{V \rightarrow x} \frac{\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} dS}{V}.$$

Rappresenta la forza totale agente sul contorno ∂V

di V per unità di volume :

$$\int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \underline{\sigma} \, dV .$$

$\operatorname{div} \underline{\sigma}$ è un vettore e le sue dimensioni sono quelle di una forza per unità di volume. In componenti:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{\sigma} \underline{n} \, dS &= \int_{\partial V} \sum_{ij} (\sigma_{ij} n_j) \underline{e}_i \, dS \\ &= \sum_{ij} \left(\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \, dS \right) \underline{e}_i \\ &\stackrel{\text{formula di Green}}{=} \sum_{ij} \left(\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dV \right) \underline{e}_i \\ &= \int_V \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i \, dV \end{aligned}$$

Dunque :

$$(\operatorname{div} \underline{\sigma})_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} .$$

Il bilancio del generico volume V , intorno del

punto x , si scrive quindi :

$$\int_V (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \, dV = \underline{0} ,$$

che, dovendo essere valido per ogni intorno di x , permette di estrarre l'equazione del moto valida nel punto x :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \rho \underline{\dot{v}} .$$

Nel caso statico risulta $\underline{\dot{v}} = \underline{0}$ e l'equazione del moto diventa :

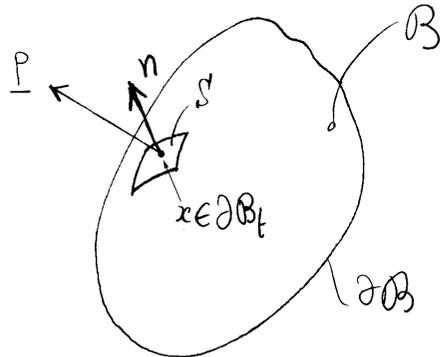
$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} ,$$

che viene detta equazione indefinita di equilibrio.

2.3 Equazione di equilibrio al contorno

La tensione $\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}$ che emerge sul contorno deve uguagliare la forza esterna \underline{p} applicata sulla superficie ∂B di contorno:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{p} \quad \text{su } \partial B \quad (\text{superficie esterna}).$$



2.4 Simmetria del tensore degli sforzi

Si vuole mostrare che, in ogni punto $x \in B$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases}.$$

A tale scopo si ricordi la rappresentazione in componenti di un prodotto vettoriale:

$$(\underline{u} \times \underline{v})_i = \sum_{jk} e_{ijk} u_j v_k,$$

dove il simbolo di permutazione e_{ijk} , a tre indici, vale:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione pari di } (x,y,z) \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione dispari di } (x,y,z) \\ 0 & \text{altrimenti (cioè se almeno due indici sono uguali)} \end{cases}.$$

Per dimostrare la simmetria di $\underline{\sigma}$, impariamo, al generico volume V , intorno di un punto x , il bilancio del momento della quantità di moto:

$$\int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS + \int_V \underline{r} \times (\underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) \, dV = \underline{0}.$$

L'integrale di superficie diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS &= \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{\sigma} \underline{n} \, dS \\ &= \int_{\partial V} \sum_i \left\{ \sum_{jk} \epsilon_{ijk} r_j \left(\sum_h \sigma_{kh} n_h \right) \right\} \underline{e}_i \, dS = \sum_{ijk} \left\{ \int_{\partial V} \epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kh} n_h \, dS \right\} \underline{e}_i \\ &\stackrel{\text{formula di Green}}{=} \sum_{ijk} \left\{ \int_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial r_j \sigma_{kh}}{\partial x_h} \, dV \right\} \underline{e}_i \\ &= \int_V \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_h} \sigma_{kh} + r_j \frac{\partial \sigma_{kh}}{\partial x_h} \right) \underline{e}_i \, dV. \end{aligned}$$

La componente r_j del vettore posizione \underline{r} coincide con la coordinata x_j del punto x (nell'ipotesi

non restrittiva che il polo per il calcolo dei momenti coincide con l'origine delle coordinate) e dunque $\frac{\partial r_j}{\partial x_h}$ coincide con il delta di Kronecher:

$$\frac{\partial r_j}{\partial x_h} = \delta_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = h \\ 0 & \text{se } j \neq h \end{cases}.$$

Quindi:

$$\sum_h \frac{\partial r_j}{\partial x_h} \sigma_{kh} = \sum_h \delta_{jh} \sigma_{kh} \stackrel{\text{sommando sull'indice } h \text{ viene conservato il solo termine corrispondente ad } h=j}{=} \sigma_{kj}.$$

Inoltre $\sum_h \frac{\partial \sigma_{kh}}{\partial x_h}$ rappresenta $(\text{div } \underline{\sigma})_k$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{t} \, dS &= \int_V \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i \, dV + \int_V \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} r_j (\text{div } \underline{\sigma})_k \underline{e}_i \, dV \\ &= \int_V \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \underline{e}_i \, dV + \int_V \underline{r} \times \text{div } \underline{\sigma} \, dV. \end{aligned}$$

Il bilancio del momento della quantità di moto diviene:

$$\sum_{ijk} \int_V e_{ijk} \sigma_{kj} e_i dV + \int_V \underline{r} \times (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} - \rho \underline{\dot{v}}) dV = \underline{0}.$$

Il secondo termine è nullo per via dell'equazione del moto e quindi si ha infine:

$$\sum_{ijk} \int_V e_{ijk} \sigma_{kj} e_i = 0,$$

che equivale alle 3 equazioni scalari:

$$\int_V (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dV = 0 \quad (i=x)$$

$$\int_V (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) dV = 0 \quad (i=y)$$

$$\int_V (\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) dV = 0 \quad (i=z)$$

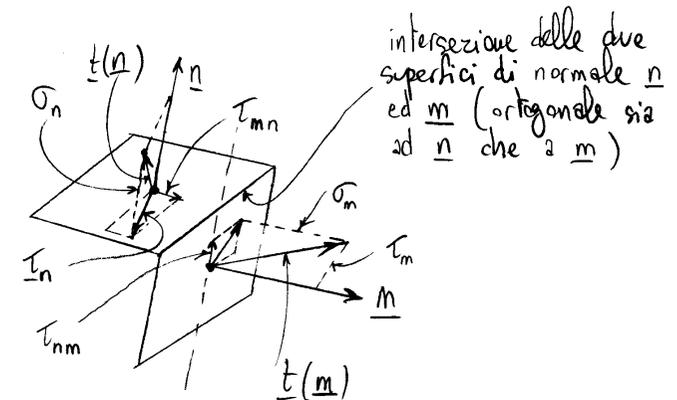
Da questo si deduce che per ogni volume V contenente x , $\underline{\sigma}$ deve dunque essere simmetrico nel punto x , e poiché x è generico $\underline{\sigma}$ è simmetrico ovunque.

2.5 Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali

Siano date due superfici, nell'intorno di un punto di un corpo continuo, ortogonali tra loro, quindi tali che:

$$\underline{n} \cdot \underline{m} = 0,$$

dove \underline{n} ed \underline{m} sono i vettori normali alle due superfici.



Essendo \underline{m} ortogonale ad \underline{n} , la componente del vettore tensione $\underline{t}(\underline{m})$ nella direzione \underline{n} rappresenta la componente tangenziale T_{nm} e analogamente la componente di $\underline{t}(\underline{n})$ nella direzione \underline{m} rappresenta T_{mn} .

Risulta:

$$\tau_{nm} = \underline{n} \cdot \underline{t}(m) = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} m = \underline{m} \cdot \underline{\sigma} n = \underline{m} \cdot \underline{t}(n) = \tau_{mn},$$

ovverossia:

$$\tau_{nm} = \tau_{mn}.$$

Questa uguaglianza rappresenta il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali:

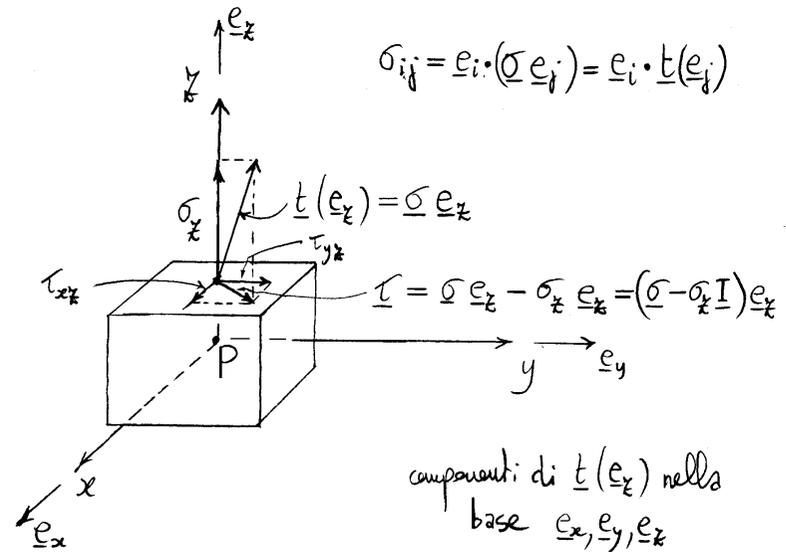
"Date due superfici nell'interno di un punto ortogonali tra loro, le componenti tangenziali dello sforzo sulle due superfici, nelle direzioni ortogonali all'intersezione tra le due superfici, sono uguali in modulo ed ambedue dirette verso l'intersezione oppure allontananti da essa."

Più in generale, se $\underline{n} \cdot \underline{m} \neq 0$ risulta ancora:

$$\tau_{nm} = \tau_{mn} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \tau_{nm} = \underline{n} \cdot \underline{t}(m) \\ \tau_{mn} = \underline{m} \cdot \underline{t}(n) \end{cases}$$

Pero' in tal caso, τ_{nm} e τ_{mn} non hanno più il significato di tensione tangenziale.

2.6 Significato fisico delle componenti del tensore degli sforzi



$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \underline{t}(\underline{e}_z)$$

componente normale: $\sigma_z = \underline{e}_z \cdot \underline{t}(\underline{e}_z)$

componenti tangenziali: $\begin{cases} \tau_{xz} = \underline{e}_x \cdot \underline{t}(\underline{e}_z) \\ \tau_{yz} = \underline{e}_y \cdot \underline{t}(\underline{e}_z) \end{cases} \quad |\underline{t}|^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$

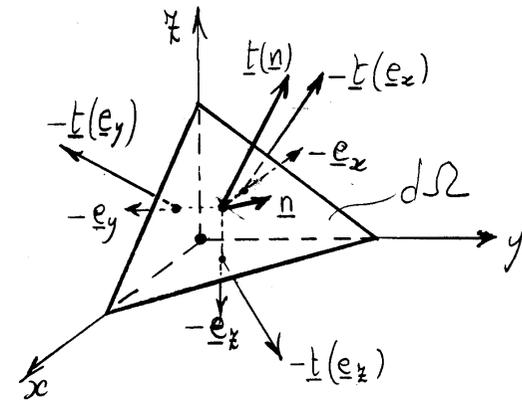
2.7 Significato fisico delle componenti dell'equazione di Cauchy

L'equazione $\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \underline{n}$ si rappresenta in componenti nella forma:

$$(1) \quad \begin{cases} t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

dove t_x, t_y e t_z sono le componenti di $\underline{t}(\underline{n})$ e n_x, n_y e n_z sono i coseni direttori della normale \underline{n} all'elemento di superficie su cui agisce $\underline{t}(\underline{n})$.

Le tre equazioni scalari rappresentano le tre equazioni di bilancio della quantità di moto nella direzione degli assi x, y e z rispettivamente, di un tetraedro elementare costruito nell'intorno del punto considerato ed avente tre facce parallele ai piani coordinati ed una faccia di normale \underline{n} (detto tetraedro di Cauchy).



Sulle tre facce di normali $-\underline{e}_x, -\underline{e}_y$ e $-\underline{e}_z$ agiscono rispettivamente le tre tensioni $-\underline{t}(\underline{e}_x), -\underline{t}(\underline{e}_y)$ e $-\underline{t}(\underline{e}_z)$ di componenti:

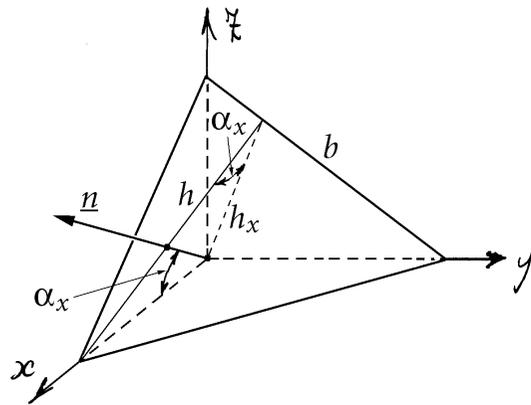
$$\{-\underline{t}(\underline{e}_x)\} = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{-\underline{t}(\underline{e}_y)\} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \\ -\tau_{zy} \end{Bmatrix}, \quad \{-\underline{t}(\underline{e}_z)\} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \\ -\sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Inoltre, se $d\Omega$ è l'area della faccia di normale \underline{n} , allora le aree $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z$ delle tre facce di normali $-\underline{e}_x, -\underline{e}_y$ e $-\underline{e}_z$ rispettivamente valgono:

$$d\Omega_x = d\Omega n_x, \quad d\Omega_y = d\Omega n_y, \quad d\Omega_z = d\Omega n_z.$$

Infatti, tenendo conto della figura, si ha per es.:

$$d\Omega_x = bh_x = bh \cos \alpha_x = d\Omega \cos \alpha_x.$$



Ne risultano le tre equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\text{Asse } x: -\sigma_x d\Omega_x - \tau_{xy} d\Omega_y - \tau_{xz} d\Omega_z + t_x d\Omega = 0,$$

$$\text{Asse } y: -\tau_{yx} d\Omega_y - \sigma_y d\Omega_y - \tau_{yz} d\Omega_z + t_y d\Omega = 0,$$

$$\text{Asse } z: -\tau_{zx} d\Omega_x - \tau_{zy} d\Omega_y - \sigma_z d\Omega_z + t_z d\Omega = 0,$$

dove si sono trascurati i contributi di ordine superiore al primo in $d\Omega$, compresi i contributi delle componenti f_x , f_y e f_z della forza di volume e quelli delle componenti p_{i_x} , p_{i_y} e p_{i_z} della forza di inerzia.

Dividendo per $d\Omega$ e mandando al limite per $d\Omega \rightarrow 0$ si ottengono le (1).

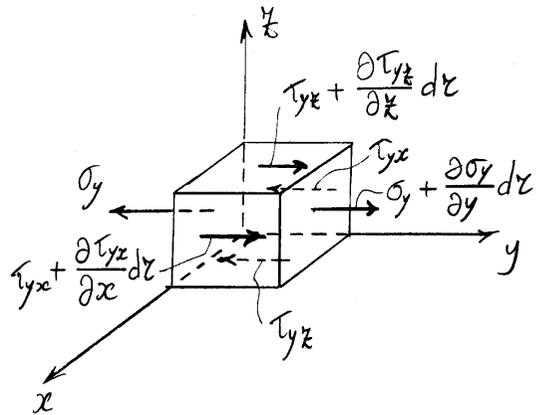
2.8 Significato fisico delle componenti dell'equazione indefinita di equilibrio

L'equazione indefinita di equilibrio $\text{div } \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0}$ è rappresentata in componenti dalle tre equazioni scalari:

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} .$$

Queste tre equazioni scalari rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione, nella direzione degli assi x , y e z rispettivamente, di un cubetto elementare avente le facce parallele agli assi coordinati e di lato dx .

Per esempio, l'equazione alla traslazione in direzione y si scrive, a meno di infinitesimi di



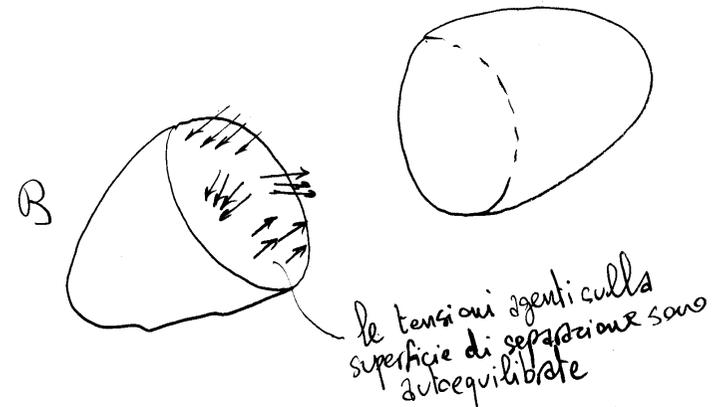
ordine superiore a $(dx)^3$:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx \right) dx^2 - \sigma_y dx^2 \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dx^2 - \tau_{yx} dx^2 \\ & + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) dx^2 - \tau_{yz} dx^2 \\ & + f_y dx^3 = 0. \end{aligned}$$

Semplificando, dividendo per dx^3 e usando al limite per $dx \rightarrow 0$ si ottiene la seconda equazione delle (2).

2.9 Autotensioni e configurazione naturale

Si dice che il corpo continuo è soggetto a delle autotensioni se il suo stato di sforzo, espresso dal tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$, non è nullo in presenza di forze applicate nulle. Questo significa che le forze globali trasmesse lungo una superficie che divide il corpo in due parti sono nulle a fronte di una distribuzione di forze lungo la superficie non nulla.



La configurazione che un solido assume quando non è soggetto a forze esterne viene detta configurazione naturale se il solido non è soggetto ad autotensioni.

2.10 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni (teoria del primo ordine)

Fino ad ora non si è posta alcuna limitazione alle deformazioni che può subire il corpo continuo. Le equazioni di equilibrio (oppure del moto) sono state scritte nella configurazione deformata, cioè nella configurazione che il corpo assume in seguito all'applicazione delle azioni esterne. Questa configurazione ha il grande difetto di essere, normalmente, una delle incognite del problema.

Il problema è allora enormemente semplificato se, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, la configurazione deformata viene, ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio, confusa con la configurazione indeformata di riferimento, che è nota a priori.

Capitolo 3

Analisi della deformazione

3.1 Cinematica linearizzata

Nel seguito sarà sviluppata la cinematica dei corpi solidi nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni. Questo significa che la cinematica sarà linearizzata rispetto agli spostamenti. Poiché gli spostamenti sono un campo vettoriale definito nella configurazione di riferimento, bisogna innanzitutto precisare in che senso è fatta tale linearizzazione. Si consideri a tale scopo un dato campo \mathbf{u} di spostamenti definito in \mathcal{B}_0 (fig. 3.1) e lo si "amplifichi" tramite uno scalare λ generico. Si ottengono così tutti i campi del tipo $\lambda\mathbf{u}$ aventi la stessa

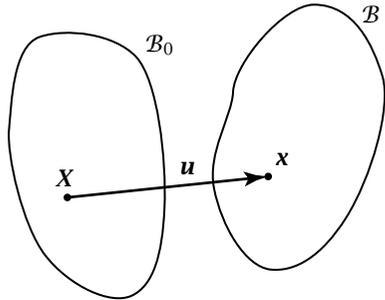


Figura 3.1: Campo di spostamenti

“direzione” (ovverossia la stessa forma) di quello originale. Il campo originale corrisponde a $\lambda = 1$. Uno spostamento \mathbf{u}' che non ha la direzione di \mathbf{u} individua un altro insieme di spostamenti $\lambda\mathbf{u}'$.

Per linearizzare una qualunque funzione degli spostamenti basta allora sostituire $\lambda\mathbf{u}$ a \mathbf{u} nell'espressione della funzione, rendendola così funzione della variabile reale λ . È così possibile sviluppare l'espressione in serie di potenze di λ e trascurare i termini di ordine superiore al primo. Ponendo infine $\lambda = 1$ si ripristina la dipendenza dallo spostamento \mathbf{u} della funzione così semplificata.

Naturalmente, quando una funzione dipende da una quantità scalare che sia del primo ordine rispetto agli spostamenti, la quantità scalare stessa assume il ruolo di parametro rispetto al quale viene eseguito lo sviluppo in serie di potenze.

È anche evidente che tutte le volte che in un termine compare il prodotto di due o più quantità che siano almeno del primo ordine negli spostamenti, il termine stesso è trascurabile nel senso sopradetto.

Si noti infine che il gradiente degli spostamenti $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}$ è una funzione dello spostamento omogenea di grado 1 e risulta quindi dello stesso ordine dello spostamento:

$$\text{Grad}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda\mathbf{u}) &= \text{Grad}(\lambda\mathbf{u}) \Delta\mathbf{X} + o(|\Delta\mathbf{X}|), \\ \lambda(\Delta\mathbf{u}) &= \lambda \text{Grad } \mathbf{u} \Delta\mathbf{X} + o(|\Delta\mathbf{X}|), \end{aligned}$$

per ogni $\Delta\mathbf{X}$. Poiché:

$$\Delta(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - \lambda\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \lambda(\mathbf{u}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X})) = \lambda(\Delta\mathbf{u}),$$

ne risulta immediatamente la tesi. ■

3.2 Tensori di deformazione

3.2.1 Tensori di deformazione e di rotazione infinitesime

Il gradiente degli spostamenti \mathbf{H} può essere decomposto nella somma di una parte simmetrica $\boldsymbol{\epsilon}$ e di una parte emisimmetrica $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad (3.2)$$

dove:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T), \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T). \quad (3.4)$$

Le componenti di $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\omega}$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ricordando le componenti (1.14) di \mathbf{H} , risultano:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (3.5)$$

Poiché \mathbf{H} è dello stesso ordine degli spostamenti, questo è vero anche per le sue parti simmetrica e emisimmetrica. Questo implica che vale l'approssimazione lineare:

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (3.6)$$

L'azione di $\mathbf{I} + \mathbf{H}$ su un qualunque vettore materiale equivale dunque, nell'approssimazione lineare, all'applicazione successiva di $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ e di $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$ in un ordine qualunque. La (3.6) consente quindi di esprimere la relazione (1.12) tra un elemento di linea materiale $d\mathbf{X}$ e il corrispondente elemento di linea spaziale nella forma approssimata:

$$d\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{X}. \quad (3.7)$$

Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è emisimmetrico, la quantità $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ rappresenta, a meno di infinitesimi di ordine superiore negli spostamenti, una rotazione rigida dell'intorno del punto \mathbf{X} in cui $\boldsymbol{\omega}$ è calcolato (è una rotazione rigida dell'intorno di \mathbf{X} , non di tutto il corpo, poiché $\boldsymbol{\omega}$ è in generale variabile da punto a punto). Per tale motivo $\boldsymbol{\omega}$ è detto *tensore di rotazione infinitesima*,¹ dove la dizione "infinitesima" ricorda che ciò è vero solo nell'approssimazione lineare. La rotazione rigida dell'intorno può essere rappresentata da un *vettore di rotazione infinitesima* $\boldsymbol{\varphi}$ tale che:²

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{a}. \quad (3.8)$$

per ogni vettore \mathbf{a} . È immediato verificare che le relazioni tra le componenti del tensore di rotazione infinitesima e quelle del vettore di rotazione infinitesima risultano:

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varphi}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{zy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix}. \quad (3.9)$$

Si ribadisce che $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ rappresenta una rotazione dell'intorno di un punto del continuo *nell'ipotesi di piccoli spostamenti*. In generale una rotazione è rappresentata da una matrice ortogonale e non, a meno dell'identità, da una matrice emisimmetrica.

Nell'approssimazione lineare, dunque, la parte simmetrica di \mathbf{H} rappresenta tutta la deformazione dell'intorno, essendo ottenuta depurando gli spostamenti dell'intorno da un moto rigido. Inoltre, la deformazione dell'intorno di un punto è nulla se il moto dell'intorno è rigido, cioè se, nell'approssimazione lineare, \mathbf{H} è emisimmetrico e quindi se la parte simmetrica è nulla. La parte simmetrica $\boldsymbol{\epsilon}$ di \mathbf{H} rappresenta dunque tutta la deformazione nell'intorno di un punto e si annulla se e solo se l'intorno non si deforma. Per tale motivo $\boldsymbol{\epsilon}$ è chiamato *tensore di deformazione infinitesima*,³ dove ancora una volta la dizione "infinitesima" ricorda che ciò è vero solo nell'approssimazione lineare.

3.3 Dilatazione lineare e scorrimento tra due linee

Nel seguito si calcoleranno alcune misure di deformazione sfruttando il tensore $\boldsymbol{\epsilon}$ di deformazione infinitesima. Si tenga conto che al fine del calcolo delle misure di deformazione si possono depurare gli spostamenti nell'intorno di un punto della quota dovuta alla rotazione rigida e scrivere di conseguenza, in accordo alla (3.7):

$$d\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X} \quad \text{oppure} \quad d\mathbf{u} \approx \boldsymbol{\epsilon} d\mathbf{X}. \quad (3.10)$$

3.3.1 Dilatazione di una linea

Sia \mathbf{r}_0 il versore di una direzione uscente dal punto materiale \mathbf{X} di un continuo. Un elemento lineare $d\mathbf{X}_r$ uscente da \mathbf{X} ed avente la direzione e il verso di \mathbf{r}_0 può essere messo nella forma (fig. 3.2):

$$d\mathbf{X}_r = dL_r \mathbf{r}_0, \quad (3.11)$$

dove dL_r rappresenta la lunghezza dell'elemento di linea. All'elemento $d\mathbf{X}_r$ uscente da \mathbf{X} corrisponde, grazie alla (3.10), l'elemento $d\mathbf{x}_r$ uscente da \mathbf{x} tale che:

$$d\mathbf{x}_r = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}_r = dL_r (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{r}_0. \quad (3.12)$$

³Infinitesimal deformation tensor nella letteratura inglese.

¹Infinitesimal rotation tensor nella letteratura inglese.

²Ad ogni tensore emisimmetrico corrisponde un vettore soddisfacente la (3.8), detto *vettore assiale* del dato tensore (emisimmetrico). Vettore di rotazione infinitesima viene reso con *infinitesimal rotation vector* nella letteratura inglese.

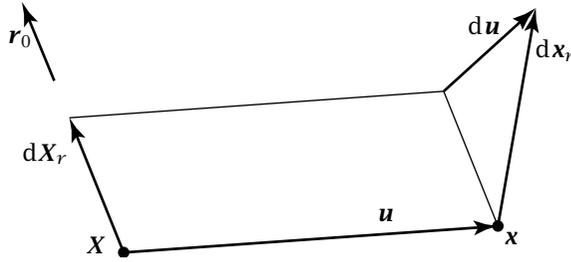


Figura 3.2: Calcolo della dilatazione lineare

Il modulo $d\ell_r$ di dx_r risulta quindi:

$$d\ell_r = \sqrt{dx_r \cdot dx_r} = dL_r \sqrt{r_0 \cdot (I + \epsilon)^2 r_0} \quad (3.13)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e quindi di piccole deformazioni, vale l'approssimazione:

$$(I + \epsilon)^2 = I + 2\epsilon + \epsilon^2 \approx I + 2\epsilon. \quad (3.14)$$

Sfruttando inoltre lo sviluppo in serie di MacLaurin:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

la (3.13) permette di scrivere allora:

$$d\ell_r \approx dL_r \sqrt{1 + 2r_0 \cdot \epsilon r_0} \approx dL_r (1 + r_0 \cdot \epsilon r_0). \quad (3.16)$$

Ricordando che per definizione la dilatazione lineare ϵ_r della linea uscente da X e avente la direzione di r_0 vale:

$$\epsilon_r = \frac{d\ell_r - dL_r}{dL_r}, \quad (3.17)$$

inserendo la (3.16) nella (3.17) si ottiene infine:

$$\epsilon_r \approx r_0 \cdot \epsilon r_0. \quad (3.18)$$

3.3.2 Scorrimento di due linee inizialmente ortogonali

Siano r_0 e s_0 i versori di due direzioni uscenti dal punto materiale X di un continuo e ortogonali tra loro (fig. 3.3), quindi tali che:

$$r_0 \cdot s_0 = 0. \quad (3.19)$$

Due elementi lineari dX_r ed dX_s uscenti da X ed aventi le direzioni ei

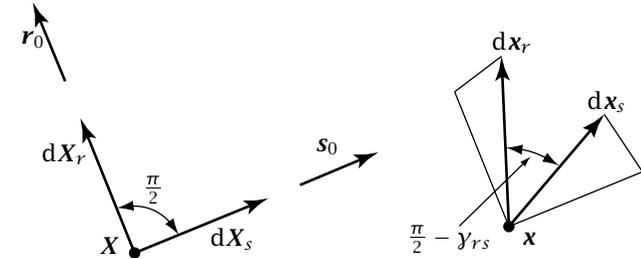


Figura 3.3: Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali

versi di r_0 e s_0 possono essere messi nella forma:

$$dX_r = dL_r r_0, \quad dX_s = dL_s s_0, \quad (3.20)$$

dove dL_r e dL_s sono i moduli dei due elementi di linea. Gli elementi lineari dx_r e dx_s corrispondenti nella deformazione ai due elementi di linea materiali dX_r e dX_s valgono:

$$dx_r = (I + \epsilon) dX_r = dL_r (I + \epsilon) r_0, \quad (3.21a)$$

$$dx_s = (I + \epsilon) dX_s = dL_s (I + \epsilon) s_0, \quad (3.21b)$$

avendo ancora una volta depurato, in accordo alla (3.10), il contributo dovuto alla rotazione rigida dell'intorno. Se γ_{rs} rappresenta lo scorrimento tra gli elementi di linea dX_r e dX_s inizialmente ortogonali, l'angolo tra gli elementi spaziali dx_r e dx_s vale $\pi/2 - \gamma_{rs}$ e quindi risulta:

$$\sin \gamma_{rs} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{rs} \right) = \frac{dx_r \cdot dx_s}{d\ell_r d\ell_s}, \quad (3.22)$$

dove $d\ell_r$ e $d\ell_s$ sono i moduli di dx_r e dx_s rispettivamente. Si tenga ora conto che tra le lunghezze $d\ell_r$ e $d\ell_s$ degli elementi di linea spaziali e

quelle dL_r e dL_s degli elementi di linea materiali valgono le relazioni seguenti:

$$d\ell_r = (1 + \epsilon_r) dL_r, \quad d\ell_s = (1 + \epsilon_s) dL_s, \quad (3.23)$$

dove ϵ_r e ϵ_s sono le dilatazioni degli elementi di linea dX_r e dX_s rispettivamente. Inserendo nella (3.22) le relazioni (3.21) e (3.23) e tenendo conto che $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$ è un tensore simmetrico si ottiene allora:

$$\gamma_{rs} = \arcsin \frac{\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 \mathbf{s}_0}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}. \quad (3.24)$$

Poiché $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{I} \mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$, avendo sfruttato la relazione di ortogonalità (3.19), ed utilizzando l'approssimazione (3.14) dalla (3.24) si ottiene:

$$\gamma_{rs} \approx \arcsin \frac{2(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0)}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}. \quad (3.25)$$

Tenendo poi conto del seguente sviluppo in serie di MacLaurin:

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.26)$$

risulta, nell'approssimazione lineare:

$$(1 + \epsilon_r)^{-1}(1 + \epsilon_s)^{-1} \approx 1 - \epsilon_r - \epsilon_s. \quad (3.27)$$

La (3.25), sfruttando l'approssimazione (3.27) e lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione arcsin:

$$\arcsin x = x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.28)$$

fornisce infine il risultato cercato:

$$\gamma_{rs} \approx 2(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0). \quad (3.29)$$

3.3.3 Significato fisico delle componenti del tensore di deformazione

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e siano \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z i versori degli assi cartesiani. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, tenendo quindi conto della relazione (3.18), le dilatazioni delle linee uscenti da un punto materiale X del continuo e parallele agli assi coordinati valgono:

$$\epsilon_x \approx \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_x, \quad \epsilon_y \approx \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_y, \quad \epsilon_z \approx \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z. \quad (3.30)$$

se $\boldsymbol{\epsilon}$ è il tensore di deformazione infinitesima nell'intorno del punto X . Analogamente, gli scorrimenti delle stesse linee, ricordando la relazione (3.29), risultano:

$$\begin{aligned} \gamma_{zy} &= \gamma_{yz} \approx 2(\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_y), \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} \approx 2(\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z), \\ \gamma_{yx} &= \gamma_{xy} \approx 2(\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_x). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dalle (3.30) e (3.31) consegue quindi la seguente rappresentazione del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\epsilon}$ nel dato sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, valida nell'ipotesi di piccoli spostamenti:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] \approx \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

3.4 Scorrimento tra una linea ed una superficie

Siano date, nella configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento di un corpo, una linea L ed una superficie \mathcal{S}_0 inizialmente ortogonali, e sia X il loro punto di intersezione (fig. 3.4). Si orientino sia la linea, scegliendo il verso-

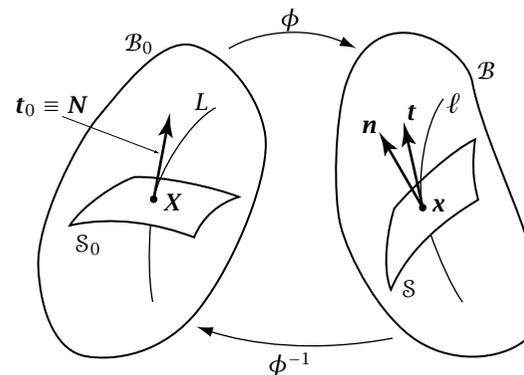


Figura 3.4: Scorrimento tra una linea ed una superficie

re \mathbf{t}_0 tangente alla linea L nel punto X , che la superficie, scegliendo il

versore N ortogonale alla superficie S_0 nel punto X , in modo tale che i due versori siano equiversi. Dopo la deformazione il versore t tangente nel punto spaziale x alla linea deformata ℓ , non è più, in generale, ortogonale alla superficie S deformata. Siano π il piano tangente in x alla superficie spaziale S e π_0 il piano tangente in X alla superficie materiale S_0 (fig. 3.5). Siano poi s il versore della retta orientata individuata dalla proiezione sul piano π della tangente alla linea ℓ , r uno dei due versori della retta appartenente al piano π ed ortogonale ad s ed infine γ l'angolo tra la tangente alla linea ℓ e la normale alla superficie S . Poiché la direzione del versore s è individuata dalla proiezione del versore tangente t , i versori n , t ed s stanno su un piano ed r è ortogonale a tale piano. Di conseguenza γ rappresenta lo scorrimento tra la linea materiale L e una qualunque linea di S_0 che dopo la deformazione ha s quale versore tangente, mentre lo scorrimento tra la linea materiale L e una qualunque linea che nella configurazione deformata ha per tangente r è nullo. Si vuole ora individuare il valore dello scorrimento, rispetto alla linea L , di una linea generica di S_0 .

