

Dispense del Corso di  
**MECCANICA DEI SOLIDI**

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

**PARTE SECONDA**

**Teoria tecnica delle travi**

Corsi di Laurea specialistici in  
Ingegneria delle Infrastrutture e dei sistemi di trasporto  
Strutture ed opere dell'ingegneria civile  
Ingegneria edile

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Navale

Trieste, 31 agosto 2007



# Indice

<b>1</b>	<b>Statica e cinematica delle travi</b>	<b>3</b>
1.1	Statica della trave spaziale . . . . .	3
1.1.1	Equazioni indefinite di equilibrio . . . . .	3
1.1.2	Equazioni di discontinuità . . . . .	5
1.1.3	Equazioni di equilibrio al contorno . . . . .	5
1.2	Statica della trave piana . . . . .	6
1.3	Geometria della trave spaziale . . . . .	9
1.4	Cinematica infinitesima della trave spaziale . . . . .	11
1.4.1	Ipotesi di piccoli spostamenti . . . . .	12
1.4.2	Spostamenti dei punti della sezione retta . . . . .	13
1.4.3	Decomposizione degli spostamenti . . . . .	13
1.5	Deformazione . . . . .	14
1.5.1	Spostamento relativo per unità di linea . . . . .	14
1.5.2	Curvatura . . . . .	15
1.5.3	Trave piana ad asse rettilineo . . . . .	16
1.6	Principio dei lavori virtuali . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Legame costitutivo</b>	<b>21</b>
2.1	Dilatazione e scorrimento della generica fibra longitudinale . . . . .	21
2.1.1	Appendice (Trave ad asse curvo) . . . . .	23
2.2	Legame costitutivo elastico lineare . . . . .	24
2.3	Lavoro di deformazione . . . . .	25
2.4	Energia elastica di deformazione . . . . .	26
2.5	Teoremi sul lavoro di deformazione . . . . .	28
2.5.1	Teorema di Clapeyron . . . . .	28
2.5.2	Teorema di Betti . . . . .	30
2.5.3	Teorema di Castigliano . . . . .	32
2.6	Energia potenziale totale . . . . .	36
2.6.1	Variazione del funzionale energia potenziale totale . . . . .	37
2.6.2	Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale . . . . .	40
2.6.3	Principio di minimo dell'energia potenziale totale . . . . .	41
2.7	Teoria tecnica delle travi . . . . .	42
2.7.1	Parte assiale e flessionale . . . . .	43
2.7.2	Parte torcente e tagliante . . . . .	43
2.7.3	Estensione del problema di Saint-Venant . . . . .	46
2.8	Appendice (Legame elastico lineare dedotto dal campo di spostamenti rigidi della sezione retta) . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Problema di Saint-Venant</b>	<b>49</b>
3.1	Schematizzazione della trave nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità . . . . .	49
3.2	Caratteristiche della sollecitazione . . . . .	50
3.3	Principio di Saint-Venant . . . . .	51
3.4	Problema di Saint-Venant . . . . .	53
3.5	Energia complementare elastica . . . . .	56
3.6	Soluzione del problema di Saint-Venant in termini di tensioni . . . . .	56
3.7	Tensioni normali . . . . .	57
3.8	Sforzo normale centrato . . . . .	60
3.9	Flessione retta . . . . .	62
3.10	Equazioni determinatrici delle tensioni tangenziali . . . . .	67
3.11	Appendice (soluzione del problema delle tensioni tangenziali) . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Problema della torsione</b>	<b>75</b>
4.1	Funzione di ingobbamento . . . . .	75
4.2	Fattore torsionale di rigidezza . . . . .	80
4.3	Energia complementare . . . . .	81
4.4	Funzione delle tensioni . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Estensione del problema di Saint-Venant</b>	<b>87</b>
5.1	problema di flessione, taglio e torsione . . . . .	87
5.2	Centro di taglio . . . . .	88
5.3	Energia complementare . . . . .	92
5.4	Legami costitutivi . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Problemi particolari di torsione e taglio</b>	<b>95</b>
6.1	La torsione nelle sezioni rettangolari sottili . . . . .	95
6.2	La torsione nelle sezioni sottili aperte . . . . .	98
6.2.1	Semicirconferenza sottile . . . . .	102
6.2.2	La sezione a C . . . . .	103
6.3	La torsione nelle sezioni sottili chiuse . . . . .	105
6.4	La torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse . . . . .	107

---

6.5	Il taglio nelle sezioni compatte simmetriche . . . . .	109
6.5.1	Sezione rettangolare . . . . .	110
6.5.2	Sezione circolare . . . . .	111
6.6	Il taglio nelle sezioni sottili aperte . . . . .	112
6.6.1	La sezione a C . . . . .	113

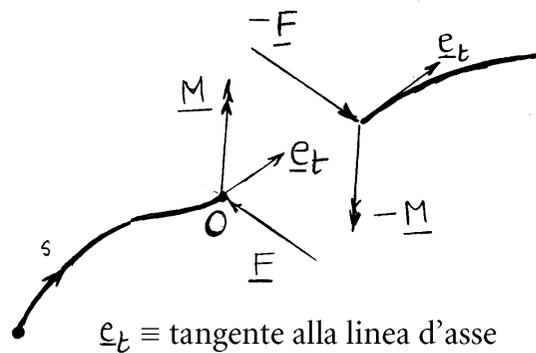
# Capitolo 1

## Statica e cinematica delle travi

### 1.1 Statica della trave spaziale

#### 1.1.1 Equazioni indefinite di equilibrio

Si ricordi che le caratteristiche della sollecitazione rappresentano la risultante  $\underline{F}$  e il momento risultante  $\underline{M}$  agenti sulla faccia della sezione retta di normale uscente positiva, ridotti al punto  $O$  intersezione tra sezione retta e linea d'asse.



Localmente sia la risultante che il momento risultante vengono decomposti in un vettore normale alla sezione retta e in uno giacente nel piano della sezione:

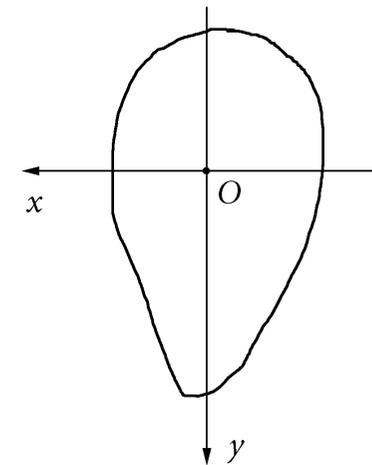
$$\begin{cases} \underline{F} = \underline{T} + N \underline{e}_z \\ \underline{M} = \underline{M}_f + M_t \underline{e}_z \end{cases}$$

dove:

$$\begin{aligned} N &\equiv \text{Sforzo normale} & M_t &\equiv \text{Momento torcente} \\ \underline{T} &\equiv \text{Sforzo tagliante o taglio} & \underline{M}_f &\equiv \text{Momento flettente} \end{aligned}$$

A loro volta le componenti nel piano della sezione possono decomporre secondo le direzioni di due assi cartesiani ortogonali  $x$  e  $y$  prescelti nel piano della sezione retta:

$$\begin{cases} \underline{T} = T_x \underline{e}_x + T_y \underline{e}_y \\ \underline{M}_f = M_x \underline{e}_x + M_y \underline{e}_y \end{cases}$$



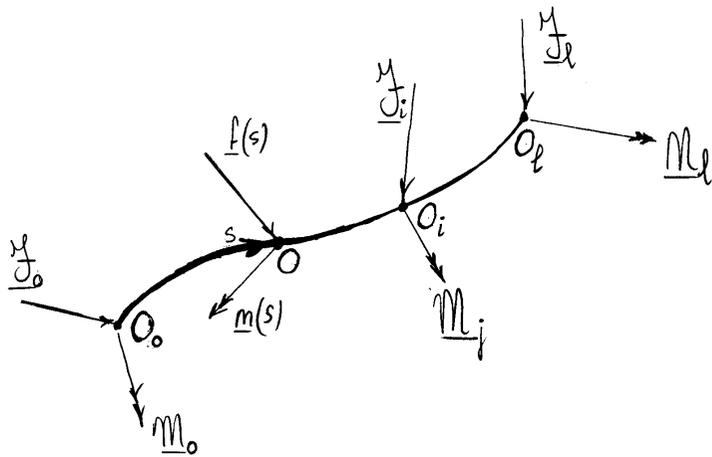
$z \equiv$  asse normale alla sezione

Forze esterne applicate

$\underline{f}(s), \underline{m}(s) \equiv$  forze e coppie distribuite per unita' di linea

$\underline{J}_0, \underline{J}_l, \underline{M}_0, \underline{M}_l \equiv$  forze e coppie concentrate agenti nelle due estremita' (di ascissa  $s=0$  e  $s=l$ ),

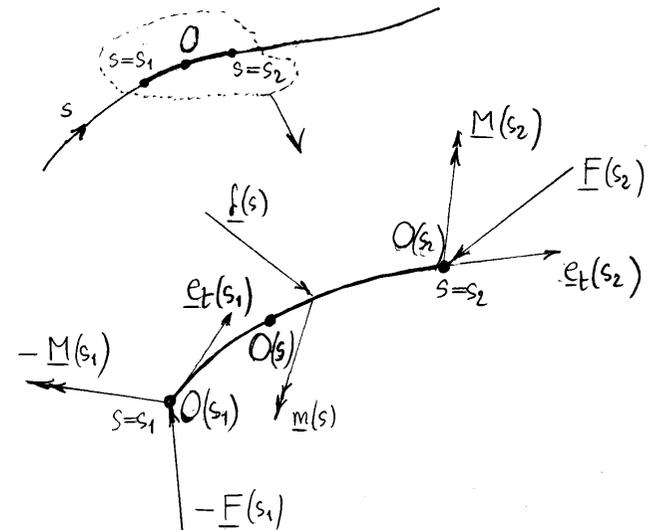
$\underline{J}_i, \underline{M}_i (i=1, \dots, n) \equiv$  Forze e coppie concentrate.



Equazioni indefinite di equilibrio (valide nei punti  $O$  dell'asse dove non sono applicate forze e coppie concentrate)

Equilibrio alla traslazione:

$$\int_{s_1}^{s_2} \underline{f} ds + \underline{F}(s_2) - \underline{F}(s_1) = \underline{0}$$



$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} \right) ds = \underline{0} \quad \text{per ogni } s_1, s_2$$

$$\boxed{\frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} = \underline{0}}$$

Equilibrio alla rotazione (polo C generico)

$$\int_{s_1}^{s_2} \{ \underline{m} + (\underline{O}-\underline{C}) \times \underline{f} \} ds + \underline{M}(s_2) - \underline{M}(s_1) + (\underline{O}(s_2) - \underline{C}) \times \underline{F}(s_2) - (\underline{O}(s_1) - \underline{C}) \times \underline{F}(s_1) = \underline{0}$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{m} + (\underline{O}-\underline{C}) \times \left( \frac{d\underline{E}}{ds} + \underline{f} \right) + \frac{d\underline{O}}{ds} \times \underline{E} \right\} ds = \underline{0},$$

per ogni  $s_1$  e  $s_2$  e quindi:

$$\boxed{\frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{e}_t \times \underline{E} + \underline{m} = \underline{0}}$$

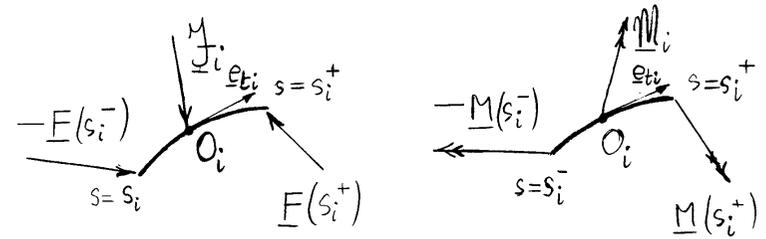
$\left(\frac{d\underline{O}}{ds} = \underline{e}_t\right)$  se  $s$  rappresenta la distanza tra origine e punto generico, distanza misurata lungo l'asse della trave)

### 1.1.2 Equazioni di discontinuità

Punti di applicazione di forze e coppie concentrate

$$\underline{F}(s_i^+) - \underline{F}(s_i^-) + \underline{f}_i = \underline{0}$$

$$\underline{M}(s_i^+) - \underline{M}(s_i^-) + \underline{M}_i = \underline{0}$$



### 1.1.3 Equazioni di equilibrio al contorno

Le caratteristiche della sollecitazione che affiorano alle estremità devono uguagliare le forze applicate. Nella prima sezione di estremità le caratteristiche della sollecitazione sono applicate sulla sezione di normale entrante positiva e dunque le forze applicate rappresentano le caratteristiche cambiate di segno:

$$\begin{cases} \underline{E}(0) = -\underline{F}_0 \\ \underline{M}(0) = -\underline{M}_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{E}(l) = \underline{F}_l \\ \underline{M}(l) = \underline{M}_l \end{cases}$$

## 1.2 Statica della trave piana

Le forze applicate (ridotte ai punti della linea d'asse) e le caratteristiche della sollecitazione appartengono al piano dell'asse (o appartengono tutte ad un piano nel caso l'asse della trave sia rettilineo).

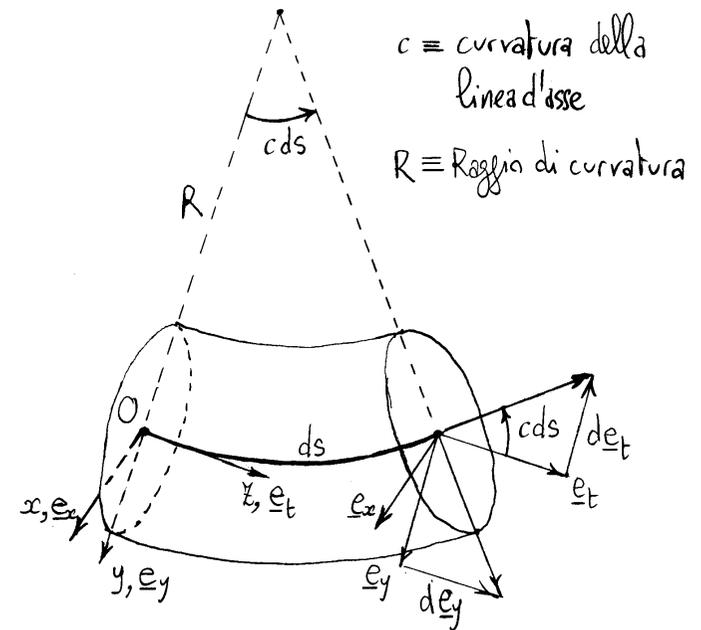
L'analisi seguente è valida sotto l'ipotesi che la tangente alla linea d'asse coincida con la normale alla sezione retta:

$$\underline{e}_t = \underline{e}_z.$$

Questo è senz'altro vero nella configurazione di riferimento, dove l'equilibrio viene scritto nell'ipotesi di piccoli spostamenti. Nella configurazione deformata, dove in generale deve essere scritto l'equilibrio, l'uguaglianza è ancora valida nell'ipotesi di trave inflessa oppure se invece di riferirsi alle sezioni corrispondenti nella deformazione alle sezioni rette di riferimento ci si riferisce in ogni caso alle sezioni rette anche nella configurazione di riferimento.

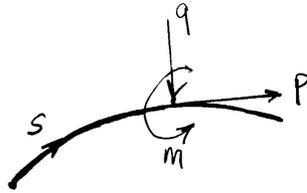
Risulta:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{e}_z}{ds} = \underline{0}, \\ \frac{d\underline{e}_t}{ds} = -c \underline{e}_y, \\ \frac{d\underline{e}_y}{ds} = c \underline{e}_t. \end{cases}$$



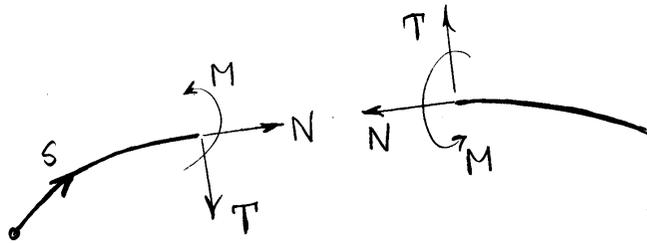
poiché le forze giacciono nel piano della trave, i momenti hanno asse momento ortogonale al piano della trave, e quindi risulta:

$$\begin{cases} \underline{f} = q \underline{e}_y + p \underline{e}_z, \\ \underline{m} = m \underline{e}_x \end{cases}, \quad (\text{forze})$$



$$\begin{cases} \underline{F} = T \underline{e}_y + N \underline{e}_z \\ \underline{M} = M \underline{e}_x \end{cases}, \quad (\text{caratteristiche della sollecitazione})$$

e quindi non vi sono momenti torcenti.



In tali ipotesi si ha:

$$\begin{aligned} \underline{e}_t \times \underline{F} &= \underline{e}_t \times (T \underline{e}_y + N \underline{e}_t) \\ &= T \underline{e}_t \times \underline{e}_y + N \underline{e}_t \times \underline{e}_t \\ &= -T \underline{e}_x. \end{aligned}$$

Inoltre, le componenti di  $\frac{d\underline{F}}{ds}$  risultano:

$$\frac{d\underline{F}}{ds} = \left( \frac{dT}{ds} - cN \right) \underline{e}_y + \left( \frac{dN}{ds} + cT \right) \underline{e}_z,$$

ed infine, dato che  $\underline{e}_x$  è un vettore costante, si ha:

$$\frac{d\underline{M}}{ds} = \frac{dM}{ds} \underline{e}_x.$$

Le due equazioni indefinite di equilibrio (vettoriali) si riducono allora alle seguenti equazioni scalari:

$$\frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{dT}{ds} - cN + q = 0 \\ \frac{dN}{ds} + cT + p = 0 \end{cases},$$

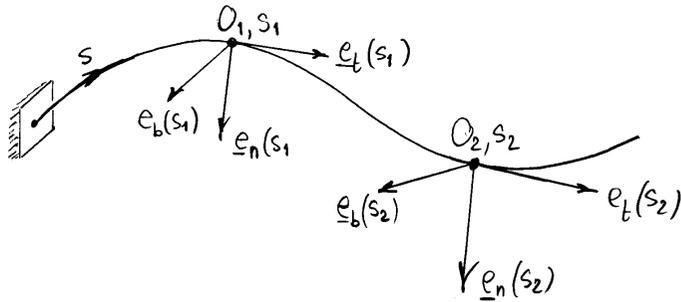
$$\frac{dM}{ds} + \underline{e}_t \times \underline{F} + m = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

di cui solo 3 significative. Ricordiamo che l'equilibrio vale nella configurazione deformata e che quindi  $c$  è da intendersi quale curvatura dell'asse deformato. In generale, l'asse deformato della trave è curvo anche se l'asse indeformato è rettilineo, e dunque, se le deformazioni sono grandi, le equazioni indefinite di equilibrio contengono ancora i termini dipendenti dalla curvatura dell'asse deformato. Se, invece, le deformazioni sono piccole l'asse deformato si confonde con l'asse indeformato e, se questo è rettilineo, le

equazioni indefinite divergono ( $c = 0$ ):

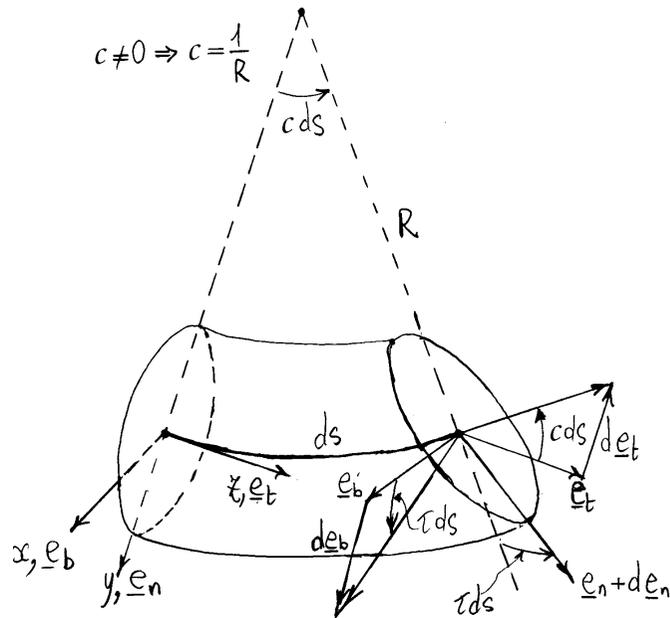
$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m - T = 0 \end{cases} \cdot \left( \begin{array}{l} \text{Asse indeformato} \\ \text{rettilineo e piccole} \\ \text{deformazioni} \end{array} \right)$$

### 1.3 Geometria della trave spaziale



$$\begin{cases} \frac{d\underline{e}_b}{ds} = \tau \underline{e}_n \\ \frac{d\underline{e}_t}{ds} = -c \underline{e}_n \\ \frac{d\underline{e}_n}{ds} = c \underline{e}_t - \tau \underline{e}_b \end{cases}$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore in  $ds$ , la linea d'asse, nell'intorno di un punto, è contenuta nel piano osculatore.



$s \equiv$  ascissa curvilinea (distanza di  $O$  da un punto di riferimento della linea d'asse, valutata lungo la linea d'asse)

$O, \underline{e}_b, \underline{e}_n, \underline{e}_t$  base locale

$Oxyz$ terna locale

$c \equiv$  curvatura dell'asse geometrico della trave

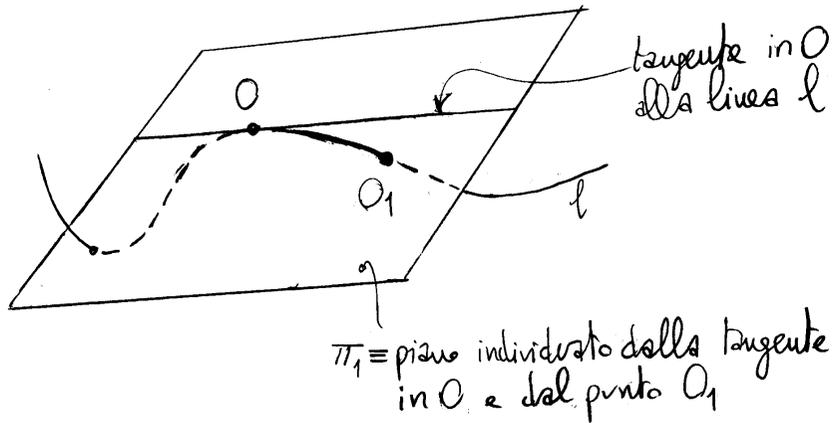
$\tau \equiv$  torsione dell'asse geometrico della trave

$\underline{e}_t \equiv$  tangente alla linea d'asse (versore).

$\underline{e}_n \equiv$  normale principale (versore)

$\underline{e}_b \equiv$  binormale (versore)

$R \equiv$  raggio di curvatura

Piano osculatore

$$\text{Piano osculatore} \equiv \lim_{O_1 \rightarrow O} \pi_1$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, rispetto all'incremento  $\Delta s$  dell'ascissa curvilinea, la curva coincide con la tangente.

Sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto a  $\Delta s$ , la curva appartiene al piano osculatore

La normale principale alla curva rappresenta la retta del piano osculatore ortogonale alla tangente

Se  $\underline{v}(s)$  è una funzione vettoriale dell'ascissa curvilinea  $s$  e se  $v_x(s), v_y(s), v_z(s)$  sono le sue componenti nel sistema locale  $Oxyz$ :

$$\underline{v}(s) = v_x \underline{e}_b + v_y \underline{e}_n + v_z \underline{e}_t,$$

risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{v}}{ds} &= \frac{dv_x}{ds} \underline{e}_b + \frac{dv_y}{ds} \underline{e}_n + \frac{dv_z}{ds} \underline{e}_t \\ &+ v_x \frac{d\underline{e}_b}{ds} + v_y \frac{d\underline{e}_n}{ds} + v_z \frac{d\underline{e}_t}{ds}. \end{aligned}$$

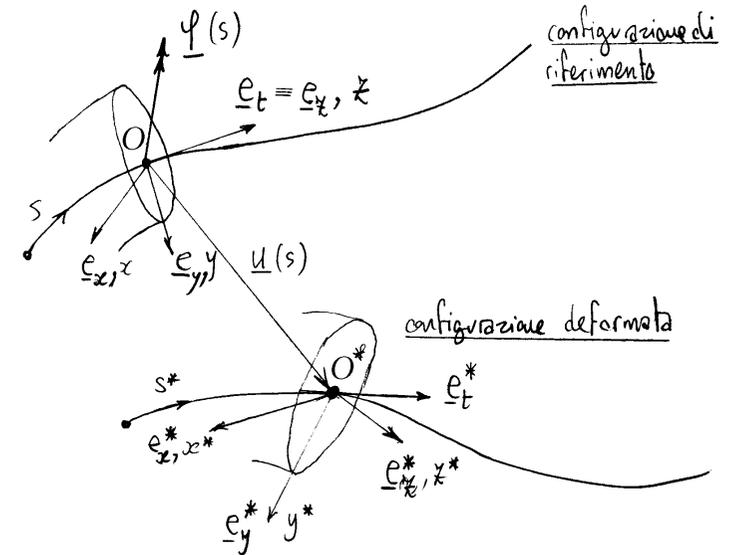
Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{v}}{ds} &= \left( \frac{dv_x}{ds} - v_y \tau \right) \underline{e}_b \\ &+ \left( \frac{dv_y}{ds} - v_z c + v_x \tau \right) \underline{e}_n \\ &+ \left( \frac{dv_z}{ds} + v_y c \right) \underline{e}_t \end{aligned}$$

Se la curva è piana ( $\tau=0$ ) risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{v}}{ds} &= \frac{dv_x}{ds} \underline{e}_b \\ &+ \left( \frac{dv_y}{ds} - v_z c \right) \underline{e}_n \\ &+ \left( \frac{dv_z}{ds} + v_y c \right) \underline{e}_t \end{aligned} .$$

#### 1.4 Cinematica infinitesima della trave spaziale



$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \equiv \text{vettore spostamento dei punti dell'asse} \\ \underline{\varphi} \equiv \text{vettore rotazione della sezione retta} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_t \equiv \text{tangente alla linea d'asse} \\ \underline{e}_z \equiv \text{normale alla sezione retta} \end{array} \right.$

### 1.4.1 Ipotesi di piccoli spostamenti

L'ipotesi di piccoli spostamenti significa che sono trascurati i termini di ordine superiore al primo rispetto ad un parametro reale  $\lambda$  amplificatore degli spostamenti. Ovverossia, se  $\underline{u}$  e  $\underline{\varphi}$  rappresentano due campi di spostamenti generalizzati (spostamenti dei punti della linea d'asse e rotazioni delle sezioni rette), allora  $\lambda \underline{u}$  e  $\lambda \underline{\varphi}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , rappresentano tutti i possibili campi nella "direzione" individuata da  $\underline{u}$  e  $\underline{\varphi}$ . Una qualunque quantità cinematica, dipendente quindi da  $\underline{u}$  e  $\underline{\varphi}$ , è scritta a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $\lambda$ .

Una prima conseguenza è che il "gradiente

degli spostamenti", rappresentato dalle due derivate:

$$\frac{d\underline{u}}{ds}, \quad \frac{d\underline{\varphi}}{ds},$$

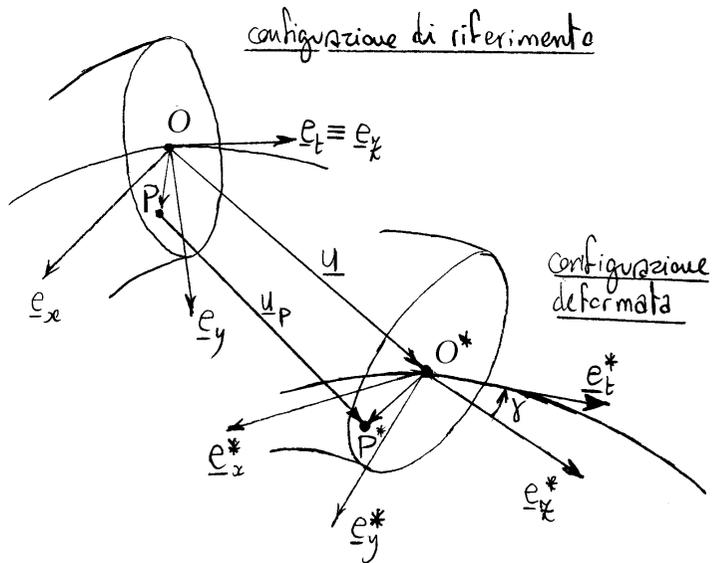
è dello stesso ordine degli spostamenti:

$$\begin{cases} \frac{d(\lambda \underline{u})}{ds} = \lambda \frac{d\underline{u}}{ds} \\ \frac{d(\lambda \underline{\varphi})}{ds} = \lambda \frac{d\underline{\varphi}}{ds} \end{cases}.$$

Una seconda conseguenza è che l'equilibrio può essere scritto nella configurazione indeformata.