Sia allora v il versore di una generica retta di π . Se una linea di S_0 si deforma in una linea di tangente v allora lo scorrimento γ_v tra tale linea e la linea L soddisfa la relazione:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_v &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_v \right) = \cos \widehat{tv} = t \cdot v = \\ &= t \cdot \{ (v \cdot s)s + (v \cdot r)r \} = (v \cdot s)(t \cdot s) = (\sin \gamma s) \cdot v, \end{aligned} \tag{3.33}$$

poiché $\sin \gamma = t \cdot s$.

In definitiva, posto:

$$\boldsymbol{\gamma} = \sin \gamma s, \tag{3.34}$$

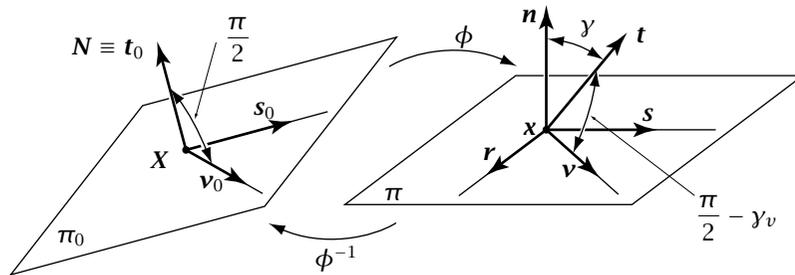


Figura 3.5: Particolare del piano tangente in x a S

risulta:

$$\sin \gamma_v = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.35}$$

Il vettore $\boldsymbol{\gamma}$, definito dalla (3.34), assume quindi il significato di *scorrimento* tra la linea L e la superficie S_0 , rappresentando, attraverso la dipendenza lineare (3.35) dal versore v , gli scorrimenti tra la linea L ed una qualunque linea appartenente ad S_0 . La relazione (3.35) implica che tali scorrimenti sono compresi tra 0 e γ .

Sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, le differenze $s - s_0$ e $v - v_0$, così come gli scorrimenti γ e γ_v , sono quantità piccole. Si può allora porre:

$$\sin \gamma \approx \gamma, \quad \sin \gamma_v \approx \gamma_v, \quad s \approx s_0, \quad v \approx v_0, \tag{3.36}$$

e quindi riferire alla configurazione di riferimento lo scorrimento tra una linea e una superficie inizialmente ortogonali:

$$\boldsymbol{\gamma} \approx \gamma s_0, \quad \gamma_v \approx \boldsymbol{\gamma} \cdot v_0. \tag{3.37}$$

3.4.1 Vettore di deformazione

Il tensore di deformazione infinitesimo ϵ trasforma il versore r_0 di una qualunque linea r_0 uscente dal punto nel vettore ϵr_0 detto *vettore di deformazione* (fig. 3.6).

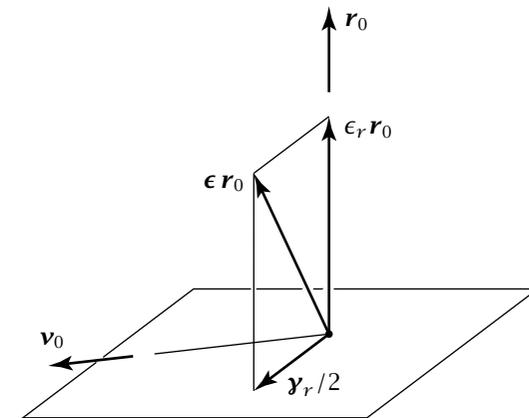


Figura 3.6: Vettore di deformazione

Dato che la dilatazione ϵ_r della linea r_0 vale $r_0 \cdot \epsilon r_0$, ne risulta che il vettore $\epsilon_r r_0$ rappresenta la proiezione del vettore di deformazione sulla

linea r_0 (fig. 3.6). La differenza $\epsilon r_0 - \epsilon_r r_0$ tra il vettore di deformazione e la sua proiezione sulla linea r_0 coincide con la proiezione del vettore di deformazione sul piano perpendicolare a r_0 . Detto v_0 un generico vettore ortogonale a r_0 , risulta:

$$(\epsilon r_0 - \epsilon_r r_0) \cdot v_0 = v_0 \cdot \epsilon r_0 = \frac{1}{2} \gamma_{vr}, \quad (3.38)$$

dato che $r_0 \cdot v_0 = 0$. Il vettore :

$$\gamma_r = 2(\epsilon r_0 - \epsilon_r r_0), \quad (3.39)$$

coincide quindi con lo scorrimento tra la linea r_0 e il piano ortogonale a r_0 . Se x e y sono due assi ortogonali giacenti in tale piano si ha infine:

$$\gamma_r = \gamma_{xr} e_x + \gamma_{yr} e_y. \quad (3.40)$$

3.5 Coefficiente di dilatazione cubica

Per valutare la variazione di volume nell'intorno di un punto materiale X si consideri in tale intorno un cubo elementare di lati di lunghezza dL e paralleli agli assi coordinati di un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$ (fig. 3.7). Il volume dV_0 del cubo indeformato vale quindi:

$$dV_0 = dL^3 \quad (3.41)$$

Sempre con riferimento alla fig. 3.7, dove gli assi \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} indicano le di-

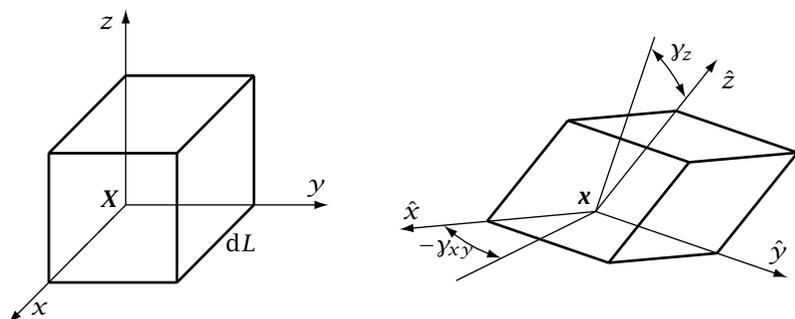


Figura 3.7: Coefficiente di dilatazione cubica

rezioni uscenti dal punto spaziale x corrispondenti nella deformazione alle direzioni degli assi x , y e z uscenti dal punto materiale X , il volume dV del cubo deformato vale:

$$dV = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) \cos \gamma_{xy} \cos \gamma_z dL^3, \quad (3.42)$$

dove γ_{xy} è lo scorrimento tra gli assi x e y mentre γ_z è il modulo dello scorrimento tra l'asse z e il piano xy . Nell'ipotesi di piccoli spostamenti la (3.42) diventa:

$$dV \approx (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dL^3, \quad (3.43)$$

avendo tenuto conto che in tale ipotesi risulta $\cos \gamma_{xy} \approx 1$ e $\cos \gamma_z \approx 1$. Sfruttando i valori dei volumi deformato e indeformato fornito dalle (3.41) e (3.42) si ottiene il valore, nell'approssimazione lineare, del coefficiente di dilatazione cubica:

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (3.44)$$

La rappresentazione (3.32) del tensore ϵ di deformazione infinitesima permette di identificare il coefficiente di dilatazione cubica con la somma degli elementi diagonali di tale rappresentazione. La somma degli elementi diagonali della rappresentazione cartesiana ortogonale di un tensore doppio \mathbf{A} , che, come sarà mostrato più avanti, non dipende dal riferimento, viene detta *traccia* di \mathbf{A} e indicata con $\text{tr } \mathbf{A}$. Risulta quindi:

$$\theta \approx \text{tr } \epsilon. \quad (3.45)$$

Gli elementi diagonali della rappresentazione cartesiana ortogonale del tensore ω di rotazione infinitesima sono nulli, essendo il tensore emisimmetrico. Risulta quindi nulla anche la traccia di ω e si ha quindi:

$$\text{tr } \epsilon = \text{tr} (\text{Grad } \mathbf{u} - \omega) = \text{tr } \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (3.46)$$

La rappresentazione (1.15) del gradiente materiale degli spostamenti e la definizione di *divergenza* di un vettore⁴ permettono di porre la (3.45) nella forma:

$$\theta \approx \text{Div } \mathbf{u}. \quad (3.48)$$

⁴La rappresentazione cartesiana ortogonale della divergenza di un vettore generico \mathbf{a} funzione del punto materiale, e quindi delle sue coordinate materiali X, Y e Z , risulta:

$$\text{Div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial X} + \frac{\partial a_y}{\partial Y} + \frac{\partial a_z}{\partial Z}, \quad (3.47)$$

dove l'iniziale maiuscola dell'operatore di divergenza ricorda che le operazioni differenziali vanno eseguite nella configurazione di riferimento.

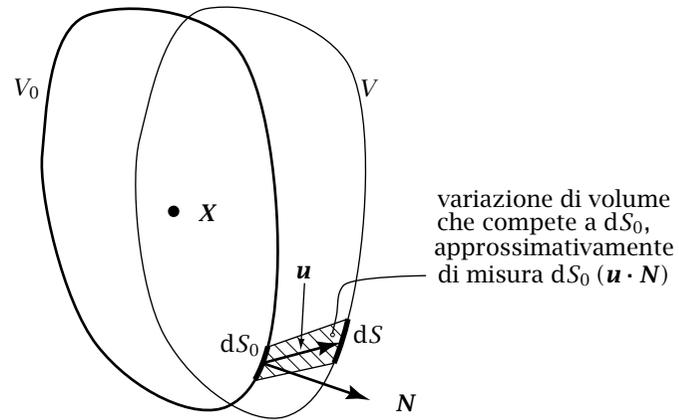


Figura 3.8: Flusso degli spostamenti

Per ottenere quest'ultima formula, si può anche considerare un volume V_0 (fig. 3.8) contenente il punto materiale X in corrispondenza del quale si vuole calcolare la dilatazione cubica e tenere conto che la variazione del volume uguaglia, a meno di termini di ordine superiore negli spostamenti, il flusso sul contorno ∂V_0 del volume degli stessi spostamenti:

$$V - V_0 \approx \int_{\partial V_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS_0. \quad (3.49)$$

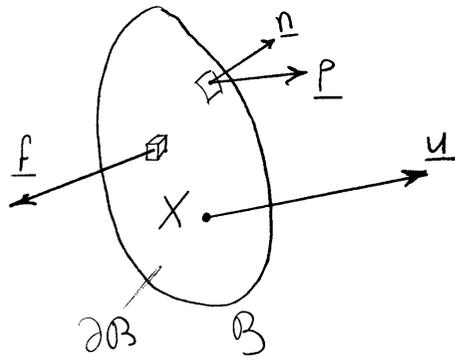
Risulta allora:

$$\theta \approx \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{\int_{\partial V_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS_0}{V_0} = \text{Div } \mathbf{u}. \quad (3.50)$$

Capitolo 4

Principio dei lavori virtuali

Siano \underline{f} , \underline{p} , $\underline{\sigma}$ un sistema di forze di volume, di forze superficiali e di tensioni interne equilibrate, relative alla configurazione B di un corpo continuo. Affinché il sistema sia equilibrato devono essere soddisfatte l'equazione indefinita di equilibrio nel volume e la condizione di equilibrio al contorno sulla superficie



del solido:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0}, & \text{in } B, \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{p}, & \text{su } \partial B, \end{cases}$$

dove \underline{n} rappresenta la normale al contorno.

Sia poi \underline{u} un campo continuo di spostamenti virtuali dei punti di B , indipendente dal sistema delle forze precedentemente assegnato, e sia $\underline{\varepsilon}$ il campo delle deformazioni linearizzato associato ad \underline{u} :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T \}.$$

Vogliamo mostrare che vale l'uguaglianza:

$$\int_{\partial B} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS + \int_B \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV = \int_B \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \, dV.$$

Questa uguaglianza costituisce il principio dei lavori virtuali. Il primo membro dell'uguaglianza rappresenta il lavoro virtuale delle forze esterne:

$$L_{ve} = \int_{\partial B} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS + \int_B \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV.$$

Il secondo membro viene chiamato lavoro virtuale interno, poiché, in virtù di tale uguaglianza, rappresenta il lavoro espresso in termini di caratteristiche interne del solido:

$$L_{vi} = \int_B \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \, dV.$$

In tale espressione, $\underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}$ rappresenta il prodotto scalare di due tensori, che non sono altro che vettori con nove componenti:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} &= \sum_{ij} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zy} \delta_{zy} + \tau_{xz} \delta_{xz} + \tau_{yx} \delta_{yx}. \end{aligned}$$

Risulta anche:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \text{tr}(\underline{\sigma} \underline{\varepsilon}),$$

e questo assicura che $\underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}$ è invariante al variare del sistema di riferimento. In generale, per tensori non simmetrici, risulta:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \text{tr}(\underline{A} \underline{B}^T).$$

Con le convenzioni introdotte, il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$L_{ve} = L_{vi}.$$

Vediamo la dimostrazione di tale uguaglianza.

Innanzitutto, occorre trasformare l'integrale di superficie utilizzando l'equazione di equilibrio al contorno e il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS &= \int_{\partial\mathcal{B}} \underline{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{u} \, dS = \int_{\partial\mathcal{B}} \underline{\sigma}^T \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\underline{\sigma}^T \underline{u}) \, dV. \end{aligned}$$

Risulta in generale:

$$\operatorname{div}(\underline{A}^T \cdot \underline{a}) = (\operatorname{div} \underline{A}) \cdot \underline{a} + \underline{A} \cdot \operatorname{grad} \underline{a},$$

dove \underline{A} è un qualunque campo tensoriale in generale non simmetrico e \underline{a} è un qualunque campo vettoriale. Infatti:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{A}^T \cdot \underline{a}) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{A}^T \cdot \underline{a})_i = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ji} a_j) \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i} a_j + \sum_{ij} A_{ji} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_j (\operatorname{div} \underline{A})_j a_j + \sum_{ij} A_{ji} (\operatorname{grad} \underline{a})_{ji}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \underline{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \underline{u} \, dV,$$

Inoltre:

$$\underline{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \underline{u} = \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega} + \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon},$$

poiché, in virtù della simmetria di $\underline{\sigma}$ e della emisimmetria di $\underline{\omega}$:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega} &= \sum_{ij} \sigma_{ij} \omega_{ij} = \sum_{ij} \sigma_{ji} (-\omega_{ji}) \\ &= - \sum_{ij} \sigma_{ji} \omega_{ji} = - \underline{\sigma} \cdot \underline{\omega}, \end{aligned}$$

e dunque $\underline{\sigma} \cdot \underline{\omega} = 0$.

In definitiva:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \underline{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \, dV,$$

e quindi:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f}) \cdot \underline{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \, dV.$$

In virtù dell'equazione indefinita di equilibrio ne segue immediatamente il principio dei lavori virtuali.

Si noti che il principio dei lavori virtuali testé dimostrato non è ristretto all'ipotesi di piccoli spostamenti, poiché tale ipotesi non è stata utilizzata nella dimostrazione. Si noti comunque che la configurazione \mathcal{B} è quella nella quale le forze e le tensioni sono equilibrate e quella in cui è definito il campo di spostamenti virtuale. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la configurazione \mathcal{B} del corpo può essere fatta coincidere con la configurazione indeformata di riferimento \mathcal{B}_0 , che diventa quindi la configurazione nella quale si eseguono gli integrali definiti i lavori virtuali:

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV_0.$$

Inoltre, un campo di spostamenti reale, cioè conseguente all'applicazione sul corpo di certe forze, può essere assunto quale campo di spostamenti virtuali congruenti, poiché nel caso di piccoli spostamenti tale campo deve soddisfare, come un campo di spostamenti virtuali, le equazioni di congruenza linearizzate.

Capitolo 5

Direzioni principali di tensione e di deformazione

Applicando un tensore doppio ad un vettore qualunque si ottiene in generale un vettore avente direzione diversa da quella del vettore originale. Se sotto l'azione di un tensore \mathbf{A} la direzione di un dato vettore \mathbf{v} resta invariata, si dice che tale direzione è una *direzione principale* di \mathbf{A} , che un asse avente la direzione di \mathbf{v} è un *asse principale* di \mathbf{A} ed infine che \mathbf{v} è un *autovettore* di \mathbf{A} . Se \mathbf{v} è un autovettore di \mathbf{A} deve dunque risultare:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (5.1)$$

e lo scalare λ è detto *autovalore* di \mathbf{A} .

Ad un dato autovalore λ di un tensore doppio \mathbf{A} corrispondono infiniti autovettori. Infatti se \mathbf{v} è un autovettore corrispondente a λ , allora anche $\alpha\mathbf{v}$, con α generico scalare, è un autovettore corrispondente a λ :

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}). \quad (5.2)$$

L'insieme degli autovettori corrispondenti ad un dato autovalore di un tensore doppio costituiscono inoltre un sottospazio di \mathcal{V} . Infatti la (5.2) mostra che moltiplicando un autovettore per uno scalare si ottiene ancora un autovettore corrispondente allo stesso autovalore. Inoltre la stessa cosa succede se si sommano due autovettori \mathbf{u} e \mathbf{v} corrispondenti allo stesso autovalore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

L'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti ad un dato autovalore λ di un tensore doppio è detto *autospatio* di \mathbf{A} , mentre l'insieme di tutti gli autovalori di un tensore doppio \mathbf{A} è detto *spettro* di \mathbf{A} . L'autospatio di \mathbf{A} associato ad un dato autovalore λ è una retta, un piano o l'intero spazio a seconda che a λ siano associati solo autovettori linearmente

dipendenti, oppure almeno e non più di due autovettori linearmente indipendenti, o infine tre autovettori linearmente indipendenti.

I versori delle direzioni principali sono, per quanto visto, degli autovettori e vengono detti *autoversori*. Se \mathbf{v} è un autovettore di \mathbf{A} , l'autoversore \mathbf{e}_v equiverso a \mathbf{v} vale:

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}. \quad (5.3)$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} la relazione (5.1) e risolvendo in λ si ottiene il significato dell'autovalore:

$$\lambda = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_v. \quad (5.4)$$

Tenendo presente la definizione delle componenti di un tensore doppio, la (5.4) afferma che in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente un asse principale tra gli assi coordinati, la componente nella posizione diagonale corrispondente a tale asse coincide con l'associato autovalore.

Nel caso del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, l'equazione (5.1) determinatrice degli autovalori ed autoversori si scrive:

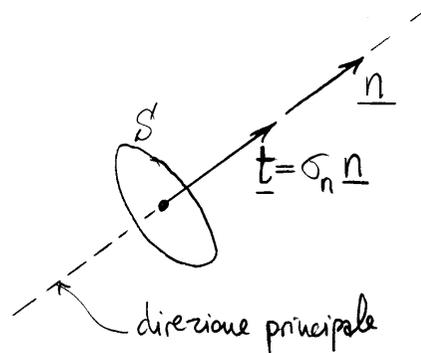
$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}, \quad (5.5)$$

dove \mathbf{n} rappresenta il versore normale di un elemento di superficie nell'intorno del punto in corrispondenza del quale la tensione interna è individuata da $\boldsymbol{\sigma}$. Poiché $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ rappresenta la tensione agente nell'elemento di superficie di normale \mathbf{n} , è

evidente il significato fisico delle direzioni principali di tensione: su un elemento di superficie di normale una direzione principale, la tensione è normale alla superficie stessa e sono quindi nulle le tensioni tangenziali. La tensione normale vale invece:

$$\underline{\sigma}_n = \underline{n} \cdot (\underline{\sigma} \underline{n}).$$

Dunque, un autovalore λ rappresenta la tensione normale, che coincide con la tensione totale, agente su un elemento di superficie normale



alla direzione principale associata a λ . Per questo motivo gli autovalori del tensore degli sforzi sono anche detti tensioni principali.

Le direzioni principali di deformazione si ottengono invece risolvendo il problema agli autovalori e autovettori associato a $\underline{\epsilon}$:

$$\underline{\epsilon} \underline{t}_0 = \lambda \underline{t}_0.$$

Si ricorda che la dilatazione di una linea t_0 di versore \underline{t}_0 vale:

$$\epsilon_t = \underline{t}_0 \cdot \underline{\epsilon} \underline{t}_0.$$

Ne consegue che un autovalore rappresenta la dilatazione della linea uscente dal punto individuata dall'autovettore associato e per tale motivo gli autovalori del tensore di deformazione sono anche detti *dilatazioni principali*. Se t_0 è una direzione principale di $\underline{\epsilon}$ allora risulta nullo lo scorrimento $\underline{\gamma}_t$ di tale linea con il piano perpendicolare:

$$\underline{\gamma}_t = 2(\underline{\epsilon} \underline{t}_0 - \epsilon_t \underline{t}_0) = \underline{0},$$

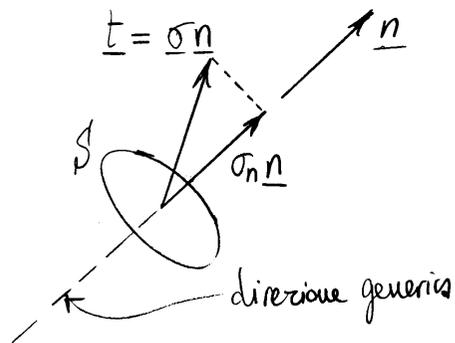
poiché ϵ_t rappresenta l'autovalore associato alla direzione t_0 .

Ne risulta che una direzione principale può subire una dilatazione (salvo che l'autovalore non sia nullo), ma non degli scorrimenti con le rette del piano perpendicolare alla stessa direzione principale.

5.1 Proprietà di estremo

La componente normale di tensione σ_n , agente su una giacitura generica di normale \underline{n} , può essere vista come funzione scalare del versore \underline{n} :

$$\sigma_n = \underline{n} \cdot (\underline{\sigma} \underline{n}).$$



Analogamente, la dilatazione ϵ_t di una generica linea di direzione t_0 può essere interpretata come funzione scalare del

versore t_0 :

$$\epsilon_t = t_0 \cdot \epsilon t_0.$$

Ci interessa determinare i minimi e i massimi di tali funzioni, cioè di σ_n e ϵ_t al variare dei versori normali \underline{n} e tangenti t_0 rispettivamente. A tal fine si consideri un generico tensore \mathbf{A} simmetrico e la funzione scalare:

$$f(\underline{e}) = \underline{e} \cdot \mathbf{A} \underline{e}$$

Il minimo e il massimo di tale funzione coincidono con due valori stazionari, poiché la funzione f è continua sull'insieme di definizione (coincidente con l'insieme dei versori) privo di frontiera e limitato. Vediamo di determinare i valori stazionari. Per fare ciò si consideri l'estensione della funzione f all'insieme \mathcal{V} dei vettori:

$$f(\underline{v}) = \underline{v} \cdot \mathbf{A} \underline{v} \quad .$$

Cercare i valori stazionari di $f(\underline{e})$ equivale a cercare i valori stazionari di $f(\underline{v})$ sotto il vincolo $\underline{v} \cdot \underline{v} = 1$, e questo equivale a cercare i valori stazionari della seguente funzione non vincolata:

$$l(\underline{v}, \lambda) = \underline{v} \cdot \underline{A} \underline{v} - \lambda (\underline{v} \cdot \underline{v} - 1),$$

dove, come noto, λ rappresenta il moltiplicatore di Lagrange. Derivando rispetto a λ ed uguagliando a zero si riottiene il vincolo. Il gradiente di l rispetto a \underline{v} vale invece:

$$\text{grad } l = 2(\underline{A} \underline{v} - \lambda \underline{v}).$$

Infatti l'incremento Δl di l dovuto ad un incremento $\Delta \underline{v}$ di \underline{v} vale:

$$\begin{aligned} \Delta l &= (\underline{v} + \Delta \underline{v}) \cdot \underline{A} (\underline{v} + \Delta \underline{v}) - \lambda \{ (\underline{v} + \Delta \underline{v}) \cdot (\underline{v} + \Delta \underline{v}) - 1 \} \\ &\quad - \underline{v} \cdot \underline{A} \underline{v} + \lambda (\underline{v} \cdot \underline{v} - 1) = 2(\underline{A} \underline{v} - \lambda \underline{v}) \cdot \Delta \underline{v} + o(\Delta \underline{v}). \end{aligned}$$

Ponendo $\text{grad } l = 0$ si riottiene l'equazione definente il problema degli autovalori ed autovettori.

Ne risulta che il massimo ed il minimo valore principale di tensione rappresentano rispettivamente il massimo e il minimo fra tutte le componenti normali di tensione (nell'intorno di un punto).

Analogamente, la massima e la minima dilatazione nel fascio di sostegno un punto coincidono con il massimo e il minimo tra i valori delle dilatazioni principali.

5.2 Proprietà di ortogonalità

Vogliamo ora mostrare che due autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali fra loro, sotto l'ipotesi di simmetria del tensore doppio (come nel caso dei tensori degli sforzi e di deformazione).

Sia dunque:

$$\underline{A} \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 \quad \text{e} \quad \underline{A} \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2 .$$

Vogliamo mostrare che, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora:

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \underline{0} .$$

Infatti, per l'ipotesi di simmetria di \underline{A} , risulta:

$$\underline{v}_1 \cdot (\underline{A} \underline{v}_2) = (\underline{A}^T \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_2 = (\underline{A} \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_2 ,$$

e dunque:

$$\lambda_2 (\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2) = \lambda_1 (\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2) ,$$

ed anche:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0 .$$

Per ipotesi $\lambda_2 \neq \lambda_1$, quindi $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$.

5.3 Sottospazio ortogonale ad una direzione principale

Una ulteriore proprietà delle direzioni principali dei tensori doppi simmetrici è che i vettori \underline{u} ortogonali ad una direzione principale \underline{v} si trasformano in vettori ancora ortogonali alla data direzione principale:

$$\underline{A} \underline{u} \cdot \underline{v} = 0. \quad (1)$$

In altri termini i vettori del piano (sottospazio) ortogonale alla direzione principale data sono trasformati in vettori ancora appartenenti al piano (sottospazio) ortogonale.

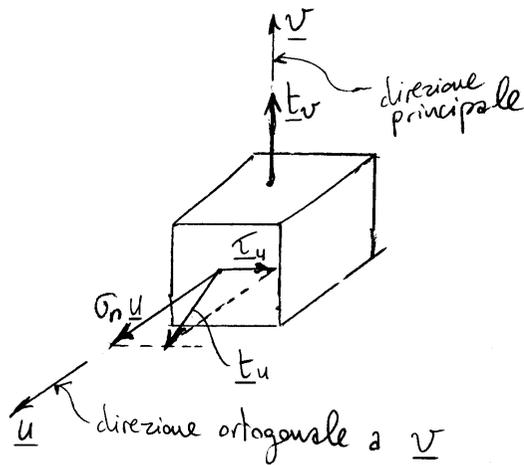
Dimostrazione. Infatti, se \underline{v} è un autovettore di \underline{A} di autovalore λ e \underline{u} è un vettore ortogonale a \underline{v} , risulta:

$$\underline{A} \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{A} \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v}) = 0,$$

come volevasi dimostrare. ■

Nel caso del tensore degli sforzi, $(\underline{\sigma} \underline{u}) \cdot \underline{v}$, con \underline{u} e \underline{v} versori, rappresenta la tensione tangenziale $\tau_{\underline{u}\underline{v}}$, agente sulla giacitura di normale \underline{u} in direzione \underline{v} . Che questa componente sia nulla è in accordo con il teorema di reciprocità

delle tensioni tangenziali, che riduce a tale campo di uguagliare la tensione tangenziale τ_{uv} agente sulla giacitura di normale \underline{v} in direzione \underline{u} , e poiché \underline{v} è direzione principale, sulla giacitura di normale \underline{v} la tensione tangenziale è nulla. Quindi, su tutte le giaciture di sostegno una direzione principale, la tensione risulta ortogonale alla direzione principale.



Nel caso del tensore di deformazione, la (1) rappresenta metà dello scorrimento γ_{uv} tra le linee u e v , scorrimento che deve essere nullo in accordo con il fatto che lo scorrimento γ_v tra la direzione principale v e il piano ortogonale è nullo. Il vettore ϵu è dunque perpendicolare alla direzione principale.

5.4 Calcolo delle direzioni principali

Al fine del calcolo degli autovalori del tensore degli sforzi, l'equazione definitrice può essere posta nella forma:

$$(\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}) \underline{n} = \underline{0} .$$

In componenti, tale equazione rappresenta un sistema omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite. Tale sistema ammette soluzioni $\underline{n} \neq \underline{0}$ se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

e in tal caso le soluzioni sono almeno ∞^1 .

Sviluppando il determinante si ottiene una equazione cubica in λ , detta equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - \sigma_{\text{I}} \lambda^2 + \sigma_{\text{II}} \lambda - \sigma_{\text{III}} = 0,$$

dove:

$$\sigma_{\text{I}} = \text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\sigma_{\text{II}} = (\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2) + (\sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2) + (\sigma_y \sigma_x - \tau_{yx}^2),$$

$$\sigma_{\text{III}} = \det \underline{\sigma}$$

Gli autovalori λ sono soluzioni di un problema indipendente dalle componenti del tensore degli sforzi

e tali devono dunque risultare i coefficienti dell'equazione caratteristica, che per tale motivo sono detti invarianti (lineare, quadratica e cubica rispettivamente) di tensione.

Nel caso del tensore di deformazione $\underline{\varepsilon}$ l'equazione caratteristica risulta:

$$\lambda^3 - \varepsilon_{\text{I}} \lambda^2 + \varepsilon_{\text{II}} \lambda - \varepsilon_{\text{III}} = 0,$$

dove:

$$\varepsilon_{\text{I}} = \text{tr } \underline{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$\varepsilon_{\text{II}} = \left(\varepsilon_z \varepsilon_y - \frac{\gamma_{zy}^2}{4} \right) + \left(\varepsilon_x \varepsilon_z - \frac{\gamma_{xz}^2}{4} \right) + \left(\varepsilon_y \varepsilon_x - \frac{\gamma_{yx}^2}{4} \right),$$

$$\varepsilon_{\text{III}} = \det \underline{\varepsilon},$$

sono gli invarianti di deformazione.

Una volta risolta l'equazione caratteristica e noti quindi i valori principali di tensione (o di deformazione), basta sostituire tali valori nell'equazione definitrice per calcolare gli associati autovettori.

La simmetria dei tensori degli sforzi e di deformazione assicura che l'equazione caratteristica ammette tre soluzioni reali. D'altronde, dato che l'equazione caratteristica è cubica, questa ammette senz'altro una soluzione reale, alla quale resta associata almeno una direzione principale. È dunque possibile scegliere un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente uno degli assi, per es. il terzo, lungo tale direzione

principale. Detto $OxyZ$ tale sistema di riferimento, le componenti dei tensori degli sforzi e di deformazione risultano:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

L'equazione caratteristica del tensore degli sforzi assume la forma:

$$\det(\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}) = (\sigma_z - \lambda) \left\{ (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}^2 \right\} = 0.$$

Si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\lambda + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0,$$

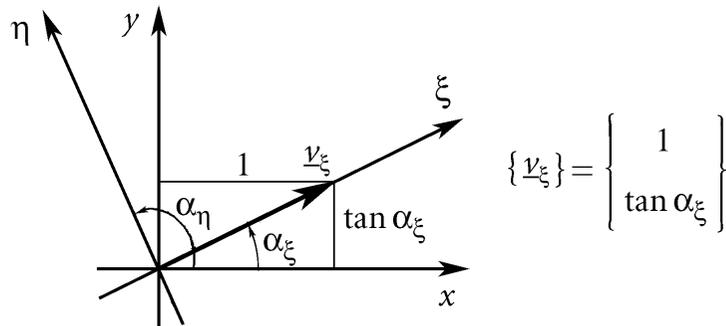
che ammette due soluzioni reali, avendo determinante non negativo:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Analogamente, i valori principali di deformazione risultano:

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}.$$

Autovettore associato a σ_{ξ} :



$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\xi} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tan \alpha_{\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Sviluppando la prima riga si ottiene l'equazione:

$$\sigma_x - \sigma_{\xi} + \tau_{xy} \tan \alpha_{\xi} = 0,$$

e infine:

$$\tan \alpha_{\xi} = \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_x}{\tau_{xy}}.$$

Analogamente si ottiene:

$$\tan \alpha_{\eta} = \frac{\sigma_{\eta} - \sigma_x}{\tau_{xy}}.$$

Procedendo allo stesso modo si ottengono le direzioni principali di deformazione:

$$\tan \alpha_{\xi} = 2 \frac{\varepsilon_{\xi} - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}}, \quad \tan \alpha_{\eta} = 2 \frac{\varepsilon_{\eta} - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}}.$$

5.5 Casi particolari

Analizziamo ora i diversi casi che si possono presentare, con riferimento al tensore degli sforzi.

5.5.1 Autovalori tutti distinti

Si supponga che gli autovalori σ_{ξ} , σ_{η} e σ_{ζ} di $\underline{\sigma}$ siano tutti distinti. Poiché gli autovettori associati ad un dato autovalore devono essere ortogonali a quelli associati agli altri due autovalori, ne risulta che esistono solo tre direzioni principali ξ , η e ζ , associate agli autovalori σ_{ξ} , σ_{η} e σ_{ζ} rispettivamente, ortogonali fra loro. È dunque possibile assumere, in modo unico, un riferimento cartesiano ortogonale principale $O\xi\eta\zeta$, rispetto al quale $\underline{\sigma}$ si rappresenta in forma diagonale:

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\zeta} \end{bmatrix} .$$

5.5.2 Un autovalore doppio e uno semplice

Siano per es. σ_{ζ} la radice semplice e σ_{ξ} la radice doppia.

Questo è possibile se e solo se il determinante dell'equazione di secondo grado definita da σ_x e τ_{xy} nel sistema di riferimento $Oxy\zeta$ è nullo:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 0 .$$

Quindi deve essere:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{\xi} \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = 0 .$$

Poiché x e y sono assi ortogonali all'asse ζ , ma per il resto generici, l'annullarsi di τ_{xy}

significa che tutte le direzioni del piano ortogonale all'asse ζ sono direzioni principali associate alla radice doppia σ_ζ . Le direzioni associate alla radice semplice σ_ζ devono inoltre essere ortogonali a tutte le direzioni associate a σ_ζ . Questo

significa che a σ_ζ è associata una e una sola direzione principale. Un qualunque sistema di riferimento $Oxy\zeta$ che abbia ζ fra gli assi coordinati rappresenta un riferimento principale nel quale il tensore degli sforzi si rappresenta in forma diagonale:

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\zeta \end{bmatrix} .$$

5.5.3 Un autovalore triplo

Sia σ_ζ la radice tripla. Detta ξ una direzione principale associata, ne risulta, come prima, che $\underline{\sigma}$ si rappresenta, in un sistema generico $Oxy\zeta$, nella forma:

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\zeta \end{bmatrix} ,$$

con la differenza che ora anche il terzo valore diagonale è uguale agli altri due valori. Ne risulta che $\underline{\sigma}$ è proporzionale al tensore identità:

$$\underline{\sigma} = \sigma_\zeta \underline{I} .$$

Un tensore così fatto viene detto tensore sferico oppure tensore isotropo, poiché per esso tutte

le direzioni dello spazio sono principali:

$$\underline{\sigma} \underline{v} = \underline{\sigma}_3 \underline{I} \underline{v} = \underline{\sigma}_3 \underline{v} \quad \text{per ogni } \underline{v}.$$

5.5.4 Sistema di riferimento principale e linee isostatiche

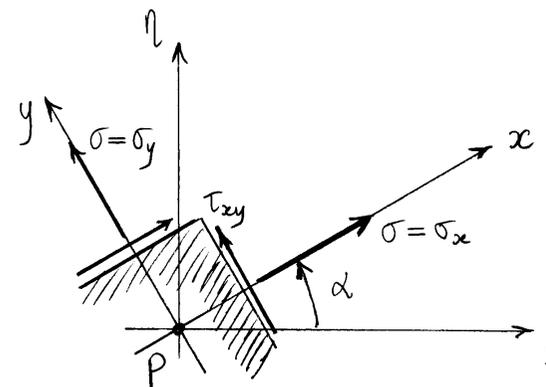
Dall'analisi di tutti e tre i casi possibili si può quindi concludere che esistono sempre tre direzioni principali ortogonali tra loro e che quindi è sempre possibile, senza restrizioni, assumere localmente un *sistema principale di riferimento* cartesiano ortogonale, avente gli assi coincidenti con tre direzioni principali di tensione. Si sottolinea che il sistema di riferimento è locale poiché il tensore degli sforzi e quindi le sue direzioni principali variano in generale da punto a punto. Le tre direzioni principali di tensione, ortogonali tra loro, associate ad ogni punto del corpo inviluppano tre famiglie di curve, pure ortogonali tra loro, dette *linee isostatiche*. In particolare, le linee isostatiche hanno la proprietà che una qualunque giacitura ortogonale ad una di tali linee è soggetta solo a tensione normale e non a tensione tangenziale.

Naturalmente, quanto detto per il tensore degli sforzi vale anche per il tensore di deformazione. Tenendo conto che le direzioni principali di deformazione restano invariate a seguito della deformazione stessa e che la rotazione rigida dell'intorno lascia ortogonali tre direzioni inizialmente ortogonali, si può affermare che esistono sempre tre direzioni ortogonali uscenti da un punto che restano ortogonali anche dopo la deformazione.

5.6 Circonferenza di Mohr relativa ad una direzione principale

Si fa per il momento riferimento al tensore degli sforzi.

Nella generica giacitura di normale x e di sostegno l'asse principale ξ agisce una tensione giacente nel piano $\xi\eta$ e quindi avente una componente normale σ in direzione dell'asse x ed una componente tangenziale τ nella direzione dell'asse y . L'asse



x generico e individuato, per esempio, dall'angolo che questi forma con l'asse principale ξ , asse che qui riteniamo associato al valore principale di tensione massimo tra i due relativi agli assi ξ e η :

$$\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} > 0.$$

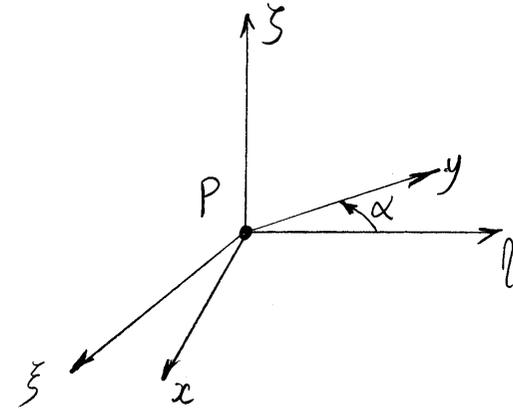
Si determina nel seguito come variano le componenti σ_x e τ_{xy} del tensore degli sforzi al ruotare degli assi x e y attorno all'asse z .

Nel sistema principale $P\xi\eta z$ il tensore degli sforzi si rappresenta con una matrice diagonale:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{Sistema } P\xi\eta z),$$

mentre nel sistema $Pxy z$ individuato dall'angolo α generico le sue componenti risultano:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{Sistema } Pxy z).$$



Il tensore rotazionale \underline{R} che porta il sistema principale $P\xi\eta z$ nel sistema generico $Pxy z$ si rappresenta, nel sistema principale, con la matrice:

$$[\underline{R}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenendo conto che in tale rotazione l'asse z

resta fisso e due quindi le uniche componenti di $\underline{\sigma}$ che variano sono quelle di indici x e y , si può limitare la scrittura delle formule di rotazione a tale ambito, ottenendo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi} \cos \alpha & \sigma_{\eta} \sin \alpha \\ -\sigma_{\xi} \sin \alpha & \sigma_{\eta} \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Sviluppando:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_{\xi} \cos^2 \alpha + \sigma_{\eta} \sin^2 \alpha \\ \sigma_y = \sigma_{\xi} \sin^2 \alpha + \sigma_{\eta} \cos^2 \alpha \\ \tau_{xy} = (\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{formule di} \\ \text{trasformazione in} \\ \text{funzione di } \alpha \end{array} \right),$$

ed utilizzando le seguenti relazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{formule di} \\ \text{duplicazione} \end{array} \right),$$

si ottiene:

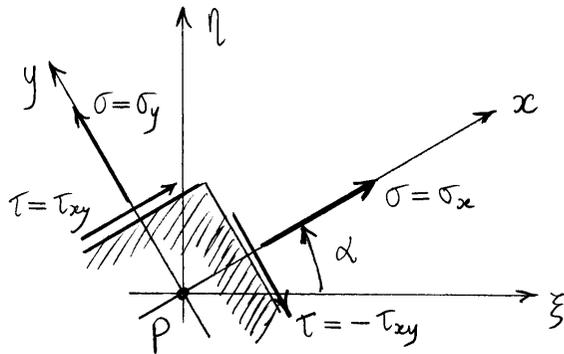
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2} + \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \cos 2\alpha \\ \sigma_y = \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2} - \frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{formule di} \\ \text{trasformazione in} \\ \text{funzione di } 2\alpha \end{array} \right).$$

Poichè, come detto, $\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} > 0$, per $0 < \alpha < \pi/2$

è $\tau_{xy} < 0$. Si ponga allora:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \\ \tau = -\tau_{xy} \end{cases},$$

il che equivale a ritenere σ positiva se uscente dall'elemento di volume e τ positiva se tende



a far ruotare l'elemento di volume in senso orario.

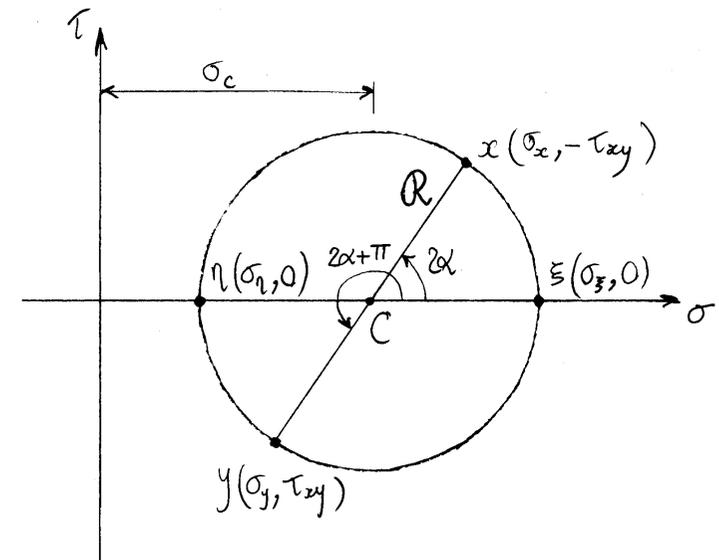
In funzione del parametro α , il punto di coordinate (σ, τ) traccia, nel piano, una curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_c + R \cos 2\alpha \\ \tau = R \sin 2\alpha \end{cases},$$

avendo posto:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2}, \quad R = \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}.$$

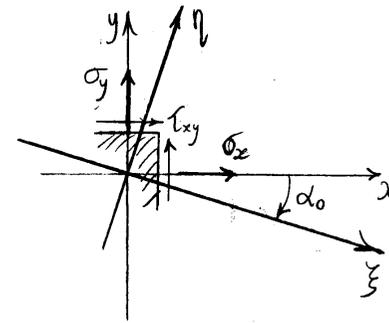
Queste equazioni rappresentano le equazioni parametriche di una circonferenza di centro $C(\sigma_c, 0)$ e di raggio R detta circonferenza di Mohr. Il punto rappresentativo dell'asse x risulta $(\sigma_x, -\tau_{xy})$, mentre il punto rappresentativo dell'asse y (ruotato di 90° rispetto all'asse x) si trova nel punto (σ_y, τ_{xy}) ruotato, sulla circonferenza, di un angolo di 180° rispetto



al punto x . Questo significa che i punti rappresentativi di x e y coincidono con le due estremità di un diametro della circonferenza. I punti rappresentativi degli assi principali si trovano invece sull'asse delle σ , poiché $\tau = 0$. Si noti che se si ruota dell'angolo α (nel piano $\xi\eta$) per individuare l'asse x , occorre ruotare dell'angolo 2α , nello stesso verso, sul piano $\sigma\tau$ per individuare il punto rappresentativo dell'asse x .

Si supponga ora di non conoscere le direzioni principali ξ e η , ma di conoscere le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} di $\underline{\sigma}$ in un sistema di riferimento Oxy .

È dunque possibile costruire la circonferenza di Mohr individuando i punti $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ e (σ_y, τ_{xy}) e tracciando



il relativo diametro. Se il punto rappresentativo dell'asse ξ è individuato dalla rotazione $2\alpha_0$ a partire dal punto rappresentativo dell'asse x , allora l'asse principale ξ è individuato ruotando di α_0 l'asse x nello stesso verso (che nel caso di

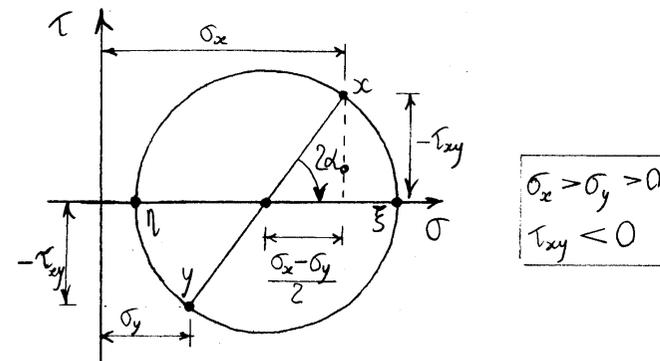


figura e' orario).

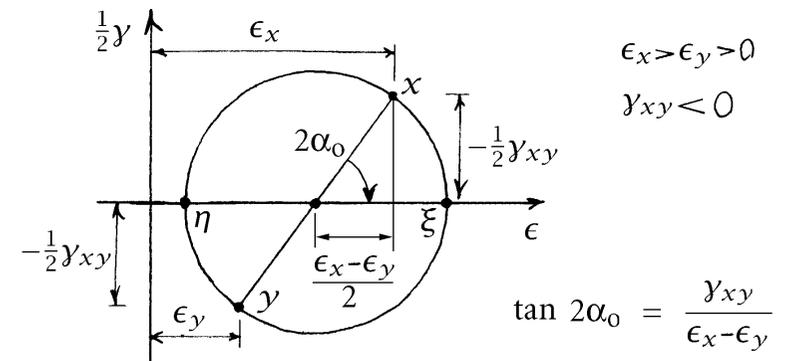
Assumendo positive le rotazioni antiorarie, l'angolo α_0 che in figura individua l'asse ξ e' negativo. Pertanto dalla figura si trae:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

dato che, nelle ipotesi di figura, $\tau_{xy} < 0$, $\sigma_x - \sigma_y > 0$ e $\tan 2\alpha_0 < 0$. Le soluzioni di tale equazione differiscono di multipli di $\frac{\pi}{2}$, e pertanto individuano entrambi gli assi principali ξ e η .

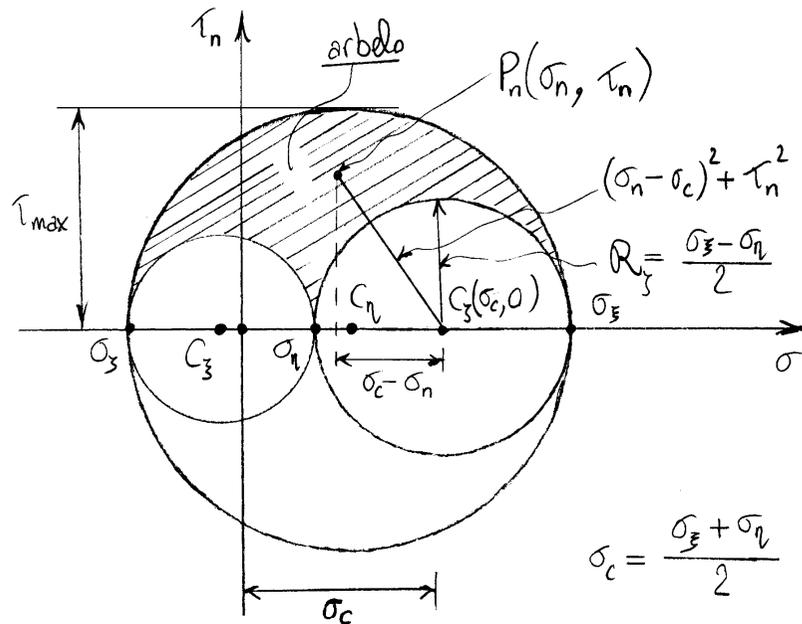
Nel caso del tensore di deformazione vale quanto detto per il tensore degli sforzi, tenendo conto della opportuna corrispondenza tra le variabili. In particolare, in luogo delle normali alle giaciture nell'intorno di un punto occorre considerare le linee uscenti dal punto. Inoltre, sugli assi del piano di Mohr vanno riportate le dilatazioni lineari ϵ in ascissa e la metà degli scorrimenti $\frac{1}{2}\gamma$ in ordinata.

Si supponga poi che l'asse ζ sia una direzione principale di dilatazione e che x e y siano due assi cartesiani ortogonali nel piano perpendicolare a ζ . Allora la circonferenza di Mohr relativa alle linee ortogonali alla direzione principale ζ si può tracciare a partire dai punti rappresentativi degli assi x e y , punti che hanno rispettivamente le coordinate $(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ e $(\epsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$. Naturalmente la circonferenza intersecherà l'asse delle ascisse in corrispondenza degli altri due valori principali di dilatazione ϵ_ξ e ϵ_η e i corrispondenti assi ξ e η saranno individuati, rispetto agli assi x e y , tramite metà degli angoli relativi ai punti corrispondenti sulla circonferenza di Mohr.



5.7 Arbelo di Mohr

Di direzioni principali ne esistono 3 e pertanto esistono tre circonferenze di Mohr.



Si suppone che i valori principali siano posti nel seguente ordine:

$$\sigma_\xi > \sigma_\eta > \sigma_\zeta.$$

I punti delle tre circonferenze di Mohr rappresentano

stati tensionali su giaciture che hanno per sostegno una direzione principale. Si consideri ora una giacitura, di normale \underline{n} , non contenente una direzione principale, cioè tale che le sue componenti nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ siano tutte diverse dallo zero:

$$n_\xi \neq 0, \quad n_\eta \neq 0, \quad n_\zeta \neq 0.$$

Lo stato tensionale su tale giacitura può essere descritto dalla componente normale σ_n , positiva se uscente dall'elemento di volume e dal modulo τ_n della componente tangenziale (non è più possibile dare un segno alla tensione tangenziale poiché questa può avere una direzione qualunque sulla giacitura). Vogliamo mostrare che il punto

$P_n (\sigma_n, \tau_n)$ è interno all'arbelo di Mohr, figura individuata, nel piano σ - τ , dalle semicirconferenze di Mohr che giacciono dalla parte positiva dell'asse τ .

A tale fine occorre mostrare che il punto P_n dista dai centri delle due circonferenze interne più dei rispettivi raggi e dal centro della circonferenza esterna meno del raggio. Si consideri innanzitutto la circonferenza relativa alla direzione principale ξ , per la quale si ha:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2}, \quad R_\xi = \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}.$$

Occorre allora mostrare che:

$$\overline{P_n C_\xi} > R_\xi,$$

od anche, tenendo conto che nella disuguaglianza

si ha a che fare con grandezze positive:

$$\overline{P_n C_\xi}^2 - R_\xi^2 > 0,$$

che diventa:

$$(\sigma_n - \sigma_c)^2 + \tau_n^2 - R_\xi^2 > 0,$$

cioè:

$$(\sigma_n^2 + \tau_n^2) + (\sigma_c^2 - R_\xi^2) - 2\sigma_n \sigma_c > 0.$$

Si ha:

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}{4} + \frac{\sigma_\xi \sigma_\eta}{2},$$

$$R_\xi^2 = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}{4} - \frac{\sigma_\xi \sigma_\eta}{2},$$

e dunque:

$$\sigma_c^2 - R_\xi^2 = \sigma_\xi \sigma_\eta.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 + \tau_n^2 &= (\underline{\sigma n}) \cdot (\underline{\sigma n}) = \underline{n} \cdot (\underline{\sigma}^2 \underline{n}) \\ &= \sigma_\xi^2 n_\xi^2 + \sigma_\eta^2 n_\eta^2 + \sigma_\xi^2 n_\xi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sigma_n \sigma_c &= 2 \left\{ n \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \right\} \left\{ \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right\} \\
&= (\sigma_\xi n_\xi^2 + \sigma_\eta n_\eta^2 + \sigma_\zeta n_\zeta^2) (\sigma_\xi + \sigma_\eta) \\
&= \sigma_\xi^2 n_\xi^2 + \sigma_\eta^2 n_\eta^2 + \sigma_\xi \sigma_\eta \underbrace{(n_\xi^2 + n_\eta^2)}_{1 - n_\zeta^2} + \sigma_\zeta \sigma_\xi n_\zeta^2 + \sigma_\zeta \sigma_\eta n_\zeta^2 \\
&= \sigma_\xi^2 n_\xi^2 + \sigma_\eta^2 n_\eta^2 + \sigma_\xi \sigma_\eta + (\sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\zeta - \sigma_\xi \sigma_\eta) n_\zeta^2.
\end{aligned}$$

Risulta allora:

$$\begin{aligned}
(\sigma_n^2 + \tau_n^2) + (\sigma_c^2 - R^2) - 2\sigma_n \sigma_c &= \\
&= (\sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi \sigma_\zeta - \sigma_\eta \sigma_\zeta + \sigma_\xi \sigma_\eta) n_\zeta^2 \\
&= (\sigma_\zeta - \sigma_\xi)(\sigma_\zeta - \sigma_\eta) n_\zeta^2.
\end{aligned}$$

Per ipotesi $n_\zeta \neq 0$ e dunque $n_\zeta^2 > 0$. Inoltre, sempre

per ipotesi $\sigma_\zeta < \sigma_\xi$ e $\sigma_\zeta < \sigma_\eta$ per cui:

$$(\sigma_\zeta - \sigma_\xi)(\sigma_\zeta - \sigma_\eta) n_\zeta^2 > 0,$$

come volersi dimostrare.

In modo analogo si ottiene:

$$\begin{aligned}
\overline{P_n C_\eta}^2 - R_\eta^2 &= (\sigma_\eta - \sigma_\xi)(\sigma_\eta - \sigma_\zeta) n_\eta^2, \\
\overline{P_n C_\xi}^2 - R_\xi^2 &= (\sigma_\xi - \sigma_\eta)(\sigma_\xi - \sigma_\zeta) n_\xi^2.
\end{aligned}$$

Risultando, per ipotesi:

$$\begin{aligned}
n_\eta^2 > 0, \quad \sigma_\eta - \sigma_\xi < 0, \quad \sigma_\eta - \sigma_\zeta > 0, \\
n_\xi^2 > 0, \quad \sigma_\xi - \sigma_\eta > 0, \quad \sigma_\xi - \sigma_\zeta > 0,
\end{aligned}$$

si ottiene:

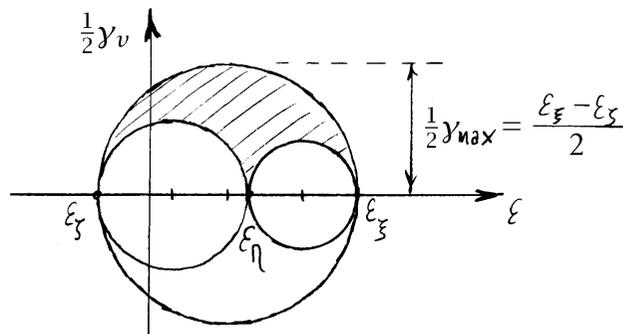
$$\begin{aligned}
\overline{P_n C_\eta}^2 - R_\eta^2 &< 0, \\
\overline{P_n C_\xi}^2 - R_\xi^2 &> 0,
\end{aligned}$$

come volersi dimostrare.

Concludiamo notando che nel caso in cui due valori principali sono uguali, la circonferenza di Mohr relativa alla direzione principale associata al valore principale distinto collassa in un punto, mentre le infinite circonferenze di Mohr, rel-

tive alle infinite direzioni principali associate al valore principale doppio, sono tutte coincidenti. Nel caso poi che i valori principali siano tutti uguali, le infinite circonferenze di Mohr, relative a tutte le direzioni dello spazio, all'assano tutte in un punto. In entrambi i casi l'arbelo di Mohr non esiste, in accordo col fatto che tutte le giaciture contengono almeno una direzione principale.

Nel caso del tensore di deformazione, una linea generica v (uscendo dal punto) sarà rappresentata, nel piano di Mohr, dal punto di coordinate $(\epsilon_v, \frac{1}{2}\gamma_v)$, dove ϵ_v è la dilatazione della linea e γ_v il modulo del vettore scorrimento della linea rispetto al piano ortogonale. Al variare della linea v il punto corrispondente si muove all'interno dell'arbelo di Mohr individuato dalle tre circonferenze corrispondenti alle tre direzioni principali di dilatazione.



5.8 Esercizio sulle direzioni principali di tensione

Sia:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

la rappresentazione algebrica, in un sistema ortogonale $Oxyz$, del tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ definito in un punto di un corpo continuo.

Si vogliono determinare:

- 1) I valori principali di tensione;
- 2) I versori delle direzioni principali;
- 3) Le componenti, nel sistema $Oxyz$, del tensore rotazionale \underline{R} che ruota il sistema $Oxyz$

nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$.

4) Verificare, utilizzando la matrice $[R]$, che la rappresentazione di $\underline{\sigma}$ nel sistema principale è diagonale, con i valori diagonali coincidenti con i valori principali.

Soluzione

L'equazione caratteristica si ottiene svolgendo il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 10-\lambda & -10 & 10 \\ -10 & 20-\lambda & 0 \\ 10 & 0 & 20-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

oppure calcolando gli invarianti principali di tensione:

$$\sigma_I = 10 + 20 + 20 = 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II} = (200 - 100) + (400 - 0) + (200 - 100) = 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$\begin{aligned} \sigma_{III} &= 20 \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 20 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 20(200 - 100) - 2000 = 0 \text{ N}^3/\text{mm}^6. \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\lambda^3 - 50 \text{ N/mm}^2 \times \lambda^2 + 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4 \times \lambda = 0 \text{ N}^3/\text{mm}^6,$$

oppure:

$$\lambda(\lambda^2 - 50 \text{ N/mm}^2 \times \lambda + 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4) = 0 \text{ N}^3/\text{mm}^6,$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono:

$$\lambda = \begin{cases} 0 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{50 - \sqrt{2500 - 2400}}{2} = 20 \text{ N/mm}^2, \\ \frac{50 + \sqrt{2500 - 2400}}{2} = 30 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

e queste rappresentano i valori principali di tensione:

$$\sigma_\xi = 0 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_\eta = 20 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_\zeta = 30 \text{ N/mm}^2.$$

Le direzioni principali ξ , η e ζ si ottengono dalla soluzione dei sistemi:

$$\begin{bmatrix} 10-0 & -10 & 10 \\ -10 & 20-0 & 0 \\ 10 & 0 & 20-0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10-20 & -10 & 10 \\ -10 & 20-20 & 0 \\ 10 & 0 & 20-20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10-30 & -10 & 10 \\ -10 & 20-30 & 0 \\ 10 & 0 & 20-30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Conservando per ogni sistema due sole equazioni linearmente indipendenti (la terza è senz'altro linearmente dipendente dalle altre due poiché il determinante dei coefficienti è nullo) si ottengono i sistemi:

$$\begin{cases} -10 \xi_x + 20 \xi_y = 0 \\ 10 \xi_x + 20 \xi_z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -10 \eta_x - 10 \eta_y + 10 \eta_z = 0 \\ 10 \eta_x = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -10 \zeta_x - 10 \zeta_y = 0 \\ 10 \zeta_x - 10 \zeta_z = 0 \end{cases}.$$

Impoendo infine alle componenti degli autovettori di essere componenti di un vettore:

$$\begin{cases} \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 = 1 \\ \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = 1 \\ \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 = 1 \end{cases},$$

si ottengono, a meno del segno, gli autovettori:

$$\{e_x\} \equiv \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}, \quad \{e_y\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}, \quad \{e_z\} \equiv \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \mp\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix}.$$

Per ogni direzione principale vi sono due autovettori, di verso opposto. La scelta del segno delle componenti è equivalente alla scelta del verso dell'autovettore. Attenzione: per un dato autovettore occorre scegliere o tutti i segni superiori o tutti i segni inferiori. La scelta seguente:

$$\{e_x\} \equiv \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}, \quad \{e_y\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}, \quad \{e_z\} \equiv \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix},$$

rende il sistema $O\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento destro. Per verificarlo occorre mostrare che:

$$e_x \times e_y = e_z.$$

In fatti:

$$\begin{aligned} e_x \times e_y &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}, \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{12}} + \sqrt{\frac{1}{12}}\right) e_x - \sqrt{\frac{1}{3}} e_y + \sqrt{\frac{1}{3}} e_z = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} e_x - \sqrt{\frac{1}{3}} e_y + \sqrt{\frac{1}{3}} e_z. \end{aligned}$$

Il tensore rotazione \underline{R} che porta il sistema $Oxyz$ nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ soddisfa le condizioni

$$\underline{R} e_x = e_\xi, \quad \underline{R} e_y = e_\eta, \quad \underline{R} e_z = e_\zeta.$$

Come già noto, la matrice delle componenti di \underline{R} nel sistema $OxyZ$ ha per colonne le componenti, sempre nel sistema $OxyZ$, degli autovettori (che sono i vettori della base principale):

$$[\underline{R}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

Risulta:

$$[\underline{\sigma}][\underline{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{300} \\ 0 & \sqrt{200} & -\sqrt{300} \\ 0 & \sqrt{200} & \sqrt{300} \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Nota che tale matrice ha per colonne gli autovettori moltiplicati ognuno per l'autovalore corrispondente. Infatti:

$$\begin{aligned} e_i \cdot (\underline{\sigma} \underline{R}) e_j &= e_i \cdot \underline{\sigma} (\underline{R} e_j) = e_i \cdot (\lambda_j \underline{R} e_j) \\ &= \lambda_j (e_i \cdot \underline{R} e_j) = \lambda_j R_{ij}. \end{aligned}$$

Infine:

$$[\underline{R}]^T [\underline{\sigma}] [\underline{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Attenzione!: nell'operazione $[\underline{R}]^T [\underline{\sigma}] [\underline{R}]$ è sottinteso che le componenti siano tutte calcolate rispetto allo stesso sistema di riferimento, che nel caso in esame è il sistema $OxyZ$ di partenza. Il risultato rappresenta sia le componenti del tensore $\underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}$ nel sistema $OxyZ$ di partenza, che le componenti del tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ nel riferimento principale $O\xi\eta\zeta$.