1.4.2 Spostamenti dei punti della sezione retta

$$\underline{u}_P = \underline{u} + \underline{\varphi} \times (\underline{P} - \underline{O})$$



La normale  $\underline{e}_x$  alla sezione retta ruota rigidamente come la sezione retta. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti:

$$\underline{e}_x^* = \underline{e}_x + \underline{\varphi} \times \underline{e}_x = \underline{e}_t + \underline{\varphi} \times \underline{e}_t$$

1.4.3 Decomposizione degli spostamenti

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{v} + w \underline{e}_t \\ \underline{\varphi} = \underline{\varphi}_f + \vartheta \underline{e}_t \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{valida per l'ipotesi di} \\ \text{piccole deformazioni (altrimenti} \\ \text{i vettori rotazione non sono sommabili)} \end{array}$$

$w$   $\equiv$  spostamento del baricentro lungo la linea d'asse  
 $\underline{v}$   $\equiv$  spostamento del baricentro sulla sezione retta

$\underline{\varphi}_f$   $\equiv$  Rotazione flessionale (attorno ad un asse contenuto nel piano della sezione)  
 $\vartheta$   $\equiv$  Rotazione torsionale (attorno ad un asse normale alla sezione retta)

$$\begin{cases} \underline{v} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y \\ \underline{\varphi}_f = \varphi_x \underline{e}_x + \varphi_y \underline{e}_y \end{cases}$$



nella configurazione deformata per cui:

$$\mathbf{y} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_t \right) - \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_t \right) \mathbf{e}_t.$$

In funzione della dilatazione  $\epsilon$  e dello scorrimento  $\mathbf{y}$  lo spostamento relativo depurato  $\mathbf{d}_r$  risulta quindi:

$$\mathbf{d}_r = \mathbf{y} + \epsilon \mathbf{e}_t$$

e ne consegue:

$$\epsilon \mathbf{e}_t + \mathbf{y} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_t$$

Dato che il vettore scorrimento  $\mathbf{y}$  è parallelo alla sezione retta, lo si può scomporre in due componenti:

$$\underline{\delta} = \delta_x \underline{e}_x + \delta_y \underline{e}_y,$$

dove  $\delta_x$  e  $\delta_y$  rappresentano gli scorrimenti tra linee d'asse e gli assi coordinati  $x$  ed  $y$  giacenti sulla sezione retta. Inoltre:

$$\underline{\varphi} \times \underline{e}_t = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varphi_y \underline{e}_x - \varphi_x \underline{e}_y,$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_x \right) \underline{e}_x + \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_y \right) \underline{e}_y + \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_t \right) \underline{e}_t.$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} \delta_x = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_x - \varphi_y \\ \delta_y = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_y + \varphi_x \end{cases}.$$

### 1.5.2 Curvatura

Nel caso di piccole deformazioni i vettori rotazione sono sommabili. La rotazione relativa, per unità di lunghezza, tra due sezioni rette della trave vale dunque:

$$\underline{\kappa} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

La curvatura globale  $\underline{\kappa}$  si scompone in una quota

torcente perpendicolare alla sezione retta ed in una  
quota flettente giacente sulla sezione retta:

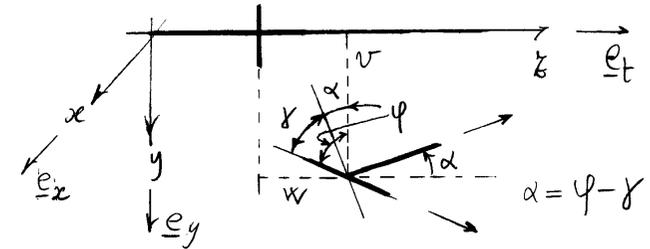
$$\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_f + \Theta \underline{e}_t, \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\kappa}_f \equiv \text{curvatura flessionale} \\ \Theta \equiv \text{angolo unitario di torsione} \end{array} \right.$$

La curvatura flettente  $\underline{\kappa}_f$  può poi scomporsi nelle  
componenti rispetto agli assi  $x$  e  $y$ :

$$\underline{\kappa}_f = \kappa_x \underline{e}_x + \kappa_y \underline{e}_y.$$

### 1.5.3 Trave piana ad asse rettilineo

$$\underline{\delta} = \delta \underline{e}_y, \quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_x, \quad \underline{\kappa} = \kappa_f \underline{e}_x.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \left( \frac{du}{dz} \right) \cdot \underline{e}_t = \frac{dw}{dz} \\ \delta = \left( \frac{du}{dz} \right) \cdot \underline{e}_y + \varphi = \frac{dv}{dz} + \varphi \\ \kappa_f = \frac{d\varphi}{dz} \quad (\text{curvatura flessionale}) \end{array} \right.$$

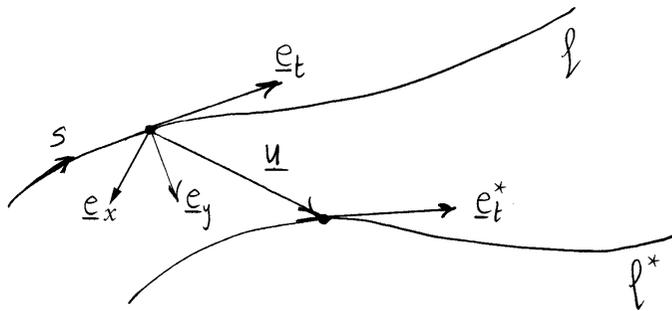
$$\alpha = \varphi - \delta = - \frac{dv}{dz}$$

Curvatura geometrica della linea d'asse deformato

$$\kappa_g = \frac{d\alpha}{dz} = - \frac{d^2v}{dz^2}$$

### 1.6 Principio dei lavori virtuali

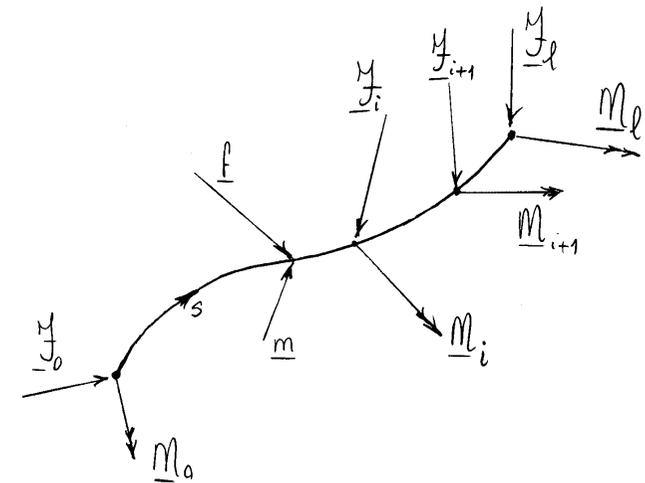
Sia data una generica configurazione  $\ell$  di una trave spaziale. Tale configurazione può essere una qualunque configurazione deformata che, comunque, nell'ipotesi di piccoli spostamenti coincide con la configurazione indeformata.



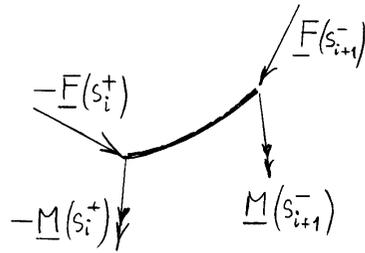
Sia poi dato un sistema di forze esterne  $\underline{f}(s), \underline{m}(s), \underline{F}_0, \underline{M}_0, \underline{F}_\ell, \underline{M}_\ell, \underline{F}_i, \underline{M}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) e di caratteristiche della sollecitazione  $\underline{F}, \underline{M}$  staticamente ammissibili, cioè soddisfacenti le equazioni indefinite di equilibrio, di equilibrio al contorno e di discontinuità in corrispondenza delle forze concentrate  $\underline{F}_i, \underline{M}_i$ :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} = \underline{0} \\ \frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{m} = -\underline{e}_t \times \underline{F} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{F}(0) = -\underline{F}_0 \\ \underline{F}(\ell) = \underline{F}_\ell \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{M}(0) = -\underline{M}_0 \\ \underline{M}(\ell) = \underline{M}_\ell \end{cases}$$



$$\begin{cases} \underline{F}(s_i^+) - \underline{F}(s_i^-) + \underline{F}_i = \underline{0} \\ \underline{M}(s_i^+) - \underline{M}(s_i^-) + \underline{M}_i = \underline{0} \end{cases} \quad i=1, \dots, n$$



Sia infine dato un sistema di spostamenti virtuali  $\underline{u}$ ,  $\underline{q}$  con le associate deformazioni virtuali  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\gamma}$ ,  $\underline{\kappa}_f$ . Uno spostamento virtuale è, per definizione, la parte lineare (o parte prima) di uno spostamento possibile e invertibile. Possibile significa in accordo con i vincoli del problema.

Gli spostamenti e la deformazione virtuali soddisfano le equazioni di congruenza linearizzate:

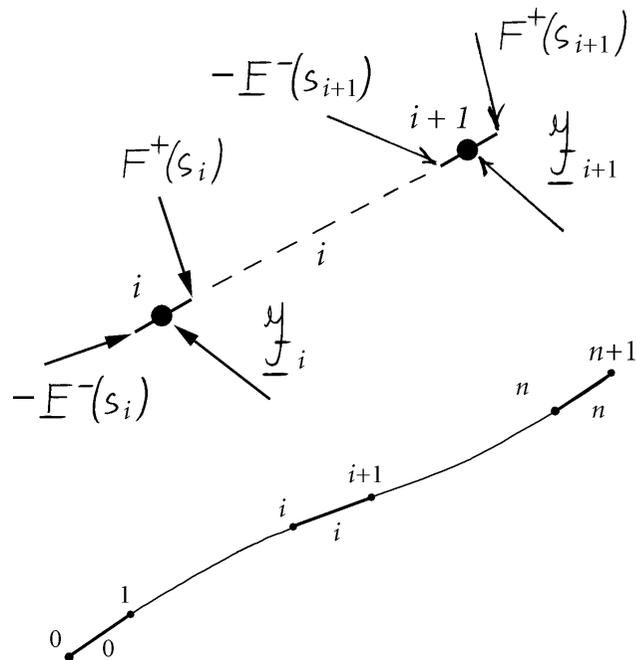
$$\begin{cases} \underline{\gamma} + \underline{\varepsilon} \underline{e}_t = \frac{d\underline{u}}{ds} - \underline{q} \times \underline{e}_t \\ \underline{\kappa} = \frac{d\underline{q}}{ds} \end{cases}$$

Sotto tali ipotesi, posto  $s_0 = 0$  e  $s_{n+1} = l$ , il lavoro virtuale delle forze esterne per gli spostamenti virtuali vale:

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^l (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{q}) ds + \underline{Y}_l \cdot \underline{u}(l) + \underline{Y}_0 \cdot \underline{u}(0) \\ &\quad + \underline{M}_l \cdot \underline{q}(l) + \underline{M}_0 \cdot \underline{q}(0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\underline{Y}_i \cdot \underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot \underline{q}(s_i)) \\ &= \int_0^l (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{q}) ds \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \left\{ \underline{F}(s_{i+1}^-) \cdot \underline{u}(s_{i+1}) - \underline{F}(s_i^+) \cdot \underline{u}(s_i) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \left\{ \underline{M}(s_{i+1}^-) \cdot \underline{q}(s_{i+1}) - \underline{M}(s_i^+) \cdot \underline{q}(s_i) \right\} \\ &= \int_0^l (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{q}) ds + \sum_{i=0}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{d}{ds} (\underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{q}) \right\} ds \\ &= \int_0^l \left\{ \left( \frac{d\underline{F}}{ds} + \underline{f} \right) \cdot \underline{u} + \left( \frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{m} \right) \cdot \underline{q} \right. \\ &\quad \left. + \underline{F} \cdot \frac{d\underline{u}}{ds} + \underline{M} \cdot \frac{d\underline{q}}{ds} \right\} ds = \end{aligned}$$

$$= \int_0^l \left( -\underline{\psi} \times \underline{e}_t \cdot \underline{F} + F \cdot \frac{du}{ds} + \underline{M} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \right) ds$$

$$= \int_0^l \left\{ \underline{F} \cdot \left( \frac{du}{ds} - \underline{\psi} \times \underline{t} \right) + \underline{M} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \right\} ds.$$



divisione in  $n + 1$  intervalli numerati da 0 a  $n$

Risulta quindi:

$$L_e = \int_0^l \left\{ (N \underline{e}_t + \underline{T}) \cdot (\underline{\varepsilon} \underline{e}_t + \underline{\gamma}) + (M_t \underline{e}_t + \underline{M}_f) \cdot (\underline{\Theta} \underline{e}_t + \underline{k}_f) \right\} ds,$$

e infine:

$$L_e = \int_0^l (N \underline{\varepsilon} + \underline{T} \cdot \underline{\gamma} + M_t \underline{\Theta} + \underline{M}_f \cdot \underline{k}_f) ds$$

Lavoro interno (definizione)

$$L_i = \int_0^l (N \underline{\varepsilon} + \underline{T} \cdot \underline{\gamma} + M_t \underline{\Theta} + \underline{M}_f \cdot \underline{k}_f) ds$$

$$= \int_0^l (N \underline{\varepsilon} + T_x \gamma_x + T_y \gamma_y + M_t \underline{\Theta} + M_x k_x + M_y k_y) ds$$

Il principio dei lavori virtuali puo' quindi scriversi:

$$L_e = L_i.$$

La quantità  $L_i$  viene chiamata lavoro virtuale interno, dato che dipende dalle caratteristiche della sollecitazione, che rappresentano appunto le azioni interne. Le caratteristiche della sollecitazione lavorano dunque per le caratteristiche della deformazione.

Si noti che un campo di spostamenti reale finito soddisfa delle equazioni di congruenza non lineari. Quindi, nell'ipotesi di grandi spostamenti, uno spostamento reale non rappresenta uno spostamento virtuale.

Invece, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, uno spostamento reale soddisfa le equazioni linearizzate di congruenza e quindi rappresenta uno spostamento virtuale.

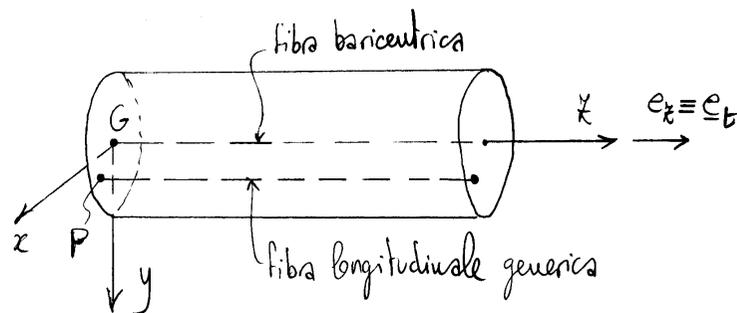
## Capitolo 2

### Legame costitutivo

Prevedendo il ruolo del baricentro  $G$  di centro delle sollecitazioni legate alle tensioni normali, nel seguito si farà riferimento alla linea d'asse baricentrica. Poiché si prevede anche che il centro di taglio  $C$ , quale centro delle sollecitazioni legate alle tensioni tangenziali, differirà in generale dal baricentro, riferiremo nel seguito tali sollecitazioni e le corrispondenti deformazioni ad un centro  $C$  distinto, in generale, dal baricentro.

#### 2.1 Dilatazione e scorrimento della generica fibra longitudinale

Limitandosi al caso della trave ad asse rettilineo ed a sezione costante, cioè alla trave di forma cilindrica, si vogliono calcolare la dilatazione  $\epsilon_P$  e lo scorrimento  $\boldsymbol{y}_P$  relativamente ad una fibra longitudinale passante per il punto  $P$  generico della sezione.



Si ricordi che la dilatazione  $\epsilon_G$  e lo scorrimento  $\boldsymbol{y}$  della linea d'asse sono tali che:

$$\epsilon_G \boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{y} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dz} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{e}_z, \quad (1)$$

dove  $\boldsymbol{u}$  e  $\boldsymbol{\varphi}$  sono rispettivamente il vettore spostamento dei punti della linea d'asse e il vettore rotazione delle sezioni rette.

L'espressione che individua  $\epsilon_P$  e  $\boldsymbol{y}_P$  è formalmente identica alla (1):

$$\epsilon_P \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{y}_P = \frac{d\boldsymbol{u}_P}{dz} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{e}_z, \quad (2)$$

dove ora  $\boldsymbol{u}_P$  è il vettore spostamento dei punti della linea longitudinale per il punto  $P$ . Tenendo conto che:

$$\boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G}), \quad (3)$$

si ottiene:

$$\frac{d\boldsymbol{u}_P}{dz} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dz} + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{\varphi} \times \frac{d}{dz}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G}).$$

Poiché:

$$\frac{d}{dz}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{0},$$

si ottiene infine:

$$\frac{d\boldsymbol{u}_P}{dz} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dz} + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G}). \quad (4)$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\epsilon_P \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{y}_P = \left( \frac{d\boldsymbol{u}}{dz} - \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{e}_z \right) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G}).$$

Utilizzando la (1) e mettendo  $\mathbf{k}$  in componenti si ha poi:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\gamma}_P = \epsilon_G \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{k}_f \times (P - G) + \Theta \mathbf{e}_z \times (P - G),$$

e quindi:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z = \epsilon_G \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - G), \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_P = \boldsymbol{\gamma} + \Theta \mathbf{e}_z \times (P - G), \quad (6)$$

oppure, in componenti:

$$\epsilon_P = \epsilon_G + k_x \gamma_P - k_y x_P, \quad (7)$$

$$\gamma_x^P = \gamma_x - \Theta \gamma_P, \quad (8)$$

$$\gamma_y^P = \gamma_y + \Theta x_P, \quad (9)$$

dove  $x_P$  e  $y_P$  sono le coordinate del punto  $P$  nel sistema baricentrico.

Le equazioni (5) e (6) mostrano che la dilatazione  $\epsilon$  e lo scorrimento  $\boldsymbol{\gamma}$  dipendono dalla fibra considerata, a differenza della curvatura flessionale  $k_f$  e dell'angolo unitario di torsione  $\Theta$  che dipendono solo dalla sezione retta. Poiché nulla obbliga a scegliere la stessa fibra di riferimento al fine della definizione di tali deformazioni, per non perdere in generalità nel seguito si continuerà ad utilizzare la fibra baricentrica per quel che riguarda il calcolo della dilatazione  $\epsilon$ , mentre per il calcolo dello scorrimento  $\boldsymbol{\gamma}$  si utilizzerà la fibra longitudinale passante da un punto  $C$  distinto in generale dal baricentro e che poi sarà fatto coincidere con il centro di taglio, quando questo sarà introdotto.

Alla scelta del punto  $C$  resta dunque associato un vettore

$\mathbf{D}$  di deformazione:

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \\ \Theta \\ \gamma_x^C \\ \gamma_y^C \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

dove si sono indicate con  $\gamma_x^C$  e  $\gamma_y^C$  le componenti di scorrimento relative alla fibra longitudinale per il punto  $C$ .

A seguito della scelta del vettore di deformazione  $\mathbf{D}$  occorre modificare di conseguenza il principio dei lavori virtuali. Dalla (6) scritta per  $C$  in luogo di  $P$  si ottiene lo scorrimento  $\boldsymbol{\gamma}$  relativo alla fibra baricentrica in funzione di quello  $\boldsymbol{\gamma}_C$  relativo alla fibra per  $C$ :

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_C - \Theta \mathbf{e}_z \times (C - G). \quad (11)$$

Sostituendo questa espressione nel termine  $M_t \Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}$  che compare nell'espressione del lavoro interno si ottiene:

$$\begin{aligned} M_t \Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= (M_t \mathbf{e}_z) \cdot (\Theta \mathbf{e}_z) + \mathbf{T} \cdot \{\boldsymbol{\gamma}_C - \Theta \mathbf{e}_z \times (C - G)\} \\ &= (M_t \mathbf{e}_z) \cdot (\Theta \mathbf{e}_z) - (\Theta \mathbf{e}_z) \cdot \{(C - G) \times \mathbf{T}\} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C \\ &= \{M_t \mathbf{e}_z - (C - G) \times \mathbf{T}\} \cdot (\Theta \mathbf{e}_z) + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C \\ &= (M_C \mathbf{e}_z) \cdot (\Theta \mathbf{e}_z) + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C = M_C \Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C, \end{aligned}$$

dove  $M_C$  è il momento torcente valutato rispetto al centro  $C$ .

Si assuma allora un vettore  $\mathbf{S}$  delle caratteristiche della

sollecitazione contenente il momento torcente  $M_C$  valutato rispetto al centro  $C$  in luogo di quello valutato rispetto al baricentro:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_C \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Ne risulta allora la seguente espressione del lavoro virtuale interno:

$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_{\ell} (N\epsilon + \mathbf{M} \cdot \mathbf{k}_f + M_C\Theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma}_C) ds \\ &= \int_{\ell} (N\epsilon + M_x k_x + M_y k_y + M_C\Theta + T_x \gamma_x^C + T_y \gamma_y^C) ds \\ &= \int_{\ell} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} ds. \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.1.1 Appendice (Trave ad asse curvo)

Nel caso di trave piana ad asse curvo il versore  $\mathbf{e}'_t$ , tangente alla fibra longitudinale per  $P$ , coincide con il versore  $\mathbf{e}_t$  tangente alla linea d'asse baricentrica.

*Dimostrazione.* Infatti:

$$P = G + x_P \mathbf{e}_x + y_P \mathbf{e}_y,$$

e dunque:

$$\mathbf{e}'_t = \frac{dP}{ds'} = \frac{ds}{ds'} \frac{dP}{ds} = \frac{ds}{ds'} (\mathbf{e}_t + c y_P \mathbf{e}_t),$$

dove  $s'$  è l'ascissa curvilinea della fibra longitudinale per  $P$  e  $c$  è la

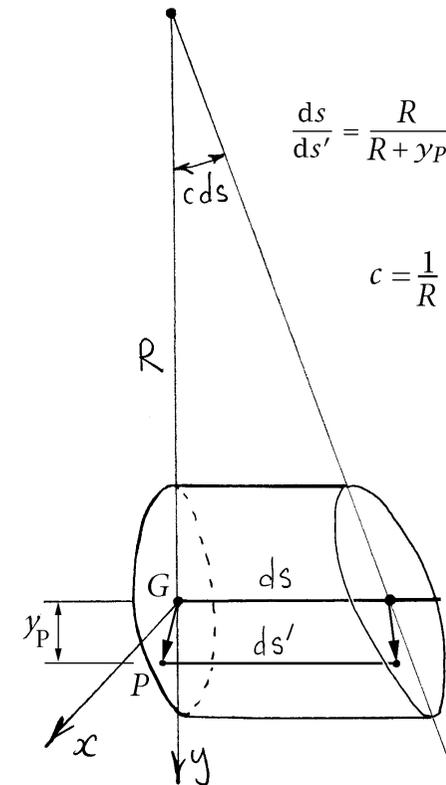
curvatura geometrica della linea d'asse baricentrica. Poiché, come noto, risulta:

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + c y_P},$$

si ha infine l'asserto. ■

Ne consegue che i piani normali alla linea d'asse baricentrica sono normali anche alla linea longitudinale per  $P$  e le sezioni rette, nei due casi, coincidono. Nella cinematica basata sulla linea longitudinale per  $P$  quale linea d'asse risulta allora:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\gamma}_P = \frac{d\mathbf{u}_P}{ds'} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z,$$



dove  $\mathbf{e}_z$  è il versore normale alla sezione retta. Poiché:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi} \times (P - G),$$

risulta:

$$\frac{d\mathbf{u}_P}{ds'} = \frac{1}{1 + c\gamma_P} \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{k} \times (P - G) + c\gamma_P \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \right),$$

avendo tenuto conto che:

$$\begin{aligned} \frac{d(P - G)}{ds'} &= \frac{dP}{ds'} - \frac{ds}{ds'} \frac{dG}{ds} \\ &= \mathbf{e}_z - \frac{1}{1 + c\gamma_P} \mathbf{e}_z = \frac{c\gamma_P}{1 + c\gamma_P} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\gamma}_P = \frac{1}{1 + c\gamma_P} \left\{ \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{k} \times (P - G) \right\},$$

e infine:

$$\begin{cases} \epsilon_P \mathbf{e}_z &= \frac{1}{1 + c\gamma_P} \{ \epsilon_G \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - G) \}, \\ \boldsymbol{\gamma}_P &= \frac{1}{1 + c\gamma_P} \{ \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e}_z \times (P - G) \}. \end{cases}$$

Se  $c\gamma_P \ll 1$  allora  $1 + c\gamma_P \approx 1$  e si riottengono, approssimativamente, i risultati della trave ad asse rettilineo.

Se l'asse della trave è sghembo e se  $\mathbf{e}'_t$  indica ancora il versore tangente alla fibra longitudinale per  $P$ , risulta:

$$\mathbf{e}'_t = \frac{dP}{ds'} = \frac{ds}{ds'} \left\{ (1 + c\gamma_P) \mathbf{e}_t + \tau (x_P \mathbf{e}_y - y_P \mathbf{e}_x) \right\},$$

dove  $\tau$  è la torsione della linea d'asse baricentrica. Poiché  $\mathbf{e}'_t$  è un versore, deve risultare:

$$\left( \frac{ds}{ds'} \right)^2 \left\{ (1 + c\gamma_P)^2 + \tau^2 (x_P^2 + y_P^2) \right\} = 1,$$

e quindi:

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{(1 + c\gamma_P)^2 + \tau^2 r^2}},$$

dove:

$$r = |P - G| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_t &= \frac{1 + c\gamma_P}{\sqrt{(1 + c\gamma_P)^2 + \tau^2 r^2}} \mathbf{e}_t \\ &+ \frac{\tau}{\sqrt{(1 + c\gamma_P)^2 + \tau^2 r^2}} (x_P \mathbf{e}_y - y_P \mathbf{e}_x), \end{aligned}$$

e, se  $\tau \neq 0$ , risulta  $\mathbf{e}'_t \neq \mathbf{e}_t$ . Al passare dalla linea d'asse baricentrica alla fibra longitudinale per  $P$  i piani delle sezioni rette si modificano. Ne consegue che nella nuova descrizione cinematica i piani delle sezioni rette originali non si conservano in generale piani e che le due descrizioni cinematiche generano due campi di spostamento che non differiscono, in generale, di un semplice moto rigido. Di conseguenza l'analisi precedente perde di significato. Se invece risulta  $c\gamma_P \ll 1$  e  $\tau \ll 1$ , cioè se sia la curvatura che la torsione della linea d'asse baricentrica sono "piccole, si riottengono, approssimativamente, i risultati della trave ad asse rettilineo.

## 2.2 Legame costitutivo elastico lineare

Il legame elastico lineare più generale possibile si scrive:

$$\mathbf{S} = \mathbb{E} [\mathbf{D}],$$

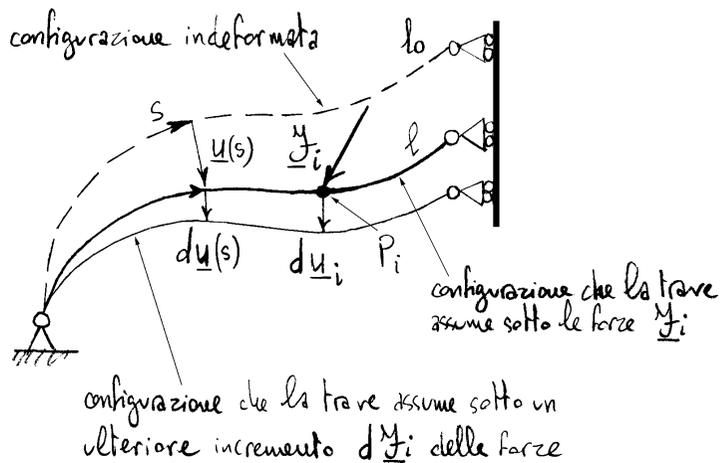
dove  $\mathbb{E}$  è la matrice di elasticità di dimensione  $6 \times 6$ .

### 2.3 Lavoro di deformazione

Si ricorda che il lavoro di deformazione rappresenta l'effettivo lavoro che le forze applicate ad una struttura compiono per effetto degli spostamenti che le stesse forze provocano.

Sotto l'azione dei carichi  $\underline{f}$ ,  $\underline{m}$ ,  $\underline{Y}_i$ ,  $\underline{M}_i$  ( $i=0,1,\dots,n,l$ ) la trave assume una configurazione equilibrata distinta da quella naturale di riferimento.