Notiamo che il vettore e_1 ha componente nulla

rispetto all'asse x ed uguali componenti rispetto agli assi y e z .
 Quindi l'asse giace nel piano yz e biseca il quadrante positivo di tale piano. Poiché l'asse x è ortogonale al piano yz contenente η , appartiene al piano di ξ e ζ .

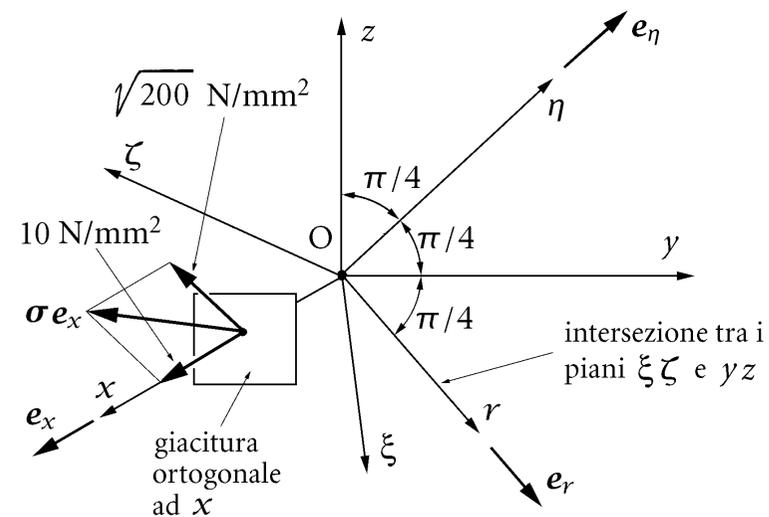
Questo significa che il punto rappresentativo dell'asse

x :

$$\begin{cases} \sigma_x = 10 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} \text{ N/mm}^2 \end{cases},$$

giace sulla circonferenza di Mohr esterna, relativa alle giaciture di sostegno l'asse η . Se si vuole rendere operativa tale circonferenza occorre anche dare un segno alla tensione tangenziale τ_x .

A tale scopo scegliamo un asse r ortogonale ad x di verso tale che $e_x \times e_r = e_\eta$.



Naturalmente r giace nel piano yz ed è ortogonale ad η . Quindi l'angolo tra r e y vale $\pi/4$ e le componenti del versore di r , nel sistema $Oxyz$, sono:

$$\{e_r\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \end{Bmatrix}.$$

Si ha dunque:

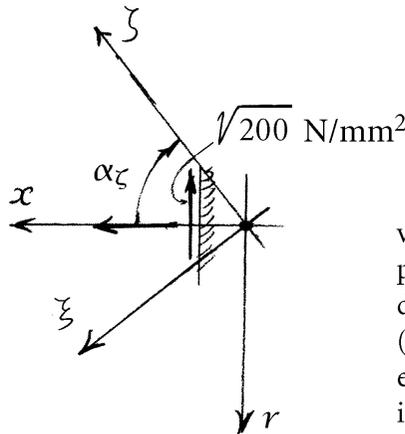
$$\tau_{rx} = e_r \cdot \sigma e_x = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2,$$

ciò:

$$\tau_{rx} = -10\sqrt{\frac{1}{2}} - 10\sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{200} \text{ N/mm}^2,$$

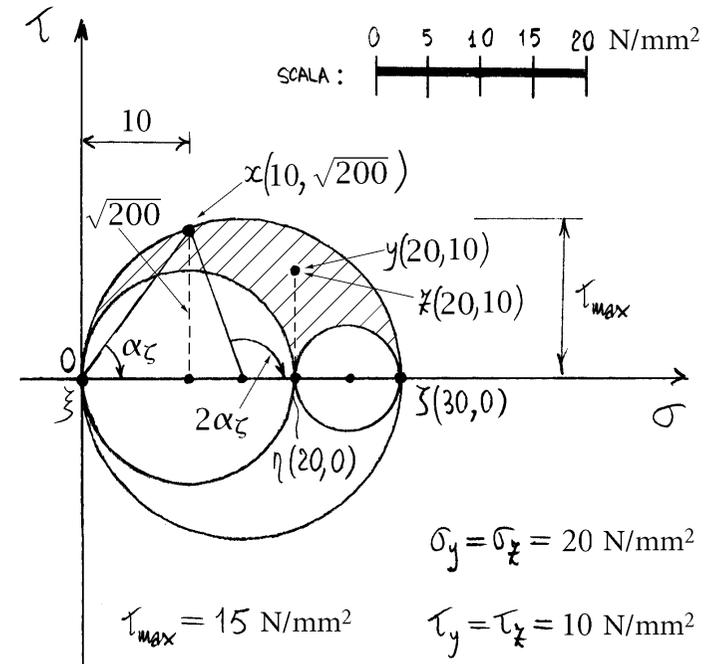
Il punto rappresentativo dell'asse x è dunque $(\sigma_x, -\tau_{rx}) = (10 \text{ N/mm}^2, \sqrt{200} \text{ N/mm}^2)$.

Questo risultato può essere ottenuto anche guardando la faccia positiva del piano xr , faccia di asse η uscente positivo, e notando che la rotazione indotta dalla tensione tangenziale τ_x agente nella giacitura normale all'asse x è oraria e quindi positiva.



visti dalla pagina positiva individuata dal vettore $e_x \times e_r$ (che nel caso in esame coincide con il vettore e_η)

Per ottenere l'asse principale ζ occorre ruotare l'asse x in senso "orario" (se si guarda la pagina



positiva definita dalla coppia xr , in questo ordine) dell'angolo α_ζ che, come risulta dalla circonferenza di

Mohr, soddisfa la relazione:

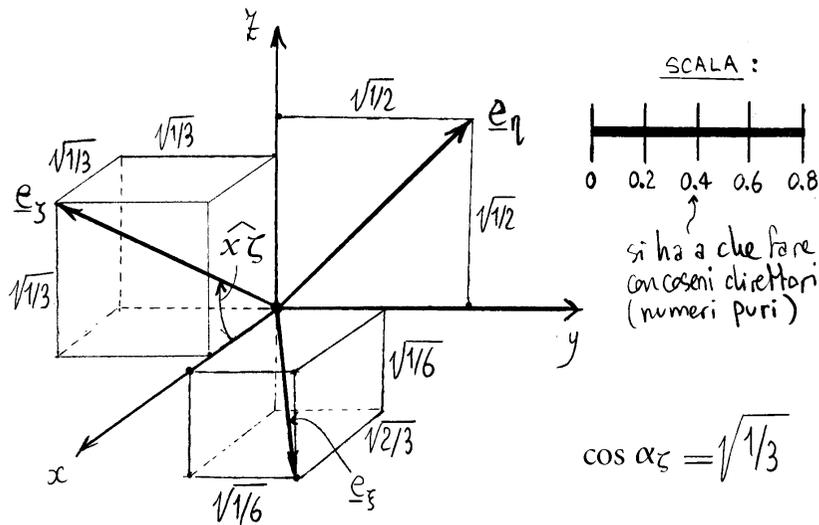
$$\tan \alpha_\zeta = \frac{\sqrt{200}}{10} = \sqrt{2}.$$

Ne risulta quindi:

$$\alpha_\zeta = -\arctan \sqrt{2} = -54.74^\circ.$$

D'altronde, il coseno direttore di ζ rispetto a x vale $\sqrt{1/3}$ e dunque:

$$\widehat{x\zeta} = \arccos \sqrt{1/3} = 54.74^\circ.$$



Alternativamente, utilizzando la formula che individua la direzione principale ζ rispetto al primo asse (nel nostro caso l'asse x) si ottiene:

$$\tan \alpha_\zeta = \frac{\sigma_\zeta - \sigma_x}{\tau_{xr}} = \frac{30 - 10}{-\sqrt{200}} = -\sqrt{2},$$

e quindi:

$$\alpha_\zeta = \arctan(-\sqrt{2}) = -54.74^\circ.$$

Tenendo poi conto che:

$$\sigma_r = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sqrt{200} \\ \sqrt{200} \\ -\sqrt{200} \end{Bmatrix} = 20 \text{ N/mm}^2,$$

si può utilizzare invece la formula che individua entrambe le direzioni principali. Si ottiene:

$$\tan 2\alpha_o = \frac{2\tau_{xr}}{\sigma_x - \sigma_r} = 2 \frac{-\sqrt{200}}{10 - 20} = 2\sqrt{2},$$

e quindi:

$$\alpha_o = \frac{1}{2} \arctan(2\sqrt{2}) = 35.26^\circ.$$

Poiché l'arcotangente di un angolo è compresa tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, applicando tale funzione l'angolo α_o che si ottiene è compreso tra $-\pi/4$ e $\pi/4$. L'angolo α_ζ è all'infuori del dato intervallo e quindi applicando la funzione arcotangente si ottiene l'angolo che individua, sempre rispetto all'asse x , l'altra direzione principale.

5.9 Esercizio sulle direzioni principali di deformazione

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema $Oxyz$ cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = \{(1 \text{ m}^{-2})x^3 - 6y + (2 \text{ m})\} \times 10^{-3}, \\ v = \{-(3 \text{ m}^{-1})x^2 + 3y - (4 \text{ m})\} \times 10^{-3}, \\ w = -(1 \text{ m}^{-2})z^3 \times 10^{-3}. \end{cases}$$

1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi nel punto P di coordinate $(0, 0, 1 \text{ m})$;
2. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
3. Determinare dilatazione e scorrimento massimi (in modulo), sempre nel punto P;
4. Con riferimento al sistema locale $Pxyz$, determinare lo scorrimento, nel punto P, tra l'asse x e la bisettrice s del primo quadrante nel piano yz , orientata dal punto P all'interno del primo quadrante, e dire se l'angolo tra x ed s aumenta o diminuisce.

SOLUZIONE

Il gradiente degli spostamenti vale:

$$[\text{grad } \underline{u}] \equiv \begin{bmatrix} (3 \text{ m}^{-2})x^2 & -6 & 0 \\ -(6 \text{ m}^{-1})x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(3 \text{ m}^{-2})z^2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Nel punto $(0, 0, 1 \text{ m})$ si ha quindi:

$$[\text{grad } \underline{u}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$[\underline{\omega}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Il vettore della rotazione rigida dell'intorno del punto P ha componenti:

$$\{\underline{\varphi}\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \times 10^{-3} \end{array} \right\},$$

e ne risulta una rotazione di ampiezza 3×10^{-3} rad attorno all'asse z .

L'asse z rappresenta una direzione principale di dilatazione, con dilatazione principale pari a:

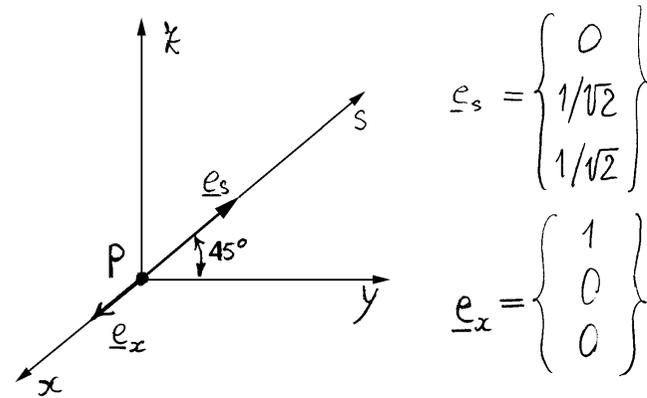
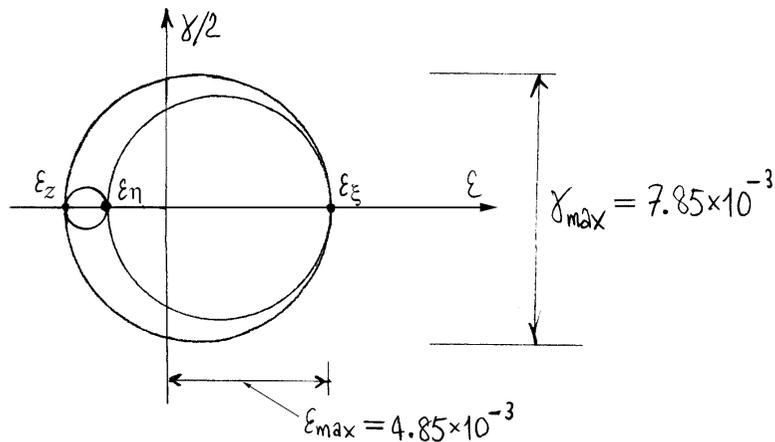
$$\varepsilon_z = -3 \times 10^{-3}.$$

Le altre due dilatazioni principali si determinano ponendo:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -3 \times 10^{-3} \\ -3 \times 10^{-3} & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Si ottiene:

$$\lambda^2 - 3 \times 10^{-3} \lambda - 9 \times 10^{-6} = 0,$$



$$\underline{e}_s = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{e}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 3 \times 10^{-3} \pm \sqrt{9 \times 10^{-6} + 36 \times 10^{-6}} \right\} = \begin{Bmatrix} 4.85 \times 10^{-3} \\ -1.85 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}.$$

Inoltre:

$$\gamma_{sx} = 2 \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e}_s =$$

$$= 2 \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{2}} \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

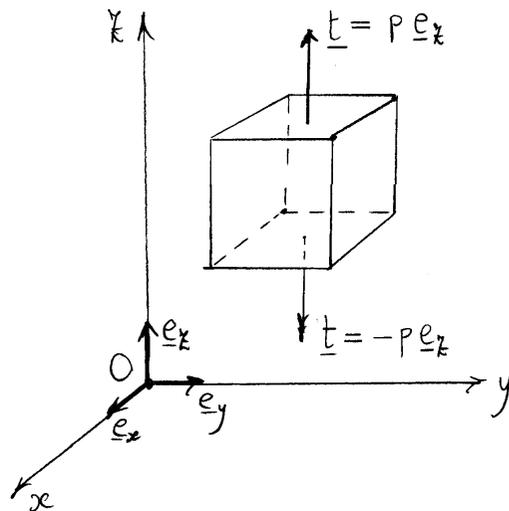
Essendo $\gamma_{sx} < 0$, l'angolo tra le parti positive degli assi x ed s aumenta.

Capitolo 6

Stati elementari di tensione e di deformazione

6.1 Trazione semplice

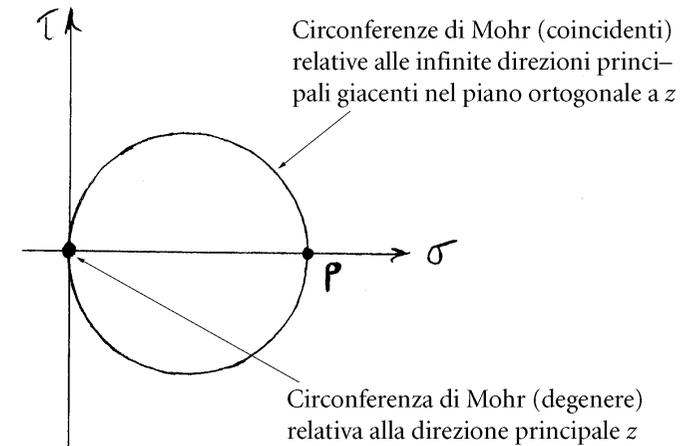
Si dice che si ha trazione semplice nella direzione dell'asse z se la tensione, in una giacitura di normale z , è ortogonale alla giacitura e uscente dall'elemento di volume, e se la tensione, in



una qualunque giacitura di sostegno z , è nulla. In un sistema di riferimento $Oxy z$ il tensore $\underline{\sigma}$ degli sforzi ha componenti:

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

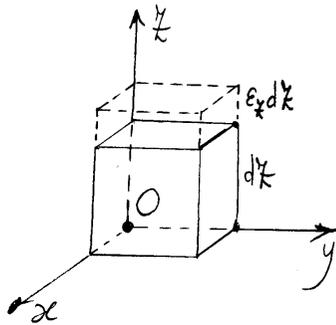
Naturalmente se $p < 0$ la tensione agente nella giacitura di normale z è entrante nell'elemento



di volume e in tal caso, più propriamente, si parla di compressione semplice.

6.2 Dilatazione semplice

La controparte deformativa della trazione semplice è lo stato di *dilatazione semplice* in una data direzione. Se la direzione della dilatazione è quella dell'asse z , si richiede che si abbia dilatazione nella direzione di tale asse, mentre la dilatazione nelle direzioni ortogonali all'asse z devono essere nulle così come gli scorrimenti tra l'asse z e gli assi ortogonali a questo.

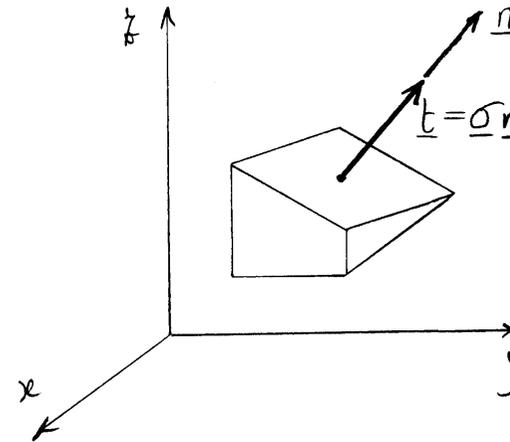


In un sistema di riferimento $Oxyz$ le componenti di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ risultano:

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

6.3 Trazione uniforme

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno stato di trazione uniforme se la tensione in una qualunque giacitura nell'intorno del punto



agisce ortogonalmente alla giacitura.

Questo significa che la tensione deve avere la direzione della normale \underline{n} :

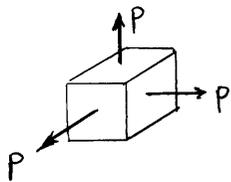
$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \lambda_n \underline{n}, \quad \text{per ogni } \underline{n}.$$

Tutte le direzioni dello spazio sono dunque principali e questo è possibile se e solo se l'equazione caratteristica ammette una radice tripla, cioè se il tensore degli sforzi risulta sferico:

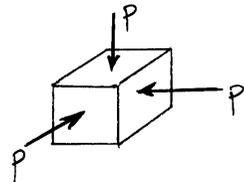
$$\underline{\sigma} = p \underline{I}.$$

Per tale motivo lo stato di tensione in tal caso è anche detto sferico o isotropo.

Se la tensione è entrante nell'elemento di volume, cioè se $p < 0$ si parla più propriamente di compressione uniforme.



trazione uniforme



compressione uniforme

6.4 Dilatazione uniforme

Analogamente alla trazione uniforme, nel caso della deformazione si ha la dilatazione uniforme:

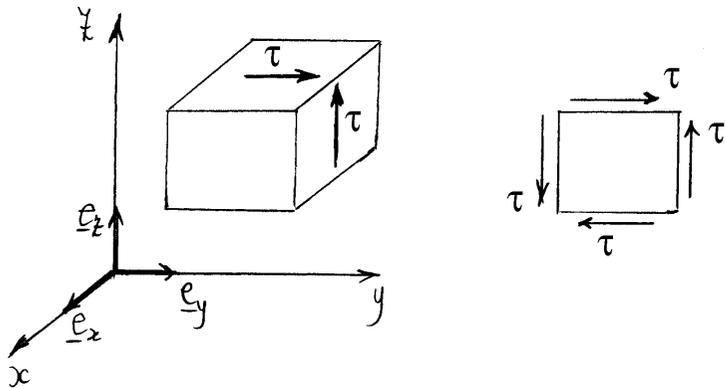
$$\underline{\varepsilon} \underline{e}_v = \lambda_v \underline{e}_v \quad \text{per ogni direzione } \underline{e}_v.$$

Tutte le direzioni dello spazio devono essere principali e quindi $\underline{\varepsilon}$ risulta sferico:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{I}, \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

6.5 Taglio semplice

Si dice che nell'intorno di un punto si ha una sollecitazione di taglio semplice se esistono tre giaciture ortogonali tra loro in una delle quali la tensione è nulla mentre nelle altre due la tensione ha la sola componente tangenziale. Nelle due giaciture dove è presente la sola componente tangenziale, la tensione è diretta ortogonalmente allo spigolo comune. D'altronde, per

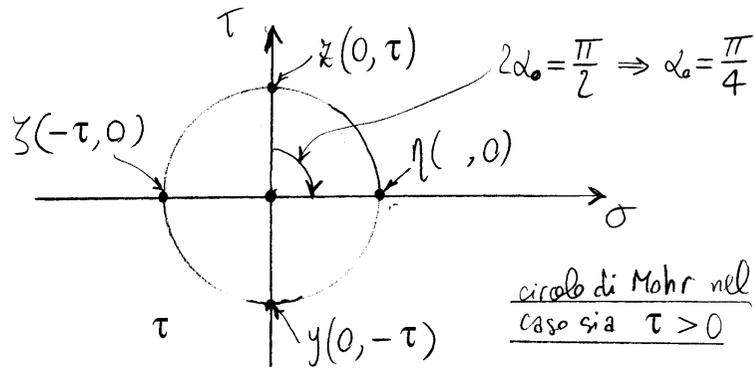


il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali tali tensioni sono uguali e dirette entrambe verso lo spigolo comune oppure entrambe uscenti dallo spigolo comune. In un sistema di riferimento $Oxyz$ con x ortogonale alla giacitura con tensione nulla e y e z ortogonali alle altre due giaciture, la rappresentazione di $\underline{\sigma}$ risulta:

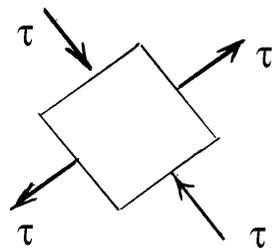
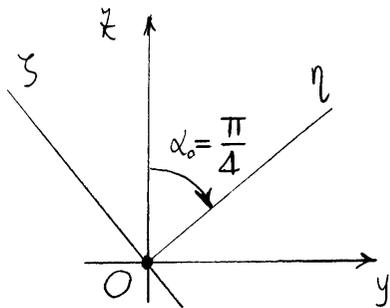
$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} .$$

La direzione x è principale. Le direzioni principali nel piano yz ed i relativi valori principali possono determinarsi utilizzando la circonferenza di Mohr relativa alle giaciture di sostegno l'asse x ,

circonferenza che contiene i punti rappresentativi delle giaciture di normale y e z .



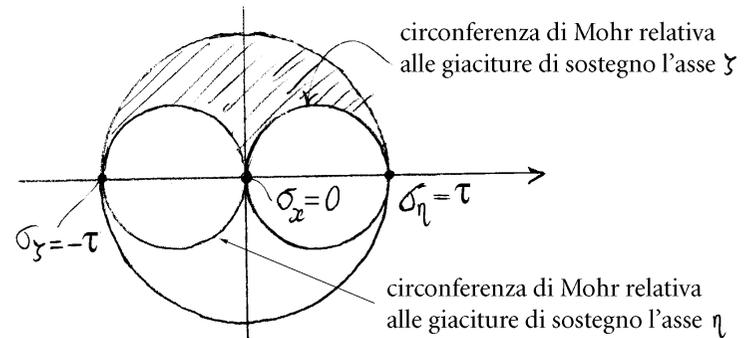
Il punto rappresentativo dell'asse y ha coordinate $(0, -\tau)$ e quello dell'asse z $(0, \tau)$. Il centro della circonferenza è il punto



$(0,0)$ e il suo raggio vale $|\tau|$. Dunque si hanno i due valori principali:

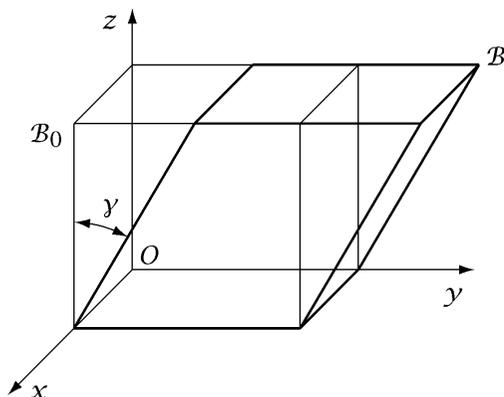
$$\begin{cases} \sigma_z = -\tau & \text{di compressione se } \tau > 0 \\ \sigma_\eta = \tau & \text{di trazione se } \tau > 0 \end{cases}$$

Se $\tau > 0$, la direzione principale di trazione rappresenta la bisettrice del quadrante positivo del piano $y-z$.



6.6 Scorrimento semplice

Si ha scorrimento semplice se in cubo elementare nell'intorno di un punto una faccia scorre rispetto a quella parallela.



Le componenti, nel sistema di riferimento $Oxyz$ illustrato in figura, del campo degli spostamenti \mathbf{u} , nell'ipotesi di piccoli spostamenti, risulta:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = yz, \\ w = 0 \end{cases}$$

dove y rappresenta lo scorrimento tra le linee parallele agli assi coordinati y e z .

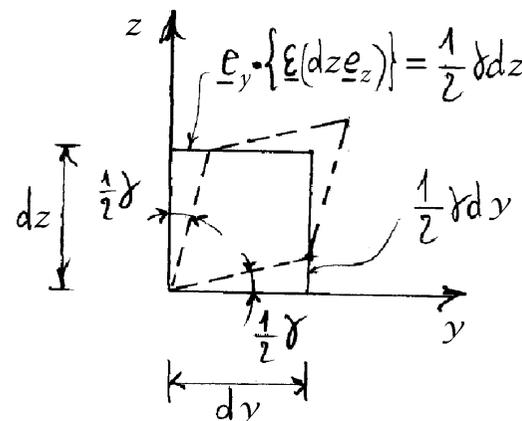
Dal campo materiale degli spostamenti si ottiene il gradiente materiale degli spostamenti $\text{Grad } \mathbf{u}$:

$$[\text{Grad } \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La parte simmetrica e quella emisimmetrica del gradiente materiale degli spostamenti forniscono rispettivamente i tensori di deformazione infinitesima ϵ e di rotazione ω :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}y \\ 0 & \frac{1}{2}y & 0 \end{bmatrix}, \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}y \\ 0 & -\frac{1}{2}y & 0 \end{bmatrix}.$$

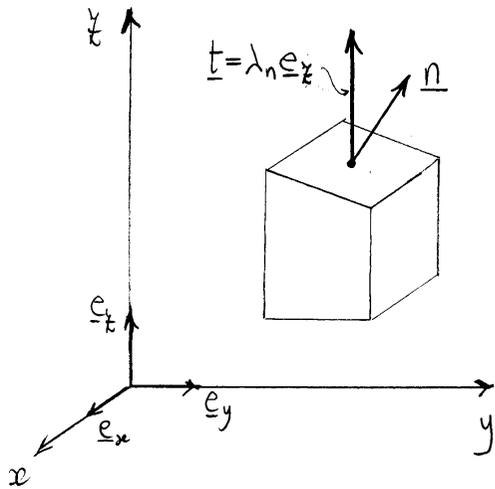
Si noti che la rotazione rigida dell'intorno ha ampiezza $\frac{1}{2}y$ e avviene attorno all'asse x . Nella figura seguente è illustrato l'effetto della sola deformazione.



6.7 stato di tensione monoassiale

Si dice che si ha stato di tensione monoassiale se la tensione, su una qualunque giacitura, ha

sempre la stessa direzione. Se \underline{e}_z è il versore della direzione predetta, deve aversi $\underline{t} = \lambda_n \underline{e}_z$



per un certo scalare λ_n , eventualmente dipendente da \underline{n} . Quindi, dato un \underline{n} generico, deve risultare:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \lambda_n \underline{e}_z,$$

e in particolare:

$$\underline{\sigma} \underline{e}_z = \lambda_z \underline{e}_z.$$

Dunque, \underline{e}_z rappresenta una direzione principale.

Sia poi \underline{e}_v un qualunque versore ortogonale ad \underline{e}_z :

$$\underline{e}_z \cdot \underline{e}_v = 0.$$

Anche sulla giacitura di normale \underline{e}_v la tensione deve avere la direzione di \underline{e}_z :

$$\underline{\sigma} \underline{e}_v = \lambda_v \underline{e}_z.$$

Poichè:

$$\sigma_v = \underline{e}_v \cdot \underline{\sigma} \underline{e}_v = \lambda_v (\underline{e}_v \cdot \underline{e}_z) = 0,$$

ne consegue che la tensione è nulla nelle giaciture di sostegno l'asse z . Si ricade dunque nel caso della trazione semplice in direzione z .

6.8 stato di deformazione monoassiale

Si dice che lo stato di deformazione nell'intorno di un punto è *monoassiale* se gli spostamenti dei punti di tale intorno, depurati dell'effetto della rotazione rigida locale, avvengano tutti in una direzione comune. Se la direzione comune è quella dell'asse z deve dunque risultare:

$$\epsilon \mathbf{r} = \lambda_r \mathbf{e}_z,$$

dove \mathbf{r} è il versore di una generica direzione uscente dal punto in cui lo stato di deformazione è monoassiale e λ_r uno scalare eventualmente dipendente dalla direzione. Poiché la relazione deve valere anche per la direzione dell'asse z , ne consegue che l'asse z è un asse principale. Questo assicura che gli scorrimenti tra l'asse z e gli assi ortogonali a questo sono nulle. Inoltre, se x è un qualunque asse ortogonale a z la sua dilatazione risulta:

$$\epsilon_x = \mathbf{e}_x \cdot \epsilon \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \lambda_x \mathbf{e}_z = 0$$

Ne consegue che lo stato di deformazione monoassiale coincide con quello di dilatazione semplice.

6.9 stato di tensione piano

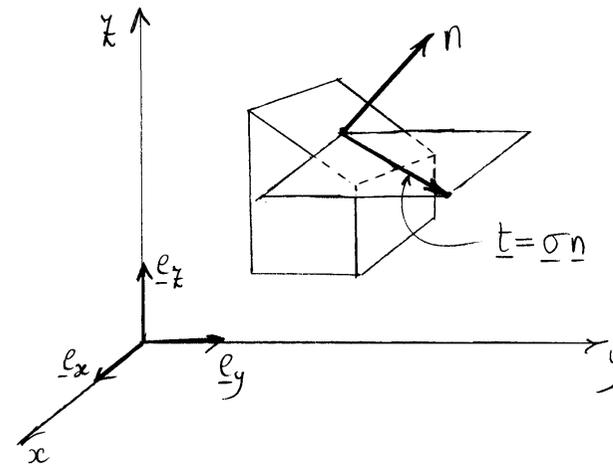
In tal caso si richiede alla tensione agente in una qualunque giacitura di essere parallela ad un piano. Se $\underline{\mathbf{e}}_z$ rappresenta il versore normale

al piano deve quindi aversi

$$\underline{\mathbf{e}}_z \cdot (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{n}}) = 0, \quad \text{per ogni } \underline{\mathbf{n}}.$$

Per la simmetria di $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ questa condizione diventa:

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad \text{per ogni } \underline{\mathbf{n}}$$



ed infine:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{e}}_z = \underline{\mathbf{0}}.$$

Ne risulta allora che la tensione in una giacitura

di normale \underline{e}_z è nulla, il che poi equivale a dire che \underline{e}_z è un autovettore di $\underline{\sigma}$ corrispondente ad un autovalore nullo.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxy\xi$, dove ancora ξ indica la direzione normale al piano delle tensioni, il tensore degli sforzi si rappresenta nella forma:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.10 stato di deformazione piano

Stato di deformazione piano (piano ortogonale alla direzione ξ):

$$\underline{e}_z \cdot (\underline{\varepsilon} \underline{e}_v) = 0, \quad \text{per ogni direzione } \underline{e}_v.$$

In un sistema di riferimento $Oxy\xi$ le componenti di $\underline{\varepsilon}$ risultano:

$$[\underline{\varepsilon}] \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 7

Elasticità lineare

Se si deforma un solido composto da un dato materiale ne corrisponde un dato stato tensionale agente nel solido stesso che dipende sia dalla deformazione che dal materiale che compone il solido. La relazione che sussiste tra deformazione e tensione, variabile da materiale a materiale, viene detta *legame costitutivo*.

I legami costitutivi si distinguono in *locali* e *non locali*. Nel caso di un legame costitutivo locale, la tensione nell'intorno di un punto dipende solo dalla deformazione agente nello stesso intorno. Il modo più semplice di ottenere un legame costitutivo locale è quello di descrivere la deformazione e la tensione nell'intorno di un punto tramite i tensori di deformazione ϵ e degli sforzi σ .

In generale ad una storia di deformazione $\epsilon(t)$ precedente un dato istante t_0 corrisponderà a quell'istante una ben precisa tensione. Se invece la tensione σ ad un dato istante dipende solo dalla deformazione ϵ allo stesso istante e non dalla precedente storia di deformazione il legame viene detto *elastico*:

$$\sigma = \sigma(\epsilon).$$

7.1 Legame costitutivo elastico lineare

Il caso più semplice di un legame elastico è quello *lineare*:

$$\sigma = \mathbb{E}_{\text{sym}} [\epsilon]. \quad (2)$$

dove \mathbb{E}_{sym} è una trasformazione lineare:

$$\mathbb{E}_{\text{sym}} : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbb{E}_{\text{sym}} [\mathbf{A}], \quad (3)$$

definita nello spazio vettoriale Sym dei tensori doppi simmetrici ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$). Tale spazio ha dimensione 6 e quindi \mathbb{E}_{sym} può essere rappresentato da $6 \times 6 = 36$ componenti. È però usuale (e conveniente) estendere la trasformazione \mathbb{E}_{sym} a tutto lo spazio Lin dei tensori doppi ponendo:

$$\mathbb{E} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbb{E}_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \right]. \quad (4)$$

Una trasformazione lineare $\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$ è detta *tensore del quarto ordine* e la particolare trasformazione \mathbb{E} definita dalla (4) è detta *tensore di elasticità lineare*. Il legame costitutivo elastico lineare si scrive allora:

$$\sigma = \mathbb{E} [\epsilon]. \quad (5)$$

Questa si può rappresentare in componenti nella forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} \epsilon_{hk}. \quad (6)$$

Le componenti \mathbb{E}_{ijhk} di \mathbb{E} soddisfano le condizioni seguenti, dette *simmetrie minori*:

$$\mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{jihk}, \quad \mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{ijkh}. \quad (7)$$

La prima delle (7) dipende dal fatto che $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}]$ deve essere un tensore doppio simmetrico. La seconda dell (7) dipende invece dal fatto che \mathbb{E} trasforma un tensore doppio \mathbf{A} generico allo stesso modo in cui trasforma il suo trasposto:

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}] = \mathbb{E}[\mathbf{A}^T] \quad (8)$$

avendo \mathbf{A} e \mathbf{A}^T la stessa parte simmetrica. Scivendo (8) in componenti si ottiene:

$$\sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} A_{hk} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} A_{kh} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijkh} A_{hk}, \quad (9)$$

e poiché \mathbf{A} è generico ne deriva infine la seconda simmetria minore.

Le simmetrie minori (7) fanno scendere a 36 componenti indipendenti le $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 81$ componenti \mathbb{E}_{ijkh} del tensore di elasticità lineare

Le (6) per esteso si scrivano, tenendo conto della simmetria di $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ e delle condizioni (7):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \mathbb{E}_{ijxx} \epsilon_x + \mathbb{E}_{ijyy} \epsilon_y + \mathbb{E}_{ijzz} \epsilon_z \\ & + 2\mathbb{E}_{ijxy} \epsilon_{xy} + 2\mathbb{E}_{ijxz} \epsilon_{xz} + 2\mathbb{E}_{ijyx} \epsilon_{yx}, \end{aligned}$$

oppure:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijxx} \epsilon_x + \mathbb{E}_{ijyy} \epsilon_y + \mathbb{E}_{ijzz} \epsilon_z +$$

$$+ \mathbb{E}_{ijzy} \delta_{zy} + \mathbb{E}_{ijxz} \delta_{xz} + \mathbb{E}_{ijyx} \delta_{yx}, \quad (10)$$

dove $(i,j) = (x,x), (y,y), (z,z), (x,y), (x,z), (y,x)$.

Per $(i,j) = (y,z), (z,x), (x,y)$ non si ottiene niente di nuovo per via delle simmetrie di $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ e di \mathbb{E} .

In forma matriciale la (10) si può scrivere nella forma:

$$\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\mathbb{E}] \{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}\}, \quad (11)$$

dove:

$$\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix}, \quad \{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yx} \end{Bmatrix},$$

Si noti che con tale definizione risulta:

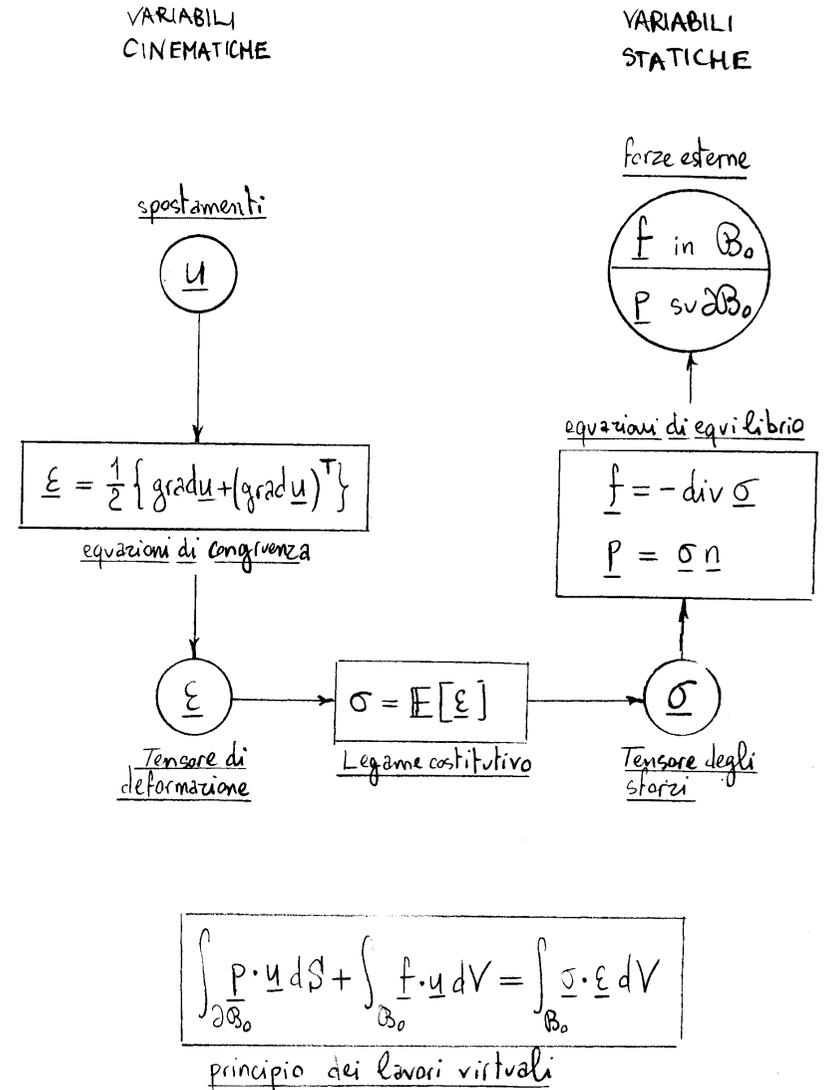
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}\}. \quad (12)$$

Comunque è bene osservare che le definizioni algebriche precedenti non rappresentano le componenti di σ e di ϵ rispetto ad una base ortonormale di 6 tensori simmetrici, mentre rappresentano le componenti rispetto a due diverse basi non ortonormali. Per tale motivo vanno utilizzate solo nel significato di vettori algebrici.

Per esteso, la matrice di elasticità si scrive:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xxxx} & E_{xxyy} & E_{xxzz} & E_{xxzy} & E_{xxxz} & E_{xxyx} \\ E_{yyxx} & E_{yyyy} & E_{yyzz} & E_{yyzy} & E_{yyxz} & E_{yyyx} \\ E_{zzxx} & E_{zzyy} & E_{zzzz} & E_{zzzy} & E_{zzxz} & E_{zzyx} \\ E_{zyxx} & E_{zyyy} & E_{zyzz} & E_{zyzy} & E_{zyxz} & E_{zyyx} \\ E_{xzzx} & E_{xzyy} & E_{xzzz} & E_{xkzy} & E_{xkxz} & E_{xkzx} \\ E_{yxxx} & E_{yxyy} & E_{yxzz} & E_{yxxz} & E_{yxxz} & E_{yxxz} \end{bmatrix}$$

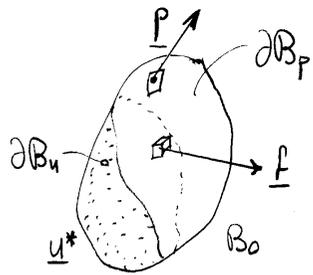
7.2 Problema elastico lineare



Incongnita: il campo degli spostamenti \underline{u}

Termini noti:

- 1) forze di volume \underline{f}
- 2) forze di superficie \underline{p} , limitatamente alla porzione ∂B_p del contorno
- 3) Spostamenti \underline{u}^* limitatamente alla porzione ∂B_u del contorno



$$\begin{cases} \partial B_u \cup \partial B_p = \partial B_0 \\ \partial B_u \cap \partial B_p = \emptyset \end{cases}$$

↑
(Insieme vuoto)

Equazione fondamentale (equazione di Navier nel caso di elasticità lineare isotropa):

$$\operatorname{div} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) \right] \right\} + \underline{f} = \underline{0}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}^* & \text{su } \partial B_u \\ \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) \right] \right\} \underline{n} = \underline{p} & \text{su } \partial B_p \end{cases}$$

7.3 Autotensioni

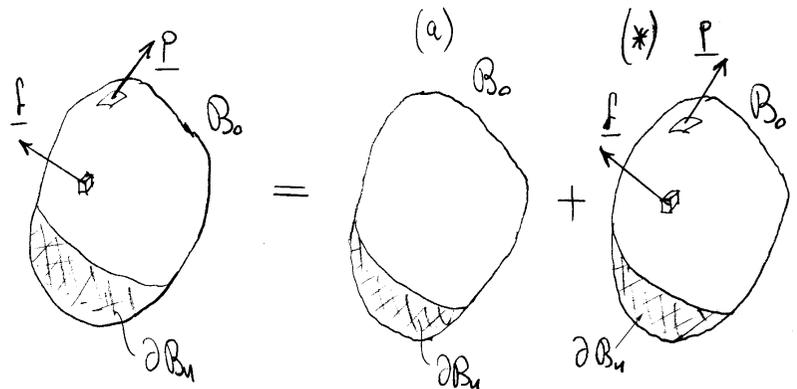
Come già detto, un corpo è soggetto ad autotensioni se il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ non è nullo nella configurazione scarica, cioè nella configurazione che corrisponde a forze esterne applicate nulle. Si ricordi anche che se le autotensioni sono nulle la configurazione scarica viene detta configurazione naturale.

Il legame costitutivo elastico lineare

$\underline{\sigma} = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}]$ è relativo alla configurazione naturale, poiché per $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$ fornisce $\underline{\sigma} = \underline{0}$.

Se sono presenti delle autotensioni $\underline{\sigma}_a$, le tensioni globali che si hanno a seguito dell'applicazione di date forze esterne saranno la somma

delle autotensioni più il contributo dovuto alle forze esterne, contributo valutato sulla configurazione scissa priva di autotensioni:



B_0 soggetto alle autotensioni $\underline{\sigma}_a$

B_0 soggetto alle autotensioni $\underline{\sigma}_a$

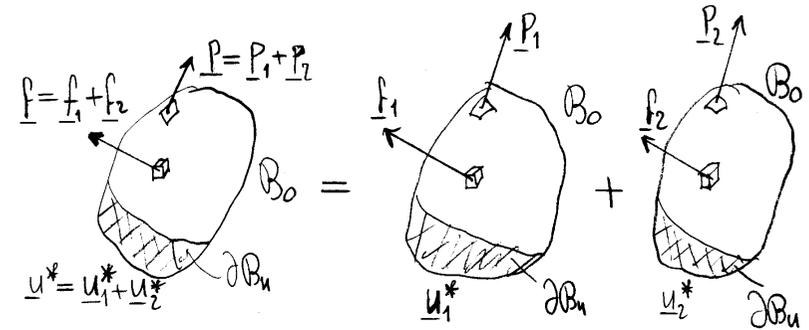
B_0 configurazione naturale

$$\begin{cases} \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon} \end{cases} = \begin{cases} \underline{\sigma}_a \\ \underline{0} \end{cases} + \begin{cases} \underline{\sigma}^* \\ \underline{\varepsilon}^* \end{cases}$$

$$\underline{\sigma}^* = E[\underline{\varepsilon}^*]$$

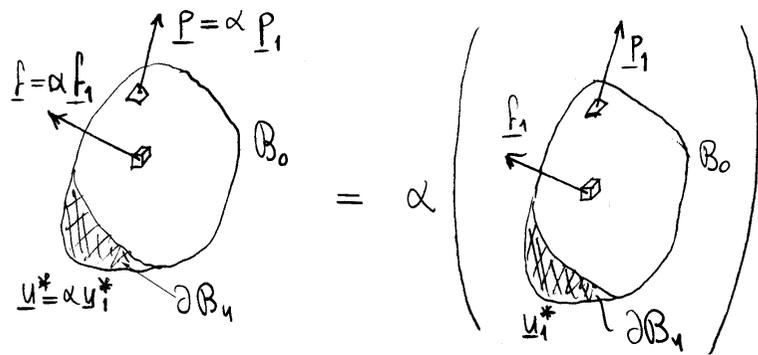
7.4 Sovrapposizione degli effetti

Il problema elastico-lineare è caratterizzato da equazioni lineari definite in uno stesso dominio B_0 , che rappresenta la configurazione naturale del corpo continuo. Vale dunque il principio di sovrapposizione degli effetti. Schematicamente:



$$\begin{cases} \underline{u} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma} \end{cases} = \begin{cases} \underline{u}_1 \\ \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\sigma}_1 \end{cases} + \begin{cases} \underline{u}_2 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \underline{\sigma}_2 \end{cases}$$

additività



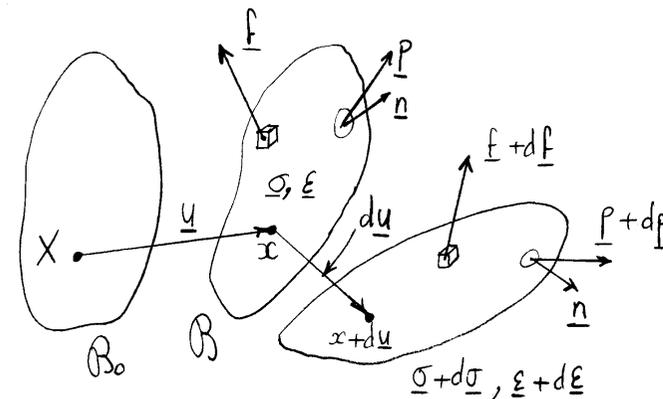
$$\begin{cases} \underline{u} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma} \end{cases} = \alpha \times \begin{cases} \underline{u}_1 \\ \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\sigma}_1 \end{cases}$$

omogeneità di grado 1 ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Notiamo che per la validità di tale principio è indispensabile che tutte le equazioni del problema siano lineari, compreso il legame costitutivo. Se sono presenti delle autotensioni, la linearità vale solo per la quota del tensore degli sforzi dovuta ai carichi esterni.

7.5 Lavoro di deformazione

Siano $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$, \underline{u} i tensori degli sforzi e della deformazione e gli spostamenti conseguenti all'applicazione di certi carichi \underline{f} nel volume e \underline{p} sulla superficie di un corpo continuo di configurazione naturale B_0 . Siano inoltre $d\underline{u}$ e $d\underline{\varepsilon}$ gli incrementi degli spostamenti e delle deformazioni dovuti ad un incremento $d\underline{f}$ e $d\underline{p}$ dei carichi esterni.



$B_0 \equiv$ Configurazione naturale (corpo scario)

Ricordiamo che, nell'ambito delle piccole deformazioni, le forze sono considerate sempre applicate alla configurazione indeformata e che l'equilibrio va quindi scritto relativamente a tale configurazione.

L'incremento del lavoro dei carichi esterni (lavoro di deformazione) vale:

$$dL_d = \int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot d\underline{u} dS + \int_{B_0} \underline{f} \cdot d\underline{u} dV.$$

Per il principio dei lavori virtuali si ottiene anche:

$$dL_d = \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot d\underline{\varepsilon} dV.$$

7.6 Energia elastica di deformazione

La richiesta che il lavoro di deformazione non dipenda dal percorso, ma solo dagli istanti iniziale e finale, conduce in modo diretto alla esistenza, per il solido, di una *energia potenziale elastica* o *energia elastica di deformazione* Φ funzione del solo spostamento \underline{u} . Normalmente si assume che l'energia sia nulla in corrispondenza della configurazione naturale:

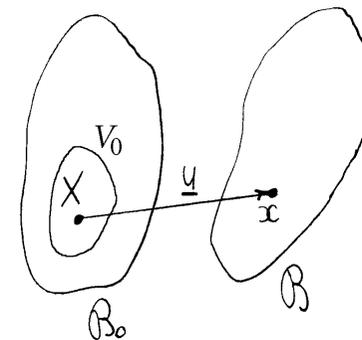
$$\Phi(\mathbf{0}) = 0.$$

Si consideri ora la quota $\Phi(V_0)$ di energia associata al generico volume V_0 del solido e si introduca l'*energia elastica (di deformazione) per unità di volume* ϕ , definita in ogni punto X del solido:

$$\phi = \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{\Phi(V_0)}{V_0}.$$

L'energia associata al generico volume V_0 vale allora:

$$\Phi = \int_{V_0} \phi dV_0.$$



Differenziando e tenendo conto del principio dei lavori virtuali si ottiene:

$$dL_d = d\Phi = \int_{V_0} d\phi dV_0 = \int_{V_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}) dV_0,$$

per ogni volume V_0 di \mathcal{B}_0 . Risulta allora:

$$d\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$

e ne consegue che l'energia elastica per unità di volume dipende dallo spostamento \mathbf{u} solo attraverso il valore locale (nel punto) del tensore di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\phi = \phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \phi(\epsilon_{ij}).$$

Ne risulta:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \text{grad}_{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \phi,$$

oppure, in componenti:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}}.$$

Poiché:

$$\sigma_{ij} = \sum_{hk} E_{ijhk} \epsilon_{hk}$$

risulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{hk}} = E_{ijhk},$$

da cui consegue la simmetria maggiore del tensore \mathbb{E} di elasticità:

$$E_{ijhk} = E_{hkij}.$$

Osservare che tale simmetria porta con sé la simmetria della matrice quadrata $[\mathbb{E}]$.

Integrando l'incremento $d\phi$ tra gli stati iniziale indeformato e quello finale individuato da $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, tenendo conto del legame lineare tra $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, si ottiene l'energia potenziale elastica per unità di volume corrispondente alla configurazione finale:

$$\phi = \int_0^{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot d\underline{\boldsymbol{\epsilon}}^*.$$

Per la linearità delle grandezze in gioco, una situazione intermedia tra $\underline{0}$ e $\underline{\varepsilon}$ è individuata dalla deformazione $\underline{\varepsilon}^* = \lambda \underline{\varepsilon}$, per un certo scalare λ compreso nell'intervallo $(0, 1)$, a cui corrisponde la tensione $\underline{\sigma}^* = \lambda \underline{\sigma}$ e l'incremento $d\varepsilon^* = d\lambda \underline{\varepsilon}$. Si ottiene:

$$\phi = \left(\int_0^1 \lambda d\lambda \right) \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}.$$

L'energia potenziale elastica per unità di volume risulta dunque:

$$\phi = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}].$$

e di conseguenza, il lavoro di deformazione risulta:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] dV.$$

Richiedendo al lavoro di deformazione di essere

sempre positivo, o al più nullo se non si ha deformazione, si ottiene:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] > 0 \quad \text{per ogni } \underline{\varepsilon} \neq \underline{0},$$

cioè il tensore elastico deve essere definito positivo e quindi invertibile. Posto:

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$$

si ottiene

$$\underline{\varepsilon} = \mathbb{C}[\underline{\sigma}].$$

7.7 Teoremi sul lavoro di deformazione

7.7.1 Teorema di Clapeyron

Si è visto che il lavoro di deformazione può essere messo nella forma:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} dV_0.$$

Per il principio dei lavori virtuali risulta allora:

$$L_d = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot \underline{u} dS_0 + \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} dV_0 \right).$$

Tenendo conto che lo spostamento \mathbf{u} e i carichi \mathbf{p} e \mathbf{f} sono quelli finali, ovvero quelli che si hanno al termine del processo deformativo, si è allora ottenuto il:

Teorema di Clapeyron. *Il lavoro di deformazione che le forze applicate compiono a partire da zero fino al loro valore finale è pari alla metà del lavoro che compirebbero per gli stessi spostamenti se fossero costantemente applicate con il loro valore finale.*

7.7.2 Teorema di Betti

Per il lavoro di deformazione non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti ad un primo sistema di forze (a), di superficie $\mathbf{p}^{(a)}$ e di volume $\mathbf{f}^{(a)}$, compete il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dV_0 \right),$$

dove gli spostamenti $\mathbf{u}^{(a)}$ sono quelli provocati dalle forze del sistema (a). Ad un secondo sistema di forze (b), di superficie $\mathbf{p}^{(b)}$ e di volume $\mathbf{f}^{(b)}$, compete invece il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(b)} = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dV_0 \right),$$

dove ora gli spostamenti $\mathbf{u}^{(b)}$ sono quelli provocati dal secondo sistema di forze (b). Per la sovrapposizione degli effetti, al sistema di forze (a+b), somma dei due sistemi precedenti,

compete infine il lavoro:

$$\begin{aligned} L_d^{(a+b)} &= \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial B_0} (\mathbf{p}^{(a)} + \mathbf{p}^{(b)}) \cdot (\mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{u}^{(b)}) dS_0 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_0} (\mathbf{f}^{(a)} + \mathbf{f}^{(b)}) \cdot (\mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{u}^{(b)}) dV_0 \right\} = \\ &= L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{ba}), \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dV_0 \right), \\ L_{ba} &= \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dV_0 \right). \end{aligned}$$

I lavori L_{ab} e L_{ba} rappresentano, rispettivamente, i *lavori mutui* che le forze del sistema (a) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema di forze (b) se avessero sempre il loro valore finale, e viceversa. Si noti che per il principio dei lavori virtuali può anche scriversi:

$$L_{ab} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(b)}, \quad L_{ba} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}.$$

Vale il:

Teorema di Betti (o del lavoro mutuo). *I lavori mutui L_{ab} e L_{ba} dovuti a due sistemi di forze (a) e (b) coincidono:*

$$L_{ab} = L_{ba}.$$

Dimostrazione. Utilizzando il legame elastico lineare e la simmetria del tensore di elasticità si ha:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} = \int_{B_0} \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^{(a)}] = \\ &= \int_{B_0} \boldsymbol{\epsilon}^{(a)} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^{(b)}] = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Può essere interessante dare una seconda dimostrazione del teorema di Betti, basata sull'osservazione che il lavoro di deformazione $L_d^{(a+b)}$ non dipende dal percorso. Tale lavoro può essere allora calcolato applicando prima le forze del

sistema (a) fino al loro valore finale, poi le forze del sistema (b) fino al loro valore finale. Alla fine dell'applicazione del sistema (a) il lavoro di deformazione vale $L_d^{(a)}$. L'applicazione del sistema (b) non solo genera il lavoro di deformazione $L_d^{(b)}$, ma, facendo lavorare anche il sistema di forze (a), che sono già

al loro valore finale, genera anche il termine L_{ab} :

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + L_{ab}.$$

D'altronde, se si applica prima il sistema di forze (b) fino al loro valore finale e indi il sistema di forze (a), si ottiene analogamente:

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(b)} + L_d^{(a)} + L_{ba}.$$

Ne risulta quindi:

$$L_{ab} = L_{ba}.$$

7.8 Energia complementare

Differenziando il prodotto scalare $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ tra tensione e deformazione si ottiene:

$$d(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Si noti che $\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}$ è un differenziale esatto, rappresentando

l'incremento dell'energia elastica per unità di volume:

$$d\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}.$$

Ne risulta allora che anche $\boldsymbol{\epsilon} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ è un differenziale esatto:

$$d\psi = \boldsymbol{\epsilon} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = d(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} - \phi). \quad (1)$$

È così dimostrata l'esistenza di una funzione ψ della tensione, detta *energia elastica complementare* (per unità di volume), tale che:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}] - \phi(\mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]), \quad (2)$$

dove il tensore del quarto ordine \mathbb{C} è l'inverso del tensore \mathbb{E} di elasticità.

La composizione tra la funzione energia elastica di deformazione $\phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ e il legame costitutivo inverso $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]$ fornisce:

$$\phi(\mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}].$$

Sostituendo nella (2) si ottiene allora:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \phi(\mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}].$$

L'energia complementare coincide quindi, nel caso elastico lineare, con la composizione tra energia elastica di deformazione e legame costitutivo inverso.

L'espressione differenziale (1) equivale a scrivere:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \text{grad}_{\boldsymbol{\sigma}} \psi \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Poiché in componenti il legame costitutivo inverso si scrive:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{hk} \mathbb{C}_{ijhk} \sigma_{hk},$$

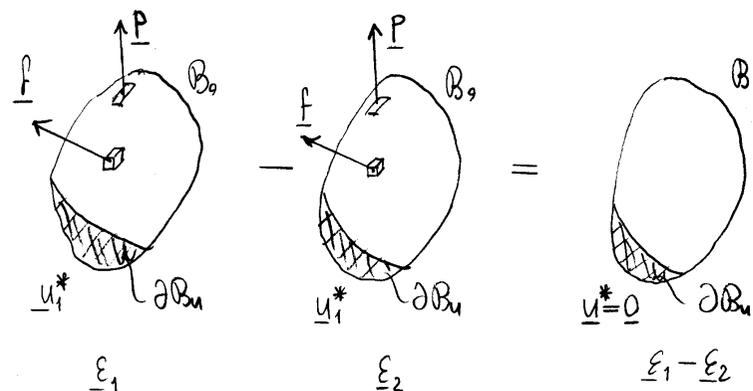
si ottiene:

$$\mathbb{C}_{ijhk} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{hk}}.$$

7.9 Unicità della soluzione

Se la soluzione del problema elastico-lineare esiste, essa è unica (teorema di Kirchhoff).

Infatti, siano $\underline{\epsilon}_1$ ed $\underline{\epsilon}_2$ due deformazioni soluzione dello stesso problema elastico-lineare.



Sotto l'ipotesi che la configurazione B_0 coincida con la configurazione naturale, sottraendo le due soluzioni si ottiene, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, una soluzione corrispondente a forze applicate nulle, a vincoli rigidi e a distorsioni (se presenti) nulle. Quindi il lavoro di deformazione associato a tale soluzione, per il teorema di Clapeyron, è nullo poiché le forze, al più, sono presenti solo in corrispondenza dei vincoli rigidi.

Deve quindi risultare:

$$\frac{1}{2} \int_V (\underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_2) \cdot \mathbb{E} [\underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_2] dV = \underline{0},$$

per ogni volume V , il che implica che ovunque nel corpo si ha:

$$\frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_2) \cdot \mathbb{E} [\underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_2] = \underline{0},$$

poiché l'integrando è una funzione non negativa. Questo è

possibile se e solo se $\underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_2 = \underline{0}$ e quindi se e solo se $\underline{\underline{\varepsilon}}_1 = \underline{\underline{\varepsilon}}_2$. Risulta anche:

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = \mathbb{E} [\underline{\underline{\varepsilon}}_1] = \mathbb{E} [\underline{\underline{\varepsilon}}_2] = \underline{\underline{\sigma}}_2.$$

Infine, \underline{u}_1 e \underline{u}_2 , generando la stessa deformazione non possono differire di un moto rigido.

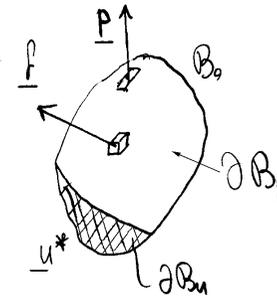
Se le condizioni cinematiche al contorno escludono tale possibilità, anche \underline{u}_1 ed \underline{u}_2 coincidono.

7.10 Energia potenziale totale

Se all'energia elastica di deformazione Φ si somma l'energia potenziale delle forze applicate, nell'ipotesi che tali forze siano conservative, si ottiene l'energia potenziale totale. Se le forze applicate al solido sono indipendenti dagli spostamenti che la struttura può subire (forze morte, oppure "dead loadings", nella terminologia inglese) allora il potenziale delle forze associate a dati spostamenti, che, con una opportuna scelta dello zero del potenziale, coincide con il lavoro delle forze, risulta:

$$V(\underline{u}) = \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV + \int_{\partial B_p} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS,$$

dove l'integrale di superficie è ristretto alla quota ∂B_p sulla quale sono applicati i carichi esterni.



Risulta allora la seguente espressione dell'energia potenziale totale:

$$\pi(\underline{u}) = - \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV - \int_{\partial B_p} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS + \int_{B_0} \phi(\underline{\epsilon}) \, dV.$$

Notiamo che tale energia rappresenta una funzione scalare degli spostamenti \underline{u} . A loro volta gli spostamenti $\underline{u}(\underline{x})$ rappresentano una funzione

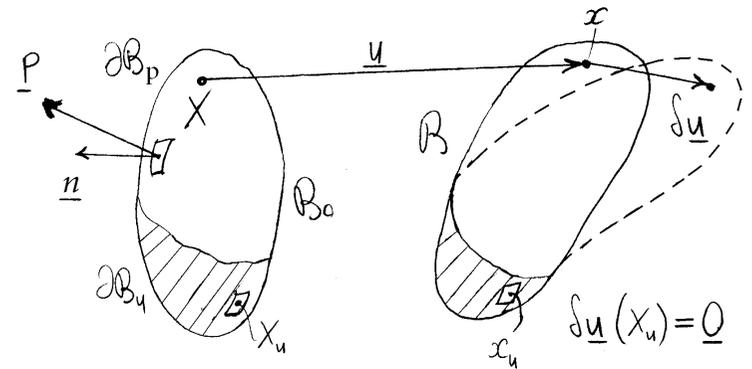
vettoriale del punto. Quindi la funzione $\Pi(\underline{u})$ rappresenta una funzione di funzione a valori scalari. Un tale tipo di funzione è chiamata funzionale.

7.10.1 Variazione del funzionale energia potenziale totale

L'incremento di $\Pi(\underline{u})$ al passare da una configurazione individuata dagli spostamenti \underline{u}_1 ad un'altra configurazione individuata dagli spostamenti \underline{u}_2 vale:

$$\Delta\Pi = \Pi(\underline{u}_2) - \Pi(\underline{u}_1).$$

Si considerino degli spostamenti $\underline{u}(x)$, che individuano una configurazione deformata congruente



con i vincoli. Si incrementino tali spostamenti tramite una funzione $\delta\underline{u}$. Poiché si vuole che la somma $\underline{u} + \delta\underline{u}$ soddisfi le condizioni geometriche al contorno, occorre che la variazione $\delta\underline{u}$ degli spostamenti soddisfi le condizioni geometriche omogenee al contorno ($\delta\underline{u} = \underline{0}$ sulla quota B_u sulla quale sono imposti gli spostamenti).