Tale configurazione è individuata dagli spostamenti



$\underline{u}(s)$  dei punti della linea d'asse e dalle rotazioni  $\varphi$  delle sezioni rette.

Siano  $\underline{S}(N, \underline{T}, M_C, \underline{M}_f)$  e  $\underline{D}(\underline{\epsilon}, \underline{\gamma}_C, \Theta, \underline{\kappa}_f)$  le caratteristiche della sollecitazione e della deformazione conseguenti ai dati carichi esterni, e siano  $d\underline{D}$  ( $d\underline{\epsilon}, d\underline{\gamma}_C, d\Theta, d\underline{\kappa}_f$ ) gli incrementi di deformazione conseguenti ad un incremento  $d\underline{f}, d\underline{m}, d\underline{Y}_i, d\underline{M}_i$  dei carichi esterni. Per il principio dei lavori virtuali l'incremento del lavoro dei carichi esterni che rappresenta il lavoro di deformazione:

$$dL_d = \int_0^l (\underline{f} \cdot d\underline{u} + \underline{m} \cdot d\underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{Y}_i \cdot d\underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot d\underline{\varphi}(s_i)),$$

vale:

$$\begin{aligned} dL_d &= \int_0^l \underline{s} \cdot d\underline{D} \, ds \\ &= \int_0^l (N d\varepsilon + \underline{T} \cdot d\underline{\varepsilon}_C + M_C d\Theta + \underline{M}_f \cdot d\underline{\kappa}_f) \, ds. \end{aligned}$$

Questa espressione differenziale è effettivamente nota se è noto il percorso di carico e deformazione a cui è soggetta la trave. Infatti, anche nel caso in cui le forze applicate sono indipendenti dalla deformazione e quindi note a priori, gli incrementi di spostamento dei punti caricati, in corrispondenza ad un certo livello raggiunto dai carichi, sono noti solo se è noto il percorso di deformazione susseguente all'applicazione

di quei carichi.

Se il percorso di carico-deformazione a partire da una configurazione  $l_1$  fino ad una configurazione  $l_2$ , susseguente all'applicazione di certi carichi, è nota, l'espressione differenziale può essere integrata (lungo il percorso) ottenendone il lavoro di deformazione totale lungo il dato percorso:

$$L_d = \int_0^l \left( \int_{l_1}^{l_2} \underline{s} \cdot d\underline{D} \right) ds.$$

## 2.4 Energia elastica di deformazione

Affinchè esista una energia elastica di deformazione il lavoro di deformazione non deve dipendere dal percorso, ma solo dagli stati iniziali e finali.

Questo significa che  $dL_d$  deve essere un

differenziale esatto, e quindi che esiste una funzione energia potenziale elastica per unità di linea  $\phi(\underline{D})$  funzione della sola deformazione tale che:

$$d\phi = \underline{s} \cdot d\underline{D},$$

o, per esteso:

$$d\phi = N d\varepsilon + \underline{T} \cdot d\underline{\gamma}_C + M_C d\theta + \underline{M}_f \cdot d\underline{k}_f.$$

Ne consegue:

$$\underline{s} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}},$$

oppure, per esteso:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \\ \underline{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\gamma}_C} \\ M_C = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \underline{M}_f = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{k}_f} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_x = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_x^C} \\ T_y = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_y^C} \\ M_x = \frac{\partial \phi}{\partial k_x} \\ M_y = \frac{\partial \phi}{\partial k_y} \end{array} \right.$$

Nel caso di elasticità lineare deve risultare:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} = \mathbb{E}[\underline{D}], \quad \frac{\partial \phi}{\partial D_i} = \sum_j \mathbb{E}_{ij} D_j,$$

e quindi:

$$\mathbb{E}_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial D_i \partial D_j}.$$

L'integrazione è possibile se e solo se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial D_i \partial D_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial D_j \partial D_i},$$

cioè se e solo se la matrice di elasticità è simmetrica:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^T, \quad \mathbb{E}_{ij} = \mathbb{E}_{ji}.$$

Si integri allora dallo stato naturale allo stato finale caratterizzato dalla deformazione  $\underline{D}$  e dalla sollecitazione  $\underline{S} = \mathbb{E}[\underline{D}]$ . Uno stato intermedio vale  $\lambda \underline{D}$  e  $\lambda \underline{S}$ , con  $\lambda \in [0, 1]$ . Ad un incremento  $d\underline{D} = (d\lambda)\underline{D}$  di deformazione corrisponde l'incremento  $d\phi = \lambda(\underline{S} \cdot \underline{D}) d\lambda$  dell'energia elastica di deformazione. Integrando si ottiene quindi:

$$\phi = \int_0^1 \lambda(\underline{S} \cdot \underline{D}) d\lambda = \frac{1}{2} \underline{S} \cdot \underline{D},$$

avendo scelto di porre  $\phi(\underline{0}) = 0$ . Inserendo il legame costitutivo elastico lineare si ottiene infine:

$$\phi = \frac{1}{2} \underline{D} \cdot \mathbb{E}[\underline{D}].$$

La richiesta che il lavoro di deformazione sia positivo (a partire dalla configurazione naturale) implica la definitività positiva di  $\mathbb{E}$  e la sua invertibilità.

Detta  $\underline{C}$  la matrice inversa della  $\underline{E}$  :

$$\underline{C} = \underline{E}^{-1},$$

si ha quindi:

$$\underline{D} = \underline{C}[\underline{S}].$$

È anche assicurata l'esistenza dell'energia complementare per unità di linea che vale:

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{S} \cdot \underline{C}[\underline{S}],$$

tale che:

$$\underline{D} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{S}},$$

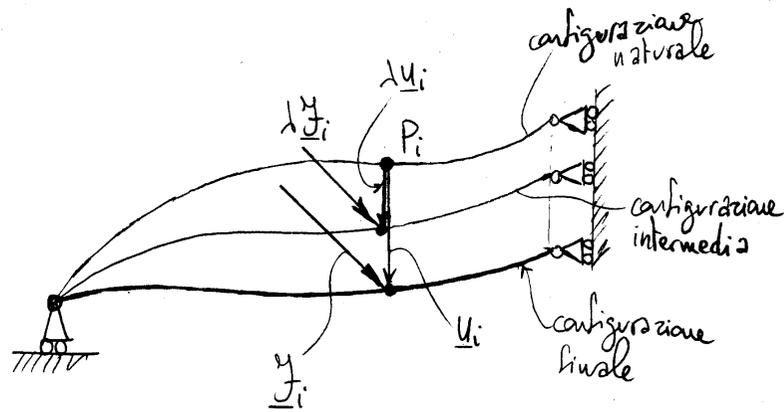
oppure, per esteso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial N} \\ \delta_x^C = \frac{\partial \Psi}{\partial T_x} \\ \delta_y^C = \frac{\partial \Psi}{\partial T_y} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \frac{\partial \Psi}{\partial M_C} \\ k_x = \frac{\partial \Psi}{\partial M_x} \\ k_y = \frac{\partial \Psi}{\partial M_y} \end{array} \right\}.$$

## 2.5 Teoremi sul lavoro di deformazione

### 2.5.1 Teorema di Clapeyron

Nell'ambito della elasticità lineare gli spostamenti sono proporzionali alle forze applicate. Se le forze  $\underline{F}_i$  provocano gli spostamenti  $\underline{u}_i$  dei punti di applicazione, le forze  $\lambda \underline{F}_i$ , dove  $\lambda$  è un generico scalare, provocano gli spostamenti  $\lambda \underline{u}_i$ . Poiché il lavoro di deformazione è indipendente dal percorso, lo si può calcolare scegliendo di incrementare tutte le forze in modo proporzionale fra loro, da zero fino al loro valore finale  $\underline{F}_i$ . Uno stato intermedio è dunque individuato dalle forze  $\lambda \underline{F}_i$  con  $0 < \lambda < 1$ .



Se alle forze finali corrispondono gli spostamenti  $\underline{u}_i$  allora alle forze  $\Delta \underline{Y}_i$  corrispondono gli spostamenti  $\Delta \underline{u}_i$ . L'incremento dei carichi lungo il percorso scelto vale  $d \underline{Y}_i$  e il conseguente incremento degli spostamenti risulta  $d \underline{u}_i$ .  
Ne consegue:

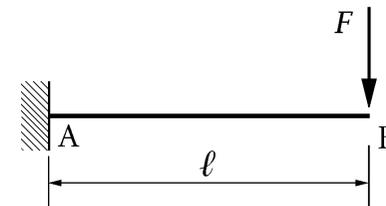
$$L_d = \sum_i \int_0^1 (\Delta \underline{Y}_i) \cdot (d \underline{u}_i) = \sum_i (\underline{Y}_i \cdot \underline{u}_i) \int_0^1 d \lambda d \lambda,$$

e infine:

$$L_d = \frac{1}{2} \sum_i \underline{Y}_i \cdot \underline{u}_i \quad (\text{teorema di Clapeyron}).$$

A parità, il lavoro di deformazione delle forze applicate compiono a partire da zero fino al loro valore finale è pari a metà del lavoro compiuto dalle stesse forze se avessero dall'inizio alla fine il loro valore finale.

Esempio:



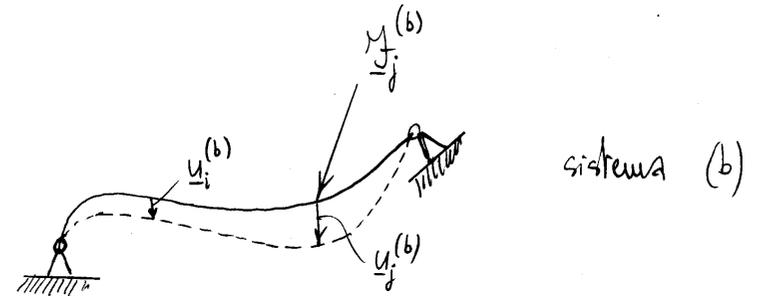
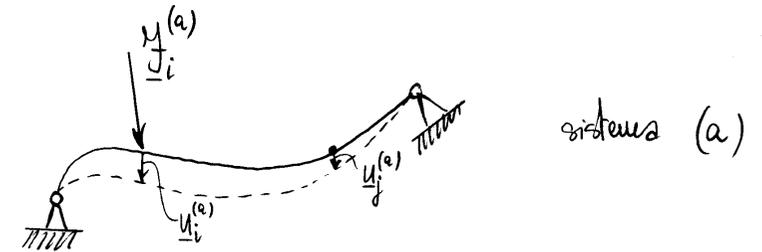
$$\eta_B = \frac{F l^3}{3 E J} \quad \Rightarrow \quad L_d = \frac{F^2 l^3}{6 E J}$$

2.5.2 Teorema di Betti

Per il lavoro di deformazione non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti ad un sistema di forze  $\underline{F}_i^{(a)}$  compete il seguente lavoro di deformazione:

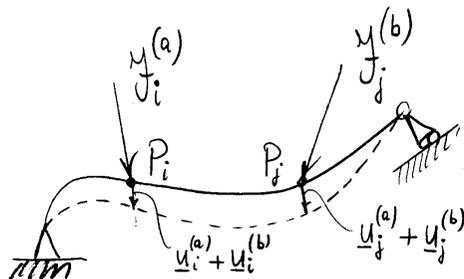
$$L_d^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot \underline{u}_i^{(a)},$$

mentre ad un sistema di forze  $\underline{F}_j^{(b)}$  compete il lavoro di deformazione:



$$L_d^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_j \underline{F}_j^{(b)} \cdot \underline{u}_j^{(b)}.$$

Al sistema di forze somma dei due sistemi precedenti compete quindi il lavoro:



sistema (a)+(b)

$$\begin{aligned} L_d^{(a+b)} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot (\underline{u}_i^{(a)} + \underline{u}_i^{(b)}) + \sum_j \underline{F}_j^{(b)} \cdot (\underline{u}_j^{(a)} + \underline{u}_j^{(b)}) \right\} \\ &= L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{ba}) \end{aligned}$$

dove :

$$L_{ab} = \sum_i \underline{f}_i^{(a)} \cdot \underline{u}_i^{(b)}$$

$$L_{ba} = \sum_j \underline{f}_j^{(b)} \cdot \underline{u}_j^{(a)} .$$

I lavori  $L_{ab}$  e  $L_{ba}$  rappresentano il lavoro mutuo che le forze del sistema (a) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema (b) se avessero sempre il loro valore finale e, rispettivamente, il lavoro mutuo che le forze del sistema (b) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema (a) se avessero sempre il loro valore finale.

Vogliamo mostrare che i due lavori mutui  
 $L_{ab}$  e  $L_{ba}$  coincidono (teorema di Betti).

Infatti, poiché il lavoro di deformazione non dipende dal percorso, il lavoro  $L_d^{(a+b)}$  può essere calcolato applicando prima le forze del sistema (a) fino al loro valore finale, poi le forze del sistema (b) fino al loro valore finale. Alla fine dell'applicazione del sistema (a) il lavoro di deformazione vale  $L_d^{(a)}$ . L'applicazione del sistema (b) non solo genera il lavoro di deformazione  $L_d^{(b)}$ , ma, facendo lavorare anche il sistema di forze (a), che sono già al loro valore finale, genera anche il termine  $L_{ab}$ :

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + L_{ab} .$$

D'altronde, se si applica prima il sistema di

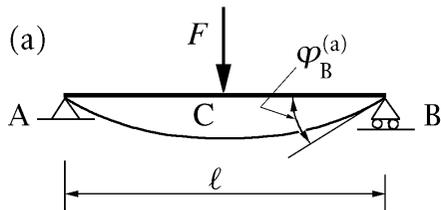
forze (b) fino al loro valore fisile e indi il sistema di forze (a), si ottiene analogamente:

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(b)} + L_d^{(a)} + L_{ba}$$

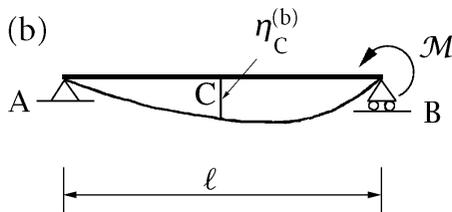
Ne risulta quindi:

$$L_{ab} = L_{ba}$$

Esempio:



$$\varphi_B^{(a)} = \frac{F l^2}{16 E J}$$



$$\eta_C^{(b)} = \frac{M l^2}{16 E J}$$

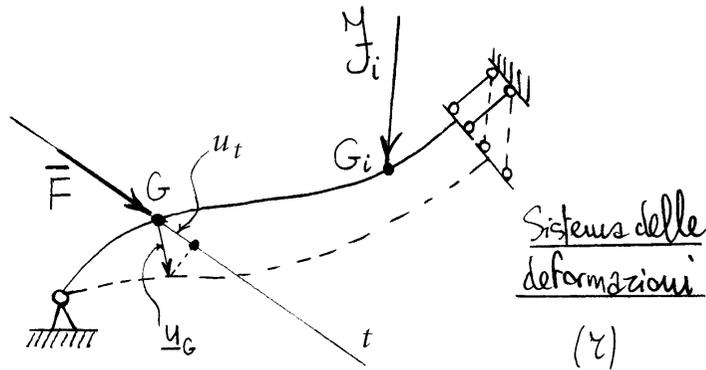
$$L_{ab} = F \frac{M l^2}{16 E J}$$

$$L_{ba} = M \frac{F l^2}{16 E J}$$

### 2.5.3 Teorema di Castigliano

Se i vincoli sono rigidi e se la trave non è soggetta a distorsioni è possibile calcolare lo spostamento di un punto della linea d'asse in una data direzione eseguendo la derivata del lavoro di deformazione, espresso in funzione delle forze esterne, rispetto alla forza esterna applicata nello stesso punto della linea d'asse ed avente la direzione dello spostamento che si vuole calcolare. Tale derivata va valutata sul valore effettivo delle forze esterne. Se una forza applicata al punto di cui si vuole valutare lo spostamento ed avente la direzione richiesta non è presente, occorre aggiun=

gerla e valutare la derivata del lavoro di deformazione in corrispondenza del valore nullo di tale forza.



Sia allora data una trave soggetta alle forze  $\mathcal{F}_i$  ed alla forza  $F$  generica applicata in  $G$  ed avente una data direzione  $t$ . La componente  $u_t$  dello spostamento del punto  $G$  nella direzione e verso della forza  $F$ , dovuta alle forze  $\mathcal{F}_i$  ed alla forza  $\bar{F}$  effettivamente applicata in  $G$ , deve dunque valere:

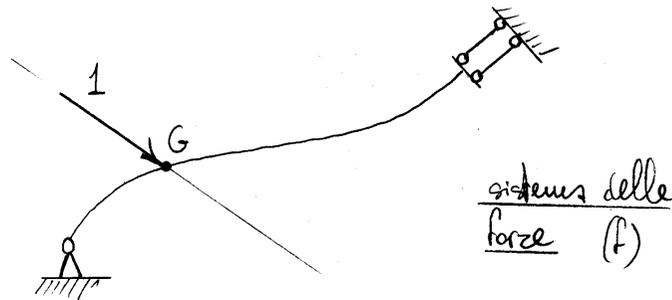
$$u_t = \left. \frac{\partial L_d}{\partial F} \right|_{F=\bar{F}},$$

dove  $L_d = L_d(\mathcal{F}_i; F)$ . Se in  $G$ , nella direzione della forza esterna  $F$ , non è applicata nessuna forza ( $\bar{F} = 0$ ) la derivata andrà calcolata sul valore  $F = 0$ . È chiaro che invece di una forza  $F$  si può considerare una coppia  $M$  al fine di calcolare la rotazione di una sezione.

### Dimostrazione

Si assuma la trave soggetta alle forze  $\mathcal{F}_i$  ed alla forza  $\bar{F}$  (o coppia  $\bar{M}$  nel caso si voglia valutare una rotazione) quale sistema di spostamenti-deformazione e si applichi il principio dei lavori virtuali assumendo quale sistema di forze-caratteristiche della

sollecitazione quello generato dalla forza unitaria  
avente la direzione e il verso dello spostamento che  
si vuole determinare.



Risulta:

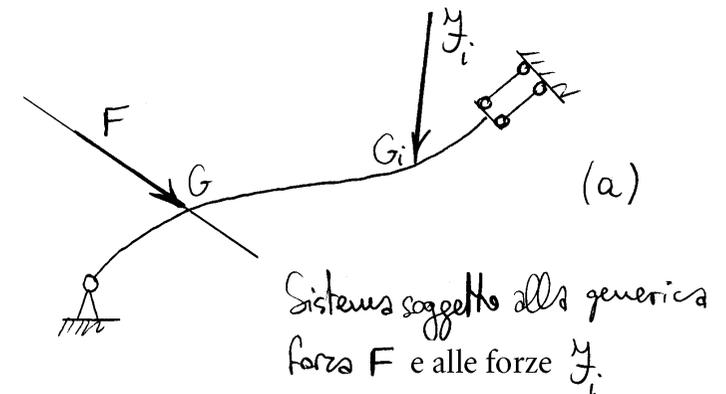
$$u_t = \int_l \underline{S}^{(F)} \cdot \underline{C}[\underline{S}^{(r)}] ds.$$

Si consideri ora la trave soggetta alle forze  $Y_i$   
ed alla generica forza  $F$ , avente direzione e verso  
dello spostamento che si vuole determinare. Il lavoro  
di deformazione, scritto in forma complementare, vale:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_l \underline{S}^{(a)} \cdot \underline{C}[\underline{S}^{(a)}] ds,$$

e la sua derivata rispetto ad  $F$ :

$$\frac{\partial L_d}{\partial F} = \int_l \frac{\partial \underline{S}^{(a)}}{\partial F} \cdot \underline{C}[\underline{S}^{(a)}] ds.$$



Risulta:

$$\underline{S}^{(a)} \Big|_{F=F} = \underline{S}^{(r)},$$

ed inoltre, per il principio di sovrapposizione degli  
effetti, risulta:

$$\underline{\delta}^{(a)} = F \underline{\delta}^{(f)} + \underline{\delta}^{(o)},$$

dove  $\underline{\delta}^{(o)}$  sono le sollecitazioni dovute ai soli carichi esterni  $\mathcal{F}_i$ . Si ha quindi:

$$\frac{\partial \underline{\delta}^{(a)}}{\partial F} = \underline{\delta}^{(f)},$$

indipendentemente dal valore di  $F$ . In definitiva:

$$u_t = \int_{\mathcal{L}} \left. \frac{\partial \underline{\delta}^{(a)}}{\partial F} \right|_{F=\bar{F}} \cdot \mathcal{C}[\underline{\delta}^{(a)}]_{F=\bar{F}} ds = \left. \frac{\partial L_d}{\partial F} \right|_{F=\bar{F}}$$

come volersi dimostrare. È evidente che utilizzando il teorema di Castiglione occorre valutare  $\underline{\delta}^{(a)}$  per  $F = \bar{F}$  e  $\partial \underline{\delta}^{(a)} / \partial F$ , cioè occorre valutare le caratteristiche della sollecitazione nella struttura reale e nella struttura fittizia soggetta alla forza unitaria, che sono né più, né meno, le operazioni che occorre

eseguire se si applica direttamente il principio dei lavori virtuali. Occorre inoltre tenere presente che il risultato ottenuto dipende dall'ipotesi di vincoli rigidi (e' così escluso il lavoro delle reazioni vincolari) e di assenza di distorsioni (le deformazioni del sistema reale dipendono così dalle sole sollecitazioni reali).

## 2.6 Energia potenziale totale

Se all'energia elastica di deformazione  $\Phi$  si somma l'energia potenziale delle forze applicate, nell'ipotesi che tali forze siano conservative, si ottiene l'energia potenziale totale. Se le forze applicate alla struttura sono indipendenti dagli spostamenti e rotazioni che la struttura può subire (forze morte, oppure "dead loadings", nella terminologia inglese) allora il potenziale delle forze associato a dati spostamenti e rotazioni due, con una opportuna scelta dello zero del potenziale, coincide con il lavoro delle forze, risulta:

$$V(\underline{u}, \underline{\varphi}) = \int_{s_0} (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot \underline{\varphi}(s_i)).$$

Tenendo conto che le deformazioni dipendono, tramite le equazioni di congruenza, dagli spostamenti e dalle rotazioni, risulta la seguente espressione dell'energia potenziale totale:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) = - \int_{s_0} (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot \underline{\varphi}(s_i)) + \int_{s_0} \phi(\underline{u}, \underline{\varphi}) ds.$$

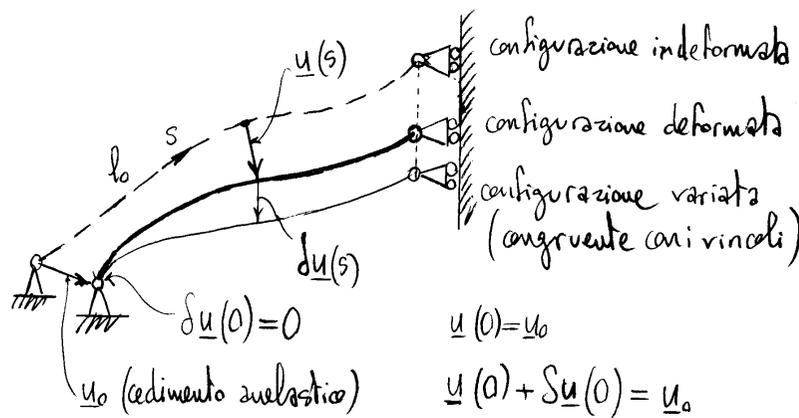
Notiamo che tale energia rappresenta una funzione scalare degli spostamenti e delle rotazioni. A loro volta gli spostamenti  $\underline{u}(s)$  e le rotazioni  $\underline{\varphi}(s)$  rappresentano due funzioni vettoriali dell'ascissa curvilinea  $s$  lungo l'asse della trave. Quindi la funzione  $\pi(\underline{u}, \underline{\varphi})$  rappresenta una funzione di

funzione a valori scalari. Un tale tipo di funzione è chiamata funzionale.

### 2.6.1 Variazione del funzionale energia potenziale totale

L'incremento di  $\Pi(\underline{u}, \underline{\varphi})$  al passare da una configurazione individuata dagli spostamenti e rotazioni  $\underline{u}_1$  e  $\underline{\varphi}_1$  ad un'altra configurazione individuata dagli spostamenti e rotazioni  $\underline{u}_2$  e  $\underline{\varphi}_2$  vale:

$$\Delta \Pi = \Pi(\underline{u}_2, \underline{\varphi}_2) - \Pi(\underline{u}_1, \underline{\varphi}_1).$$



Si considerino degli spostamenti  $\underline{u}(s)$  e delle rotazioni  $\underline{\varphi}(s)$ , che individuano una configurazione deformata congruente con i vincoli. Si incrementino tali spostamenti e rotazioni tramite due funzioni  $\delta \underline{u}(s)$  e  $\delta \underline{\varphi}(s)$ .

Se si vuole che le somme  $\underline{u}(s) + \delta \underline{u}(s)$  e  $\underline{\varphi}(s) + \delta \underline{\varphi}(s)$  soddisfino le condizioni geometriche al contorno, occorre che le variazioni  $\delta \underline{u}$  degli spostamenti e  $\delta \underline{\varphi}$  delle rotazioni soddisfino le condizioni geometriche

omogenee al contorno. Per esempio, se in corrispondenza di  $s=s_0$  deve essere  $\underline{u}(s_0) = \underline{u}_0$  (cedimento elastico) la condizione  $\underline{u}(s_0) + \delta \underline{u}(s_0) = \underline{u}_0$  è soddisfatta se e solo se  $\delta \underline{u}(s_0) = 0$  (condizione omogenea).

L'incremento dell'energia potenziale totale conseguente alle variazioni  $\delta \underline{u}$  e  $\delta \underline{\varphi}$  dei campi degli

spostamenti e delle rotazioni a partire dalla configurazione individuata dagli spostamenti  $\underline{u}$  e dalle rotazioni  $\underline{\varphi}$ , vale

$$\begin{aligned}\Delta\pi(\delta\underline{u}, \delta\underline{\varphi}) &= \\ &= \pi(\underline{u} + \delta\underline{u}, \underline{\varphi} + \delta\underline{\varphi}) + \pi(\underline{u}, \underline{\varphi}).\end{aligned}$$

Consideriamo una data "direzione" nello "spazio delle variazioni", ovvero sia nello spazio delle funzioni di  $s$  soddisfacenti le condizioni omogenee al contorno. Una direzione è individuata da tutte le variazioni che sono proporzionali ad una variazione data, e che quindi possono mettersi nella forma:

$$\delta\underline{u} = \alpha \delta\underline{u}_0, \quad \delta\underline{\varphi} = \alpha \delta\underline{\varphi}_0,$$

dove  $\delta\underline{u}_0$  e  $\delta\underline{\varphi}_0$  sono delle date variazioni e  $\alpha$  è uno scalare indipendente da  $s$ . Al variare di  $\alpha$  si modifica

l'entità degli spostamenti: ma non la loro forma. Lungo una direzione così fatta, il funzionale  $\pi$  risulta una funzione della sola  $\alpha$  e se ne può calcolare per  $\alpha=0$ , la parte lineare in  $\alpha$ , che, per  $\alpha=1$ , viene detta variazione prima ed indicata con  $\delta\pi$ :

$$\delta\pi = \left. \frac{d\pi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Poiché risulta:

$$\pi = -V + \Phi,$$

ne consegue  $[F = G + H \Rightarrow \delta F = \delta G + \delta H]$ :

$$\delta\pi = -\delta V + \delta\Phi.$$

Risulta poi  $[F = aG \Rightarrow \delta F = a\delta G]$  e

$$\delta \int_{l_0} F ds = \int_{l_0} \delta F ds ]:$$

$$\delta V = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \\ - \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i).$$

Inoltre:

$$\delta \Phi = \int_{l_0} \delta \phi ds,$$

ed ancora  $[ F = G(H) \Rightarrow \delta F = \frac{\partial G}{\partial H} \delta H ]:$

$$\delta \Phi = \int_{l_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} \cdot \delta \underline{D} \right) ds = \int_{l_0} (\underline{s} \cdot \delta \underline{D}) ds.$$

Risulta dunque:

$$\delta \Pi = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \\ - \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{l_0} (\underline{s} \cdot \delta \underline{D}) ds.$$

Utilizzando infine il legame elastico-lineare si può anche scrivere:

$$\delta \Pi = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \\ - \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{l_0} (\underline{E}[\underline{D}] \cdot \delta \underline{D}) ds.$$

Le variazioni delle deformazioni  $\underline{D}$ , utilizzando le equazioni (lineari) di congruenza, risultano:

$$\begin{cases} \delta \underline{y} + \delta \epsilon \underline{e}_t = \frac{d \delta \underline{u}}{ds} - \delta \varphi \times \underline{e}_t \\ \delta \underline{\kappa} = \frac{d \delta \underline{\varphi}}{ds} \end{cases}.$$

Si noti che il risultato non sarebbe cambiato se si fosse partiti dalle equazioni di congruenza non lineari, poiché "variare" significa linearizzare.