L'incremento dell'energia potenziale totale conseguente ad una variazione $\delta\underline{u}$ del campo degli spostamenti a partire dalla configurazione

individuata dagli spostamenti \underline{u} , vale

$$\Delta \pi(\delta \underline{u}) = \pi(\underline{u} + \delta \underline{u}) - \pi(\underline{u}).$$

Si considerino ora tutte le variazioni aventi la direzione della variazione $\delta \underline{u}$ e quindi della forma $\alpha \delta \underline{u}$, dove α è uno scalare indipendente dal punto X . Lungo tale direzione, il funzionale π risulta una funzione della sola variabile reale α :

$$\alpha \mapsto \pi(\underline{u} + \alpha \delta \underline{u}),$$

e se ne può calcolare, in corrispondenza di \underline{u} e cioè per $\alpha = 0$, la parte lineare in α :

$$\alpha \delta \underline{u} \mapsto \left(\frac{d\pi}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \alpha.$$

L'incremento corrispondente alla variazione $\delta \underline{u}$ prescelta del campo degli spostamenti, indicata con $\delta \pi$, viene detta *variazione prima* di π e si ottiene ponendo $\alpha = 1$ nell'espressione precedente:

$$\delta \pi = \frac{d\pi}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}.$$

Se $F(\underline{u})$, $G(\underline{u})$ e $H(\underline{u})$ sono dei funzionali di \underline{u} e se a è un funzionale costante, valgono le seguenti proprietà, conseguenza diretta della definizione di variazione:

$$F(\underline{u}) = G(\underline{u}) + H(\underline{u}) \Rightarrow \delta F = \delta G + \delta H,$$

$$F(\underline{u}) = a G(\underline{u}) \Rightarrow \delta F = a \delta G,$$

$$\delta \int_{\mathcal{B}_0} F(\underline{u}) dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \delta F(\underline{u}) dV_0.$$

Poiché risulta:

$$\pi = -V + \Phi.$$

ne consegue allora:

$$\delta \pi = -\delta V + \delta \Phi.$$

Risulta poi:

$$\delta V = - \int_{\mathcal{B}_0} \underline{f} \cdot \delta \underline{u} dV_0 - \int_{\partial \mathcal{B}_p} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dS_0,$$

$$\delta \Phi = \int_{\Omega_0} \delta \phi \, dV_0,$$

e quindi:

$$\delta \Pi = - \int_{\Omega_0} \underline{f} \cdot \delta \underline{u} \, dV_0 - \int_{\partial \Omega_p} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} \, dS_0 + \int_{\Omega_0} \delta \phi \, dV_0,$$

dove:

$$\delta \phi = \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{\varepsilon} = \delta \underline{\varepsilon} \cdot \underline{E}[\underline{\varepsilon}],$$

$$\delta \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \text{grad } \delta \underline{u} + (\text{grad } \delta \underline{u})^T \right\}.$$

7.10.2 Principi di stazionarietà e di minimo dell'energia potenziale totale

Per il principio dei lavori virtuali, in corrispondenza ad \underline{u}^* soluzione del problema elastico risulta:

$$\delta \Pi = 0,$$

poiché in tal caso $\underline{\sigma}^* = \underline{E}[\underline{\varepsilon}^*]$ e' in equilibrio con le forze \underline{f} e \underline{p} applicate, e le reazioni nella parte $\partial \Omega_u$ di contorno vincolato non compiono lavoro poiché $\delta \underline{u} = 0$ sul contorno vincolato.

Si è così ottenuto il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale (l'energia potenziale totale è stazionaria in corrispondenza della soluzione).

Se \underline{u}^* rappresenta la soluzione del problema elastico, si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}^*) &= - \int_{B_0} \underline{f} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) dV \\ &\quad - \int_{\partial B_p} \underline{p} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) dS \\ &\quad + \int_{B_0} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}^*] dV + \frac{1}{2} \int_{B_0} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*] dV, \end{aligned}$$

che, per il principio dei lavori virtuali applicato agli spostamenti $\underline{u} - \underline{u}^*$ e deformazioni $\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*$ congruenti e alle forze \underline{f} e \underline{p} e tensioni $\underline{\sigma}^* = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}^*]$ equilibrate, diventa:

$$\pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}^*) = \frac{1}{2} \int_{B_0} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*] dV > 0,$$

se $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}^*$, poiché \mathbb{E} è definito positivo.

Si è così ottenuto il principio di minimo dell'energia potenziale totale (l'energia poten=

ziale totale è minima in corrispondenza della soluzione).

Notiamo che nell'espressione dell'energia potenziale totale compaiono, tramite la ϕ , le sole derivate prime delle componenti di \underline{u} , mentre nella equazione fondamentale compaiono le derivate seconde. Non solo, le derivate prime delle componenti di \underline{u} , nell'espressione di π , vengono filtrate attraverso l'integrazione nel dominio B_0 di definizione. Questo significa che la ricerca della soluzione attraverso il principio di stazionarietà può essere condotta indebolendo le richieste di regolarità della funzione \underline{u} a quelle sole richieste che rendono definiti gli integrali che

compaiono nell'espressione di π . In tal caso si parla di soluzioni in senso debole, contrapposte alle soluzioni in senso forte o classico che si deducono dalle equazioni differenziali di campo. È chiaro che una soluzione forte è anche soluzione debole, ma, in generale, una soluzione in senso debole non sempre è anche soluzione in senso forte, perché non sempre soddisfa i requisiti di regolarità forti.

Occorre anche aggiungere che se invece delle equazioni indefinite di equilibrio, che permettono di ottenere l'equazione differenziale fondamentale, si impone semplicemente il soddisfacimento delle equazioni di bilancio per ogni volume estraibile dal corpo solido, si ottengono ancora le soluzioni in senso debole.

Questa osservazione è in accordo col fatto che per estrarre le equazioni indefinite di equilibrio dalle equazioni di bilancio occorre aggiungere delle condizioni di regolarità alla funzione spostamento. Poiché queste condizioni di regolarità non hanno significato fisico, ma solo matematico, ne risulta che le soluzioni in senso forte sono un sottoinsieme delle soluzioni fisicamente significative, e rappresentate dalle soluzioni in senso debole.

7.11 Esistenza della soluzione

Sotto condizioni di regolarità poco restrittive sulla frontiera ∂B_0 del corpo continuo, è stato dimostrato un teorema di esistenza della soluzione debole del problema elastico lineare.

Esistono anche tutta una serie di risultati più ristretti riguardanti le soluzioni forti.

In ogni caso, i metodi numerici, tipo il metodo delle differenze finite oppure il metodo degli elementi finiti, approssimano la soluzione in senso debole.

Capitolo 8

Elasticità lineare isotropa

Un materiale è isotropo in un dato punto se le proprietà meccaniche sono identiche in tutte le direzioni uscenti dal punto considerato. Un materiale è inoltre isotropo se è isotropo in tutti i suoi punti.

8.1 Legge di Hooke

Vediamo di individuare il legame elastico lineare:

$$\underline{\varepsilon} \rightarrow \underline{\sigma} = E[\underline{\varepsilon}],$$

sotto l'ipotesi di isotropia.

Sia dato un generico tensore $\underline{\varepsilon}$ di deformazione infinitesima. La sua rappresentazione nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ risulta:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Il tensore di deformazione può dunque scomporsi nella somma di tre dilatazioni semplici:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti basta dunque determinare la tensione corrispondente ad una dilatazione semplice.

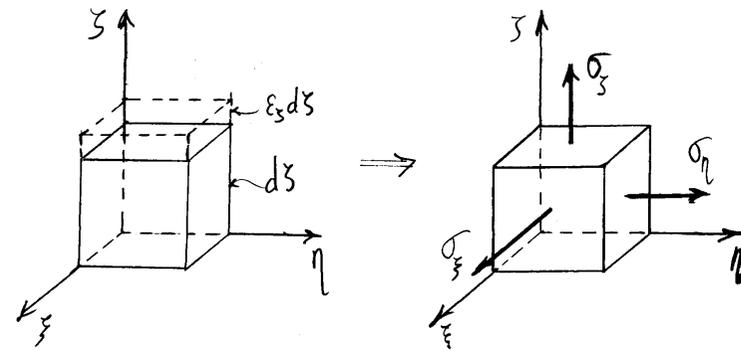
Consideriamo la dilatazione semplice in direzione dell'asse ζ . Su una giacitura di normale ζ non può essere presente una tensione tangenziale poiché,

per l'ipotesi di isotropia, tutte le direzioni sulla giacitura sono equivalenti, mentre la presenza di una tensione tangenziale ne privilegierebbe una.

L'asse ζ rappresenta dunque una direzione principale di tensione. Le altre due direzioni sono ortogonali a ζ . D'altronde, sempre per via dell'ipotesi di isotropia, non vi è possibilità di distinguere fra le direzioni ortogonali a ζ e, dunque, tutte le direzioni ortogonali a ζ devono essere principali di tensione, come già lo sono di deformazione. Dunque:

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta},$$

e la rappresentazione di $\underline{\sigma}$ nel sistema $\mathcal{C}\xi\eta\zeta$



risulta:

$$[\underline{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\zeta} \end{bmatrix},$$

Ne consegue la seguente corrispondenza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

La linearità del legame elastico impone inoltre:

$$\begin{cases} \sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = \lambda \varepsilon_{\xi} \\ \sigma_{\zeta} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{\zeta} \end{cases}$$

dove λ e μ sono due costanti che dipendono dal tipo di materiale (elastico lineare isotropo, in ogni caso) e che sono note come costanti di Lamé.

Un risultato analogo vale per le dilatazioni semplici in direzione ξ e η . Inoltre, in virtù dell'ipotesi di isotropia, le costanti implicite continuano ad essere sempre λ e μ . Tali risultati si possono compendiarne nelle corrispondenze:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\varepsilon_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon_{\xi} \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \lambda\varepsilon_{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon_{\eta} \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix} \longrightarrow [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \lambda\varepsilon_{\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\varepsilon_{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Sommando e raggruppando opportunamente si ottiene infine

$$[\underline{\sigma}] = \lambda(\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta} + \varepsilon_{\zeta}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

oppure, in forma indipendente dal sistema di riferimento:

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon}. \quad (\text{legge di Hooke})$$

In componenti, in un sistema cartesiano ortogonale generico, questa si scrive:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\text{tr } \underline{\varepsilon}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

oppure, per esteso:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_z \\ \tau_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} = \mu \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} = \mu \gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} = \mu \gamma_{xy} \end{cases}$$

La matrice di elasticità 6×6 ha dunque le componenti:

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Si noti che tale rappresentazione è indipendente dal sistema di riferimento, in accordo con l'ipotesi di isotropia.

8.2 Moduli tecnici

Vogliamo ora determinare la relazione esistente tra le costanti di Lamé e i moduli tecnici E , ν e G valutati nelle prove di trazione e di torsione:

E modulo di elasticità longitudinale
o modulo di Young,

ν coefficiente di contrazione laterale
o modulo di Poisson,

G modulo di elasticità tangenziale.
o modulo di Coulomb.

Se lo stato tensionale è monoassiale (situazione che si cerca di riprodurre nella prova di trazione), per definizione di modulo di Young risulta $\sigma_z = E \varepsilon_z$, se l'asse z coincide con la direzione

della tensione. Inoltre, per definizione di modulo di Poisson, le dilatazioni lungo gli assi x e y , ortogonali a z , valgono $\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z$ e $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$. Deve dunque valere la relazione:

$$\begin{bmatrix} -\nu \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\underline{\varepsilon}$ $\underline{\sigma}$

Utilizzando la legge di Hooke, si può dunque scrivere:

$$\begin{aligned} E \varepsilon_x &= \lambda (-\nu \varepsilon_z - \nu \varepsilon_z + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_x \\ 0 &= \lambda (-\nu \varepsilon_z - \nu \varepsilon_z + \varepsilon_z) + 2\mu (-\nu \varepsilon_z) \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} E = (1-2\nu)\lambda + 2\mu & (1) \\ (1-2\nu)\lambda - 2\mu\nu = 0 & (2) \end{cases}$$

Ricavando λ dalla (2) si ha:

$$\lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (3)$$

Ricavando $(1-2\nu)\lambda$ dalla (2) e sostituendo nella (1) si ha:

$$E = 2\mu(1+\nu) \quad (4)$$

da cui:

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad (5)$$

Ricavando μ dalla (5) e sostituendo la (5) nella (3) si ottengono poi le relazioni tra μ e λ da una parte ed E e ν dall'altra:

$$\begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} & (6) \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & (7) \end{cases}$$

Ricavando invece il modulo di Poisson ν dalla (3) e sostituendo poi nella (4) si ottengono i moduli tecnici ν e E in funzione delle costanti di Lamé λ e μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \end{array} \right. \quad (8)$$

(9)

Per quel che riguarda il modulo di elasticità tangenziale G , notiamo che, se lo stato di tensione è di taglio semplice (come si cerca di riprodurre nella prova di torsione), per definizione risulta

$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$, rispetto a due opportuni assi ortogonali x e y . In definitiva, deve aversi la corrispondenza:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \underline{\varepsilon} \end{array} \xrightarrow{E} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & G \gamma_{xy} & 0 \\ G \gamma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \underline{\sigma} \end{array} .$$

Utilizzando la legge di Hooke si ottiene:

$$G \gamma_{xy} = \mu \gamma_{xy} ,$$

e quindi :

$$G = \mu . \quad (10)$$

Sostituendo la (10) nella (3) si ottiene:

$$\lambda = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} . \quad (11)$$

Poiché, per le (10) e (11), risulta:

$$2\mu + \lambda = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} , \quad (12)$$

La matrice 6×6 di elasticità può dunque scriversi:

$$[E] = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot$$

La legge di Hooke si può scrivere nella forma:

$$\underline{\sigma} = 2G \left\{ \underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\varepsilon}) \underline{I} \right\},$$

o, per esteso:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_x + \nu (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right\} \\ \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_y + \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right\} \\ \sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \varepsilon_z + \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right\} \\ \tau_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases} \cdot$$

Per quel che riguarda le dimensioni, le costanti di Lamé λ e μ , così come i moduli E e G , hanno le dimensioni di una tensione mentre ν risulta un numero puro:

$$[\lambda] = [\mu] = [E] = [G] = FL^{-2},$$

$$[\nu] = \text{numero puro}.$$

8.3 Direzioni principali di elasticità (isotropia)

La matrice di elasticità isotropa risulta indipendente dal sistema di riferimento, e questo è in accordo con l'ipotesi di isotropia, poiché il sistema di riferimento consta di tre direzioni ortogonali dello spazio. D'altronde, ciò non è in disaccordo con la ricerca di "direzioni principali" nello spazio dei tensori, rispetto alle quali la matrice di elasticità diventa diagonale, poiché la scelta arbitraria di 3 assi ortogonali di riferimento non genera tutte le possibili basi nello spazio dei tensori doppi.

Se $\underline{\underline{\varepsilon}}$ rappresenta una direzione principale

di \mathbb{E} deve risultare:

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \alpha \underline{\underline{\varepsilon}},$$

dove si è indicato con α l'autovalore di \mathbb{E} per non confonderlo con una delle costanti di Lamé. D'altronde, se $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è un tensore sferico risulta $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{\underline{I}}$ e quindi $(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} = 3\varepsilon \underline{\underline{I}} = 3 \underline{\underline{\varepsilon}}$. Utilizzando la legge di Hooke si ottiene:

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \lambda(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Tale relazione mostra che $3\lambda + 2\mu$ è un autovalore di \mathbb{E} corrispondente ad un qualunque tensore sferico. Notiamo inoltre che le (6) e (7) permettono di porre tale autovalore nella forma:

$$3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \left\{ 1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right\} = \frac{E}{1-2\nu}.$$

Si consideri poi un qualunque tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a traccia nulla, o tensore deviatorico. Dalla legge di Hooke

in tal caso si ottiene:

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}},$$

e dunque 2μ risulta un autovalore di \mathbb{E} associato ad un qualunque tensore deviatorico.

Se $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\sigma}}$ sono tensori generici di deformazione e di tensione, si possono decomporre, in modo unico, in una parte sferica ed in una parte deviatorica:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_s + \underline{\underline{\sigma}}_d, \quad \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_s + \underline{\underline{\varepsilon}}_d, \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_d = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \end{cases}$$

La linearità del tensore di elasticità permette di scrivere:

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}_s] + \mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}_d],$$

da cui:

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\varepsilon}}_s + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_d.$$

Per l'unicità della decomposizione di $\underline{\underline{\sigma}}$ in una parte sferica ed in una deviatorica deve quindi risultare:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_s = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\varepsilon}}_s \Rightarrow \text{tr } \underline{\underline{\sigma}} = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}, \\ \underline{\underline{\sigma}}_d = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_d. \end{cases}$$

Utilizzando i moduli tecnici tali relazioni si scrivono:

$$\begin{cases} \text{tr } \underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1-2\nu} \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\sigma}}_d = 2G \underline{\underline{\varepsilon}}_d \end{cases}$$

Osserviamo infine che $\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}$ rappresenta la dilatazione cubica nell'intorno del punto e $\frac{1}{3} \text{tr } \underline{\underline{\sigma}}$ la tensione normale media, quantità che, a meno del segno, si presta al ruolo di pressione nell'intorno del punto nel caso in cui la tensione non sia sferica.

Il coefficiente $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ che li collega rappresenta dunque un modulo di elasticità volumetrica.

8.4 Legge di Hooke inversa

Utilizziamo la rappresentazione principale, ottenuta decomponendo $\underline{\sigma}$ ed $\underline{\varepsilon}$ in una parte sferica ed in una parte deviatorica, per invertire la legge di Hooke:

$$\begin{cases} \text{tr } \underline{\varepsilon} = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr } \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon}_d = \frac{1}{2G} \underline{\sigma}_d = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}_d \end{cases}$$

Sommando le parti sferiche e deviatoriche di $\underline{\varepsilon}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\varepsilon})\underline{I} + \underline{\varepsilon}_d \\ &= \frac{1-2\nu}{3E}(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \left\{ \underline{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} \right\} \\ &= -\frac{\nu}{E}(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}, \end{aligned}$$

ed infine:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\underline{\sigma} - \nu(\text{tr } \underline{\sigma})\underline{I} \right\}.$$

Il tensore \underline{C} , inverso di \underline{E} , risulta allora:

$$[\underline{C}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

Per esteso, la legge di Hooke inversa si scrive:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right\} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right\} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right\} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz} & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \tau_{xz} & \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases}$$

8.5 Limitazioni delle costanti elastiche

Il modulo di Young E ed il coefficiente di contrazione laterale ν sono soggetti a delle limitazioni che discendono dalla richiesta che l'energia elastica di deformazione per unità di volume, e quindi anche l'energia complementare elastica, sia positiva per ogni deformazione non nulla. Questa richiesta è equivalente alla condizione che il tensore elastico \mathbb{E} (e quindi il suo inverso \mathbb{C}) sia definito positivo. Una condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice $[\mathbb{C}]$ sia definita positiva è che i suoi minori principali siano tutti positivi. Devono quindi essere verificate le disuguaglianze:

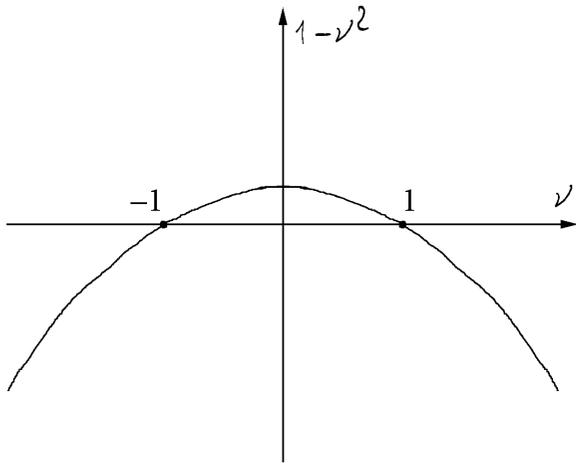
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E} > 0 \\ \frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E^2} > 0 \\ \frac{1}{E^3} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{E^3} \left\{ (1-\nu^2) + \nu(-\nu-\nu^2) - \nu(\nu^2+\nu) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{E^3} \left\{ (1-\nu^2) - 2\nu^2(1+\nu) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{E^3} (1+\nu)^2 (1-2\nu) > 0 \\ \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} > 0 \end{array} \right.$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \end{cases},$$

ed inoltre:

$$\begin{cases} 1-\nu^2 > 0 \\ 1-2\nu > 0 \\ 1+\nu > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < \nu < \frac{1}{2} .$$



Gli usuali materiali utilizzati nella pratica tecnica hanno valori positivi del modulo di Poisson, almeno finché si comportano in modo elastico lineare.

Tuttavia recentemente sono stati prodotti dei materiali porosi, sia polimerici che metallici, che ben si adattano ad essere descritti dalla teoria dell'elasticità lineare e che presentano valori negativi del modulo di Poisson (anche fino a -0.7 per i materiali porosi polimerici e -0.8 per quelli porosi metallici).

8.6 Energia elastica di deformazione ed energia complementare elastica

Utilizzando la legge di Hooke e la sua inversa si ottiene:

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{E}} [\underline{\underline{\varepsilon}}] = G \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 \right\} \\ \psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{\sigma}}] = \frac{1}{2E} \left\{ (1+\nu) \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \nu (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})^2 \right\} . \end{cases}$$

Vediamo di esprimere tali relazioni in componenti:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} &= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yx}^2) + (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + (\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zy}^2) \\ &= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yz}^2) \end{aligned}$$

$$(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z),$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2) + (\tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2) + (\tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2), \end{aligned}$$

$$(\text{tr } \underline{\sigma})^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z).$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \phi &= G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{zy}^2 + \varepsilon_{yz}^2) + (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + (\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \right\} \\ &= G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta_{zy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yx}^2) \right\}. \end{aligned}$$

La relazione

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

vale per ϕ scritta nella prima forma, dove compaiono tutte e 9 le componenti di $\underline{\varepsilon}$. La seconda forma deve

essere utilizzata se si considerano $\underline{\sigma}$ e $\underline{\varepsilon}$ quali vettori di 6 componenti:

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix}, \quad \{\underline{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta_{zy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yx} \end{Bmatrix}.$$

In tal caso:

$$\sigma_i = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i}.$$

L'energia complementare risulta poi:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ &\quad + \frac{1}{4G} \left\{ (\tau_{zy}^2 + \tau_{yz}^2) + (\tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2) + (\tau_{yx}^2 + \tau_{xy}^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z + \sigma_x \sigma_y) \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{zy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yx}^2). \end{aligned}$$

La prima forma di Ψ va utilizzata nella relazione

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}},$$

mentre la seconda forma nella relazione:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_i},$$

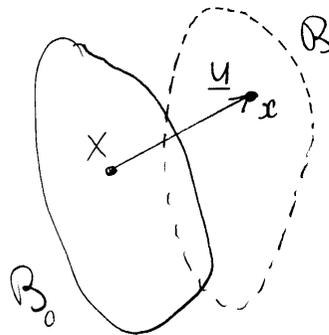
dove $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\sigma}$ sono intesi quali vettori di 6 componenti.

Capitolo 9

Compatibilità della deformazione

9.1 Equazioni di compatibilità (di Saint Venant)

Dato un campo \underline{u} degli spostamenti di un corpo continuo e' possibile calcolare il gradiente degli spostamenti e quindi il tensore di deformazione infinitesimo $\underline{\varepsilon}$. Notare che $\underline{\varepsilon}$ e' definito per ogni punto del corpo continuo e quindi costituisce un campo tensoriale. Ci si domanda se dato un



qualsunque campo tensoriale $\underline{\varepsilon}(X)$:

$$\underline{\varepsilon} : B_0 \rightarrow \text{Sym}, X \rightarrow \underline{\varepsilon}(X)$$

definito nei punti di un corpo continuo, e' possibile individuare un campo di spostamenti $\underline{u}(X)$:

$$\underline{u} : B_0 \rightarrow V, X \rightarrow \underline{u}(X)$$

tale che $\underline{\varepsilon}(X)$ rappresenti la deformazione infinitesima associata al dato campo di spostamenti.

Vedremo nel seguito che, affinché ciò accada, il campo $\underline{\varepsilon}(X)$ deve soddisfare delle equazioni dette ancora equazioni di congruenza o di compatibilità. Che ciò sia il caso, appare intuitivo dal fatto che il campo di spostamenti incognito e' individuato dai tre campi scalari $u_i(X)$ ($i \equiv x, y, z$) delle sue

componenti, due a loro volta debbono soddisfare le nove equazioni differenziali seguenti:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} \quad (i, j \equiv x, y, z),$$

di cui solo 6 indipendenti, data la simmetria del tensore di deformazione infinitesimo. Si hanno dunque 6 equazioni differenziali per definire 3 campi scalari incogniti.

Se esiste un campo di spostamenti corrispondente ad un dato campo tensoriale $\underline{\varepsilon}(X)$ si dice che $\underline{\varepsilon}(X)$ è integrabile. Se $\underline{\varepsilon}(X)$ è integrabile esiste anche un campo tensoriale emisimmetrico $\underline{\omega}(X)$ tale che:

$$\text{grad } \underline{u} = \underline{\omega} + \underline{\varepsilon}.$$

Vediamo se è possibile ottenere $\underline{\omega}$ direttamente dal campo $\underline{\varepsilon}$ e quali sono le condizioni che devono essere soddisfatte perché ciò sia possibile. Le componenti di $\underline{\omega}$, in funzione del campo degli spostamenti valgono:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j \equiv x, y, z).$$

Derivando rispetto alla generica coordinata x_h si ottengono le componenti del gradiente di $\underline{\omega}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right) \right\}, \end{aligned}$$

e quindi :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \varepsilon_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jh}}{\partial x_i} .$$

Se si fa riferimento al vettore assiale $\underline{\varphi}$ di $\underline{\omega}$:

$$\{\underline{\varphi}\} \equiv \begin{Bmatrix} \omega_{zy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix}, \quad [\underline{\omega}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & 0 & -\varphi_z \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix},$$

le componenti di $\text{grad } \underline{\varphi}$:

$$\text{grad } \underline{\varphi} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

risultano:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{zy}}{\partial x_h} = \frac{\partial \varepsilon_{zh}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yh}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial x_h} = \frac{\partial \varepsilon_{zh}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zh}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{yx}}{\partial x_h} = \frac{\partial \varepsilon_{yh}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zh}}{\partial y} \end{cases} .$$

Se il corpo continuo è monocollegato, le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un tale vettore $\underline{\varphi}$ esprimono le condizioni di invertibilità nell'ordine di derivazione (teorema di Schwartz):

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_h}, \quad \left\{ \begin{array}{l} i \equiv x, y, z \\ (h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, x) \end{array} \right\},$$

che equivalgono a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_h} = 0, \quad \{(i, j), (h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, x)\}.$$

Si hanno quindi le 9 condizioni:

$$\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right) = 0,$$

$$\left\{ (i, j), (h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, z) \right\}.$$

Si definisce tensore di incompatibilità il tensore doppio \underline{R} di componenti:

$$R_{rs} = \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right),$$

sottintendendo le seguenti corrispondenze tra indici:

r	(i, j)
x	(z, y)
y	(x, z)
z	(y, x)

s	(h, k)
x	(z, y)
y	(x, z)
z	(y, x)

È evidente che le equazioni di compatibilità sono equivalenti all'annullarsi del campo tensore

riale \underline{R} in tutti i punti del continuo:

$$\underline{R} = \underline{0}.$$

È inoltre di facile verifica l'identità di Bianchi:

$$\operatorname{div} \underline{R} = \underline{0},$$

equivalente a scrivere:

$$\frac{\partial R_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial R_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{iz}}{\partial z} = 0, \quad (i = x, y, z).$$

Si noti che la simmetria di $\underline{\varepsilon}$ e l'invertibilità nell'ordine di derivazione conduce alla scrittura:

$$R_{sr} = \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{hi}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ki}}{\partial x_h \partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{hj}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_h \partial x_i} \right),$$

che coincide con R_{rs} .

Pertanto una inversione degli indici (i, j) con gli indici (h, k) genera una equazione equivalente alla precedente. Il tensore \underline{R} di incompatibilità è dunque simmetrico e le equazioni di compatibilità indipen=

dentro si riducono a 6, che, per esteso, si scrivono:

$$R_{xx} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$R_{yy} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$R_{zz} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$R_{yz} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \right) - \left(2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} \right) \right\} = 0,$$

$$R_{zx} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} \right) - \left(2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} \right) \right\} = 0,$$

$$R_{zy} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} \right) - \left(2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} \right) \right\} = 0.$$

Ottenuto $\underline{\omega}$, e quindi \underline{w} , occorre integrare le equazioni:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \omega_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad (i, j \equiv x, y, z).$$

Sempre nel caso di corpi monoconnessi, le condizioni

necessarie e sufficienti per l'esistenza del campo \underline{u} di spostamenti richiedono nuovamente l'invertibilità dell'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_h} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_j}, \quad \left\{ \begin{array}{l} i \equiv x, y, z \\ (h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, x) \end{array} \right\}.$$

Si ottengono quindi le condizioni:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{ih}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ih}}{\partial x_j}.$$

Tenendo conto delle relazioni che legano le derivate $\partial \omega_{ij} / \partial x_h$ e $\partial \omega_{ih} / \partial x_j$ alle componenti del tensore di deformazione, si perviene alle condizioni:

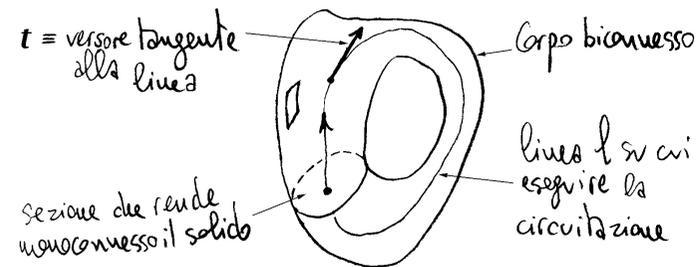
$$\frac{\partial \varepsilon_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jh}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_h} - \frac{\partial \varepsilon_{hi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ih}}{\partial x_j},$$

che sono automaticamente soddisfatte. Quindi le condizioni di integrabilità di $\underline{\varepsilon}$ in un campo di rotazioni rigide $\underline{\omega}$ rappresentano le condizioni di compatibilità cercate.

Se il corpo è pluriconnesso, occorre renderlo monoconnesso attraverso un numero strettamente sufficiente di sezionamenti, dopodiché alle condizioni di congruenza precedenti occorre aggiungere le condizioni di annullamento della circuitazione di $\text{grad } \underline{\varphi}$, espresso tramite $\underline{\varepsilon}$, su un numero di circuiti pari a quello del numero di sezionamenti e tali che ogni circuito passi, una e una sola volta, per una e una sola delle sezioni che rendono monoconnesso il corpo:

$$\oint_{\ell} (\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{t} \, d\ell = 0 .$$

Infatti $(\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{t}$ rappresenta l'incremento della rotazione φ nella direzione della tangente alla linea e il suo integrale lungo una linea fornisce l'incremento globale della rotazione, incremento che deve essere nullo su una linea chiusa.



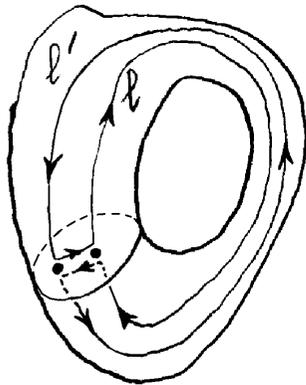
Se tali condizioni aggiuntive sono soddisfatte, è possibile ottenere un campo $\underline{\varphi}$ vettoriale continuo anche sulle sezioni che rendono monoconnesso il corpo. A tale punto occorre imporre l'annullarsi della circuitazione di $\text{grad } \underline{\varphi}$ sulle stesse linee per poter ottenere

un campo di spostamenti continuo anche sulle sezioni che rendono monoconnesso il corpo. Deve quindi risultare ulteriormente:

$$\oint_{\ell} (\text{grad } \underline{u}) \underline{t} \, d\ell = \oint_{\ell} (\underline{\omega} \underline{t} + \underline{\varepsilon} \underline{t}) \, d\ell = \underline{0}.$$

Si osservi che se le circuitazioni di $\text{grad } \underline{u}$ e di $\text{grad } \underline{u}$ sono nulle sul percorso ℓ , sono nulle anche su qualunque altro percorso ℓ' che interseca la sezione una e una sola volta. Infatti tale percorso può essere connesso a ℓ tramite una andata e un ritorno dai due punti intersezione, uno su una faccia e l'altro sulla

faccia opposta, generando una curva chiusa che non interseca la sezione, e avente quindi circuitazione nulla.