### 2.6.2 Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

La variazione  $\delta\pi$  del funzionale energia potenziale totale si annulla in corrispondenza della soluzione del problema elastico.

In fatti, le forze applicate sono in equilibrio con le caratteristiche della sollecitazione soluzione  $\underline{s}^*$  che, tramite i legami costitutivi, dipendono dalle caratteristiche della deformazione soluzione  $\underline{D}$ :

$$\underline{s}^* = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{D} = \underline{D}^*} .$$

Siano poi  $\delta \underline{u}$  e  $\delta \underline{\varphi}$  delle variazioni degli spostamenti e delle rotazioni e siano  $\delta \underline{D}$  le associate variazioni delle deformazioni. Si può allora scrivere il

principio dei lavori virtuali nella forma:

$$\int_{\mathcal{I}_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{\mathcal{I}_0} (\underline{s}^* \cdot \delta \underline{D}) ds = 0 .$$

tenendo conto che le variazioni  $\delta \underline{u}$  e  $\delta \underline{\varphi}$  sono omogenee in corrispondenza dei vincoli e che quindi le reazioni vincolari soluzione  $\underline{R}^*$  hanno un contributo nullo.

Quindi risulta:

$$\int_{\mathcal{I}_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{\mathcal{I}_0} \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{D} = \underline{D}^*} \cdot \delta \underline{D} \right) ds = 0 .$$

cioè:

$$\delta \pi \Big|_{\underline{D} = \underline{D}^*} = 0 ,$$

come volersi dimostrare. Poiché si sono utilizzate, nella dimostrazione, espressioni formalmente valide anche in elasticità finita, tale teorema ha una validità generale.

### 2.6.3 Principio di minimo dell'energia potenziale totale

Nell'ambito della sola elasticità infinitesimale si dimostra inoltre che il funzionale energia potenziale totale ha un minimo assoluto in corrispondenza della soluzione.

Infatti, utilizzando la forma quadratica del funzionale energia potenziale totale, propria del legame elastico-lineare:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) - \pi(\underline{u}^*, \underline{\varphi}^*) = - \int_{\Omega_0} (\underline{f} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) + \underline{m} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*)) ds +$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=0}^n (\underline{y}_i \cdot (\underline{u}_i - \underline{u}_i^*) + \underline{M}_i \cdot (\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i^*)) \\ & + \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \{ \underline{D} \cdot \underline{E}[\underline{D}] - \underline{D}^* \cdot \underline{E}[\underline{D}^*] \} ds = \\ & = - \int_{\Omega_0} (\underline{f} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) + \underline{m} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*)) ds + \\ & - \sum_{i=0}^n (\underline{y}_i \cdot (\underline{u}_i - \underline{u}_i^*) + \underline{M}_i \cdot (\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i^*)) \\ & + \int_{\Omega_0} \underline{D}^* \cdot \underline{E}[\underline{D} - \underline{D}^*] ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} [\underline{D} - \underline{D}^*] \cdot \underline{E}[\underline{D} - \underline{D}^*] ds. \end{aligned}$$

Le caratteristiche della sollecitazione  $\underline{S}^* = \underline{E}[\underline{D}^*]$  sono in equilibrio con le forze  $\underline{f}$ ,  $\underline{m}$ ,  $\underline{y}_i$  e  $\underline{M}_i$  mentre gli spostamenti  $\underline{u} - \underline{u}^*$ , le rotazioni  $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*$  e le deformazioni  $\underline{D} - \underline{D}^*$  soddisfanno le equazioni di congruenza linearizzate ed inoltre gli spostamenti  $\underline{u} - \underline{u}^*$  e le rotazioni  $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*$  si annullano in corrispondenza dei

vincoli. Per il principio dei lavori virtuali la somma dei primi due termini si annulla e risulta:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) - \pi(\underline{u}^*, \underline{\varphi}^*) = \frac{1}{2} \int_{\ell_0} [\underline{D} - \underline{D}^*] \cdot \mathbb{E} [\underline{D} - \underline{D}^*] ds.$$

La definitezza positiva di  $\mathbb{E}$  assicura dunque:

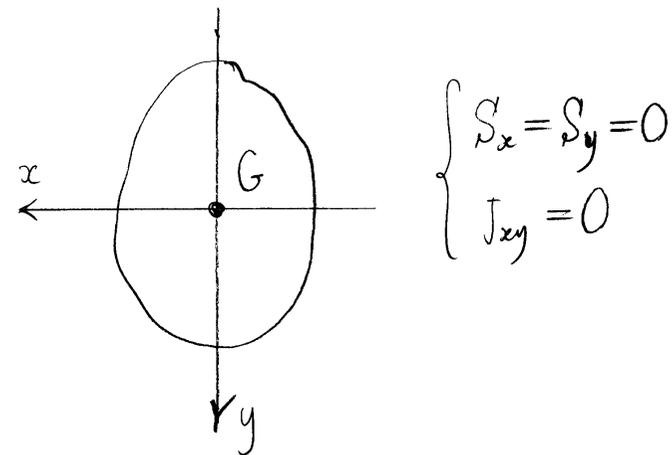
$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) - \pi(\underline{u}^*, \underline{\varphi}^*) > 0$$

se  $\underline{D} \neq \underline{D}^*$ , cioè se gli spostamenti  $\underline{u} - \underline{u}^*$  e le rotazioni  $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*$  differiscono da un moto rigido. In tal caso  $\underline{u}$  e  $\underline{\varphi}$  differiscono dalla soluzione e il teorema resta dimostrato.

## 2.7 Teoria tecnica delle travi

Si assuma un legame costitutivo elastico lineare coincidente, nella parte flessionale, con quanto dedotto nella teoria della trave inflessa. Nell'ipotesi che esista l'energia elastica di deformazione il legame è invertibile e le matrici di elasticità e di elasticità inversa sono simmetriche. Si supponga inoltre che la parte flessionale sia indipendente dal taglio e dal momento torcente. Si scelga poi, nel piano della sezione, un sistema di riferimento  $Gxy$  principale di inerzia e si faccia per il momento riferimento alla linea d'asse baricentrica per il calcolo di tutte le quantità che intervengono nel legame costitutivo.

In tali ipotesi, la matrice di elasticità inversa  $\mathbb{C}$  può essere



messa nella forma:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_t & C_{tx} & C_{ty} \\ 0 & 0 & 0 & C_{tx} & C_x & C_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & C_{ty} & C_{xy} & C_y \end{bmatrix},$$

dove si è tenuto conto del fatto che la matrice di elasticità inversa deve essere simmetrica.

### 2.7.1 Parte assiale e flessionale

La parte flessionale di tale legame è scritta in una forma che dipende dalla scelta del baricentro quale polo per il calcolo di  $M_x$  e  $M_y$  e dalla scelta degli assi principali di inerzia quali assi cartesiani ortogonali nel piano della sezione.

Si ricordi che, sempre con polo di riduzione il baricentro ma indipendentemente dal sistema di riferimento, tali legami possono scriversi:

$$\epsilon = \frac{N}{EA},$$

$$k_f = \frac{1}{E} J^{-1} M,$$

dove la dilatazione  $\epsilon$  è quella della fibra baricentrica, il mo-

mento flettente  $M$  è valutato rispetto al baricentro e  $J$  è il tensore di inerzia valutato nel baricentro.

### 2.7.2 Parte torcente e tagliante

Si consideri ora la parte del legame costitutivo che coinvolge il momento torcente e il taglio:

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_t & C_{tx} & C_{ty} \\ C_{tx} & C_x & C_{xy} \\ C_{ty} & C_{xy} & C_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}.$$

Come detto, tale scrittura è relativa alla scelta del baricentro quale polo per il calcolo del momento torcente  $M_t$  e degli scorrimenti  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$ . La scelta del baricentro quale polo è dipesa essenzialmente dal fatto che la dilatazione della linea dei baricentri dipende solo dallo sforzo normale. Ci occupiamo ora se esiste,

qualunque sia il taglio applicato, un polo naturale per il calcolo del momento torcente che renda l'angolo unitario di torsione  $\Theta$  dipendente dal solo momento torcente. Con tale scelta gli elementi  $C_{tx}$  e  $C_{ty}$  quindi si annullerebbero.

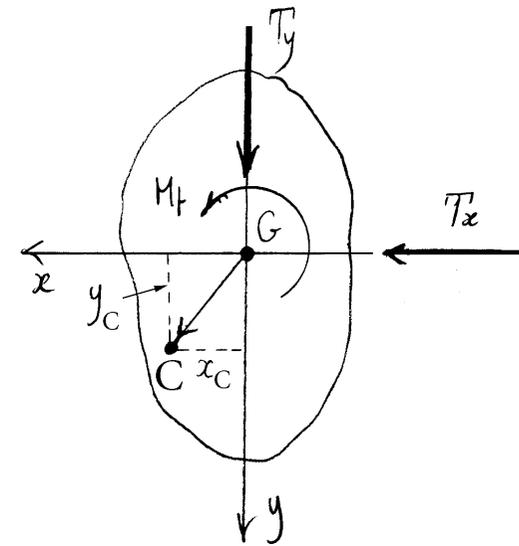
Per rispondere a tale domanda, teniamo presente la formula di trasformazione del momento torcente al cambiare del polo di riduzione:

$$M_C = M_t + T_x y_C - T_y x_C,$$

dove  $M_C$  indica il momento torcente valutato rispetto al punto  $C$ . L'analoga formula relativa allo scorrimento risulta invece:

$$\underline{\gamma}_C = \underline{\gamma} + \Theta \underline{e}_t \times (C - G),$$

equivalente a scrivere:



$$\begin{cases} \gamma_x^C = \gamma_x - \Theta y_C \\ \gamma_y^C = \gamma_y + \Theta x_C \end{cases}$$

Ricavando  $M_t$  e sostituendo nel legame costitutivo interessato si ha infine:

$$\Theta = C_t M_C + (C_{tx} - y_C C_t) T_x + (C_{ty} + x_C C_t) T_y.$$

Si ottiene dunque quale polo di riduzione il punto  $C$  di coordinate:

$$\begin{cases} x_c = -\frac{C_{ty}}{C_t} \\ y_c = \frac{C_{tx}}{C_t} \end{cases}$$

Tale punto individua il centro di taglio. Se il momento torcente si calcola rispetto al centro di taglio e se ci si riferisce agli scorrimenti relativi alla linea dei centri di taglio, il legame costitutivo assume la seguente forma semplificata:

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ \delta_x^c \\ \delta_y^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_t & 0 & 0 \\ 0 & C_x^c & C_{xy}^c \\ 0 & C_{xy}^c & C_y^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_c \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix},$$

dove :

$$\begin{cases} C_x^c = C_x - y_c C_{tx} \\ C_y^c = C_y + x_c C_{ty} \\ C_{xy}^c = C_{xy} + x_c y_c C_t \end{cases}$$

Inoltre :

$$\begin{aligned} \delta_x^c &= \delta_x - \Theta y_c = C_{tx} (M_c - T_x y_c + T_y x_c) \\ &\quad - C_t M_c y_c + C_x T_x + C_{xy} T_y \\ &= \left\{ C_x - (C_{tx})^2 / C_t \right\} T_x + \left\{ C_{xy} - C_{tx} C_{ty} / C_t \right\} T_y, \end{aligned}$$

e analogamente :

$$\begin{aligned} \delta_y^c &= \delta_y + \Theta x_c \\ &= \left\{ C_{xy} - C_{tx} C_{ty} / C_t \right\} T_x + \left\{ C_y - (C_{ty})^2 / C_t \right\} T_y. \end{aligned}$$

E' consuetudine di porre :

$$\begin{cases} C_t = \frac{1}{G J_t} \\ C_x^c = \frac{X_x}{GA} \\ C_y^c = \frac{X_y}{GA} \\ C_{xy}^c = \frac{X_{xy}}{GA} \end{cases},$$

dove  $G$  è il modulo di elasticità tangenziale,  $A$  è l'area della sezione retta,  $J_t$  è detto *fattore torsionale di rigidezza* e le costanti adimensionali  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  e  $\chi_{xy}$  sono dette *fattori di taglio*. Questi rappresentano le componenti, nel sistema  $Gxy$ , di un tensore doppio piano  $\chi$ , detto *tensore dei fattori di taglio*:

$$[\chi] = \begin{bmatrix} \chi_x & \chi_{xy} \\ \chi_{xy} & \chi_y \end{bmatrix}.$$

Come ogni tensore doppio simmetrico, anche il tensore dei fattori di taglio ha in generale due direzioni principali, in tal caso di *taglio*, ortogonali tra loro che diagonalizzano la matrice delle componenti. In generale le direzioni principali di taglio differiscono da quelle principali di inerzia.

Un asse di simmetria, come già noto, contiene il baricentro e il centro di taglio ed è principale di inerzia. Inoltre risulta essere anche principale di taglio. Infatti un taglio diretto come l'asse di simmetria è simmetrico e non può quindi generare uno scorrimento nella direzione ortogonale all'asse di simmetria, essendo tale scorrimento emisimmetrico.

Riassumendo, i legami costitutivi inversi legati a taglio e a momento torcente possono scriversi:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{M_C}{GJ_t}, \\ \gamma_x^C &= \chi_x \frac{T_x}{GA} + \chi_{xy} \frac{T_y}{GA}, \\ \gamma_y^C &= \chi_{xy} \frac{T_x}{GA} + \chi_y \frac{T_y}{GA}, \end{aligned}$$

dove il momento torcente  $M_C$  è valutato rispetto al centro di taglio e lo scorrimento  $\gamma_C$  è valutato rispetto alla fibra

longitudinale per il centro di taglio. Indipendentemente dalla scelta di due assi cartesiani ortogonali di riferimento nel piano della sezione, il legame costitutivo legato al solo taglio si può invece scrivere in forma vettoriale:

$$\gamma_C = \frac{1}{GA} \chi T \quad \Rightarrow \quad T = GA \chi^{-1} \gamma_C.$$

Infine, l'energia elastica di deformazione e quella complementare assumono la forma:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \left\{ EA \epsilon_G^2 + E k_f \cdot J k_f + G J_t \Theta^2 + GA \gamma_C \cdot \chi^{-1} \gamma_C \right\}, \\ \psi &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{1}{E} M \cdot J^{-1} M + \frac{M_C^2}{GJ_t} + \frac{1}{GA} T \cdot \chi T \right\}. \end{aligned}$$

### 2.7.3 Estensione del problema di Saint-Venant

Per rendere operativi i legami costitutivi così individuati è necessario determinare, in generale, la posizione del centro di taglio  $C$ , così come il fattore torsionale di rigidezza  $J_t$  e i fattori di taglio  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  e  $\chi_{xy}$ .

Queste informazioni saranno ottenute dalla soluzione del problema di Saint-Venant, la cui estensione al problema della trave, come si vedrà, soddisfa tutte le ipotesi precedenti sul legame costitutivo.

Non è invece accettabile dedurre il legame costitutivo torcente e tagliante direttamente dal campo di spostamenti rigidi delle sezioni rette, analogamente a quanto fatto nel caso flessionale, come illustrato in appendice al capitolo.

## 2.8 Appendice (Legame elastico lineare dedotto dal campo di spostamenti rigidi della sezione retta)

Si supponga la validità di un legame costitutivo, valido localmente, del tipo:

$$\underline{\tau} = G \underline{\gamma}_P.$$

La relazione (4) del paragrafo 1 permette di scrivere:

$$\underline{\tau} = G \underline{\gamma} + G \Theta \underline{e}_t \times (P-G),$$

e quindi, integrando sulla sezione retta:

$$\underline{T} = \int_A \underline{\tau} dA = G A \underline{\gamma} \Rightarrow \underline{\gamma} = \frac{1}{GA} \underline{T}$$

Ancora:

$$\begin{aligned} M_t \underline{e}_t &= \int_A (P-G) \times \underline{\tau} dA = \left( G \int_A (P-G) dA \right) \times \underline{\gamma} \\ &+ G \Theta \int_A (P-G) \times \{ \underline{e}_t \times (P-G) \} dA \end{aligned}$$

$$= \left( G \Theta \int_A (P-G) \cdot (P-G) dA \right) \underline{e}_t$$

$$- G \Theta \int_A \{ (P-G) \cdot \underline{e}_t \} (P-G) dA = G \Theta J_G \underline{e}_t,$$

cioè:

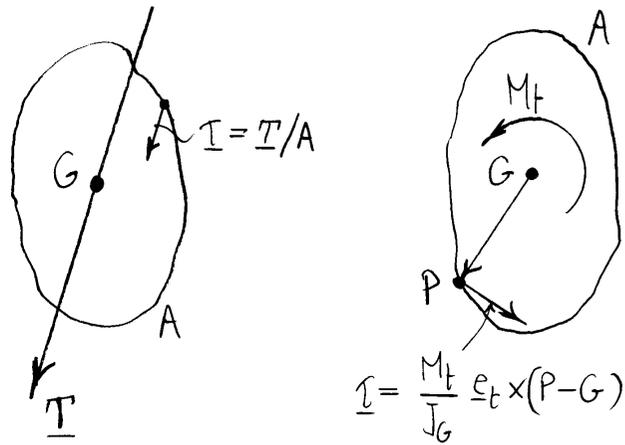
$$M_t = G \Theta J_G \Rightarrow \Theta = \frac{M_t}{G J_G}.$$

Quindi:

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{T}}{A} + \frac{M_t}{J_G} \underline{e}_t \times (P-G).$$

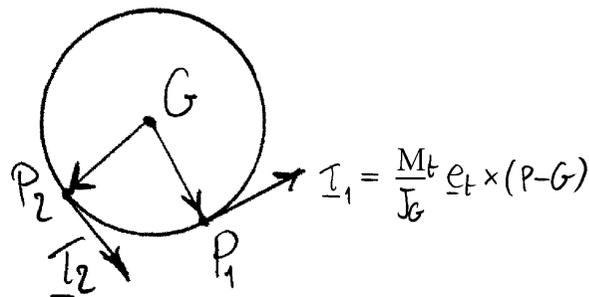
Si noti che in tal caso il centro di taglio coincide con il baricentro, il tensore dei fattori di taglio col tensore identità e infine il fattore torsionale di rigidità con il momento di inerzia polare rispetto al baricentro.

La  $\underline{\tau}$  che si è così ottenuta soddisfa le condizioni al contorno solo nel caso di sezione circolare non soggetta a taglio ( $\underline{T} = \underline{0}$ ). Infatti, le tensioni tangenziali associate ad un taglio  $\underline{T}$  risulterebbero costanti e quindi non



E' evidente che il legame costitutivo così ottenuto non e' accettabile.

possono essere tangenti ovunque al contorno. La stessa cosa succede per le tensioni tangenziali associate al momento torcente, tensioni che hanno la direzione ortogonale al vettore posizione P-G, salvo che per la sezione circolare.

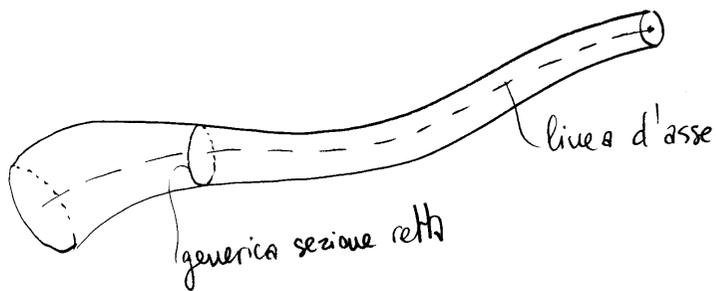


## Capitolo 3

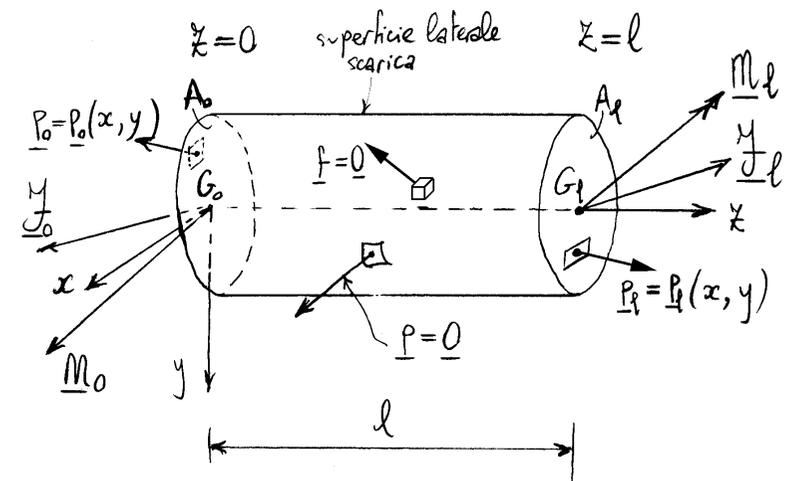
### Problema di Saint-Venant

#### 3.1 Schematizzazione della trave nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità

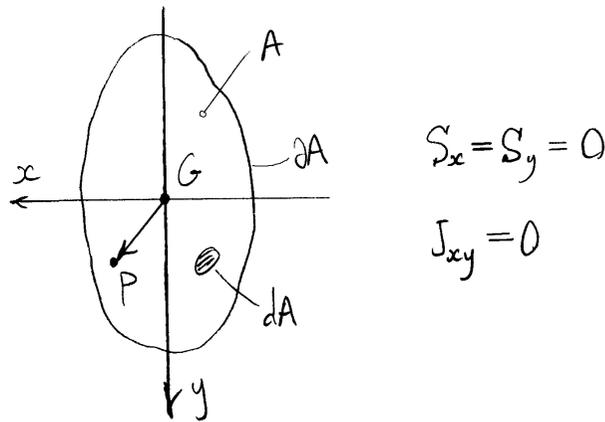
Per trave si intende un corpo in cui una dimensione è prevalente rispetto alle altre e descrivibile geometricamente attraverso la sua linea d'asse e le sue sezioni rette, ortogonali alla linea d'asse. La linea d'asse può essere curva e le sezioni rette possono essere variabili.



Quale modello semplificato di trave, ci proponiamo di studiare, nell'ambito della teoria generale dell'elasticità, un corpo cilindrico non vincolato e caricato solo nelle due sezioni di estremità. Geometricamente, un corpo cilindrico rappresenta una trave ad asse rettilinea ed a sezione costante.



La linea d'asse della trave viene scelta coincidente con il baricentro, mentre gli assi  $x$  e  $y$  sono scelti coincidenti con gli assi principali di inerzia. Questo significa che i momenti statici  $S_x$  e  $S_y$ , così come il momento centrifugo  $J_{xy}$ , sono nulli.



Poiché la trave non è vincolata occorre imporre le condizioni di equilibrio globale. L'equilibrio alla traslazione richiede:

$$\int_{A_0} \mathbf{p}_0 dA + \int_{A_\ell} \mathbf{p}_\ell dA = \mathbf{0},$$

da cui:

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_\ell = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{F}_\ell$  sono le risultanti globali sulla sezione di prima e, rispettivamente, di seconda estremità. L'equilibrio alla rotazione richiede invece:

$$\int_{A_0} (\mathbf{P} - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{p}_0 dA + \int_{A_\ell} (\mathbf{P} - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{p}_\ell dA = \mathbf{0}.$$

Tenendo conto che su  $A_\ell$  risulta:

$$\mathbf{P} - \mathbf{G}_0 = (\mathbf{P} - \mathbf{G}_\ell) + (\mathbf{G}_\ell - \mathbf{G}_0).$$

si ha infine:

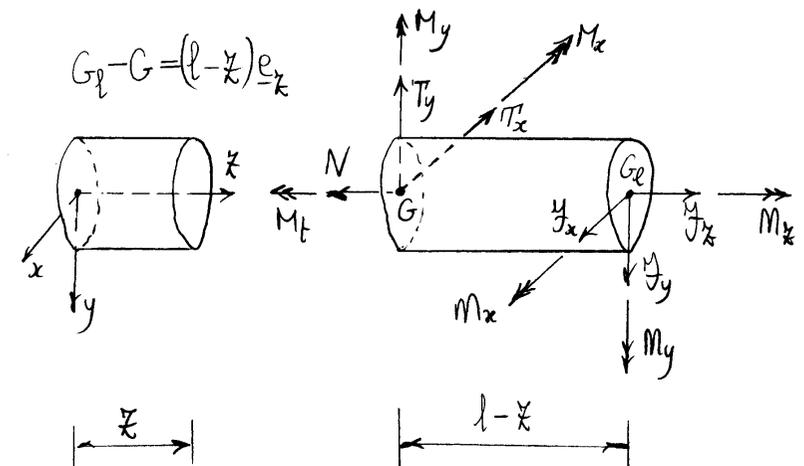
$$\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_\ell + (\mathbf{G}_\ell - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{F}_\ell = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{M}_0$  e  $\mathbf{M}_\ell$  sono i momenti risultanti globali sulla sezione di prima e, rispettivamente, di seconda estremità. Ne risulta che la risultante  $\mathbf{F}_0$  e il momento risultante  $\mathbf{M}_0$  agenti sulla base di prima estremità dipendono dalla risultante  $\mathbf{F}_\ell$  e dal momento risultante  $\mathbf{M}_\ell$  agenti sulla base di seconda estremità:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= -\mathbf{F}_\ell, \\ \mathbf{M}_0 &= -\mathbf{M}_\ell - (\mathbf{G}_\ell - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{F}_\ell. \end{aligned}$$

### 3.2 Caratteristiche della sollecitazione

Siano  $F_x, F_y$  e  $F_z$  le componenti della risultante  $\mathbf{F}_\ell$  agente sulla sezione di seconda estremità e, analogamente,  $M_x, M_y$  e  $M_z$  le componenti del momento risultante  $\mathbf{M}_\ell$ . L'equilibrio del generico tronco di trave compreso tra la sezione retta generica e la sezione di seconda estremità conduce ai seguenti



valori delle caratteristiche della sollecitazione:

$$\begin{aligned} N &= F_z, & M_t &= \mathcal{M}_z, \\ M_x &= \mathcal{M}_x - F_y (\ell - z), & T_x &= F_x, \\ M_y &= \mathcal{M}_y + F_x (\ell - z), & T_y &= F_y. \end{aligned}$$

Si noti che lo sforzo normale e le componenti di taglio sono costanti lungo l'asse della trave e che tali valori uguagliano le corrispondenti componenti  $F_z$ ,  $F_x$  e  $F_y$  della forza risultante agente sulla base di seconda estremità. Analogamente, il momento torcente è costante lungo l'asse della trave e tale valore uguaglia la corrispondente componente  $\mathcal{M}_z$  del momento risultante agente sulla base di seconda estremità. Le uniche caratteristiche della sollecitazione in generale variabili (linearmente) lungo l'asse della trave sono dunque le componenti del momento flettente, componenti che per i risultati precedenti possono porsi nella forma:

$$\begin{aligned} M_x &= \mathcal{M}_x - T_y (\ell - z), \\ M_y &= \mathcal{M}_y + T_x (\ell - z). \end{aligned}$$

Ne risulta che occorre tenere distinte dalle caratteristiche della sollecitazione le sole componenti  $\mathcal{M}_x$  e  $\mathcal{M}_y$  del momento risultante  $\mathcal{M}_\ell$  agente sulla base di seconda estremità.

### 3.3 Principio di Saint-Venant

Il problema così impostato si presenta di difficile soluzione se non si pongano limiti alla distribuzione dei carichi nelle due sezioni di estremità. Occorre, a tale proposito, il principio di Saint-Venant. Tale principio afferma che due diverse distribuzioni di forze sulle sezioni di estremità aventi uguali risultante e momento risultante provocano effetti sensibilmente differenti solo in prossimità delle sezioni di estremità. Può essere allora possibile scegliere, fra le diverse soluzioni corrispondenti a distribuzioni di forze sulle due basi aventi uguali risultante e momento risultante, una soluzione particolarmente semplice.

Precisamente, si cercano quelle soluzioni che

soddisfano le seguenti condizioni restrittive sul tensor degli sforzi (ipotesi di Saint-Venant):

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

ovverossia:

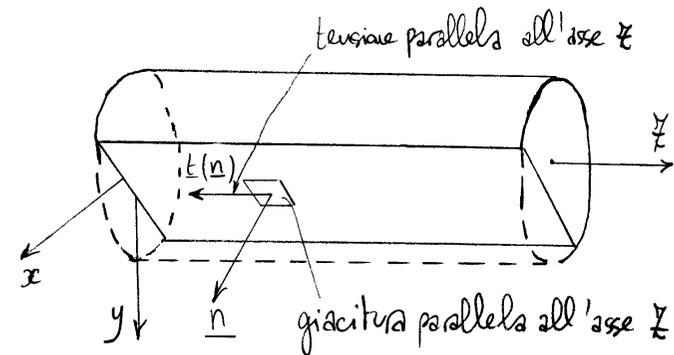
$$[\underline{\underline{\sigma}}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Tale richiesta è giustificata innanzitutto dal fatto che le componenti della terza colonna del tensore degli sforzi devono essere in generale diverse dallo zero per poter generare delle caratteristiche della sollecitazione generiche sulle sezioni rette (di normale  $z$ ). Se poi le altre componenti sono nulle il problema delle tensioni tangenziali viene drasticamente semplificato dal fatto che queste (come si vedrà nel seguito) diventano indipendenti dalla coordinata  $z$  sulla linea d'asse.

Si noti anche che la (1) equivale fisicamente a richiedere che le fibre della trave (stese parallelamente all'asse  $z$ ) interagiscano fra di loro solo attraverso un vettore di tensione di direzione  $z$ . Infatti se  $\underline{n} \equiv (n_x, n_y, 0)$  è la normale di un elemento di area

parallelo all'asse  $z$  allora:

$$\{\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{Bmatrix}.$$



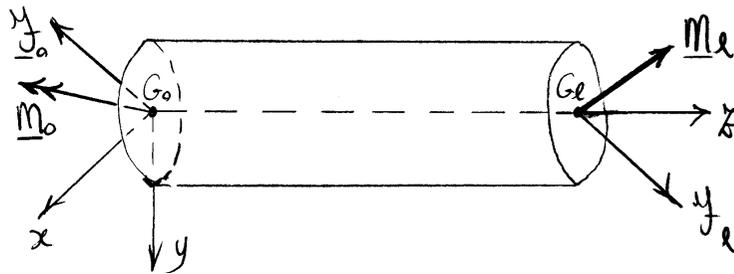
È chiaro che a priori non è detto che tra le soluzioni "equivalenti" nel senso del principio di Saint-Venant ce ne sia una avente la forma (1), cioè che giustifica la denominazione di ipotesi data alle condizioni (1). Si vedrà comunque nel seguito che risolvendo tale problema si ottiene in ogni caso una soluzione avente tale forma.

L'estensione dei risultati ottenuti in tale modello semplificato al caso generale di asse curvo, di sezione variabile e di trave caricata anche sulla superficie laterale e nel volume dà origine alla cosiddetta teoria tecnica della trave.

### 3.4 Problema di Saint-Venant

Possiamo, a questo punto, enunciare il problema di Saint-Venant:

"Dato un corpo cilindrico  $B$  caricato solo alle estremità, determinare un campo di tensioni  $\underline{\sigma}$ , di deformazioni



$\underline{\varepsilon}$  e di spostamenti  $\underline{u}$  tali che siano soddisfatte le seguenti equazioni nel volume  $B$ :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{0} & \text{(equazione indefinita di equilibrio)} \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + \operatorname{grad} \underline{u}^T) & \text{(congruenza)} \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \underline{\sigma} - \nu (\operatorname{tr} \underline{\sigma}) \underline{I} \right\} & \text{(legame costitutivo)} \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 & \text{(ipotesi di Saint-Venant)} \end{cases}$$

le seguenti condizioni al contorno locali sulla superficie laterale:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0},$$

e le seguenti condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette delle travi:

$$\underline{F} = \int_A \underline{\sigma} \underline{e}_z dA, \quad \underline{M} = \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \times (\underline{\sigma} \underline{e}_z) dA,$$

dove  $\underline{F}$  e  $\underline{M}$  sono le caratteristiche della sollecitazione. Si noti che tali condizioni scritte per le due basi del cilindro equivalgono alle condizioni globali di equilibrio al contorno sulle stesse basi. D'altronde le condizioni globali di equilibrio al contorno sulle basi del cilindro insieme alle equazioni indefinite di equilibrio impongono la validità delle condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette delle travi.

Vediamo di esprimere in componenti le varie equazioni, ancora assumendo che l'asse  $z$  coincida con l'asse della trave e l'origine con il baricentro di una sezione di estremità.

Equazioni indefinite di equilibrio ( $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Legame costitutivo ( $\text{tr} \underline{\sigma} = \sigma_z$ ):

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \left( (1+\nu) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \nu \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \right),$$

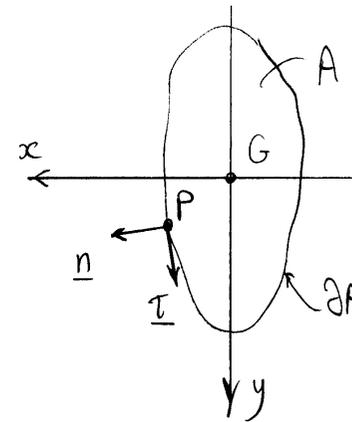
e quindi:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu \sigma_z & 0 & (1+\nu) \tau_{xz} \\ 0 & -\nu \sigma_z & (1+\nu) \tau_{yz} \\ (1+\nu) \tau_{xz} & (1+\nu) \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Equilibrio sulla superficie laterale

$$\{ \underline{\sigma} \underline{n} \} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0} \Rightarrow \boxed{\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0}$$



normale  $\underline{n}$  alla superficie laterale:

$$\{ \underline{n} \} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La tensione tangenziale totale  $\underline{T}$  in un punto  $P$  appartenente al contorno  $\partial A$  di una generica sezione retta deve essere tangente al contorno della sezione.

### Equivalenza statica nelle sezioni rette

La tensione  $\sigma e_z$  ha le seguenti componenti:

$$\{\sigma e_z\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Il momento della tensione  $\sigma e_z$  rispetto al baricentro risulta:

$$(P-G) \times \sigma e_z = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

e quindi si hanno le componenti:

$$\{(P-G) \times \sigma e_z\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z y \\ -\sigma_z x \\ \tau_{yz} x - \tau_{xz} y \end{Bmatrix}.$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \int_{A_\ell} \sigma_z dA = N \\ \int_{A_\ell} \sigma_z y dA = M_x - T_y (l - z) ; \\ \int_{A_\ell} \sigma_z x dA = -M_y - T_x (l - z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA = M_t \\ \int_A \tau_{xz} dA = T_x \\ \int_A \tau_{yz} dA = T_y \end{cases}.$$

### 3.5 Energia complementare elastica

Sotto l'ipotesi di Saint-Venant ( $\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0$ ) l'energia complementare elastica per unità di volume assume l'aspetto:

$$\begin{aligned}\Psi_v &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II} \\ &= \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G}.\end{aligned}$$

L'energia complementare elastica per unità di linea si ottiene integrando nell'area la  $\Psi_v$ :

$$\Psi_l = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA + \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA.$$

### 3.6 Soluzione del problema di Saint-Venant in termini di tensioni

Il tensore degli sforzi, soluzione del problema di Saint-Venant, può essere ottenuto integrando le equazioni di Beltrami:

$$(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\text{tr } \underline{\sigma}) = 0.$$

Le equazioni di Beltrami rappresentano le condizioni necessarie (e sufficienti nel caso di sezione monocamessa) per l'integrazione, in termini di spostamento, del tensore di deformazione ottenibile dal tensore degli sforzi via legge costitutiva.

Le equazioni di Beltrami, scritte per esteso tenendo conto delle ipotesi di Saint-Venant (cioè

$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$  e quindi  $\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_z$ ) diventano:

$$i=j=x \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0,$$

$$i=j=y \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0,$$

$$i=j=z \Rightarrow (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0,$$

$$i=x, j=y \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$i=x, j=z \Rightarrow (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$i=y, j=z \Rightarrow (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0.$$

Utilizzando le prime due, la terza equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0.$$

Utilizzando la prima e la seconda equazione indefinita di equilibrio, la quinta e la sesta equazione di Beltrami divengono:

$$(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0.$$

### 3.7 Tensioni normali

Equazioni di Beltrami:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_z \text{ lineare in } x, y \text{ e } z \text{ separatamente}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \text{nell'espressione di } \sigma_z \text{ non esistono termini misti in } x \text{ e } y$$

Integrale generale per la tensione normale:

$$\sigma_z = (b_1 z + a_1)x + (b_2 z + a_2)y + b_3 z + a_3.$$

Le costanti di integrazione possono essere determinate imponendo le condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette:

$$\int_A \sigma_z dA = N,$$

$$\int_A \sigma_z y dA = M_x - T_y(l-z),$$

$$\int_A \sigma_z x dA = -M_y - T_x(l-z),$$

Dalla prima condizione si ottiene:

$$(b_3 z + a_3) A = N,$$

e quindi:

$$a_3 = \frac{N}{A}, \quad b_3 = 0.$$

Dalla seconda condizione si ottiene poi:

$$(b_2 z + a_2) J_x = M_x - T_y(l-z),$$

per cui:

$$a_2 = \frac{M_x - T_y l}{J_x}, \quad b_2 = \frac{T_y}{J_x}.$$

Dalla terza condizione si ottiene infine:

$$(b_1 z + a_1) J_y = -M_y - T_x(l-z),$$

e quindi:

$$a_1 = -\frac{M_y + T_x l}{J_y}, \quad b_1 = \frac{T_x}{J_y}.$$

La tensione normale vale allora:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x - T_y(l-z)}{J_x} y - \frac{M_y + T_x(l-z)}{J_y} x.$$

L'espressione della tensione normale, scritta in funzione delle caratteristiche della sollecitazione, diventa dunque:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x.$$

L'energia complementare elastica per unità di linea associata alla tensione normale diventa:

$$\begin{aligned} \Psi_l &= \frac{1}{2E} \int_A \sigma_x^2 dA \\ &= \frac{1}{2E} \int_A \left\{ \frac{N^2}{A^2} + \frac{M_x^2}{J_x^2} y^2 + \frac{M_y^2}{J_y^2} x^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{N M_x}{A J_x} y - 2 \frac{N M_y}{A J_y} x - \frac{M_x M_y}{J_x J_y} xy \right\} dA. \end{aligned}$$

Tenendo conto che sono nulli i momenti statici rispetto ad assi baricentrici e il momento centrifugo rispetto agli assi principali, risulta:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A xy dA = 0,$$

e dunque:

$$\Psi_l = \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} \right).$$

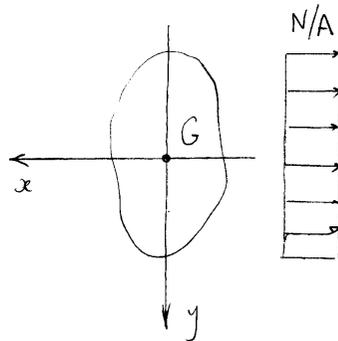
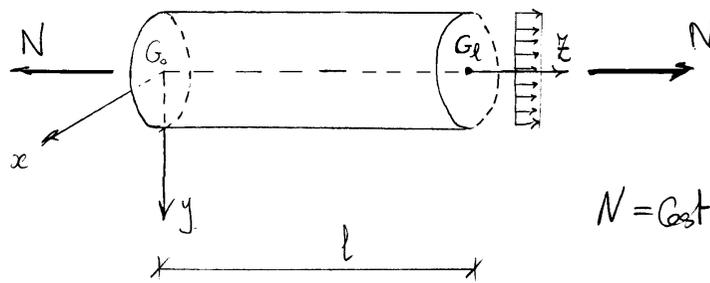
Notare che la scelta del baricentro quale polo di riduzione per il calcolo dei momenti  $M_x$  e  $M_y$  e la scelta degli assi  $x$  e  $y$  quali assi principali di inerzia rende le sollecitazioni  $N$ ,  $M_x$  e  $M_y$  ortogonali energeticamente, nel senso che il loro lavoro mutuo è nullo.

### 3.8 Sforzo normale centrato

Trave soggetta a sforzo normale centrato:

$$N \neq 0,$$

$$T_x = T_y = M_x = M_y = M_z = 0.$$



G baricentro della sezione

x e y assi centrali di inerzia

Il campo tensionale soluzione risulta:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

Il campo delle deformazioni si ottiene dalla relazione inversa di Hooke:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\underline{\underline{\sigma}} - \nu(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} \right\}.$$

Poiché:

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{A} \end{bmatrix}, \quad \text{tr}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{N}{A},$$

risulta:

$$[\underline{\underline{\epsilon}}] = \frac{N}{EA} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gradiente della rotazione locale rigida:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} = 0, \quad (i,j) = \begin{cases} (z, y) \\ (x, z) \\ (y, x) \end{cases}.$$

A meno di una inesenziale rotazione rigida globale di tutto il cilindro risulta:

$$\begin{cases} \underline{\omega} = \underline{0} \\ \text{grad } \underline{u} = \underline{\varepsilon} \end{cases}, \quad \underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

Integrando si ottiene quindi:

$$u = -\nu \frac{N}{EA} x + f(y, z).$$

Risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f = g(z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow g = \text{cost}.$$

Una costante rappresenta una traslazione rigida, in tal caso nella direzione dell'asse  $x$ . A meno di tale traslazione rigida, la componente dello spostamento in direzione dell'asse  $x$  vale:

$$u = -\nu \frac{N}{EA} x.$$

Procedendo analogamente per  $v$  e  $w$ , si ottiene definitivamente il quadro completo delle componenti di spostamento:

$$u = -\frac{\nu N}{EA} x,$$

$$v = -\frac{\nu N}{EA} y,$$

$$w = \frac{N}{EA} z.$$

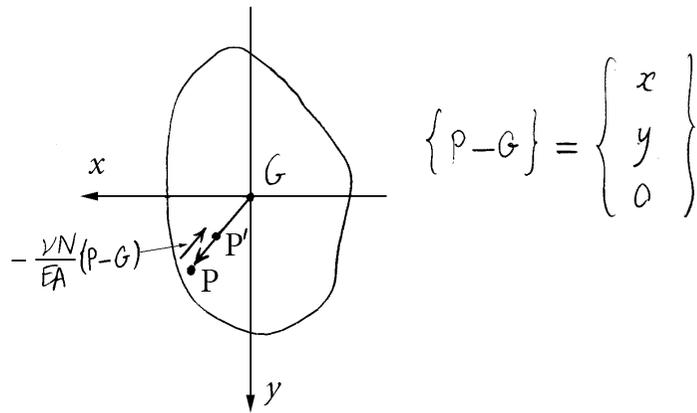
Tale campo di spostamenti può essere separato in due quote:

$$\underline{u} = \frac{N}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} - \frac{\nu N}{EA} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix},$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\underline{u} = \frac{N}{EA} z \underline{e}_z - \frac{\nu N}{EA} (P-G).$$

Il primo termine è indipendente da  $x$  ed  $y$  e quindi rappresenta una traslazione rigida della sezione (in direzione dell'asse  $z$ ).



Il secondo termine ha componente  $w = 0$  e dipende da  $x$  e da  $y$ . Rappresenta quindi una deformazione della sezione nel proprio piano.

Tale deformazione sposta un punto  $P$  in direzione della congiungente di  $P$  con  $G$ , e poiché il rapporto:

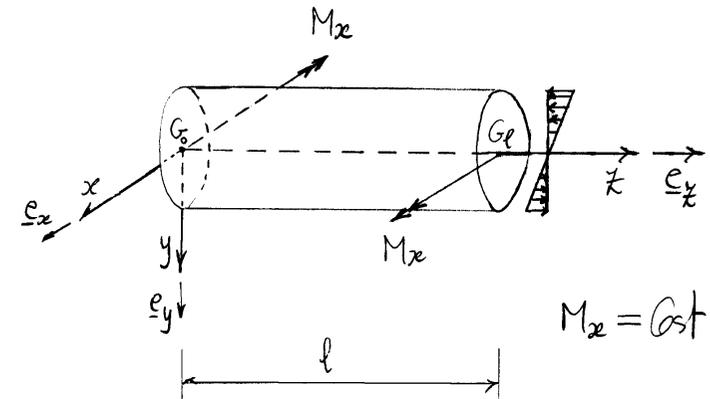
$$\frac{|P-P'|}{|P-G|} = \frac{vN}{EA},$$

è costante, cioè non dipende da  $P$ , tale deformazione rappresenta una *omotetia*.

Da tale decomposizione del campo degli spostamenti risulta evidente che la sezione resta piana.

### 3.9 Flessione retta

$$\begin{cases} N = M_y = T_x = T_y = M_t = 0, \\ M_x \neq 0. \end{cases}$$

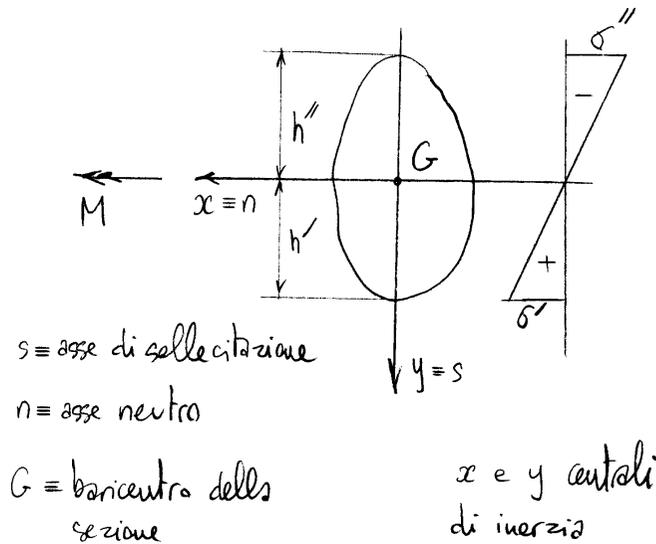


La soluzione generale nelle tensioni normali si riduce alle formule di Navier:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} y,$$

mentre le tensioni tangenziali sono nulle:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$



$$[(tr \underline{\sigma}) \underline{I}] = \frac{M_x}{J_x} \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

ne consegue il seguente tensore di deformazione infinitesima:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{M_x}{E J_x} \begin{bmatrix} -\nu y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Tenendo conto che :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \underline{\sigma} - \nu tr \underline{\sigma} \underline{I} \},$$

e che in componenti risulta:

$$tr \underline{\sigma} = \sigma_x,$$

$$[\underline{\sigma}] = \frac{M_x}{J_x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

Notare che  $\varepsilon = 0$  per  $y = 0$ , avendosi lungo l'asse neutro.

Ricordiamo che la rotazione rigida dell'intorno di un punto è rappresentata dal tensore di rotazione  $\underline{\omega}$  emisimmetrico oppure dal vettore rotazione  $\underline{\varphi}$  :

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{ \underline{\varphi} \} = \begin{Bmatrix} \omega_{xy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yz} \end{Bmatrix}.$$

Gradiente di  $\underline{w}$  :

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}.$$

Si noti che le componenti non nulle di  $\underline{\varepsilon}$  sono  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  e che queste dipendono solo da  $y$ . Ne consegue che per avere derivate diverse dallo zero occorre che  $x_j = y$  oppure  $x_i = y$ . Risulta:

$$[\text{grad } \underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{(k)} & x & y & z & \text{(ij)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} xy \\ xz \\ yx \end{array} \end{array} \end{array},$$

e quindi:

$$w_{xy} = \frac{M_x}{EJ_x} z,$$

$$w_{xz} = 0,$$

$$w_{yx} = \nu \frac{M_x}{EJ_x} x,$$

a meno di inessenziali rotazioni rigide complessive di tutto il cilindro.

In definitiva:

$$[\underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} 0 & -\nu x & 0 \\ \nu x & 0 & -z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi:

$$[\text{grad } \underline{u}] = [\underline{\varepsilon} + \underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} -\nu y & -\nu x & 0 \\ \nu x & -\nu y & -z \\ 0 & z & y \end{bmatrix}.$$

Integrando negli spostamenti si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy + f(y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x + \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy + Gst$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow v = \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EJ_x} x^2 + f(y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow f = -\frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EJ_x} y^2 + g(z) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M_x}{EJ_x} z \Rightarrow \frac{dg}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x} z \Rightarrow g = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{EJ_x} z^2 \end{cases}$$

$$\boxed{v = \frac{M_x}{2EJ_x} \left\{ -z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right\} + Cost}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow w = w(y, z) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{M_x}{EJ_x} z \Rightarrow w = \frac{M_x}{EJ_x} yz + f(z) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{M_x}{EJ_x} y + \frac{df}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{df}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{w = \frac{M_x}{EJ_x} yz + Cost}$$

Quindi, a meno di un inessenziale moto rigido complessivo di traslazione, si ottiene il seguente campo continuo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy \\ v = \frac{M_x}{2EJ_x} \left\{ -z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right\} \\ w = \frac{M_x}{EJ_x} yz \end{cases} .$$

Separando i vari contributi, è possibile scrivere tale campo di spostamenti in forma matriciale nel modo seguente:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{M_z}{2EJ_z} z^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_z}{EJ_z} z \\ 0 & \frac{M_z}{EJ_z} z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

traslazione della sezione in direzione y

Rotazione della sezione attorno all'asse x di ampiezza  $M_z z / EJ_z$

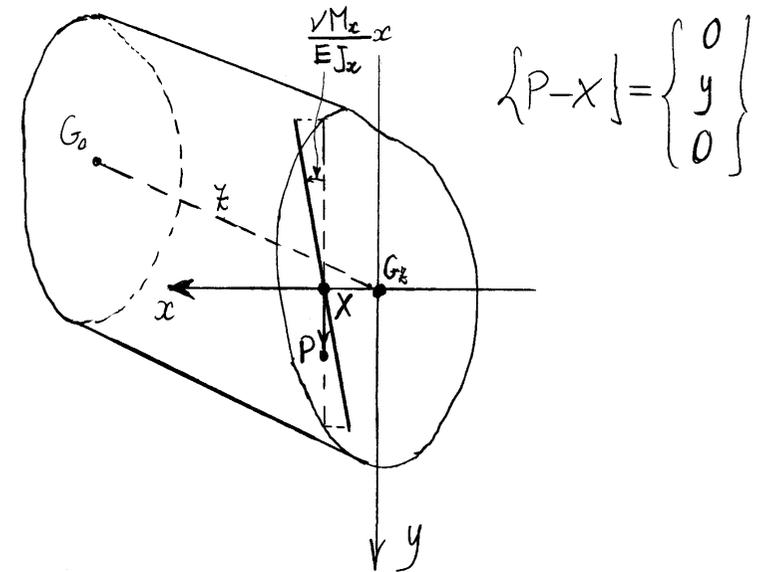
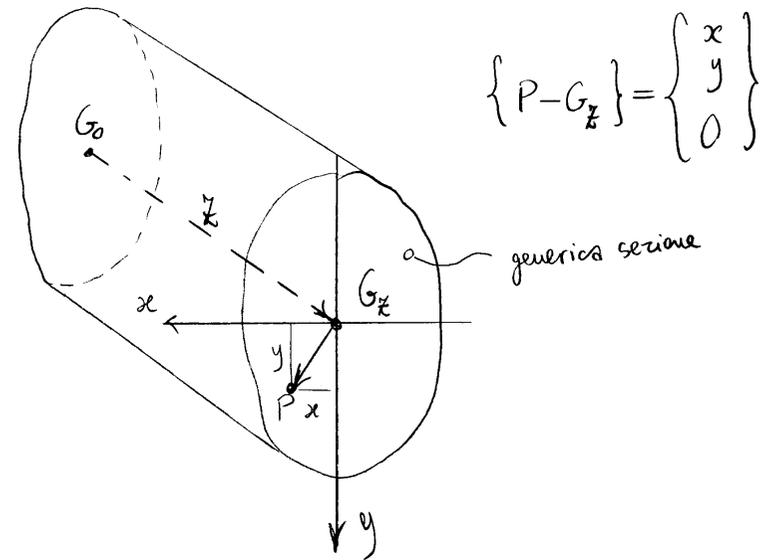
$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\nu M_z z^2}{2EJ_z} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{M_z}{EJ_z} z & 0 \\ \nu \frac{M_z}{EJ_z} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

traslazione del segmento ortogonale ad x lungo la direzione y

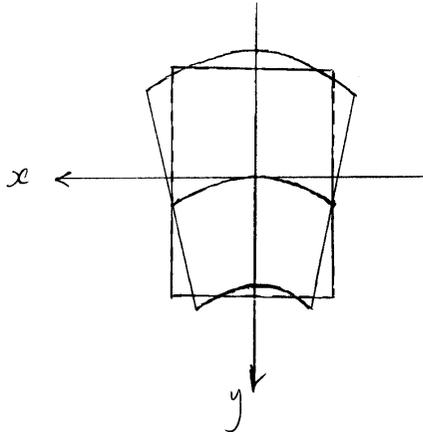
Rotazione, nel piano della sezione, del segmento ortogonale ad x, attorno al punto X intersezione del segmento con l'asse x e di ampiezza  $\nu \frac{M_z}{EJ_z} z$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ -\nu \frac{M_z}{2EJ_z} y^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Deformazione del segmento ortogonale a x, nella propria retta



Deformazione della sezione nel proprio piano:



È possibile scrivere il campo di spostamenti, in forma vettoriale, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \underline{u} = & -\frac{M_x}{2E I_x} y^2 \underline{e}_y + \frac{M_x}{E I_x} y \underline{e}_x (P - G_z) \\ & + \frac{\nu M_x}{2 E I_x} x^2 \underline{e}_y + \nu \frac{M_x}{E I_x} x \underline{e}_z (P - \underline{x}) \\ & - \frac{\nu M_x}{2 E I_x} y^2 \underline{e}_y \end{aligned}$$

### 3.10 Equazioni determinatrici delle tensioni tangenziali

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \right. \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{di Beltrami} \\ \\ \text{terza equazione} \\ \text{indefinita di equilibrio} \end{array}$$

Utilizzando la soluzione nella  $\sigma_z$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{T_x}{J_y} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{T_y}{J_x} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= -\frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x \end{aligned} \right.$$

Condizione al contorno sulla superficie laterale:

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0$$

Condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \tau_{xz} dA = T_x \\ \int_A \tau_{yz} dA = T_y \\ \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA = M_t \end{array} \right.$$

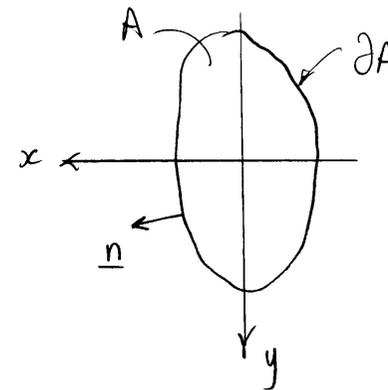
Ricordare che  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  sono indipendenti da  $z$ .

Notare che nelle equazioni definiti  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  compaiono solo le caratteristiche della sollecitazione  $T_x$ ,  $T_y$  e  $M_t$ . L'energia complementare associata alle tensioni tangenziali:

$$\psi_t = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA,$$

è dunque indipendente da  $N$ ,  $M_x$  e  $M_y$  e quindi i due gruppi di caratteristiche della sollecitazione sono ortogonali energeticamente.

Per la costanza con  $z$  di  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  si ha dunque a che fare con un problema piano definito sulla sezione normale della trave.



### 3.11 Appendice (soluzione del problema delle tensioni tangenziali)

Derivando la terza equazione indefinita di equilibrio prima rispetto a  $x$  e poi rispetto a  $y$  si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y} = -\frac{\tau_x}{J_y} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{\tau_y}{J_x} \end{cases},$$

e cioè:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = -\frac{\tau_x}{J_y} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{\tau_y}{J_x} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} \end{cases},$$

Sostituendo nelle due equazioni di Beltrami si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\tau_x}{J_y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\tau_y}{J_x} \end{cases}.$$

Integrando nella differenza  $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}$

e ponendo:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu},$$

si ottiene:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \bar{\nu} \left( \frac{\tau_y}{J_x} x - \frac{\tau_x}{J_y} y \right) + C,$$

dove  $C$  è una costante di integrazione.