9.1.1 Appendice (rotore di un campo tensoriale e tensore di incompatibilità)

Innanzitutto, ricordiamo che se \underline{a} è un campo vettoriale, allora si ha:

$$\{\text{rot } \underline{a}\} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdot$$

Se \underline{b} è un vettore costante e \underline{A} un campo tensoriale, risulta $(\underline{A} \underline{b})_i = \sum_j A_{ij} b_j$ e quindi:

$$\{\text{rot}(\underline{A} \underline{b})\} \equiv \begin{Bmatrix} \sum_j \left(\frac{\partial A_{zj}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yj}}{\partial z} \right) b_j \\ \sum_j \left(\frac{\partial A_{xj}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zj}}{\partial x} \right) b_j \\ \sum_j \left(\frac{\partial A_{yj}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xj}}{\partial y} \right) b_j \end{Bmatrix} \cdot$$

Si definisce rotore di un campo tensoriale il campo tensoriale $\text{rot } \underline{A}$ soddisfacente la condizione:

$$(\text{rot } \underline{A}) \underline{b} = \text{rot}(\underline{A} \underline{b}),$$

per ogni campo vettoriale \underline{b} costante. Da quanto precede, risulta quindi:

$$[\text{rot } \underline{A}] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} & \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial A_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial A_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zy}}{\partial x} & \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zz}}{\partial x} \\ \frac{\partial A_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial A_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial A_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xz}}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot$$

Se si vogliono scrivere in modo formale le componenti di $\text{rot } \underline{A}$, occorre considerare che lo sviluppo del determinante simbolico che fornisce $\text{rot}(\underline{A} \underline{b})$:

$$\text{rot}(\underline{A} \underline{b}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (\underline{A} \underline{b})_x & (\underline{A} \underline{b})_y & (\underline{A} \underline{b})_z \end{vmatrix},$$

condurre alle componenti:

$$(\text{rot}(\underline{A} \underline{b}))_i = \sum_{hk} e_{ihk} \frac{\partial (\underline{A} \underline{b})_k}{\partial x_h},$$

dove e_{ihk} è il simbolo di permutazione. Si ha

allora:

$$\begin{aligned} \sum_j (\text{rot } \underline{A})_{ij} b_j &= (\text{rot}(\underline{A} \underline{b}))_i = \\ &= \sum_{jhk} e_{ihk} \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_h} b_j, \end{aligned}$$

da cui si ottiene infine:

$$(\text{rot } \underline{A})_{ij} = \sum_{hk} e_{ihk} \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_h}.$$

Confrontando l'espressione di $\text{grad } \underline{f}$, scritta in funzione delle componenti di $\underline{\varepsilon}$, con l'espressione di $\text{rot } \underline{A}$, è evidente che risulta:

$$\text{grad } \underline{f} = \text{rot } \underline{\varepsilon}.$$

Tale uguaglianza si può scrivere in componenti:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (\text{rot } \underline{\varepsilon})_{ij} = \sum_{hk} e_{ihk} \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_h}.$$

La condizione di invertibilità nell'ordine della derivazione delle componenti di \underline{f} può scriversi

allora:

$$\frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{ih}}{\partial x_k} - \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{ik}}{\partial x_h} = 0.$$

Per l'indice i generico si hanno tre equazioni indipendenti in corrispondenza, per esempio, degli indici $(h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{iz}}{\partial y} - \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{iy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{ix}}{\partial z} - \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{iz}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{iy}}{\partial x} - \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{ix}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

che si possono compendiarne nell'unica scrittura:

$$\sum_{hk} e_{jkh} \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{ih}}{\partial x_k} = 0,$$

dove l'indice $j \equiv x$ genera l'equazione con $(h, k) \equiv (z, y)$ e così via.

Il tensore di incompatibilità \underline{R} risulta allora definito dalla relazione:

$$R_{ij} = \sum_{hk} e_{ihk} \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{jk}}{\partial x_h}.$$

Ricordando l'espressione in componenti del rotore di un tensore risulta anche:

$$R_{ij} = \sum_{hk} e_{ihk} \frac{\partial(\text{rot } \underline{\varepsilon})_{kj}^T}{\partial x_h} = \left(\text{rot} \left\{ (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \right\} \right)_{ij}.$$

per cui:

$$\underline{R} = \text{rot} \left\{ (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \right\}.$$

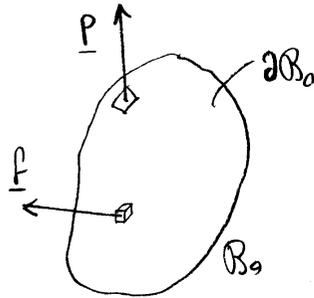
Come già detto, le equazioni di compatibilità sono equivalenti all'annullamento di \underline{R} e quindi:

$$\text{rot} \left\{ (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \right\} = \underline{0}.$$

9.2 Soluzione del problema elastico col metodo delle forze

Incongnita: Tensore degli sforzi $\underline{\sigma}^*$ equilibrato con \underline{p} e \underline{f} ,
cioè tale che:

$$\begin{cases} \text{div } \underline{\sigma}^* + \underline{f} = \underline{0} & \text{in } B_0 \\ \underline{\sigma}^* \underline{n} = \underline{p} & \text{su } \partial B_0 \end{cases}$$



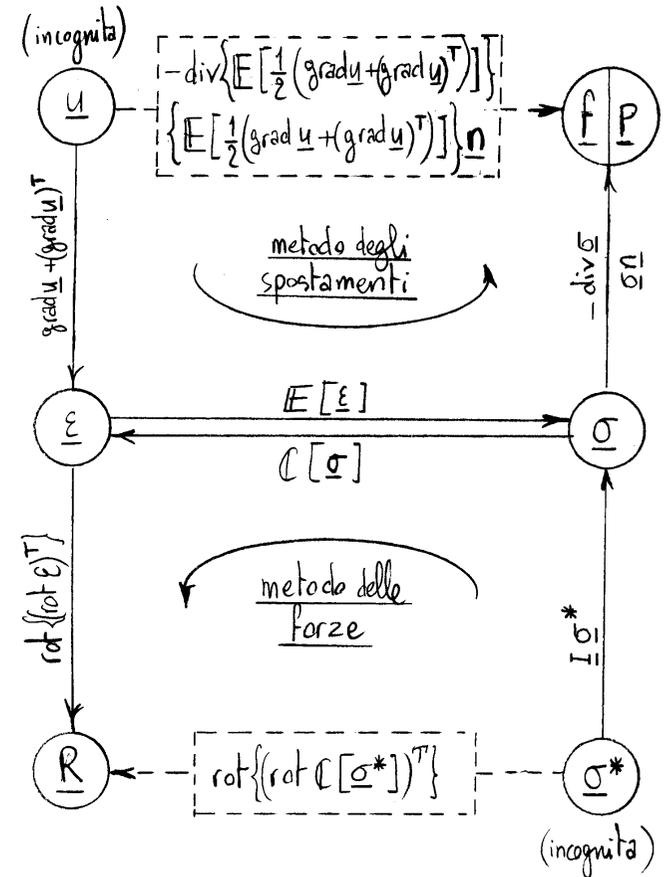
Termini noti: forze di volume \underline{f} e di superficie \underline{p} .

Equazione fondamentale (equazione di Michell nel caso di elasticità lineare isotropa, equazione di Beltrami se inoltre $\underline{f} = \underline{0}$):

$$\underline{R}^* = \underline{0},$$

dove \underline{R}^* è il tensore di incompatibilità corrispondente

dovuto a $\mathbb{C}[\underline{\sigma}^*]$.



$\underline{\sigma}^* \equiv$ Tensore degli sforzi equilibrato con \underline{p} e \underline{f}

$\underline{R} \equiv$ Tensore di incompatibilità

9.3 Equazioni di Beltrami

Rappresentano le equazioni di congruenza scritte in funzione del tensore degli sforzi, nell'ipotesi di forze di volume nulle ($\underline{f} = \underline{0}$).

Equazioni di congruenza:

$$(1) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right) = 0.$$

Legame costitutivo elastico lineare isotropo:

$$(2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \text{tr} \underline{\sigma} \right\}.$$

Si ottiene:

$$(3) \quad (1+\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right) \right\} = \\ = \nu \left\{ \left(\delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_k} - \delta_{jh} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\delta_{ik} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_h} - \delta_{jk} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right) \right\}.$$

Se si fanno variare gli indici i, j, h, k su tutti i possibili valori x, y, z si ottengono 81 equazioni. Affinchè tali equazioni siano significative occorre che sia $i \neq j$ e $h \neq k$. In corrispondenza delle scelte

$$(i, j), (h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, x),$$

si generano le 9 equazioni su cui ci siamo basati in precedenza per definire il tensore di incompatibilità \underline{R} . Invertendo prima i valori di i e j , poi i valori di h e k ed infine sia i valori di i e j che di h e k si ottengono 3 gruppi di 9 equazioni coincidenti con le precedenti. Tutte le possibili combinazioni con $i=j$ oppure $h=k$ generano 45 equazioni identicamente soddisfatte.

Vogliamo sostituire le equazioni del tipo (3) con delle equazioni equivalenti ottenute combinando linearmente le equazioni (3). A tale scopo, si sommano tra loro, per ogni scelta degli indici i e h , le 3 equazioni corrispondenti ad uguali valori degli indici j e k :

$$(4) \quad (1+\nu) \sum_i \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_j \partial x_h} + \frac{\partial^2 \sigma_{jj}}{\partial x_i \partial x_h} \right\} \\ = \nu \sum_j \left\{ \delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_h} + \delta_{ji} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right\}.$$

Se $i \neq h$, le coppie (i, j) e (h, k) rientrano tra i valori significativi solo per quel valore, unico, di $j=k$ che è contemporaneamente diverso sia da i che da h . Questo significa che la (4) in tal caso è equivalente ad un'unica equazione significativa del tipo (3). Invertendo i valori di i e di h , la situazione non cambia, poiché in tal caso l'unica equazione significativa è la simmetrica della precedente. Se, per esempio, $i \equiv x$, $h \equiv y$ allora le coppie significative diventano $(i, j) \equiv (x, z)$ e $(h, k) \equiv (y, z)$, e queste generano la stessa equazione generata dalla scelta $(i, j) \equiv (x, z)$ e $(h, k) \equiv (z, y)$.

Se poi $i \equiv y$ e $h \equiv x$, allora le coppie significative sono $(i, j) \equiv (y, z)$ e $(h, k) \equiv (x, z)$, che forniscono la stessa equazione generata dalla scelta $(i, j) \equiv (z, y)$ e $(h, k) \equiv (x, z)$, simmetrica della scelta precedente.

Se invece $i=h$ allora le coppie (i, j) ed (h, k) hanno due valori significativi, quelli in cui $j=k$ acquista i due valori diversi da $i=h$. Le coppie (i, j) ed (h, k) sono uguali. L'equazione (4) equivale in tal caso ad una combinazione di due equazioni significative del tipo (3) corrispondenti alle due possibili scelte $(i, j) \equiv (h, k)$. In corrispondenza delle tre possibili scelte $i \equiv h \equiv x$, $i \equiv h \equiv y$, $i \equiv h \equiv z$, le tre equazioni generate dalle coppie $(i, j) \equiv (h, k) \equiv (z, y)$, $(i, j) \equiv (h, k) \equiv (z, z)$ e infine $(i, j) \equiv (h, k) \equiv (y, x)$ vengono quindi combinate tra loro in tutti i modi possibili.

Si ottengono così 3 equazioni equivalenti. Le (4) sono dunque equivalenti alle (3).

Risulta:

$$\sum_j \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial z^2} = \nabla^2 \sigma_{ih},$$

dove ∇^2 rappresenta il laplaciano, Inoltre:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \underline{\sigma})_h = -\frac{\partial f_h}{\partial x_i} = 0,$$

e analogamente:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j \partial x_h} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_h} = 0.$$

Infine:

$$\sum_j \frac{\partial^2 \sigma_{jj}}{\partial x_i \partial x_h} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_h} \left(\sum_j \sigma_{jj} \right) = \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h},$$

$$\sum_j \delta_{ih} \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_j} = \delta_{ih} (\nabla^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}),$$

$$\sum_j \delta_{ih} \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h},$$

$$\sum_j \delta_{ij} \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_h} = \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h},$$

$$\sum_j \delta_{jj} \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} = 3 \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h}.$$

La (4) diventa allora:

$$(1+\nu) \left\{ \nabla^2 \sigma_{ih} + \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right\} = \nu \left\{ \delta_{ih} \nabla^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right\},$$

ad anche:

$$(5) \quad (1+\nu) \nabla^2 \sigma_{ih} + \frac{\partial^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} = \nu \delta_{ih} \nabla^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma}.$$

Vogliamo ora mostrare che, sempre sotto l'ipotesi

$\underline{f} = 0$, risulta:

$$\nabla^2 \operatorname{tr} \underline{\sigma} = 0.$$

A questo scopo si sommano le equazioni (5) sugli indici i e h , il che equivale a sommare tra loro 3

equazioni del tipo (5):

$$(1+\nu) \left\{ \nabla^2 (\sum_h \sigma_{hh}) + \sum_h \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_h^2} \right\} \\ = \nu \left\{ (\sum_h \delta_{hh}) \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \sum_h \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_h^2} \right\}$$

Questa diventa:

$$(1+\nu) \left\{ \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} \right\} \\ = \nu \left\{ 3 \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} \right\},$$

e si ottiene:

$$2(1-\nu) \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} = 0.$$

In fine, poiché $\nu < 1$, si ottiene quanto volevasi dimostrare.

Utilizzando tale risultato nella (5) si ottengono infine le equazioni di Beltrami:

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_{ih} + \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} = 0, \quad (i, h \equiv x, y, z).$$

Capitolo 10

Criteri di snervamento

10.1 Superficie di snervamento

La superficie di snervamento o di plasticizzazione, detta anche superficie di danneggiamento nel caso dei materiali fragili, definita nello spazio delle tensioni, rappresenta quella superficie che contiene gli stati tensionali ai quali corrisponde un comportamento elastico del materiale. Tale superficie sarà individuata da una equazione del tipo:

$$f(\underline{\sigma}) = 0,$$

e per l'appartenenza al dominio elastico si richiederà la condizione:

$$f(\underline{\sigma}) < 0.$$

La funzione f è detta funzione di snervamento. Il punto $\underline{\sigma} = \underline{0}$, origine dello spazio delle tensioni,

rappresenta lo stato naturale. A tale punto si richiede di appartenere al dominio elastico. Un'altra ipotesi comunemente accettata richiede che la superficie di snervamento sia convessa.

10.2 Snervamento isotropo

È normalmente accettata l'ipotesi che i materiali abbiano un comportamento isotropo rispetto al raggiungimento del limite di elasticità.

Questo fatto comporta che la funzione di snervamento dipende da $\underline{\sigma}$ solo attraverso i suoi valori principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, poiché, per l'ipotesi di isotropia, il materiale è insensibile ad una rotazione delle direzioni principali. La funzione di snervamento diventa quindi una funzione di tre variabili ed è possibile descrivere la superficie di snervamento nello spazio (tridimensionale) delle

teusioni principali, detto anche spazio di Haigh-Westergaard:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Si noti che è sempre possibile ruotare tre assi ortogonali non orientati su altri tre assi ortogonali qualunque sia la corrispondenza prescelta fra le due terne di assi. Una conseguenza di tale fatto è che non può avere importanza l'ordine in cui i valori principali sono dati. La f deve dunque essere invariante se si permutano i valori principali tra loro. Questo equivale anche a dire che un tensore degli sforzi, e gli infiniti tensori degli sforzi che hanno gli stessi valori principali di questo, sono rappresentati nello spazio delle teusioni principali da più di un punto, 6 punti se i valori principali sono tutti diversi tra loro (pari alle 6 permutazioni delle tre componenti principali), 3 punti se

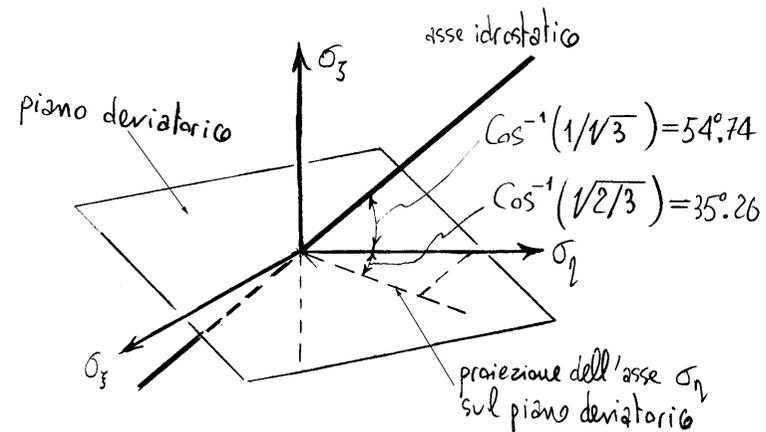
due valori principali sono uguali, 1 punto se lo stato teusionale è sferico.

10.3 Asse idrostatico e piano deviatorico

Gli stati teusionali sferici o isotropi hanno i tre valori principali coincidenti e sono quindi individuati nello spazio delle teusioni principali dalla retta:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

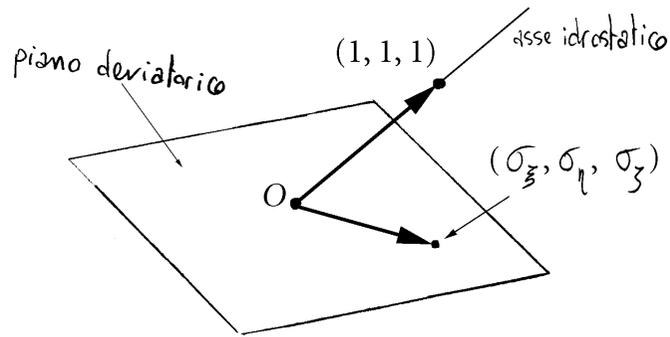
retta passante per l'origine degli assi e coincidente con l'asse dell'ottante positivo dello spazio. Tale retta



è detta asse idrostatico o ottaedrico ed ha uguale inclinazione rispetto ai tre assi di riferimento. I suoi coseni direttori valgono dunque $1/\sqrt{3}$, e di conseguenza il coseno direttore tra un asse e la sua proiezione sul piano ortogonale all'asse idrostatico vale $\sqrt{2/3}$.

Il piano passante per l'origine ed ortogonale all'asse idrostatico ha equazione:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0.$$



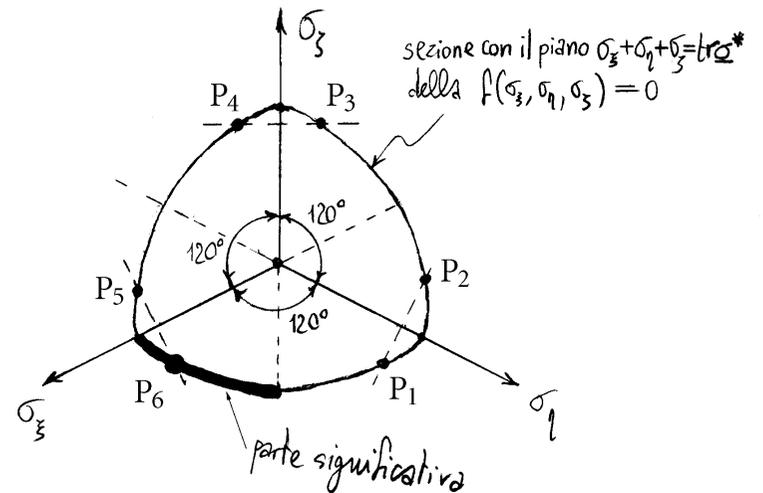
Tale piano rappresenta dunque gli stati tensionali a traccia nulla o deviatorici. Per tale motivo è detto piano deviatorico.

Si noti che proiezioni degli assi di riferimento sul piano deviatorico formano tra loro angoli di 120° .

Un tensore sferico è rappresentato da un punto dell'asse idrostatico. Un qualunque altro tensore $\underline{\sigma}^*$ è rappresentato da 6 punti (oppure 3 se due valori principali sono uguali) che individuano un piano, parallelo al piano deviatorico, di equazione:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{tr} \underline{\sigma}^*.$$

Poiché l'asse idrostatico, perpendicolare a tale piano, è ugualmente inclinato rispetto ai tre assi coordinati,



c'è simmetria rispetto al piano passante per un asse coordinato e per l'asse idrostatico. Ne consegue che

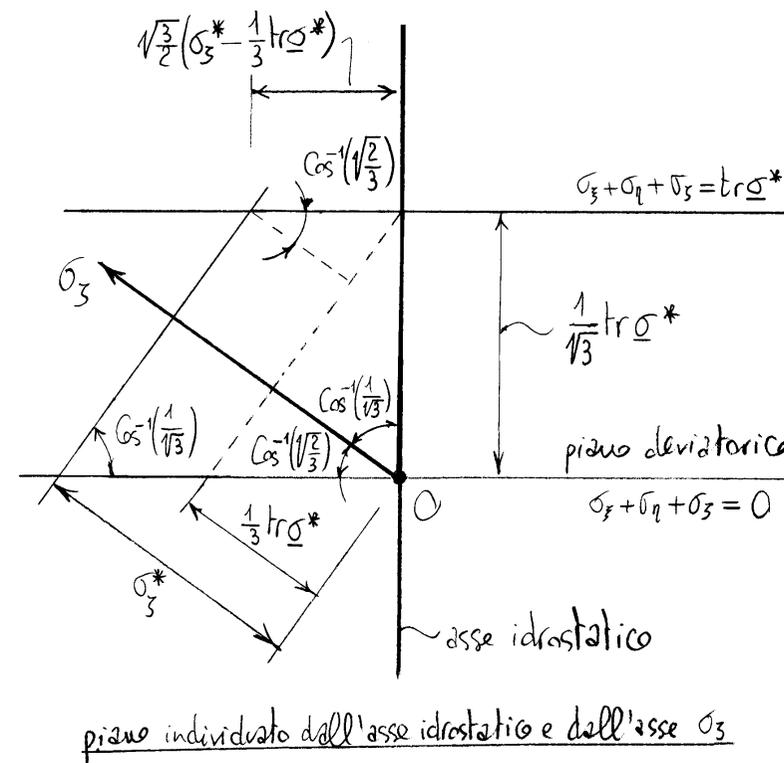
i 6 punti devono trovarsi 2 a 2 in posizione simmetrica rispetto alle proiezioni degli assi (sulle proiezioni degli assi se due valori principali sono uguali), ed inoltre devono sovrapporsi gli uni agli altri per rotazioni di 120° del piano attorno all'asse idrostatico.

Ne consegue che la sezione della superficie di snervamento con un qualunque piano parallelo al piano deviatorico è simmetrica rispetto alle proiezioni degli assi sul piano ed invariante per rotazioni di 120° attorno all'asse idrostatico. Il che poi equivale a dire che solo un sesto della superficie di snervamento è veramente significativa, rappresentando le parti restanti gli stessi stati tensionali.

10.4 Coordinate sul piano deviatorico

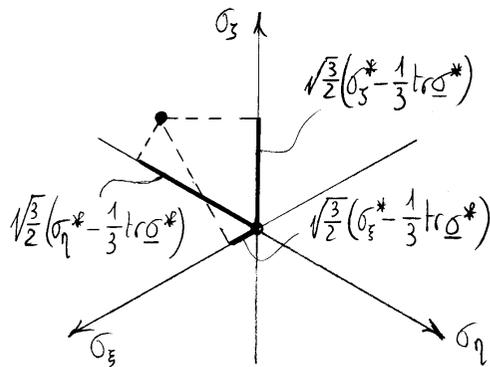
Un punto rappresentativo di uno stato tensionale $\underline{\sigma}^*$ può essere individuato, sul piano parallelo a quello deviatorico

e passante per esso, dalle distanze che esso ha dall'asse idrostatico, misurate, con segno, lungo le proiezioni degli assi. Per valutare tali distanze si noti che un piano passante per il punto ed ortogonale ad un asse di riferimento interseca il piano contenente il punto in una retta ortogonale alla proiezione dell'asse. Ricordando che il coseno dell'angolo



tra un asse coordinata e il piano deviatorico vale $\sqrt{2/3}$
 si ottengono le distanze cercate:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_1^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^*), \\ \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_2^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^*), \\ \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_3^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^*). \end{cases}$$



Si noti che tali distanze individuano su piano deviatorico i punti rappresentativi della parte deviatorica di $\underline{\sigma}^*$. Stati tensionali aventi la stessa parte deviatorica sono rappresentati quindi da punti che stanno su una retta parallela all'asse idrostatico.

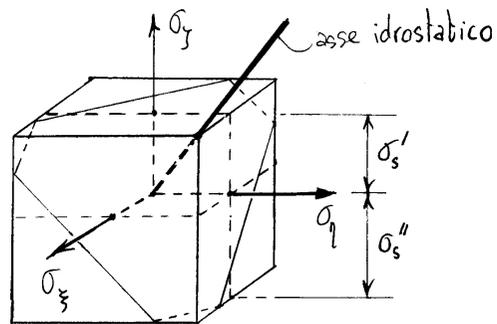
10.5 Criterio della massima tensione normale o di Rankine

Si assume che lo snervamento venga raggiunto quando la massima tensione normale a trazione (o compressione) eguaglia la tensione di snervamento a trazione (o compressione). Se σ_1, σ_2 e σ_3 sono le tensioni principali associate ad un generico tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$, il criterio equivale ad assumere la seguente superficie di snervamento:

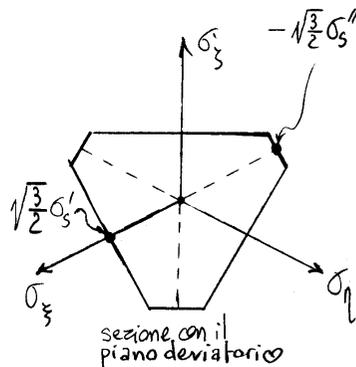
$$\begin{cases} \max \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} = \sigma_s' \\ \min \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} = -\sigma_s'' \end{cases}$$

dove σ_s' e σ_s'' sono le tensioni di snervamento a trazione e a compressione rispettivamente.

La superficie di snervamento si rappresenta dunque come un cubo di lato $\sigma_s' + \sigma_s''$ avente le facce parallele agli assi coordinati e distanti dal centro



degli assi di σ_s' nel verso positivo e di σ_s'' nel verso negativo. La sezione deviatorica è rappresentata invece da un esagono a lati diseguali (uguali solo se $\sigma_s' = \sigma_s''$) oppure da un triangolo equilatero nel caso il modulo $|\sigma_s' - \sigma_s''|$ sia superiore ad una certa soglia.



Il criterio di snervamento di Rankine, uno dei primi proposti, viene utilizzato nella modellizzazione dei materiali fragili e in particolare delle murature. Viene anche utilizzato, in congiunzione con altri criteri di snervamento, per limitare le tensioni di trazione in materiali che presentano una scarsa resistenza a trazione. In tal caso si impone la sola condizione sulle tensioni di trazione, mentre il comportamento sotto tensioni di compressione è retto da un secondo criterio di snervamento.

10.5.1 Appendice (criterio della massima dilatazione o di Grashof)

Il criterio di Grashof ha un'importanza esclusivamente storica. Rappresenta il criterio duale di quello di Rankine, assumendo che lo snervamento venga raggiunto quando la massima dilatazione principale (oppure la minima) uguaglia la massima dilatazione a trazione (oppure quella a compressione) che si ha nella prova monoassiale. Dette $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ le dilatazioni principali associate alle tensioni principali $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, si ha:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} \quad i = x, y, z.$$

Poiché le massime dilatazioni a trazione e compressione valgono:

$$\begin{cases} \varepsilon'_s = \frac{1}{E} \sigma'_s \\ \varepsilon''_s = \frac{1}{E} \sigma''_s \end{cases},$$

la superficie di snervamento ha equazione:

$$\begin{cases} \max_{i=x,y,z} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} = \sigma'_s \\ \min_{i=x,y,z} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} = -\sigma''_s \end{cases}.$$

Le equazioni:

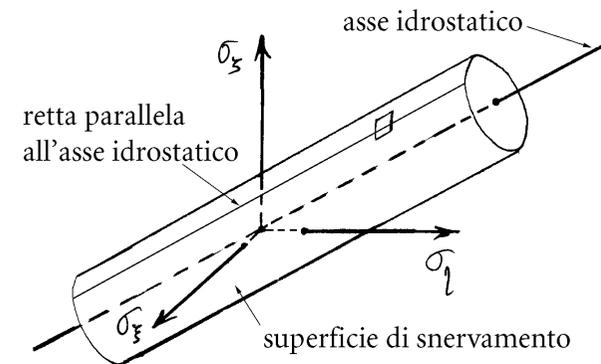
$$\begin{cases} (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} = \sigma'_s \\ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} = -\sigma''_s \end{cases}, \quad i = x, y, z,$$

definiscono 3 coppie di piani paralleli, non ortogonali tra loro se $\nu \neq 0$. Infatti le componenti delle normali a tali piani sono proporzionali alle tre terne di valori $(1, -\nu, -\nu)$, $(-\nu, 1, -\nu)$, $(-\nu, -\nu, 1)$ ed il prodotto scalare tra due di tali normali è dunque proporzionale a $-\nu(2-\nu)$.

10.6 Criteri di snervamento per i materiali metallici

Nel caso dei materiali metallici, le prove sperimentali mostrano che, con buona approssimazione, il limite di snervamento non viene modificato dalla sovrapposizione di un moderato stato sferico di tensione. Si assume allora che il limite di snervamento sia indipendente dalla parte sferica dello sforzo, oppure, in altri termini, che dipenda solo dalla parte deviatorica. Poiché gli sforzi su rette parallele all'asse idrostatico hanno uguale parte deviatorica, ne consegue che se un punto appartiene alla superficie di snervamento allora anche la retta parallela all'asse idrostatico per il punto appartiene alla superficie. La superficie di snervamento può allora essere generata da una retta parallela all'asse idrostatico che si muove usando quale direttrice l'intersezione della superficie con il piano deviatorico. Si può quindi affermare che la superficie di snervamento è rappresentata da un cilindro con asse coincidente con l'asse idrostatico e che è quindi completamente determinata dalla sua intersezione col piano deviatorico o con un qualunque piano parallelo a questo. Inoltre, dato che ai fini dello snervamento conta solo la parte deviatorica della tensione, un tensore degli sforzi si troverà sulla superficie di snervamento se la sua parte deviatorica si trova sull'intersezione della superficie con il piano deviatorico.