Ci siamo dunque ridotti ad un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \bar{\nu} \left( \frac{\tau_y}{J_x} x - \frac{\tau_x}{J_y} y \right) + C \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\tau_y}{J_x} y - \frac{\tau_x}{J_y} x \end{cases},$$

definite su  $A$ , con la condizione al contorno su  $\partial A$ :

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0.$$

Per risolvere il sistema poniamo la soluzione nella forma:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \bar{\tau}_{xz} \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}^0 + \bar{\tau}_{yz} \end{cases},$$

dove  $\bar{\tau}_{xz}$  e  $\bar{\tau}_{yz}$  rappresentano un integrale particolare mentre  $\tau_{xz}^0$  e  $\tau_{yz}^0$  sono soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases},$$

con la condizione al contorno:

$$(\tau_{xz}^0 + \bar{\tau}_{xz})n_x + (\tau_{yz}^0 + \bar{\tau}_{yz})n_y = 0.$$

Per ricercare un integrale particolare notiamo che la prima equazione è soddisfatta se  $\bar{\tau}_{yz}$  contiene il termine  $\frac{1}{2} \nu \frac{T_y}{J_x} x^2$  e il termine  $\frac{1}{2} c x$  e se  $\bar{\tau}_{xz}$  contiene il termine  $\frac{1}{2} \nu \frac{T_x}{J_y} y^2$  e il termine  $-\frac{1}{2} c y$ . Tutti questi termini non danno contributi alla seconda equazione che risulta pertanto soddisfatta se a  $\bar{\tau}_{yz}$  si aggiunge  $-\frac{1}{2} \frac{T_y}{J_x} y^2$  e se a  $\tau_{xz}$

si aggiunge  $-\frac{1}{2} \frac{T_x}{J_y} x^2$ . In definitiva si è ottenuto il seguente integrale particolare:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{xz} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{T_x}{J_y} (x^2 - \nu y^2) + c y \right\} \\ \bar{\tau}_{yz} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{T_y}{J_x} (y^2 - \nu x^2) - c x \right\} \end{cases}.$$

L'equazione omogenea:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0$$

è condizione necessaria (e sufficiente se la sezione è monocamra) per l'esistenza di una funzione scalare  $\varphi$  tale che:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}.$$

La seconda equazione omogenea diventa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } A,$$

mentre l'equazione al contorno diviene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = -\bar{T}_{xz} n_x - \bar{T}_{yz} n_y \quad \text{su } \partial A.$$

Ne risulta quindi il seguente problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\bar{T}_{xz} n_x - \bar{T}_{yz} n_y \end{cases}$$

La soluzione esiste ed è unica, a meno di una costante additiva, se e solo se:

$$\int_{\partial A} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0,$$

relazione senz'altro soddisfatta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds &= - \int_{\partial A} (\bar{T}_{xz} n_x + \bar{T}_{yz} n_y) ds = \\ &= - \int_A \left( \frac{\partial \bar{T}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{yz}}{\partial y} \right) dA = \\ &= \int_A \left( \frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y \right) dA = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori di  $\bar{T}_{xz}$  e  $\bar{T}_{yz}$ :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{T_x}{J_y} (x^2 - \bar{\nu} y^2) n_x + \frac{1}{2} \frac{T_y}{J_x} (y^2 - \bar{\nu} x^2) n_y \\ \quad + \frac{1}{2} c (y n_x - x n_y) & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Se  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  e  $\varphi_t$  sono tali che:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_x = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial n} = (x^2 - \bar{\nu} y^2) n_x & \text{su } \partial A \left( \int_{\partial A} \frac{\partial \varphi_x}{\partial n} ds = \int_A 2x dA = 0 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_y = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} = (y^2 - \bar{\nu} x^2) n_y & \text{su } \partial A \left( \int_{\partial A} \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} ds = \int_A 2y dA = 0 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_t = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} = y n_x - x n_y & \text{su } \partial A \left( \int_{\partial A} \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} ds = 0 \right) \end{cases}$$

si ottiene:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{T_x}{J_y} \varphi_x + \frac{1}{2} \frac{T_y}{J_x} \varphi_y + \frac{1}{2} c \varphi_t$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{\tau}_{xz} \\ \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{\tau}_{yz} \end{cases}$$

e cioè:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_x}{J_y} \left[ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{\nu} y^2) \right] + \frac{T_y}{J_x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + c \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \right\} \\ \tau_{yz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_x}{J_y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{T_y}{J_x} \left[ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{\nu} x^2) \right] + c \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \right\} \end{cases}$$

Risultò:

$$\begin{aligned} \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA &= \\ &= \frac{c}{2} \int_A \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) x - \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) y \right\} dA + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - T_x \frac{1}{2 J_y} \int_A \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{\nu} y^2) \right] y - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} x \right\} dA + \\ + T_y \frac{1}{2 J_x} \int_A \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{\nu} x^2) \right] x - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} y \right\} dA \end{aligned}$$

Definendo il fattore torsionale di rigidità:

$$J_t = \int_A \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) x - \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) y \right\} dA$$

e posto:

$$\begin{cases} x_s = \frac{1}{2 J_x} \int_A \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{\nu} x^2) \right] x - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} y \right\} dA \\ y_s = \frac{1}{2 J_y} \int_A \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{\nu} y^2) \right] y - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} x \right\} dA \end{cases}$$

deve risultare (condizione globale di equilibrio):

$$\frac{c}{2} J_t - T_x y_s + T_y x_s = M_t$$

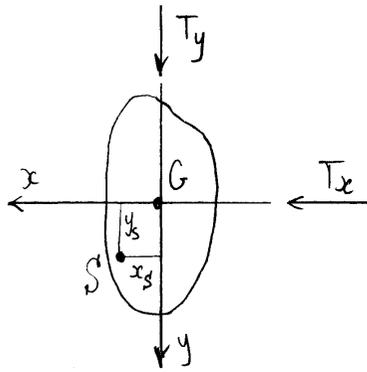
e cioè:

$$\frac{c}{2} = \frac{M_t + T_x y_s - T_y x_s}{J_t} = \frac{M_s}{J_t}$$

dove:

$$M_s = M_t + T_x y_s - T_y x_s$$

è il momento torcente valutato rispetto al punto  $S$  di coordinate  $x_s$  ed  $y_s$  (punto che per  $\nu \neq 0$  non coincide con il centro di taglio, come si vedrà più avanti).



Le tensioni tangenziali valgono quindi:

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{T_x}{2J_y} \left\{ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \nu y^2) \right\} + \frac{T_y}{2J_x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{M_s}{J_t} \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{T_x}{2J_y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{T_y}{2J_x} \left\{ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \nu x^2) \right\} + \\ &\quad + \frac{M_s}{J_t} \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right.$$

Verifichiamo che le tensioni  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  soddisfano la terza equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Risulta:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{T_x}{2J_y} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - 2x \right) + \frac{T_y}{2J_x} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{M_s}{J_t} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{T_x}{2J_y} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{T_y}{2J_x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - 2y \right) + \frac{M_s}{J_t} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y$$

Quindi, tenendo conto che  $\nabla^2 \varphi_x = \nabla^2 \varphi_y = \nabla^2 \varphi_t = 0$

l'equazione indefinita di equilibrio risulta identicamente soddisfatta.

Moltiplicandola per  $y$  e integrando sull'area della generica sezione retta si ottiene:

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial (\tau_{xz} y)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yz} y)}{\partial y} - \tau_{yz} + \frac{\partial (\sigma_z y)}{\partial z} \right\} = 0$$

e quindi:

$$\int_{\partial A} (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y) y dA - \int_A \tau_{yz} dA + \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z y dA = 0.$$

Tenendo conto della condizione al contorno sulla superficie laterale:

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0,$$

della relazione:

$$\frac{d}{dz} \int_A \sigma_z y dA = \frac{dM_z}{dz} = \frac{d}{dz} \{ M_z^l - T_y (l-z) \} = T_y,$$

si ottiene infine l'identità:

$$\int_A \tau_{yz} dA = T_y.$$

Procedendo in modo analogo (moltiplicando per  $x$  la condizione indefinita di equilibrio e integrando) si ottiene

poi la verifica della condizione:

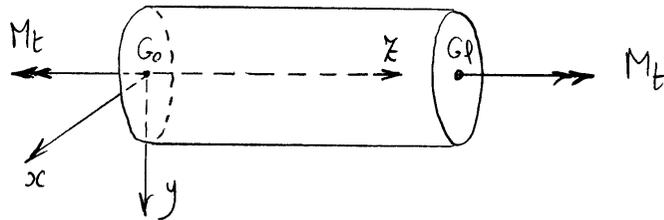
$$\int_A \tau_{xz} dA = T_x.$$

## Capitolo 4

### Problema della torsione

#### 4.1 Funzione di ingobbamento

Si ha sollecitazione di torsione quando il cilindro di Saint-Venant è soggetto alle due estremità ad una coppia torcente  $M_t$ .



Sappiamo che in tal caso non vi sono tensioni normali agenti su una qualunque sezione retta del cilindro. Risultano pertanto nulle le dilatazioni delle linee appartenenti alla sezione retta. Dato

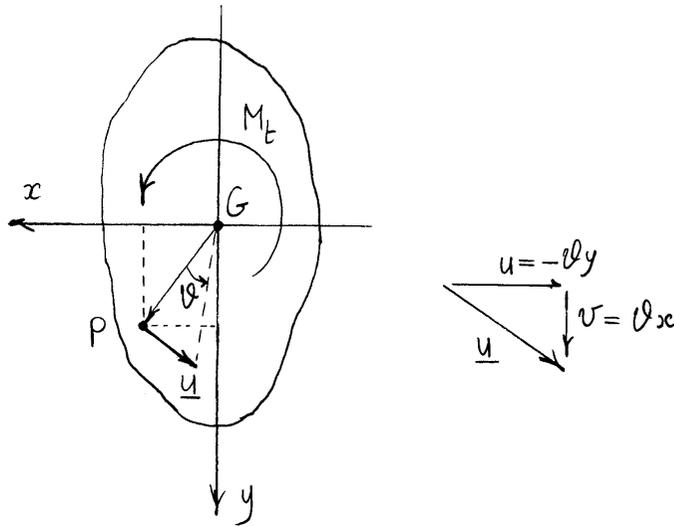
che la condizione  $\tau_{xy} = 0$  impone  $\gamma_{zy} = 0$ , sono nulli anche gli scorrimenti di tali linee. Questo significa che non vi è deformazione della sezione nel proprio piano. Si tenga conto che ciò non esclude un ingobbamento della sezione al di fuori del proprio piano.

Si assuma allora che la sezione retta generica, quindi dipendente dalla coordinata  $z$ , subisca un moto rigido nel proprio piano più una componente di spostamento nella direzione ortogonale alla sezione retta variabile da punto a punto, componente che in generale provocherà un ingobbamento della stessa sezione, che quindi non si conserverà piana.

Assumendo quale polo il baricentro, il moto rigido della sezione nel proprio piano si comporrà di due traslazioni, in direzione degli assi  $x$  e  $y$  rispettivamente, pari alle due componenti di spostamento  $u_G$  e  $v_G$  del baricentro nel proprio piano, più una rotazione torsionale  $\vartheta$  attorno all'asse  $z$  baricentrico.

Poiché le tensioni normali devono essere nulle, deve essere nulla la dilatazione  $\epsilon_z$  delle fibre parallele a  $z$ :

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y).$$



La componente di spostamento  $w$  è dunque indipendente da  $\xi$ . Le componenti di spostamento risultano:

$$u = u_G - \vartheta y,$$

$$v = v_G + \vartheta x,$$

$$w = f(x, y).$$

Le uniche componenti di deformazione non nulle sono (come deve essere) gli scorrimenti  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ :

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{du_G}{dz} - \Theta y + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{dv_G}{dz} + \Theta x + \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

dove:

$$\Theta = \frac{d\vartheta}{d\xi} \quad (\text{angolo unitario di torsione})$$

Le corrispondenti tensioni tangenziali risultano:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G \left( \frac{du_G}{dz} - \Theta y + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = G \left( \frac{dv_G}{dz} + \Theta x + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{cases}.$$

Poiché tali tensioni devono essere indipendenti da  $\xi$  deve essere:

$$\frac{du_G}{dz} = \text{cost}, \quad \frac{dv_G}{dz} = \text{cost}, \quad \Theta = \text{cost}.$$

Quindi gli spostamenti  $u_G$  e  $v_G$  e la rotazione  $\vartheta$  possono porsi nella forma:

$$u_G = \Theta y_C \xi, \quad v_G = -\Theta x_C \xi, \quad \vartheta = \Theta \xi,$$

a meno di inessenziali moti rigidi di rotazione e di traslazione globali,

La costante  $\omega$  di  $\odot$  permette poi di scrivere:

$$w = \odot \omega_C(x, y),$$

dove la funzione  $\omega_C(x, y)$  viene detta funzione di ingobbamento. Il campo degli spostamenti diventa quindi:

$$u = - \odot (y - y_C) \zeta,$$

$$v = \odot (x - x_C) \zeta,$$

$$w = \odot \omega_C(x, y).$$

Da queste espressioni si deduce che le sezioni rette ruotano attorno al punto C di coordinate  $x_C$  e  $y_C$ .

Poiché tali coordinate sono arbitrarie è possibile scegliere il punto C coincidente con il baricentro, ottenendo un campo di spostamenti che differisce dal precedente di un moto rigido. Inoltre, a priori, ci si può aspettare che la funzione di ingobbamento dipenda in generale dal punto C. Si indichi allora con  $\omega$  la funzione di ingobbamento relativa al baricentro. Il campo di spostamenti relativo al baricentro quale centro di rotazione lo si ottiene dal precedente ponendo  $x_C = 0$  e  $y_C = 0$ :

$$u = - \odot y \zeta,$$

$$v = \odot x \zeta,$$

$$w = \odot \omega.$$

La differenza tra i due campi di spostamento vale:

$$u^{(C)} - u^{(G)} = \odot y_C \zeta,$$

$$v^{(C)} - v^{(G)} = - \odot x_C \zeta,$$

$$w^{(C)} - w^{(G)} = \odot (\omega_C - \omega),$$

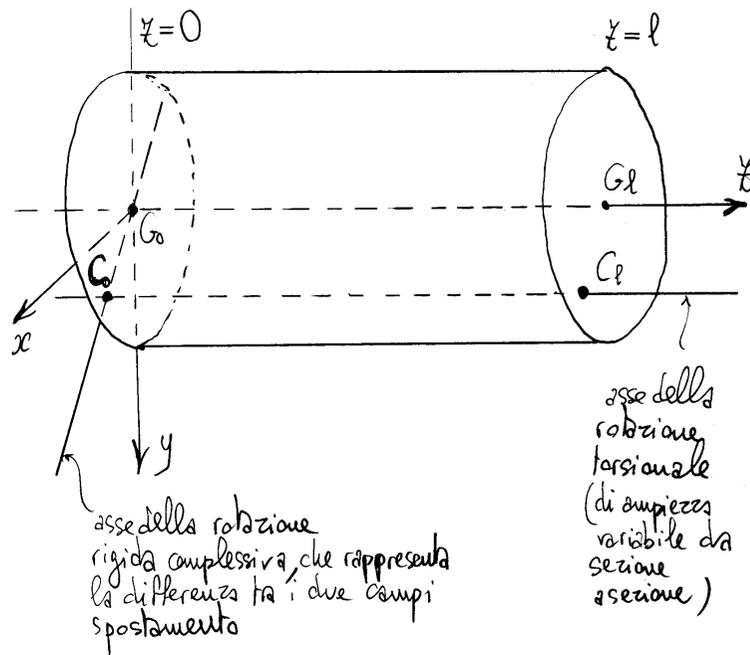
e, in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} u^{(C)} - u^{(G)} \\ v^{(C)} - v^{(G)} \\ w^{(C)} - w^{(G)} \end{Bmatrix} = \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_C \\ 0 & 0 & -x_C \\ -y_C & x_C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\omega_C - \omega) + y_C x - x_C y \end{Bmatrix}.$$

Il primo termine rappresenta una rotazione rigida attorno

all'asse baricentrico per il centro di rotazione  $C$  della prima sezione di estremità ( $z=0$ ). L'ampiezza della rotazione rigida vale  $\Theta \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ .



Il secondo termine rappresenta uno spostamento rigido se e solo se la terza componente è costante. Poichè la funzione di ingobbamento è data a meno di una costante additiva, rappresentando questa una traslazione in direzione  $z$ , la relazione tra le funzioni di ingobbamento relative al punto  $C$  generico e al baricentro può porsi nella forma:

$$(\omega_C - \omega) + y_C x - x_C y = 0.$$

Utilizzando, come visto senza perdita di generalità, il campo di spostamenti relativo alla scelta del baricentro quale centro di rotazione delle sezioni rette, si ottengono allora i seguenti campi di deformazione e di tensione:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \Theta \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} &= \Theta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\}, \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \Theta \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= G \Theta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\},$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\underline{\gamma} = \Theta \left\{ \text{grad} w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\},$$

$$\underline{\tau} = G \Theta \left\{ \text{grad} w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-G) \right\},$$

dove  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$  è il tensore rotazione di  $90^\circ$  in direzione antioraria.

La terza equazione indefinita di equilibrio richiede:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \text{div} \underline{\tau} = 0,$$

dato che  $\sigma_z = 0$ . Quindi:

$$G \ominus \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = G \ominus \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = 0,$$

ovverossia :

$$\nabla^2 w = \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = 0.$$

Alla funzione di ingobbamento è dunque richiesto di soddisfare l'equazione di Laplace. Le condizioni al contorno sulla superficie laterale richiedono invece:

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0,$$

quindi deve risultare:

$$G \ominus \left( \operatorname{grad} w \cdot \underline{n} + \left[ \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (\underline{p}-G) \right] \cdot \underline{n} \right) = 0,$$

e in definitiva:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \left[ \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (\underline{p}-G) \right] \cdot \underline{n} = y n_x - x n_y.$$

In conclusione, la funzione  $w$  deve soddisfare il seguente problema di Neumann (dipendente solo

dalla forma geometrica della sezione retta):

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial w}{\partial n} = y n_x - x n_y & \text{su } \partial A \end{cases}$$

La soluzione del problema di Neumann esiste ed è unica (a meno di una inessenziale costante arbitraria) se è soddisfatta la condizione:

$$\int_{\partial A} \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0.$$

Verifichiamo che tale condizione è soddisfatta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \int_{\partial A} (y n_x - x n_y) ds \stackrel{\text{(formula di Green)}}{=} \\ &= \int_A \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) dA = 0. \end{aligned}$$

La relazione tra funzione di ingobbamento  $w$  relativa al baricentro e quella  $w_c$  relativa al generico punto  $C$  permette poi di affermare che  $w_c$  è soluzione del seguente problema di Neumann:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_c}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{d\omega_c}{dn} = (y - y_c) n_x - (x - x_c) n_y \end{cases}$$

Inoltre, dato che la sezione circolare è l'unica nella quale il modello costitutivo locale dipendente dal moto rigido della sezione conduce a delle tensioni tangenziali soddisfacenti le condizioni al contorno, ci si può aspettare che questo sia l'unico caso in cui la funzione di ingobbamento si annulli, cioè che risulti  $\omega = 0$ , naturalmente a meno di una costante additiva. Infatti nel caso, e solo nel caso, di sezione circolare il termine non omogeneo

$$\left[ \frac{R^T}{2} (\rho - G) \right] \cdot n$$

nella condizione al contorno si annulla, le condizioni al contorno diventano omogenee e il problema di Neumann ammette di conseguenza la soluzione nulla, come volevasi dimostrare.

## 4.2 Fattore torsionale di rigidezza

A questo punto resta solo da imporre la condizione globale di equilibrio sulle basi:

$$\int_A (\tau_{yx} x - \tau_{xy} y) dA = M_t$$

Si ottiene:

$$G \Theta \int_A \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) y \right\} dA = M_t$$

Definendo il fattore torsionale di rigidezza:

$$\begin{aligned} J_t &= \int_A \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) y \right\} dA \\ &= \int_A \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} x - \frac{\partial \omega}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA, \end{aligned}$$

risulta:

$$\Theta = \frac{M_t}{G J_t}$$

Nel caso di sezione circolare in cui, come visto,  $\omega=0$ , risulta:

$$J_t = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_G,$$

dove  $J_G$  è il momento di inerzia polare rispetto al baricentro.

La soluzione del problema della torsione (via funzione di ingobbamento) risulta quindi:

$$\begin{cases} u = -\frac{M_t}{GJ_t} z y \\ v = \frac{M_t}{GJ_t} z x \\ w = \frac{M_t}{GJ_t} \omega(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{xz} = \frac{M_t}{J_t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J_t} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{cases},$$

oppure:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad} w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\}.$$

Si noti che la funzione di ingobbamento  $w$  e il fattore di rigidità torsionale dipendono solo dalla forma geometrica della sezione retta.

### 4.3 Energia complementare

Energia complementare per unità di linea:

$$\begin{aligned} \psi_e &= \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA = \\ &= \frac{M_t^2}{2GJ_t^2} \int_A \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA \\ &= \frac{M_t^2}{2GJ_t^2} \left\{ \int_A \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right) x - \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right) y \right] dA \right. \\ &\quad \left. + \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \right] dA \right\}. \end{aligned}$$

Poichè risulta:

$$\begin{aligned} &\int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \right] dA \\ &= \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial w}{\partial x} - w y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial w}{\partial y} + w x \right) \right\} dA \\ &= \int_{\partial A} w \left( \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y - y n_x + x n_y \right) dA = 0, \end{aligned}$$

l'energia complementare assume l'aspetto:

$$\psi_e = \frac{M_t^2}{2GJ_t}.$$

#### 4.4 Funzione delle tensioni

La terza condizione indefinita di equilibrio richiede:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Una qualunque funzione scalare  $F(x, y)$  tale che:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

o, equivalentemente:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad } F,$$

ove al solito  $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$  è il tensore rotazione di  $90^\circ$  in senso antiorario, rende automaticamente soddisfatta l'equazione indefinita di equilibrio. Una funzione  $F$  cosiffatta è detta *funzione delle tensioni*.

Dal confronto con la soluzione in termini di funzione di ingobbamento si ottiene:

$$\text{grad } \omega = \frac{J_t}{M_t} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P - G) = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \left\{ \frac{J_t}{M_t} \text{grad } F + (P - G) \right\},$$

oppure, in componenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial y} + y \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial x} - x \end{cases}.$$

Derivando la prima rispetto ad  $y$  e la seconda rispetto ad  $x$  ed uguagliando si ottiene la condizione necessaria (e sufficiente se la sezione è monoconnessa) di integrabilità nella funzione  $\omega$  di ingobbamento (congruenza). Si ottiene:

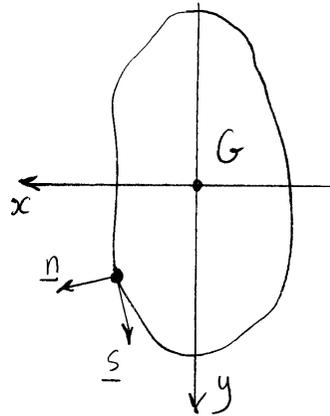
$$\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 1 = -\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 1,$$

ovverossia  $F$  deve soddisfare la seguente equazione di Poisson:

$$\nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t}.$$

Per quel che riguarda la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0,$$



$$\underline{n} \cdot \underline{s} = 0$$

$$\left\{ \underline{n} \right\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \underline{s} \right\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \end{Bmatrix}$$

questa diventa:

$$\left( \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad} F \right) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Applicando la definizione di tensore trasposto si ha poi:

$$\text{grad} F \cdot \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{n} = 0,$$

e poiché ruotando il versore normale al contorno della sezione retta di 90° in senso antiorario si ottiene il versore tangente  $\mathbf{s}$  si ha infine:

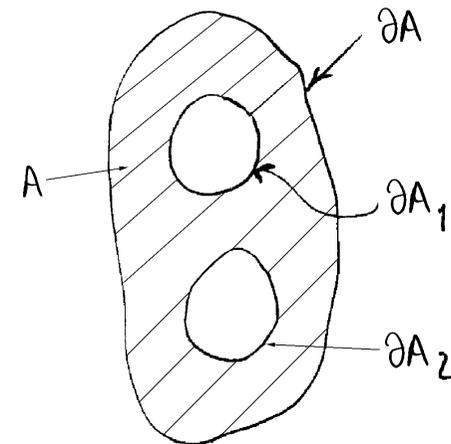
$$\text{grad} F \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

Quindi  $F$  è costante sul contorno, e, poiché una costante non modifica lo stato tensionale, può essere annullata.

La funzione delle tensioni è dunque soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t} & \text{in } A \\ F = 0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Notiamo che se la sezione è pluriconnessa, si può porre  $F=0$  sul contorno esterno, ma non sugli altri contorni, dove a questo punto è solo possibile dire che  $F = \text{cost}$ .



La condizione di integrabilità in una funzione  $\omega$  di ingobbamento richiede che sia soddisfatta la condizione di circuitazione sui contorni interni:

$$\int_{\partial A_i} \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = \int_{\partial A_i} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} n_x - \frac{\partial \omega}{\partial x} n_y \right) ds = 0.$$

dove l'indice  $i$  si riferisce all' $i$ -esimo contorno interno.

Tenendo conto delle relazioni esistenti tra  $\omega$  e  $F$

si ottiene infine:

$$\int_{\partial A_i} \left\{ \left( \frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial x} + x \right) n_x + \left( \frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial y} + y \right) n_y \right\} ds = 0$$

Quindi ogni contorno interno introduce una incognita (il valore della  $F$  sul contorno) ed una equazione.

Con  $n$  circuiti interni si può procedere risolvendo il problema di Dirichlet in funzione dei valori  $F_i$  incogniti sui contorni interni, dopodiché le  $n$  condizioni di circuitazione diventano  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $F_i$ .

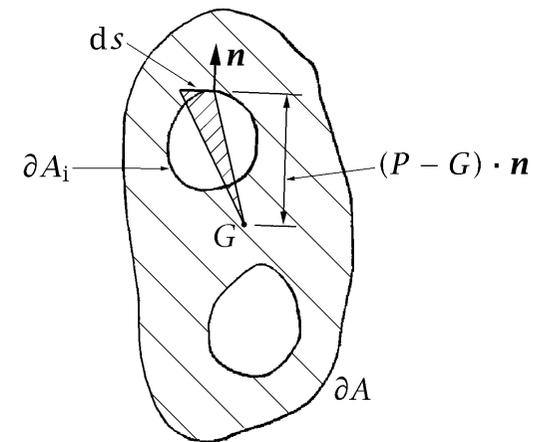
Per determinare il fattore torsionale di rigidezza  $J_t$  per il mezzo della funzione delle tensioni  $F$ , si imponga la condi-

zione di equivalenza statica:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA \\ &= \int_A \left( -\frac{\partial F}{\partial x}x - \frac{\partial F}{\partial y}y \right) dA \\ &= \int_A \left\{ 2F - \left[ \frac{\partial(Fx)}{\partial x} + \frac{\partial(Fy)}{\partial y} \right] \right\} dA \\ &= \int_A \left\{ 2F - \operatorname{div} [F(P - G)] \right\} dA \\ &= 2 \int_A F dA - \int_{\partial A} F(P - G) \cdot \mathbf{n} ds - \sum_i \int_{\partial A_i} F(P - G) \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned}$$

Nel caso generale di una sezione pluriconnessa, tenendo conto che sul contorno esterno  $\partial A$  si è posto  $F = 0$  e che sui contorni interni  $\partial A_i$  risulta  $F = F_i = \text{cost}$ , si ottiene:

$$M_t = 2 \int_A F dA - \sum_i F_i \int_{\partial A_i} (P - G) \cdot \mathbf{n} ds.$$



Dato che:

$$\int_{\partial A_i} F_i(P - G) \cdot \mathbf{n} ds = 2A_i,$$

dove  $A_i$  è l'area racchiusa dal contorno interno  $\partial A_i$ , ovvero sia l'area dell' $i$ -esimo foro, si ottiene infine:

$$M_t = 2 \left( \int_A F dA - \sum_i F_i A_i \right). \quad (1)$$

Nel caso di sezione monoconnessa la condizione diventa:

$$M_t = 2 \int_A F dA. \quad (2)$$

La soluzione in  $F$  del problema di Dirichlet è data in termini di  $M_t$  che è noto e di  $J_t$  che è incognito. La condizione (1), oppure (2), permette di determinare il fattore di rigidezza torsionale  $J_t$ .

Verifichiamo infine che la soluzione ottenuta soddisfa la condizione  $\underline{T} = \underline{0}$ .

Infatti, da  $\underline{T} = \underline{R}^T \text{grad } F$  si ottiene:

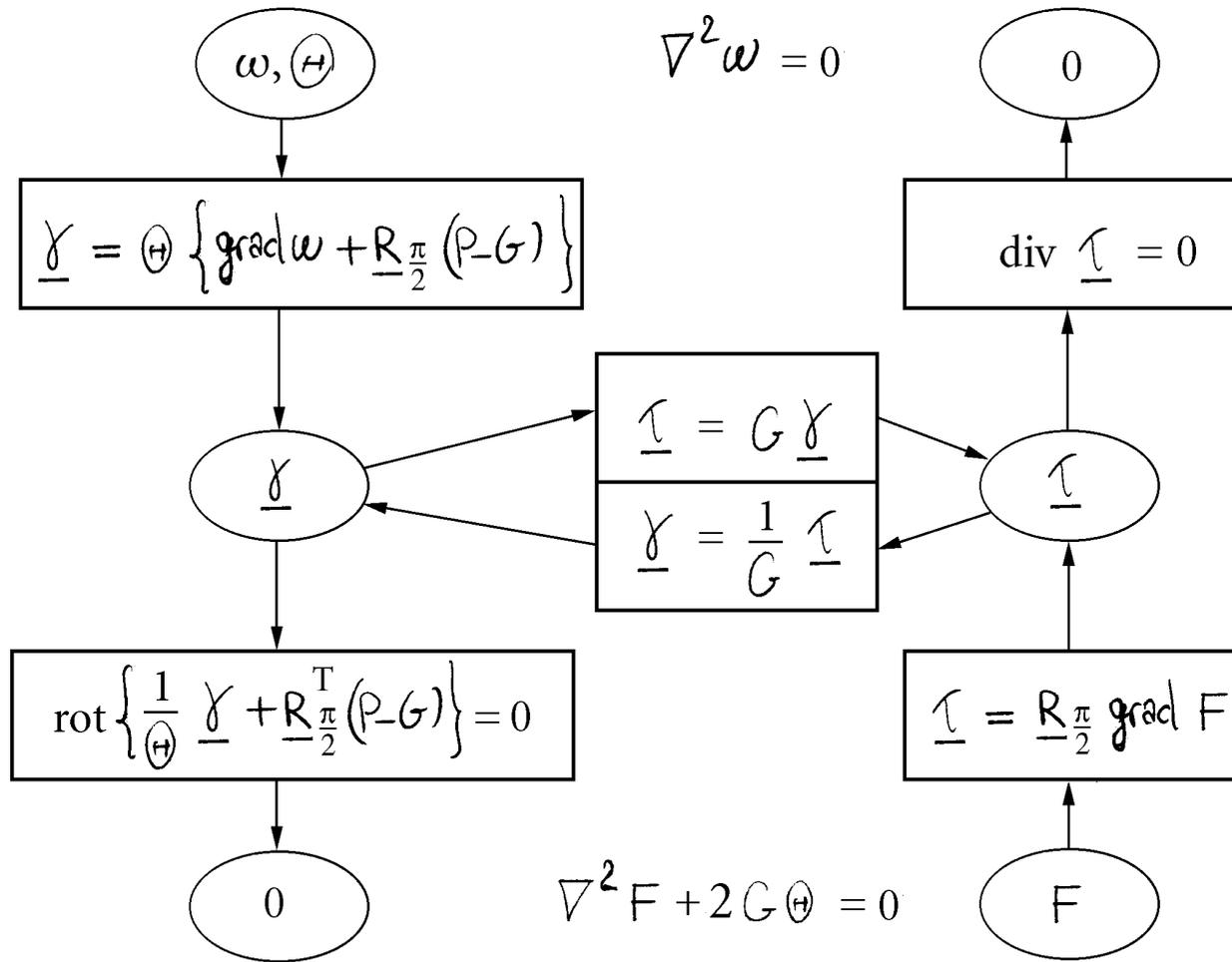
$$\underline{T} = \int_A \underline{R}^T \text{grad } F dA = \underline{R}^T \int_A \text{grad } F dA =$$

$$= \underline{R}^T \left( \int_{\partial A} F \mathbf{n} ds + \sum_i \int_{\partial A_i} F \mathbf{n} ds \right)$$

$$= \underline{R}^T \sum_i F_i \int_{\partial A_i} \mathbf{n} ds$$

$$= \underline{R}^T \sum_i F_i \int_A \text{grad } 1 dA = \underline{0},$$

come volevasi dimostrare.



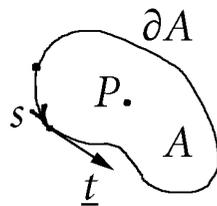
$$\text{rot } \underline{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\text{div } \underline{\tau} = \text{rot} \left( \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{\tau} \right)$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad } F = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P-G) = \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}$$

Campo vettoriale  $\underline{v}$  piano  
Area piana A



Circolazione di  $\underline{v}$  sul contorno  $\partial A$  di A:  $c(A) = \int_{\partial A} \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds$

Rotore di  $\underline{v}$  (circolazione per unità di area):  $\text{rot } \underline{v} = \lim_{A \rightarrow P} \frac{c(A)}{A}$

## Capitolo 5

### Estensione del problema di Saint-Venant

Si estende al caso della trave generica, quindi anche ad asse curvo, caricata sulla superficie laterale e a sezione variabile, l'espressione dell'energia elastica complementare per unità di linea ottenuta nel caso del problema di S. Venant:

$$\Psi = \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} \right) + \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA$$

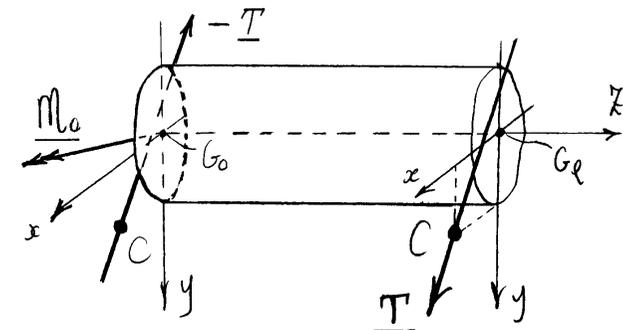
dove  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  sono funzioni solo di  $T_x$ ,  $T_y$  e  $M_t$ .

### 5.1 problema di flessione, taglio e torsione

Come prima cosa si determinerà il *centro di taglio* quale centro che renda ortogonali energeticamente il momento torcente  $M_t$  e le componenti di taglio  $T_x$  e  $T_y$ , e a tale scopo sarà necessario impostare, anche se non risolvere, il *problema di flessione, taglio e torsione*.

Si ha sollecitazione di flessione, taglio e torsione se la sezione di estremità  $x=l$  è soggetta ad un taglio  $\underline{T}$  generico, non necessariamente passante per il baricentro.

Sulla base  $x=l$  sono dunque presenti le due componenti  $T_x$  e  $T_y$  della forza di taglio e il

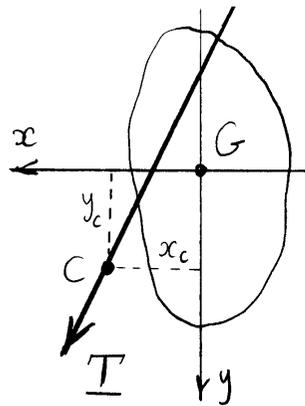


momento torcente  $M_t$  dovuto all'eccentricità della forza di taglio rispetto al baricentro. Se  $C \equiv (x_c, y_c)$  è un punto appartenente alla retta d'azione del taglio il momento torcente risulta:

$$M_t = T_y x_c - T_x y_c.$$

Inoltre, per l'equilibrio alla rotazione del cilindro, sulla base  $z = 0$  è presente un momento esterno  $\underline{M}_0$  di espressione:

$$\underline{M}_0 = -(G_e - G_0) \times \underline{T},$$



e di componenti:

$$\begin{cases} M_x^0 = T_y l \\ M_y^0 = -T_x l \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{componenti dell'azione} \\ \text{globale } \underline{M}_0 \text{ agente sulla prima} \\ \text{sezione di estremità} \end{array} \right)$$

Inoltre la caratteristica della sollecitazione momento flettente ha componenti:

$$\begin{cases} M_x(z) = -T_y (l - z) \\ M_y(z) = T_x (l - z) \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{caratteristiche} \\ \text{della sollecitazione} \end{array} \right)$$

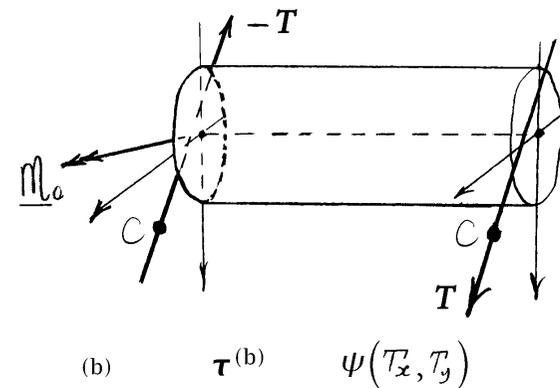
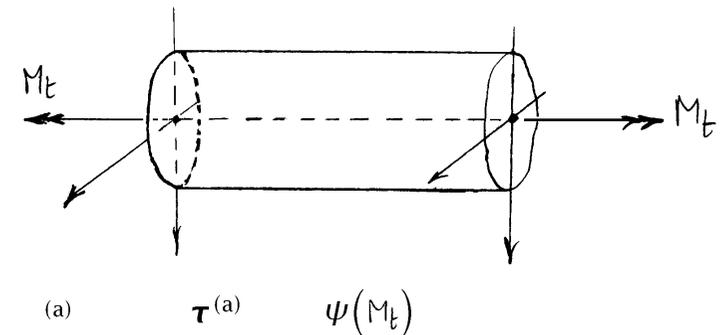
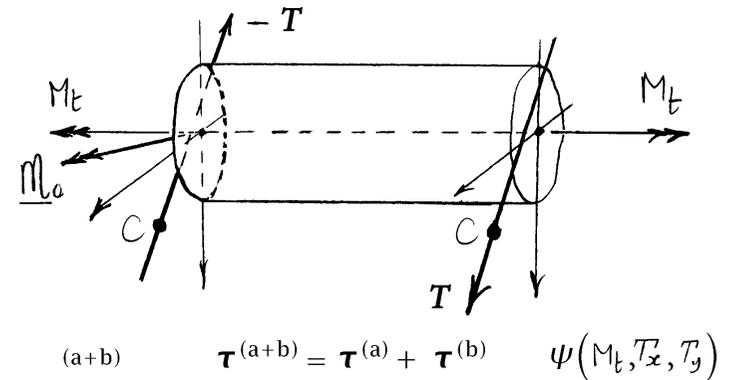
## 5.2 Centro di taglio

Cerchiamo il centro di taglio C quale punto per il quale occorre far passare la sollecitazione di taglio  $\underline{T}$  affinché i due problemi della torsione e della flessione, taglio e torsione siano ortogonali energeticamente.

Estendendo i risultati ottenuti alla teoria della trave attraverso l'energia di deformazione (nella forma complementare), nell'ambito e solo nell'ambito della teoria della trave il centro di taglio così definito assume il significato cinematico di essere quel punto per il quale deve passare la retta d'azione dello sforzo di taglio al fine di non avere deformazioni torsionali:

Si considerino allora i due problemi (a) della torsione e (b) di flessione taglio e torsione e siano  $\tau^{(a)}$  e  $\tau^{(b)}$  le tensioni tangenziali associate ai problemi (a) e (b) rispettivamente. Per la sovrapposizione degli effetti al problema (a)+(b), somma dei due problemi precedenti corrisponderanno le tensioni somma e l'energia complementare  $\psi$  per unità di linea dovuta alle sole tensioni tangenziali vale quindi:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(a+b)} \cdot \tau^{(a+b)} dA \\ &= \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(a)} dA + \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(b)} \cdot \tau^{(b)} dA \\ &\quad + \frac{1}{G} \int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(b)} dA \end{aligned}$$



Quindi il problema della determinazione del centro di taglio richiede di annullare il termine mutuo dell'energia:

$$\int_A \boldsymbol{\tau}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = 0.$$

Ricordando la soluzione nelle tensioni normali, nel problema della flessione, taglio e torsione la tensione normale vale:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(b)} &= \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \\ &= - \frac{T_y(l-z)}{J_x} y - \frac{T_x(l-z)}{J_y} x. \end{aligned}$$

Le  $\boldsymbol{\tau}^{(b)}$  sono costanti con  $z$  e devono soddisfare la terza equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(b)}}{\partial y} = - \frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x,$$

ovverossia:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(b)} = - \frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x.$$

Le  $\boldsymbol{\tau}^{(b)}$  devono inoltre soddisfare la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{\tau}^{(b)} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

e alle condizioni globali di equilibrio sulle sezioni rette:

$$\int_A \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = \mathbf{T},$$

$$\left\{ \int_A (P-G) \times \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA \right\} \cdot \mathbf{e}_z = T_y x_c - T_x y_c.$$

Le tensioni associate alla sollecitazione semplice di torsione valgono invece:

$$\boldsymbol{\tau}^{(a)} = \frac{Mt}{J_t} \left\{ \operatorname{grad} w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\}.$$

L'equazione determinatrice del centro di taglio risulta dunque:

$$\frac{Mt}{J_t} \int_A \left\{ \operatorname{grad} w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = 0.$$

Poiché:

$$\operatorname{div} (w \boldsymbol{\tau}^{(b)}) = \operatorname{grad} w \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} + w \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^{(b)},$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) = \mathbf{e}_z \times (P-G),$$

come è facile verificare, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left\{ \text{grad } w + \frac{R}{2} (P-G) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA \\
 &= \int_A \left\{ \text{div} (w \boldsymbol{\tau}^{(b)}) - w \text{div} \boldsymbol{\tau}^{(b)} \right\} dA \\
 &\quad + \int_A \left\{ (P-G) \times \boldsymbol{\tau}^{(b)} \right\} \cdot \mathbf{e}_z dA \\
 &= \int_{\partial A} w \boldsymbol{\tau}^{(b)} \cdot \mathbf{n} ds + \int_A w \left\{ \frac{T_y}{J_x} y + \frac{T_x}{J_y} x \right\} dA \\
 &\quad + T_y x_c - T_x y_c \\
 &= \frac{T_x}{J_y} \int_A w x dA + \frac{T_y}{J_x} \int_A w y dA \\
 &\quad + T_y x_c - T_x y_c
 \end{aligned}$$

L'equazione determinatrice del centro di taglio risulta infine:

$$\begin{aligned}
 & T_y \left( x_c + \frac{1}{J_x} \int_A w y dA \right) \\
 & - T_x \left( y_c - \frac{1}{J_y} \int_A w x dA \right) = 0.
 \end{aligned}$$

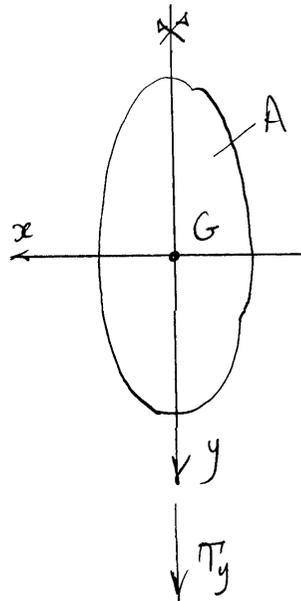
Per l'arbitrarietà delle componenti  $T_x$  e  $T_y$  si ottengono infine le coordinate del centro di taglio:

$$\begin{aligned}
 x_c &= - \frac{1}{J_x} \int_A w y dA, \\
 y_c &= \frac{1}{J_y} \int_A w x dA.
 \end{aligned}$$

Si noti che tali coordinate dipendono solo dalla forma della sezione retta.

Verifichiamo che, nel caso di sezione dotata di un asse di simmetria il centro di taglio deve appartenere all'asse di simmetria. Infatti in tal caso il momento torcente risulta una sollecitazione emisimmetrica e quindi tali risultano sia le deformazioni che la funzione di ingobbamento.

Se l'asse di simmetria coincide con l'asse  $y$  la funzione



$w_y$  risulta emisimmetrica e dunque il suo integrale sull'area è nullo.

Oppure, si assoggetti la sezione a un taglio  $T_y$  passante per il baricentro  $G$ . Tale sollecitazione è

simmetrica e dunque simmetriche risultano le tensioni tangenziali  $\underline{\tau}^{(b)}$ . Invece le tensioni tangenziali  $\underline{\tau}^{(a)}$  dovute al momento torcente sono emisimmetriche. La funzione  $\underline{\tau}^{(b)} \cdot \underline{\tau}^{(a)}$  che esprime il termine mutuo dell'energia complementare è dunque emisimmetrica e il suo integrale sull'area è nullo. Risulta quindi nullo il termine mutuo dell'energia complementare e dunque la retta  $y$  contiene il centro di taglio.

### 5.3 Energia complementare

Esprimendo l'energia complementare associata alle tensioni tangenziali in funzione del momento torcente  $M_C$  valutato rispetto al centro di taglio  $C$  e tenendo conto della soluzione del problema della torsione, si avrà:

$$\psi(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{M_C^2}{GJ_t} + aT_x^2 + bT_y^2 + cT_xT_y \right\},$$

dove  $G$  e  $J_t$  sono rispettivamente il modulo di elasticità tangenziale e il fattore torsionale di rigidezza mentre le costanti  $a$ ,  $b$  e  $c$  dipendono dalla soluzione del problema di flessione, taglio e torsione. È prassi di porre tali costanti nella forma  $\chi_x/GA$ ,  $\chi_y/GA$  e  $2\chi_{xy}/GA$  rispettivamente, dove  $A$  è l'area della sezione retta e le costanti adimensionali  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  e  $\chi_{xy}$  coincidono con i *fattori di taglio* a suo tempo già introdotti. Si ricordi che questi rappresentano le componenti, nel sistema  $Gxy$ , di un tensore doppio piano  $\chi$ , detto *tensore dei fattori di taglio*. Risulta ora semplice confermare che un asse di simmetria è principale di taglio. Infatti un taglio diretto come l'asse di simmetria è simmetrico e genera delle tensioni tangenziali simmetriche, mentre un taglio ortogonale all'asse di simmetria è emisimmetrico e genera delle tensioni tangenziali emisimmetriche. L'energia complementare mutua è dunque nulla e quindi è nullo anche il fattore di taglio mutuo, come volevasi dimostrare.

Mettendo in conto sia le tensioni normali che quelle tangenziali, l'espressione dell'energia complementare risulta allora:

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_C^2}{GJ_t} + \chi_x \frac{T_x^2}{GA} + \chi_y \frac{T_y^2}{GA} + 2\chi_{xy} \frac{T_x T_y}{GA} \right\},$$

oppure, in forma indipendente dal sistema  $Gxy$ :

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{1}{E} \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} + \frac{M_C^2}{GJ_t} + \frac{1}{GA} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\chi} \mathbf{T} \right\}.$$

## 5.4 Legami costitutivi

Derivando l'energia complementare si ottengono i legami costitutivi:

1. Sforzo normale:

$$\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{N}{EA} \quad \Rightarrow \quad N = EA\epsilon,$$

dove la dilatazione  $\epsilon$  è quella della fibra baricentrica;

2. Momento flettente:

(a) forma algebrica:

$$k_x = \frac{\partial \psi}{\partial M_x} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad \Rightarrow \quad M_x = EJ_x k_x,$$

$$k_y = \frac{\partial \psi}{\partial M_y} = \frac{M_y}{EJ_y} \quad \Rightarrow \quad M_y = EJ_y k_y,$$

dove  $M_x$   $M_y$  sono le componenti del momento flet-

tente valutato rispetto al baricentro e il sistema di riferimento  $Gxy$  è principale di inerzia;

(b) forma vettoriale:

$$\mathbf{k}_f = \frac{1}{E} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = E \mathbf{J} \mathbf{k}_f,$$

dove il momento flettente  $\mathbf{M}$  è valutato rispetto al baricentro;

3. Momento torcente:

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial M_C} = \frac{M_C}{GJ_t} \quad \Rightarrow \quad M_C = GJ_t \Theta,$$

dove il momento torcente è valutato rispetto al centro di taglio;

4. Taglio:

(a) forma algebrica:

$$y_x^C = \frac{\partial \psi}{\partial T_x} = \chi_x \frac{T_x}{GA} + \chi_{xy} \frac{T_y}{GA},$$

$$y_y^C = \frac{\partial \psi}{\partial T_y} = \chi_{xy} \frac{T_x}{GA} + \chi_y \frac{T_y}{GA},$$

dove gli scorrimenti  $y_x^C$  e  $y_y^C$  sono valutati rispetto alla fibra longitudinale per il centro di taglio;

(b) forma vettoriale:

$$\mathbf{y}_C = \frac{1}{GA} \boldsymbol{\chi} \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = GA \boldsymbol{\chi}^{-1} \mathbf{y}_C,$$

dove lo scorrimento  $\mathbf{y}_C$  è valutato rispetto alla fibra

longitudinale per il centro di taglio.

Dalle relazioni costitutive inverse è possibile confermare la forma della matrice elastica inversa:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GJ_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\chi_x}{GA} & \frac{\chi_{xy}}{GA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\chi_{xy}}{GA} & \frac{\chi_y}{GA} \end{bmatrix}.$$

Inserendo invece i legami costitutivi diretti nell'espressione dell'energia complementare, si ottiene poi l'energia elastica di deformazione:

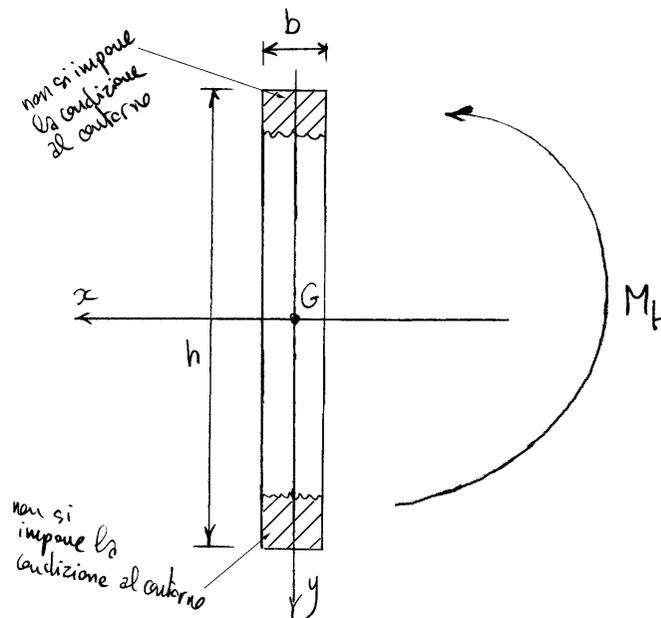
$$\phi = \frac{1}{2} \{ EA \epsilon_G^2 + E \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{J} \mathbf{k}_f + G J_t \Theta^2 + GA \boldsymbol{\gamma}_C \cdot \boldsymbol{\chi}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_C \}.$$

## Capitolo 6

### Problemi particolari di torsione e taglio

#### 6.1 La torsione nelle sezioni rettangolari sottili

Prescindendo dall'aumento delle tensioni tangenziali nelle due zone di estremità, ci limitiamo a imporre le condizioni al contorno solo per i lati maggiori del rettangolo. Assunta



il riferimento  $Gxy$  principale di inerzia, con l'asse  $y$  avente la direzione dei lati maggiori, le equazioni di tali lati risultano:

$$x - \frac{b}{2} = 0 \quad \text{e} \quad x + \frac{b}{2} = 0,$$

essendo  $b$  lo spessore del rettangolo.

Procediamo con la funzione delle tensioni. La condizione al contorno:

$$F = 0,$$

è senz'altro soddisfatta sui lati maggiori se si pone:

$$F = c \left( x - \frac{b}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2} \right)$$

$$= c \left( x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

dove  $c$  è una costante da determinarsi.

L'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t},$$

imporre allora la condizione:

$$2c = -2 \frac{M_t}{J_t},$$

condizione che impone il valore della costante  $c$ :

$$c = -\frac{M_t}{J_t}.$$

La funzione:

$$F = -\frac{M_t}{J_t} \left( x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

soddisfa quindi l'equazione di Poisson per la funzione delle tensioni e, tranne che nelle due estremità, le condizioni al contorno. Resta da soddisfare la condizione:

$$2 \int_A F dA = M_t,$$

condizione che si scrive:

$$-\frac{2M_t}{J_t} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( x^2 - \frac{b^2}{4} \right) h dx = M_t,$$

dove  $h$  è l'altezza del rettangolo.

Si è così ottenuta una equazione che permette di determinare il valore del fattore di rigidità torsionale  $J_t$ :

$$-\frac{2h}{J_t} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{b^2 x}{4} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 1,$$

e quindi:

$$J_t = \frac{1}{3} h b^3.$$

La funzione delle tensioni diventa:

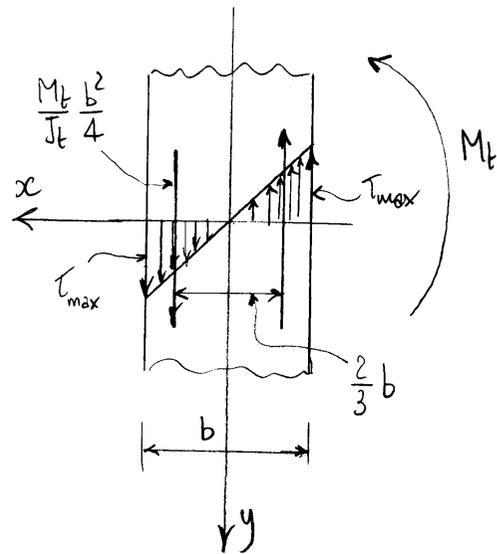
$$F = -\frac{3M_t}{b^3 h} \left( x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

e le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{yz} = \frac{2M_t}{J_t} x = \frac{6M_t}{b^3 h} x,$$

$$\tau_{xz} = 0.$$

La tensione tangenziale massima si ha in corrispondenza dei lati maggiori e vale:

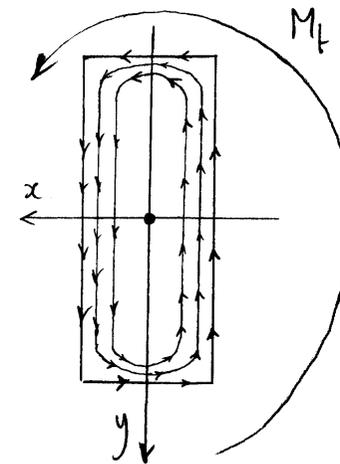


$$\tau_{max} = \left| \tau_{yz} \left( \pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{M_t}{J_t} b = \frac{3M_t}{b^2 h}$$

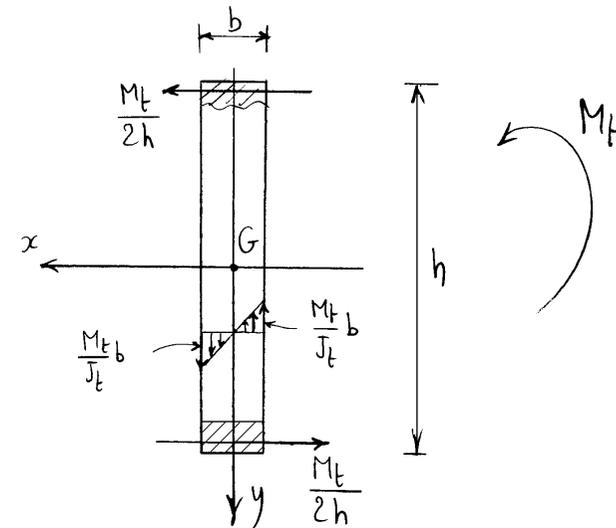
Si noti che il flusso delle tensioni tangenziali imposto dal contorno nelle due zone di estremità fa sì che in tale zona siano presenti delle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$ . Il momento torcente totale generato dalle  $\tau_{yz}$  vale:

$$\frac{M_t}{J_t} \frac{b^2}{4} \frac{2}{3} b h = \frac{3M_t}{b^3 h} \frac{b h}{6} = \frac{M_t}{2}$$

Quindi solo metà del momento torcente  $M_t$  è generato dalle  $\tau_{yz}$ . La restante quota è quindi

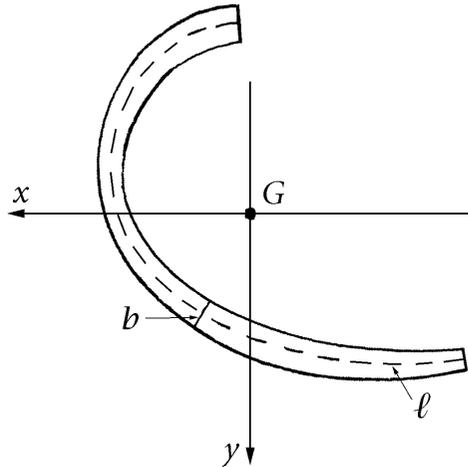


dovuta alle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  presenti nelle due zone di estremità, che si possono compendiarne nella risultante, pari a  $M_t/2h$ .