I materiali metallici sono in genere anche caratterizzati da un ugual comportamento a trazione e a compressione, ovvero da un uguale valore per i limiti di snervamento a

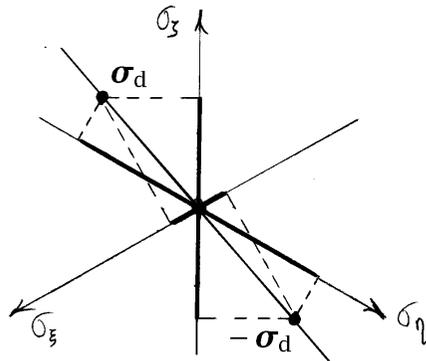


trazione σ'_s e a compressione σ''_s :

$$\sigma'_s = \sigma''_s = \sigma_s.$$

Tale proprietà equivale a dire che per uno stato di tensione monoassiale il cambiamento di segno della tensione non influenza lo snervamento. Estendendo tale proprietà, si richiede, più in generale, che la superficie di snervamento sia invariante sotto un cambiamento di segno della tensione, ovvero che se una tensione σ appartiene alla superficie di snervamento allora gli appartiene anche la tensione opposta $-\sigma$. Si consideri allora l'intersezione della superficie di snervamento col piano deviatorico. Se una tensione σ sta sulla superficie di snervamento allora la sua parte deviatorica σ_d appartiene all'intersezione col piano deviatorico, così come $-\sigma_d$, parte deviatorica di $-\sigma$. Le parti deviatoriche σ_d e $-\sigma_d$ sono polar-simmetriche rispetto all'intersezione dell'asse idrostatico col piano deviatorico, cioè si ottengono l'una dall'altra tramite

una rotazione di 180° attorno a tale intersezione. Ne consegue che la superficie di snervamento è invariante per rotazioni di 180° attorno all'asse idrostatico. Essendo già invariante per rotazioni di 120°, se ne deduce infine, combinando due rotazioni di 120° con una di 180°, che è invariante anche per rotazioni di 60°.



Si consideri ora che la superficie di snervamento deve passare per i 6 punti rappresentanti lo snervamento a trazione e compressione. Si ricordi che la parte deviatorica σ_d di un tensore degli sforzi σ vale:

$$\sigma_d = \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I},$$

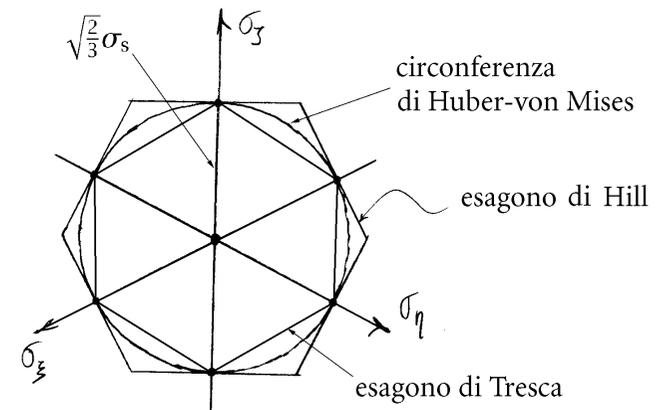
e che i suoi valori principali sono:

$$\sigma_{\xi}^d = \sigma_{\xi} - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \sigma_{\eta}^d = \sigma_{\eta} - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \sigma_{\zeta}^d = \sigma_{\zeta} - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma.$$

Per quel che riguarda lo snervamento a trazione, un valore principale vale σ_s e gli altri due sono nulli. La traccia coinci-

de quindi con σ_s e un valore principale deviatorico vale $\frac{2}{3}\sigma_s$ mentre gli altri due valgono $-\frac{1}{3}\sigma_s$. I tre punti corrispondenti sono dunque posti sulle proiezioni degli assi di riferimento, nella direzione positiva, alla distanza $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\sigma_s\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ dall'asse deviatorico. Stessa considerazione per quel che riguarda lo snervamento a compressione, per cui i tre punti corrispondenti sono posti sulle proiezioni degli assi di riferimento, nella direzione negativa, alla distanza $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ dall'asse deviatorico.

Si noti che esistono due esagoni regolari passanti per i 6 punti corrispondenti allo snervamento monoassiale, uno dei quali contiene l'altro, e che soddisfano tutte le condizioni richieste per la superficie di snervamento. Il criterio di snervamento associato all'esagono interno prende il nome di *criterio di snervamento di Tresca*, mentre quello associato all'esagono esterno prende il nome di *criterio di snervamento di Hill*. Si noti poi che, sotto l'ipotesi di convessità della superficie di snervamento, un qualunque criterio di snervamento accettabile deve essere rappresentato da un dominio di elasticità che



contiene il dominio di Tresca e che è contenuto nel dominio di Hill. Una tra le superfici di snervamento intermedie è quella che interseca il piano deviatorico in una circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$. L'esagono di Tresca risulta essere inscritto a tale circonferenza mentre l'esagono di Hill risulta essere circoscritto. Il criterio di snervamento associato alla circonferenza prende il nome di *criterio di snervamento di Huber-von Mises* e rappresenta il più semplice criterio di snervamento per i materiali metallici.

I risultati delle prove sperimentali eseguite su materiali metallici risultano a favore del criterio di Tresca.¹ D'altra parte, i tre criteri (di Huber-von Mises, di Tresca e di Hill) differiscono di quantità che da un punto di vista ingegneristico possono a volte essere trascurabili. Ne consegue che la decisione di quale criterio applicare può a volte dipendere anche da ragioni di convenienza, e, come già detto, in molti casi il criterio di Huber-von Mises è senz'altro il più semplice da un punto di vista analitico, soprattutto se si deve studiare l'evoluzione del flusso plastico susseguente lo snervamento.

10.6.1 Criterio di snervamento di Huber-von Mises

Si vuole innanzitutto ricavare l'equazione della superficie di snervamento individuata dalla circonferenza del criterio di Huber von Mises. Se la parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ della tensione sta, nel piano deviatorico, sulla circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ e centro l'origine degli assi deve risultare:

$$\left(\sigma_\xi - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\right)^2 + \left(\sigma_\eta - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\right)^2 + \left(\sigma_\zeta - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\right)^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

¹Tale criterio fu infatti proposto da Tresca nel 1864 per interpretare una serie di dati sperimentali.

Sviluppando si ottiene:

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{3} (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) \text{tr } \boldsymbol{\sigma} + \frac{3}{9} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

Tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2 &= (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta)^2 = \\ &= \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 + 2 (\sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi), \end{aligned}$$

si ottiene poi:

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2 - 2 (\sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi) - \frac{2}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

Ricordando che il secondo invariante di tensione σ_{II} vale:

$$\sigma_{II} = (\sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi),$$

si ha infine:

$$(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} = \sigma_s^2.$$

che rappresenta l'equazione della superficie di snervamento del criterio di Huber-von Mises.

Il criterio di Huber-von Mises ha una interpretazione particolare, dovuta a Hencky¹ e riportata nel seguito:

Criterio dell'energia di deformazione distortore (Hencky).

Lo snervamento viene attinto quando l'energia di deformazione distortore per unità di volume associata alla tensione

¹Per tale motivo il criterio è a volte citato quale criterio di Huber-von Mises-Hencky. Esso fu introdotto da Huber nel 1904 per le sole tensioni principali negative e nella forma completa da von Mises nel 1913. L'interpretazione di Hencky risale al 1924.

uguaglia l'energia di deformazione distorcente per unità di volume che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale.

L'energia di deformazione distorcente rappresenta l'energia di deformazione associata alla sola parte deviatorica dello sforzo:

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{I}.$$

In tal modo lo snervamento viene reso indipendente dalla parte sferica dello sforzo:

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3}(\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{I}.$$

Il criterio di Huber-von Mises, nella formulazione energetica sopra esposta, rappresenta una variante di un criterio dovuto a Beltrami, nel quale si richiede a tutta l'energia elastica associata allo sforzo di uguagliare tutta l'energia elastica che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale. Il criterio di Beltrami non trova modernamente alcuna applicazione, salvo l'utilizzo per i materiali metallici porosi (che presentano diverse resistenze a trazione e

compressione), per il conglomerato di cemento e per le terre di superfici di snervamento simili a quella che si ottiene dal criterio di Beltrami.

Per esplicitare la formulazione energetica del criterio ricordiamo che l'energia di deformazione nella forma complementare si scrive:

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ (1+\nu) \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma} - \nu (\text{tr} \underline{\sigma})^2 \right\}.$$

Questa può essere trasformata osservando che:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma} &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \\ &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ &= (\text{tr} \underline{\sigma})^2 - 2\sigma_{II}, \end{aligned}$$

dove σ_{II} è il secondo invariante di sforzo.

Si ottiene, in definitiva, la forma dell'energia:

$$\Psi = \frac{1}{2E} (\text{tr} \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II},$$

scritta in termini di invarianti dello sforzo. Si noti

che il terzo invariante, il $\det \underline{\sigma}$, non può comparire in tale espressione, dovendo questa essere una forma quadratica, quale conseguenza della linearizzazione del problema elastico.

Ricordando che la traccia della parte deviatorica dello sforzo è nulla:

$$\text{tr } \underline{\sigma}_d = 0,$$

l'energia distortante associata ad un generico sforzo $\underline{\sigma}$ risulta:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = -\frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}^d,$$

dove σ_{II}^d è il secondo invariante della parte deviatorica dello sforzo:

$$\begin{aligned} \sigma_{II}^d &= \left(\sigma_1 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \left(\sigma_2 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \\ &+ \left(\sigma_2 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \left(\sigma_3 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \\ &+ \left(\sigma_3 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) \left(\sigma_1 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}\right) = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \text{tr } \underline{\sigma} + \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 \\ &= \sigma_{II} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma})^2. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = \frac{1+\nu}{3E} \left\{ (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} \right\}.$$

Il valore Ψ_s dell'energia allo snervamento σ_s si ottiene da tale espressione tenendo conto che all'atto dello snervamento nella prova monoassiale risulta $\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_s$ e $\sigma_{II} = 0$:

$$\Psi_s = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2.$$

La condizione:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = \Psi_s$$

ricoduce quindi all'espressione:

$$(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} = \sigma_s^2.$$

Si noti che il termine $(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II}$ è sempre positivo, rappresentando l'energia di deformazione a meno del coefficiente positivo $(1+\nu)/3E$.

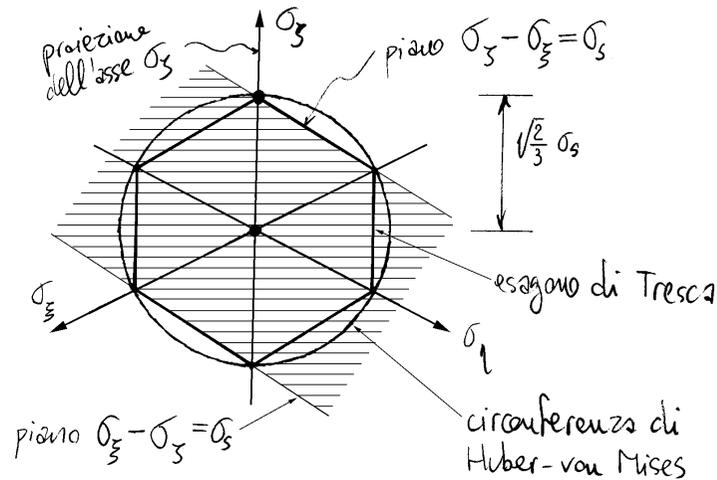
10.6.2 Criterio di snervamento di Tresca

Per ricavare l'equazione della superficie di snervamento associata all'esagono del criterio di Tresca si consideri la coppia di piani paralleli contenenti due facce della superficie, l'uno passante per i punti $(0, 0, \sigma_s)$ e $(-\sigma_s, 0, 0)$ e l'altro per i punti opposti $(0, 0, -\sigma_s)$ e $(\sigma_s, 0, 0)$. I due piani sono ortogonali al piano deviatorico $\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta = 0$ e hanno quindi equazione:

$$\sigma_\xi - \sigma_\zeta = -\sigma_s,$$

$$\sigma_\xi - \sigma_\zeta = \sigma_s.$$

Infatti tali piani passano per i punti predetti come può facilmente essere verificato. Inoltre, dato che il vettore di componenti $(1, 0, -1)$ è ortogonale alla coppia di piani e il vettore di componenti $(1, 1, 1)$ al piano deviatorico risulta verificata l'ortogonalità tra la coppia di piani e il piano deviatorico. Af-



finché la tensione σ si trovi nella striscia individuata dai due piani deve quindi risultare:

$$|\sigma_\xi - \sigma_\zeta| \leq \sigma_s.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due coppie di piani paralleli, si ottengono le seguenti relazioni:

$$|\sigma_\zeta - \sigma_\eta| \leq \sigma_s,$$

$$|\sigma_\eta - \sigma_\xi| \leq \sigma_s.$$

Ne risulta la seguente condizione di appartenenza al dominio elastico:

$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} \leq \sigma_s,$$

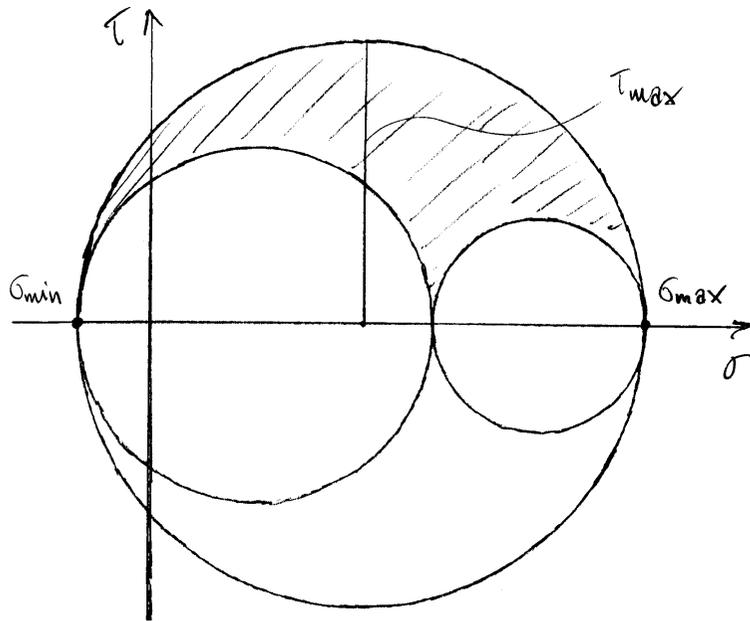
e la seguente equazione per la superficie di snervamento:

$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} = \sigma_s,$$

Si vuole ora mostrare che il criterio descritto sopra coincide con il

Criterio della massima tensione tangenziale. Lo snervamento viene raggiunto quando la massima tensione tangenziale associata al dato stato tensionale uguaglia la massima tensione tangenziale che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale.

Ricordiamo che la massima tensione tangenziale uguaglia il raggio della più grande circonferenza



di Mohr :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2},$$

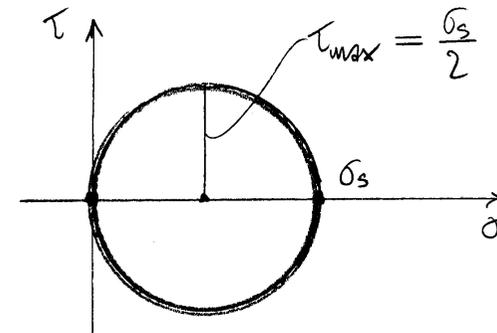
e quindi:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_3 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \}.$$

La tensione tangenziale massima τ_s che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale vale

invece :

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{2}.$$



circonferenza di Mohr relativa alla prova monoassiale

Il criterio di snervamento di Tresca :

$$\tau_{max} = \tau_s,$$

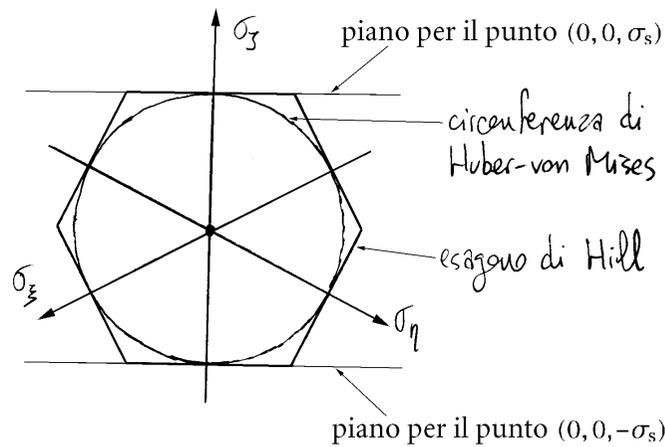
conduce quindi alla seguente superficie di snervamento :

$$\max \{ |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_3 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_s,$$

in accordo con quanto già ottenuto.

10.6.3 Criterio di snervamento di Hill

L'equazione della superficie di snervamento associata all'esagono del criterio di Hill può essere ottenuta in modo analogo a quanto fatto per il criterio di Tresca. Si consideri allora la coppia di piani paralleli ortogonali al piano deviatorico e contenenti due facce della superficie, l'uno passante per il punto $(0, 0, \sigma_s)$ e l'altro per il punto opposto $(0, 0, -\sigma_s)$. Tali piani



devono avere versore normale \mathbf{n} con componente $\sqrt{\frac{2}{3}}$ rispetto all'asse σ_ζ e uguale componente rispetto agli assi σ_ξ e σ_η . Poiché \mathbf{n} deve anche essere ortogonale al vettore di componenti $(1, 1, 1)$ (vettore che è ortogonale al piano deviatorico) si ha:

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix}.$$

Le equazioni dei due piani possono quindi essere messe nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) &= \sigma_s, \\ \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) &= -\sigma_s. \end{aligned}$$

Affinché la tensione $\boldsymbol{\sigma}$ si trovi nella striscia individuata dai

due piani deve quindi risultare:

$$\left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \leq \sigma_s.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due coppie di piani paralleli, ne risulta infine la seguente condizione di appartenenza al dominio elastico:

$$\max \left\{ \left| \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_\zeta + \sigma_\eta) \right|, \left| \sigma_\eta - \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \right|, \left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \right\} \leq \sigma_s,$$

e la seguente equazione per la superficie di snervamento:

$$\max \left\{ \left| \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_\zeta + \sigma_\eta) \right|, \left| \sigma_\eta - \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \right|, \left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \right\} = \sigma_s.$$

10.7 Cenni sui criteri di snervamento per i materiali non metallici

I materiali non metallici (conglomerati cementizi, rocce, mezzi granulari, terre) sono caratterizzati da vuoti e da microfessurazioni che rendono il comportamento del materiale fortemente dipendente dalla componente sferica dello sforzo.

Saranno nel seguito descritti i criteri di Drucker-Prager e di Mohr-Coulomb.

Tra i due criteri illustrati, quello che risulta più aderente ai dati sperimentali è quello di Mohr-Coulomb. Tuttavia, da un punto di vista pratico, i due criteri sono equivalenti.

10.7.1 Criterio di Drucker-Prager

Rappresenta una generalizzazione del criterio di Huber-von Mises. Con tale criterio si aggiunge alla funzione di snervamento di Huber-von Mises un termine dipendente linearmente dalla

componente sferica dello sforzo ottenendo:

$$\alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}} = (\alpha + 1) \sigma_3 \quad .$$

In tale espressione, α rappresenta un parametro costitutivo positivo adimensionale. Notando che su un piano parallelo al piano deviatorico $\operatorname{tr} \underline{\sigma}$ è costante, ne risulta che l'intersezione della superficie di snervamento definita da tale criterio con un piano parallelo a quello deviatorico coincide con una circonferenza di raggio ρ :

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ (\alpha + 1) \sigma_3 - \alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} \} \quad .$$

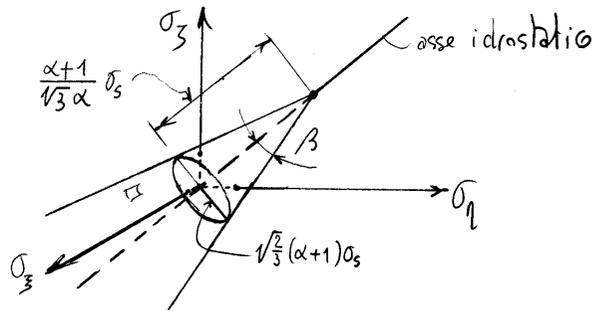
Questo perché se $a = \operatorname{tr} \underline{\sigma}$, l'equazione:

$$\sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}} = (\alpha + 1) \sigma_3 - \alpha a \quad ,$$

con a considerato costante anche al di fuori del piano considerato, rappresenta, come già visto, l'equazione di un cilindro di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}} \{ (\alpha + 1) \sigma_3 - \alpha a \}$.

All'aumentare di $\text{tr } \underline{\sigma}$, il raggio del cerchio diminuisce. La superficie di snervamento è dunque rappresentata da un cono con vertice in corrispondenza del punto posto sull'asse idrostatico individuato dalla condizione $f=0$:

$$\text{tr } \underline{\sigma} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \sigma_s .$$



Tale punto ha coordinate

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\alpha+1}{3\alpha} \sigma_s ,$$

e dista dal centro degli assi della quantità:

$$d = \frac{\alpha+1}{\sqrt{3}\alpha} \sigma_s .$$

Poiché il raggio della circonferenza sul piano deviatorico vale:

$$l_d = \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha+1) \sigma_s ,$$

se ne deduce che la semiapertura β del cono soddisfa la relazione:

$$\text{tg } \beta = \frac{l_d}{d} = \sqrt{2} \alpha .$$

10.7.2 Criterio di Mohr-Coulomb

Si assume che lo snervamento del materiale si sviluppi quando la tensione tangenziale raggiunge in almeno una giacitura un valore limite dipendente linearmente dalla tensione normale alla giacitura:

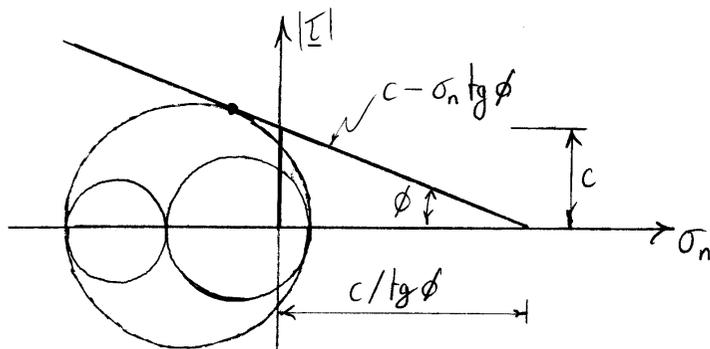
$$|\underline{\tau}| = c - \sigma_n \text{tg } \phi .$$

Il coefficiente di σ_n è messo nella forma $-\text{tg } \phi$ e ϕ è detto angolo di attrito interno. La costante c è detta coesione ed ha le dimensioni di una

tensione. Su una giacitura di normale \underline{n} risulta:

$$\begin{cases} \sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \underline{n} \\ |\underline{\tau}_n|^2 = (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot (\underline{\sigma} \underline{n}) - \sigma_n^2 \end{cases}$$

Il criterio si presta ad essere rappresentato efficacemente nel piano di Mohr. Infatti in tale piano l'equazione limite rappresenta una retta inclinata dell'angolo ϕ , detta retta limite.



Gli stati tensionali limite, quindi appartenenti alla superficie di snervamento, devono avere la circonferenza di Mohr più esterna tangente alla retta limite.

10.8 Verifiche di resistenza alle tensioni ammissibili

Dato un tensore degli sforzi generico:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

lo si vuole trasformare in un tensore degli sforzi monoassiale "equivalente" secondo un qualche "criterio di snervamento":

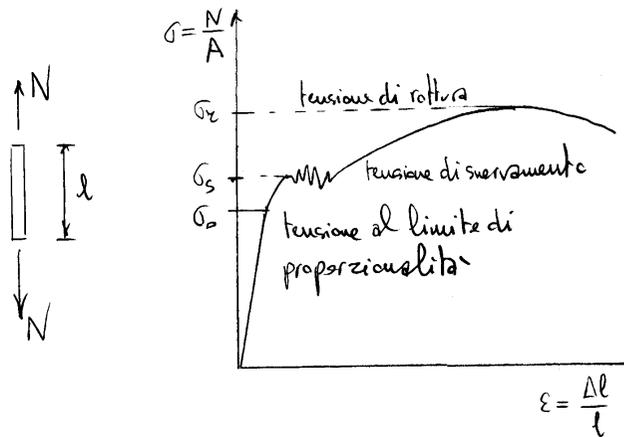
$$[\underline{\sigma}_{eq}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{id} \end{bmatrix},$$

dove σ_{id} indica la cosiddetta tensione normale ideale o, semplicemente, "tensione ideale".

Tale tensione ideale sarà poi confrontata con la tensione ammissibile:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_s}{s},$$

dove σ_s rappresenta la tensione di snervamento nella prova monoassiale ed s il coefficiente di sicurezza.



Se la resistenza del materiale è diversa a trazione e a compressione, si hanno due diverse tensioni ammissibili:

$$\begin{cases} \sigma_a' = \frac{\sigma_s'}{s'} & \text{a trazione,} \\ \sigma_a'' = \frac{\sigma_s''}{s''} & \text{a compressione.} \end{cases}$$

10.8.1 Criterio di Rankine

Il criterio di Rankine rappresenta uno dei primi criteri di resistenza proposti e viene ancora utilizzato per la verifica di resistenza di materiali fragili.

In accordo con la superficie di snervamento già descritta, la tensione ideale vale:

$$\sigma'_{id} = \max \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \quad (\text{a trazione}),$$

$$\sigma''_{id} = \min \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \quad (\text{a compressione}).$$

Verifica:

$$\max \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \leq \sigma_a' \quad (\text{a trazione}),$$

$$\min \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \geq -\sigma_a'' \quad (\text{a compressione}).$$

10.8.2 Criterio di Grashof

Il criterio equivale a porre:

$$\sigma'_{id} = \max_{i=1,2,3} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\},$$

$$\sigma''_{id} = \min_{i=1,2,3} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\}.$$

Verifica:

$$\max_{i=1,2,3} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} \leq \sigma'_a,$$

$$\min_{i=1,2,3} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} \geq -\sigma''_a.$$

10.8.3 Criteri di Huber-von Mises e di Tresca

Il criterio di Huber-von Mises equivale a porre la σ_{id} nella seguente forma:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II}}.$$

Scritta in componenti in un generico sistema di riferimento ortogonale, la σ_{id} diventa:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Il criterio di snervamento di Tresca conduce invece alla seguente tensione ideale:

$$\sigma_{id} = \max \left\{ |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_3 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right\}.$$

La verifica di sicurezza richiede che, per entrambi i criteri, sia soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\sigma_{id} \leq \sigma_a.$$

10.8.4 Esercizio su un campo di spostamenti

Sia dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = 2kxy + kz^2 \\ v = 2kxy + kz^2 \\ w = -2k(x+y)z \end{cases} .$$

1. Determinare le componenti dei tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi.
2. Nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa determinare le componenti del tensore degli sforzi.
3. Nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ determinare inoltre:
 - (a) L'asse e l'entità della rotazione rigida locale;
 - (b) Le direzioni e i valori principali di tensione;
 - (c) La tensione tangenziale massima e la tensione ideale nel caso del criterio di Huber-von Mises.
4. Infine disegnare i cerchi di Mohr relativi al tensore degli sforzi, sempre nei punti del piano di equazione $x - y = 0$, ed indicare i punti rappresentativi degli assi x e y .

Per risolvere l'esercizio occorre innanzitutto determinare il gradiente degli spostamenti:

$$\text{gradu} = \begin{bmatrix} 2ky & 2kx & 2kz \\ 2ky & 2kx & 2kz \\ -2kz & -2kz & -2k(x+y) \end{bmatrix} .$$

I tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi rappresentano poi rispettivamente la parte simmetrica e quella emisimmetrica di $\text{grad } \mathbf{u}$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 2ky & k(x+y) & 0 \\ k(x+y) & 2kx & 0 \\ 0 & 0 & -2k(x+y) \end{bmatrix} ,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & k(x-y) & 2kz \\ -k(x-y) & 0 & 2kz \\ -2kz & -2kz & 0 \end{bmatrix} .$$

Il tensore degli sforzi si ottiene applicando la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left\{ \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \right\} .$$

Poiché $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = 0$, risulta quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2kG \begin{bmatrix} 2y & x+y & 0 \\ x+y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -2(x+y) \end{bmatrix}.$$

Nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ il tensore di rotazione infinitesimo e quello degli sforzi assumono l'espressione:

$$\boldsymbol{\omega} = 2kz \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = 4kGx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore di rotazione infinitesimo ha quindi le componenti:

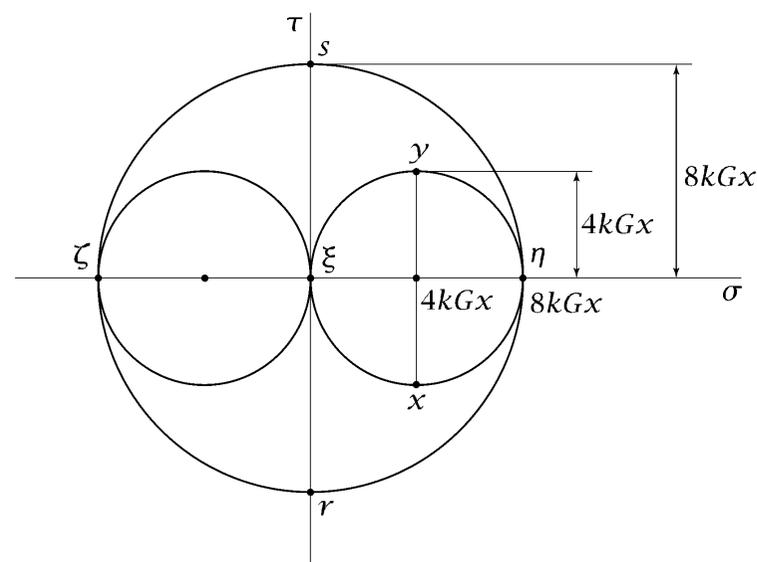
$$\varphi_x = -2kz, \quad \varphi_y = 2kz, \quad \varphi_z = 0.$$

L'asse della rotazione infinitesima nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ giace nel piano xy e la sua parte positiva coincide con la bisettrice del II quadrante. Il suo modulo vale:

$$|\boldsymbol{\varphi}| = 2\sqrt{2}kz.$$

L'asse z rappresenta una direzione principale di tensione a cui corrisponde il valore principale $\sigma_\zeta = -8kGx$. Gli altri due valori principali si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} 4kGx - \sigma & 4kGx \\ 4kGx & 4kGx - \sigma \end{bmatrix} = 0.$$



Si ottiene:

$$\sigma^2 - 8kGx\sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\xi = 0 \\ \sigma_\eta = 8kGx \end{cases}.$$

I versori delle direzioni principali risultano quindi:

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\eta = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

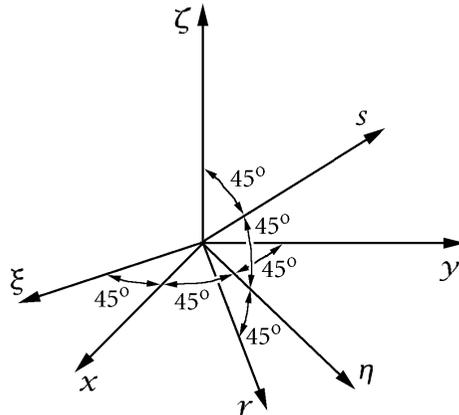
La direzione principale ζ coincide con l'asse z , mentre le direzioni principali ξ e η giacciono sul piano xy e coincidono rispettivamente con le bisettrici del II e del I quadrante.

La tensione tangenziale massima e la tensione ideale del

criterio di Huber-von Mises risultano infine:

$$\begin{cases} \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}}{2} = 8kGx \\ \sigma_1 = 4kGx\sqrt{(1+1+4) - (1-2-2) + 3} = 8\sqrt{3}kGx \end{cases} .$$

Si noti che lo stato tensionale nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ è uno stato di taglio semplice. Infatti, si considerino gli assi r e s nel piano $\eta\zeta$ che si ottengono ruotando l'asse η di -45° e di 45° rispettivamente. Nel riferi-



mento $O\xi r s$ le componenti del tensore degli sforzi valgono allora:

$$\boldsymbol{\sigma} = 8kGx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Riferimenti bibliografici

Gurtin, M. E. (1981) *An Introduction to Continuum Mechanics.*, vol. 158 di *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, San Diego, California.

Kittel, C., Knight, W. D. e Ruderman, M. A. (1970) *La Fisica di Berkeley 1, Meccanica.* Zanichelli, Bologna.

Levi-Civita, T. e Amaldi, U. (1949) *Lezioni di Meccanica Razionale, Volume Primo: Cinematica - Principi e Statica.* Zanichelli, Bologna.

Sedov, L. I. (1971) *A Course in Continuum Mechanics Volume I: Basic Equations and Analytical Techniques.* Wolters-Noordhoff, Groningen.