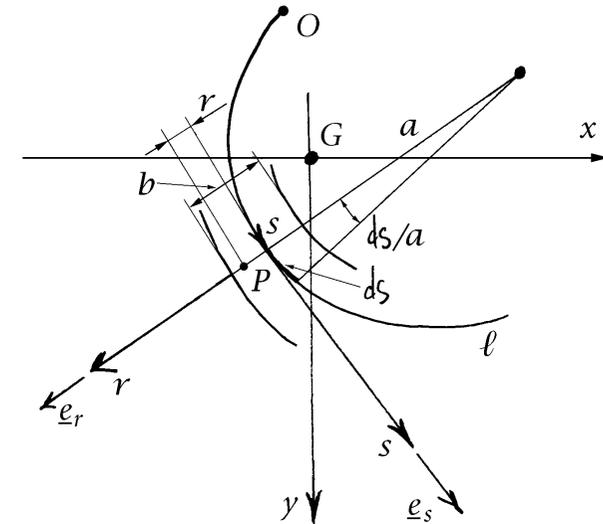
### 6.2 La torsione nelle sezioni sottili aperte

Si consideri una trave di sezione sottile aperta di linea media  $\ell$  in generale curva e di spessore  $b$  in generale variabile. Si



assuma poi un'ascissa curvilinea  $s$  sulla linea media  $\ell$ , espressa dalla distanza misurata sulla linea media da un punto preso come origine. È allora possibile individuare il punto generico  $P$  della sezione sottile per il tramite dell'ascissa  $s$  e della distanza  $r$  del punto dalla linea media, misurata nella direzione ortogonale alla linea media stessa. La funzione  $P(r, s)$  rappresenta un sistema di coordinate generali. Le linee coordinate  $r$  di equazione  $s = \text{cost}$  sono le rette ortogonali alla linea media, mentre quelle  $s$  di equazione  $r = \text{cost}$  sono le linee parallele alla linea media.

Si supponga poi che il raggio di curvatura  $a$  della linea



media della sezione sia grande rispetto allo spessore  $b$ :

$$\frac{b}{a} \ll 1.$$

Sotto tale ipotesi il laplaciano che compare nell'equazione di Poisson che regge il problema della funzione delle tensioni  $F$  si scrive in modo approssimato:

$$\nabla^2 F \approx \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}.$$

L'equazione di Poisson diventa allora:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -2 \frac{M_t}{J_t}. \tag{1}$$

Si trascuri, come per la sezione rettangolare sottile, il soddi-

sfacimento delle condizioni al contorno nelle estremità della sezione e in più negli eventuali nodi e si supponga che lo spessore  $b$  vari lentamente lungo la linea media della sezione. In tali ipotesi la funzione:

$$F = -\frac{M_t}{J_t} \left( r^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

soddisfa, in modo approssimato, sia l'equazione di Poisson (1) che le condizioni al contorno  $F(b/2) = 0$  e  $F(-b/2) = 0$  e rappresenta dunque la soluzione, approssimata, del problema della torsione per le travi di sezione sottile aperta, naturalmente sotto le ipotesi dette.

Dato che localmente il sistema generale di coordinate origina approssimativamente una base di vettori ortonormali le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{sz} = -\frac{\partial F}{\partial r} = 2\frac{M_t}{J_t}r,$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial F}{\partial s} \approx 0,$$

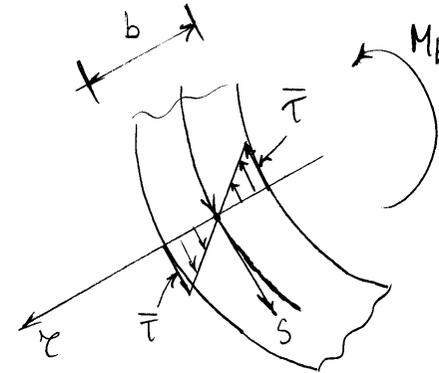
dove nella  $\tau_{rz}$  si sono trascurati i contributi della derivata dello spessore  $b$  per l'ipotesi di lenta variazione di questo lungo la linea media. Lungo una corda la tensione tangenziale assume il valore massimo in modulo sul contorno. Detto  $\bar{\tau}$  tale valore, risulta:

$$\bar{\tau} = \left| \tau_{sz} \left( \pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{M_t}{J_t} b.$$

Dato che  $M_t$  e  $J_t$  non dipendono da  $s$ , la tensione tangenziale massima  $\bar{\tau}$  si ha in corrispondenza dello spessore

massimo:

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{M_t}{J_t} b_{\max}.$$



Di nuovo,  $J_t$  si ottiene imponendo:

$$2 \int_A F dA = M_t,$$

cioè:

$$-2 \frac{M_t}{J_t} \int_s ds \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( r^2 - \frac{b^2}{4} \right) dr = M_t,$$

e quindi:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_l b^3 ds.$$

Se  $b = \text{cost}$ , questa diventa (come nel caso della sezione rettangolare sottile):

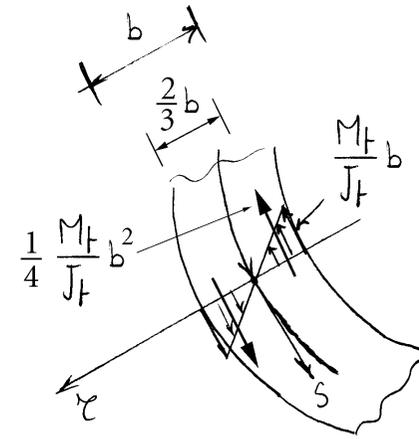
$$J_t = \frac{1}{3} b^3 l$$

dove  $l$  è la lunghezza complessiva della linea media.

Da ultimo, occorre notare che di nuovo le  $\tau_{sz}$  riproducono solo la metà del momento torcente, se si trascura, nello spirito delle sezioni sottili, l'effetto curvatura:

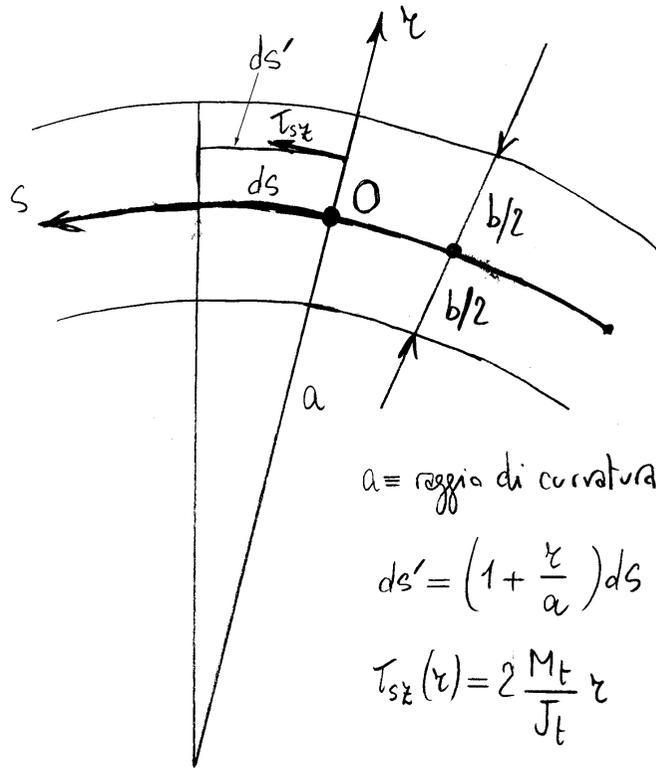
$$\int_l \frac{1}{6} \frac{M_t}{J_t} b^3 ds = \frac{1}{2} \frac{M_t}{J_t} \int_l \frac{1}{3} b^3 ds = \frac{M_t}{2}.$$

Tuttavia, tenendo conto dell'effetto curvatura, le tensioni tangenziali ridotte alla linea media



generano non solo delle coppie distribuite lungo la linea media, ma anche delle forze aventi la direzione della linea media. Questo perché le tensioni tangenziali della parte del centro di curvatura agiscono su aree più piccole rispetto a quelle agenti della parte opposta. Queste forze risultanti, anche se piccole, non sono trascurabili agli effetti del calcolo del momento torcente, per l'effetto amplificante della loro distanza dal polo di riduzione del momento torcente.

La risultante, per unità di linea media, delle tensioni agenti lungo una corda vale:



$$f = \frac{1}{ds} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{sz} ds' dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2 \frac{M_t}{J_t} z \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz,$$

e infine:

$$f = \frac{M_t b^3}{6 J_t a} .$$

In modo analogo si ottiene il momento torcente risultante, per unità di linea, rispetto al polo  $O$  intersezione della corda con la linea media:

$$m_t = \frac{1}{ds} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{sz} z ds' dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2 \frac{M_t}{J_t} z^2 \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz ,$$

e infine:

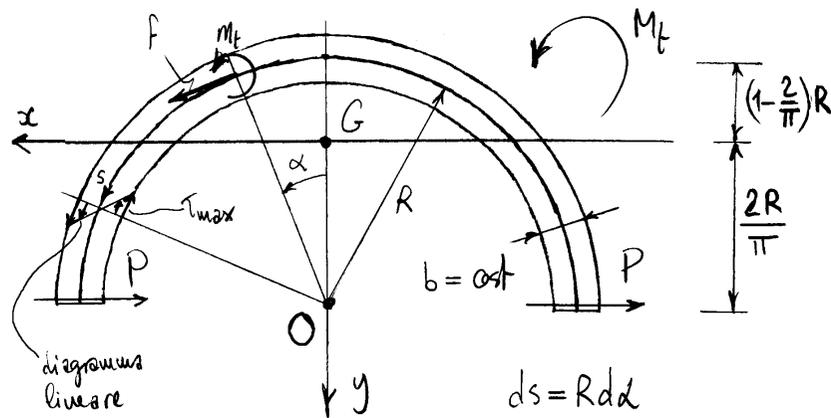
$$m_t = \frac{M_t b^3}{6 J_t} .$$

Ne risulta che  $m_t$  non risente dell'effetto curvatura.

### 6.2.1 Semicirconferenza sottile

Sia data una semicirconferenza sottile di raggio  $R$  e di spessore  $b$  costante. Il fattore torsionale di rigidezza e la tensione tangenziale sul contorno valgono:

$$\bar{J}_t = \frac{1}{3} \pi R b^3, \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{\pi R b^2}.$$



Il raggio di curvatura è costante e vale  $R$ .  
Le tensioni ridotte alla linea media danno origine alle forze e momenti seguenti:

$$f = \frac{M_t b^3}{6 J_t R}, \quad m_t = \frac{M_t b^3}{6 J_t}.$$

Il momento torcente dovuto alle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$ , calcolato con polo di riduzione il centro  $O$

della semicirconferenza, vale, tenendo conto della emisimmetria del problema:

$$\begin{aligned} M_t' &= 2 \int_0^{\pi/2} f R (R d\alpha) + 2 \int_0^{\pi/2} m_t (R d\alpha) \\ &= 2 f R^2 \frac{\pi}{2} + 2 m_t R \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{M_t b^3 R \pi}{6 J_t} + \frac{M_t b^3 R \pi}{6 J_t} = M_t. \end{aligned}$$

La tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  genera quindi tutto il momento torcente (metà attraverso  $f$  e metà attraverso  $m_t$ ). L'equilibrio alla traslazione orizzontale determina poi le forze  $P$  orizzontali generate dalle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  nelle due zone di estremità:

$$\int_0^{\pi/2} f G \alpha R d\alpha = P.$$

Si ottiene:

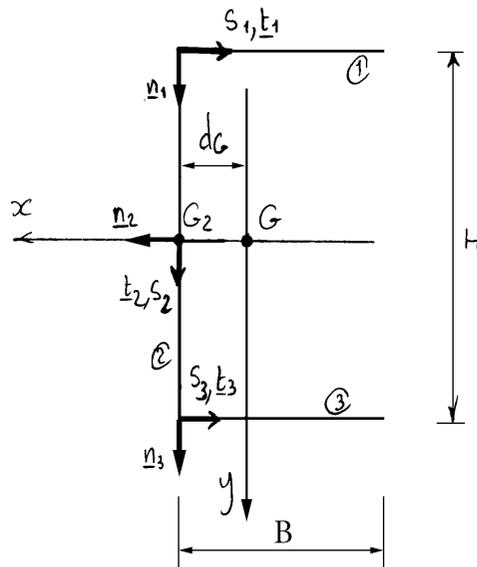
$$P = f R = \frac{M_t b^3}{6 J_t} = \frac{M_t}{2 \pi R}.$$

## 6.2.2 La sezione a C

Funzione di ingobbamento (sulla linea media dove  $\underline{\tau}=0$ ):

$$\text{grad } \omega = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T(P-G),$$

dove  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \equiv$  Rotazione di  $90^\circ$  in senso antiorario ( $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ ).



1) tratto ①:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} &= \text{grad } \omega \cdot \underline{t}_1 = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \cdot \underline{t}_1 \\ &= -(P-G) \cdot \left( \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{t}_1 \right) = -(P-G) \cdot \underline{n}_1 = \frac{H}{2}. \end{aligned}$$

2) tratto ②:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial s_2} = -(P-G) \cdot \underline{n}_2 = -d_G$$

3) tratto ③:

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial s_3} = -(P-G) \cdot \underline{n}_3 = -\frac{H}{2}$$

Integrando, si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{H}{2}s_1 + C_1 = \frac{H}{2}(s_1 + d_G) \\ \omega_2 = -d_G s_2 + C_2 \\ \omega_3 = -\frac{H}{2}s_3 + C_3 = -\frac{H}{2}(s_3 + d_G) \end{cases}$$

Poiché la sezione è simmetrica, la funzione di ingobbamento  $\omega$  è emisimmetrica a meno di un moto rigido globale di traslazione nella direzione dell'asse della trave. Imponendo l'emisimmetria, deve risultare:

$$\omega_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,$$

$$\omega_3(s) = -\omega_1(s) \quad \Rightarrow \quad c_3 = -c_1.$$

Imponendo infine la condizione di continuità in uno dei due spigoli della sezione si ottiene poi:

$$\omega_1(0) = \omega_2\left(-\frac{H}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{H}{2}d_G.$$

Centro di taglio

$$x_c = - \frac{1}{J_x} \int_A \omega y \, dA$$

Trascurando la variabilità di  $\omega$  nello spessore e tenendo conto che:

$$y = \begin{cases} -\frac{H}{2} & \text{tratto ①} \\ s_2 & \text{tratto ②} \\ \frac{H}{2} & \text{tratto ③} \end{cases}$$

risulta:

$$\begin{aligned} x_c &= - \frac{1}{J_x} \left\{ - \int_0^B \frac{H}{2} (s_1 + d_G) \frac{H}{2} \delta_1 \, ds_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} d_G s_2^2 \delta_2 \, ds_2 - \int_0^B \frac{H}{2} (s_3 + d_G) \frac{H}{2} \delta_1 \, ds_3 \right\} \\ &= \frac{1}{J_x} \left\{ \left( \frac{\delta_1 B^2 H^2}{8} + \frac{d_G \delta_1 B H^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_G \delta_2 H^3}{12} + \left( \frac{\delta_1 B^2 H^2}{8} + \frac{d_G \delta_1 B H^2}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{J_x} \left\{ \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4} + d_G \left( \frac{\delta_2 H^3}{12} + \frac{\delta_1 B H^2}{2} \right) \right\}.$$

Ricordando che:

$$J_x = \frac{\delta_2 H^3}{12} + \frac{\delta_1 B H^2}{2},$$

si ottiene infine:

$$x_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4} + d_G.$$

La distanza  $d_c$  del centro di taglio dalla linea media dell'anima vale quindi:

$$d_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4},$$

in accordo con quanto già ottenuto utilizzando la formula di Jourawski.

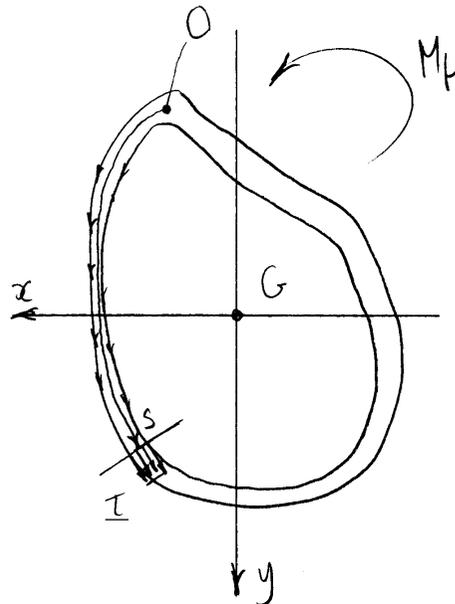
### 6.3 La torsione nelle sezioni sottili chiuse

Si consideri una sezione sottile chiusa biconnessa e si ricordi che la tensione lungo una corda di spessore  $b$  è costante e vale:

$$\tau_{sz} = \frac{M_t}{2\Omega b} \cdot (\text{formula di Bredt})$$

Si ricordi inoltre la relazione tra tensione tangenziale e funzione di ingobbamento:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad } \omega + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\},$$



dove  $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$  è il tensore rotazione di  $90^\circ$  in senso antiorario.

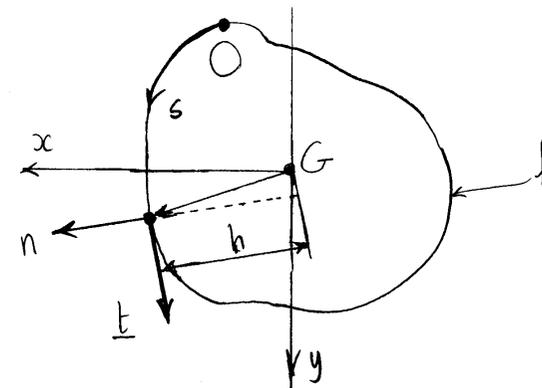
Dalle tensioni tangenziali è possibile quindi risalire al gradiente della funzione di ingobbamento:

$$\text{grad } \omega = \frac{J_t}{M_t} \underline{\tau} - \left\{ \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\}.$$

Per poter integrare tale espressione nella funzione di ingobbamento  $\omega$  la sua circuitazione lungo la linea media chiusa deve essere nulla:

$$\oint_l \text{grad } \omega \cdot \underline{t} \, ds = 0.$$

Questa espressione rappresenta in definitiva una condizione di congruenza.



Si ottiene:

$$\oint_{\ell} \underline{\tau} \cdot \underline{t} \, ds = \oint_{\ell} \frac{1}{b} \tau_{sx} b \, ds = \tau_{sx} b \oint_{\ell} \frac{ds}{b},$$

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} \left\{ \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(\underline{P}-\underline{G}) \right\} \cdot \underline{t} \, ds &= \oint_{\ell} (\underline{P}-\underline{G}) \cdot \underline{n} \, ds \\ &= \oint_{\ell} h \, ds = 2\Omega. \end{aligned}$$

dove  $\Omega$  è l'area racchiusa dalla linea media.

Dunque, la condizione:

$$\oint_{\ell} \underline{\tau} \cdot \underline{t} \, ds - \frac{M_t}{J_t} \oint_{\ell} \left\{ \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(\underline{P}-\underline{G}) \right\} \cdot \underline{t} \, ds = 0,$$

impone:

$$\tau_{sx} b \oint_{\ell} \frac{ds}{b} - 2 \frac{M_t}{J_t} \Omega = 0,$$

e infine:

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\ell} \frac{ds}{b}}.$$

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere dalla uguaglianza (lavoro di deformazione):

$$\oint_{\ell} \frac{\tau_{sx}^2}{2G} b \, ds = \frac{M_t^2}{2G J_t},$$

tenendo conto che risulta:

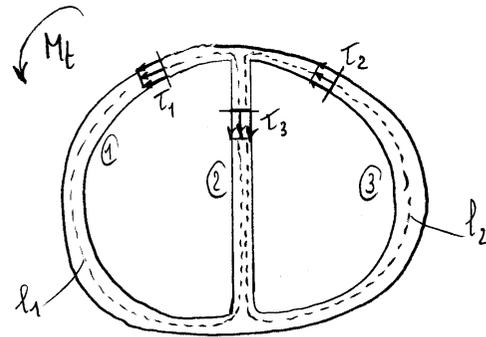
$$\oint_{\ell} \frac{\tau_{sx}^2}{2G} b \, ds = \frac{\tau_{sx}^2 b^2}{2G} \oint_{\ell} \frac{ds}{b} = \frac{M_t^2}{2G} \frac{\oint_{\ell} \frac{ds}{b}}{4\Omega^2}.$$

Verifichiamo che la soluzione ottenuta soddisfa la condizione di taglio nullo ( $\underline{T} = \underline{0}$ ). Infatti:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \oint_{\ell} \underline{\tau} b \, ds = \oint_{\ell} \tau_{sx} b \underline{t} \, ds \\ &= \tau_{sx} b \oint_{\ell} \underline{t} \, ds = \tau_{sx} b \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \oint_{\ell} \underline{n} \, ds \\ &= \tau_{sx} b \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega} \text{grad } 1 \, d\Omega = \underline{0}. \end{aligned}$$

### 6.4 La torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse

Analizziamo nel seguito, quale esempio facilmente generalizzabile, la sezione sottile chiusa triconnessa.



4 incognite :  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, J_t$ ,

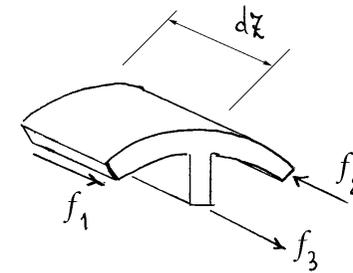
1 equazione di equilibrio di nodo,

1 equazione di equivalenza statica tra le  $\tau$  e  $M_t$ ,

2 equazioni di circuitazione lungo le linee chiuse  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$ .

I flussi delle tensioni tangenziali nei vari tratti valgono:

$$f_1 = \tau_1 b_1, \quad f_2 = \tau_2 b_2, \quad f_3 = \tau_3 b_3,$$



L'equazione di equilibrio del nodo alla traslazione nella direzione della linea d'asse richiede:

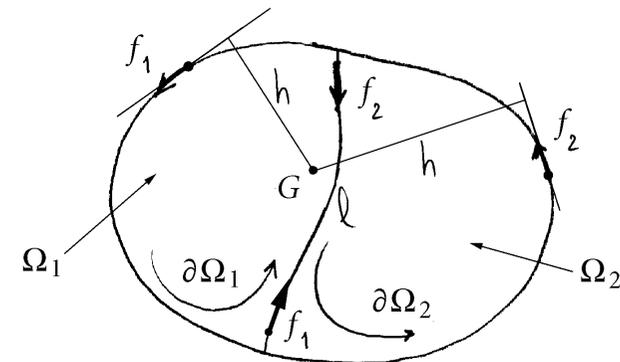
$$f_1 dz - f_2 dz + f_3 dz = 0,$$

e si ottiene:

$$f_3 = f_2 - f_1.$$

L'equivalenza statica richiede:

$$M_t = \oint_{\partial\Omega_1} f_1 h ds_1 + \oint_{\partial\Omega_2} f_2 h ds_2,$$



e si ottiene:

$$M_t = 2\Omega_1 f_1 + 2\Omega_2 f_2 ,$$

dove  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  sono le aree racchiuse dalle linee medie  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  rispettivamente.

La circuitazione lungo la generica linea  $\partial\Omega_i$  si scrive:

$$\oint_{\partial\Omega_i} \text{grad} w \cdot \underline{t} \, ds = 0 ,$$

e quindi:

$$\frac{J_t}{M_t} \left\{ \oint_{\partial\Omega_1} \frac{f_1}{b} \, ds - \int_{\ell} \frac{f_2}{b} \, ds \right\} - \oint_{\partial\Omega_1} h \, ds = 0 ,$$

$$\frac{J_t}{M_t} \left\{ \oint_{\partial\Omega_2} \frac{f_2}{b} \, ds - \int_{\ell} \frac{f_1}{b} \, ds \right\} - \oint_{\partial\Omega_2} h \, ds = 0 ,$$

e infine:

$$f_1 \oint_{\partial\Omega_1} \frac{ds}{b} - f_2 \int_{\ell} \frac{ds}{b} = \frac{M_t}{J_t} \oint_{\partial\Omega_1} h \, ds ,$$

$$-f_1 \int_{\ell} \frac{ds}{b} + f_2 \oint_{\partial\Omega_2} \frac{ds}{b} = \frac{M_t}{J_t} \oint_{\partial\Omega_2} h \, ds .$$

Verifichiamo infine che anche nel caso di sezione sottile biconnessa vale la condizione  $\underline{T} = \underline{0}$  :

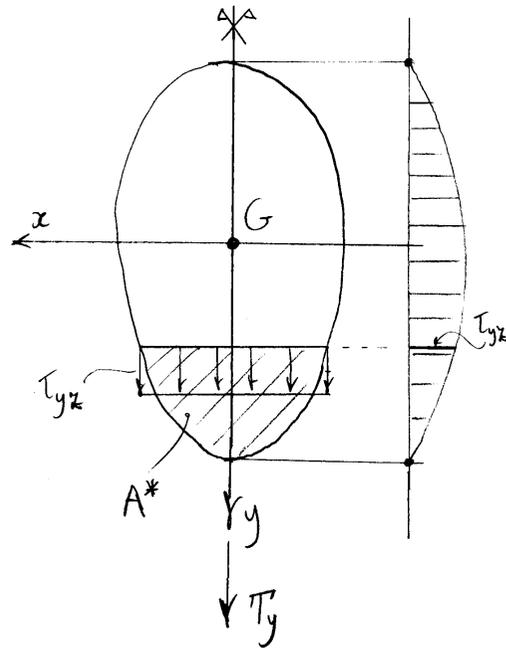
$$\underline{T} = \sum_i \oint_{\partial\Omega_i} f_i \underline{t} \, ds$$

$$= \sum_i f_i \frac{R_{\pi/2}}{2} \oint_{\partial\Omega_i} \underline{n} \, ds$$

$$= \sum_i f_i \frac{R_{\pi/2}}{2} \int_{\Omega_i} \text{grad} 1 \, d\Omega = \underline{0} .$$

### 6.5 Il taglio nelle sezioni compatte simmetriche

Si consideri una sezione compatta, simmetrica rispetto all'asse  $y$  e soggetta ad un taglio  $T_y$  avente  $y$  quale retta d'azione (dunque passante per il centro di taglio).



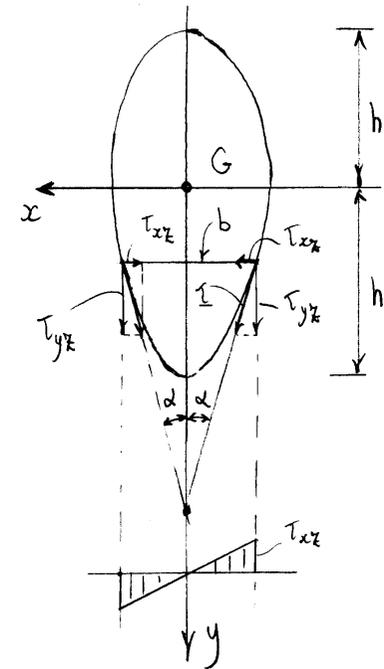
La distribuzione delle tensioni tangenziali  $T_{yz}$ , sulla generica corda ortogonale all'asse  $y$  di simmetria, si suppone costante e di valore individuato quindi dalla formula

di Jourawski:

$$\tau_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} .$$

La distribuzione delle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  lungo la generica corda ortogonale all'asse  $y$  di simmetria è invece lineare e vale:

$$\tau_{xz} = - \frac{2x}{b} \tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha .$$



Energia complementare per unità di linea:

$$\Psi = \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} = \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA.$$

Ne consegue:

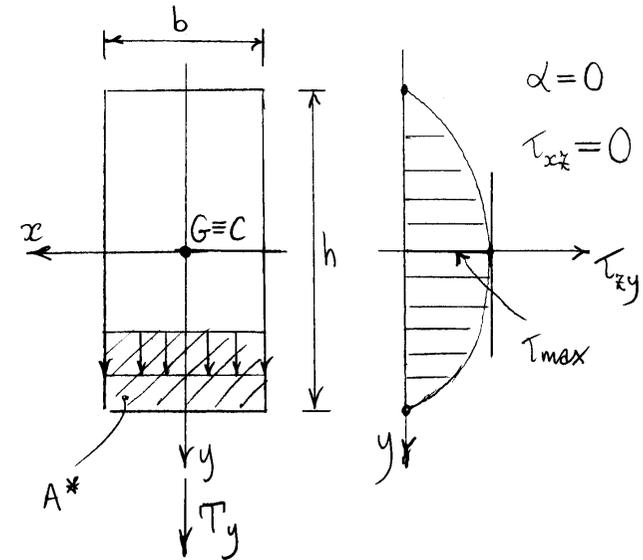
$$\begin{aligned} \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} &= \int_A \frac{\tau_{yz}^2}{2G} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA \\ &= \int_A \frac{T_y^2 S_x^{*2}}{2G b^2 J_x^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA \\ &= \frac{T_y^2}{2GA} \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA. \end{aligned}$$

Il fattore di taglio relativo all'asse  $y$  di simmetria vale quindi:

$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA = \\ &= \frac{A}{J_x^2} \int_{-h}^{h'} \frac{S_x^{*2}}{b^2} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{J_x^2} \int_{-h}^{h'} \frac{S_x^{*2}}{b} \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dy.$$

### 6.5.1 Sezione rettangolare



$$S_x^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \quad J_x = \frac{bh^3}{12},$$

$$\tau_{zy} = \frac{6T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

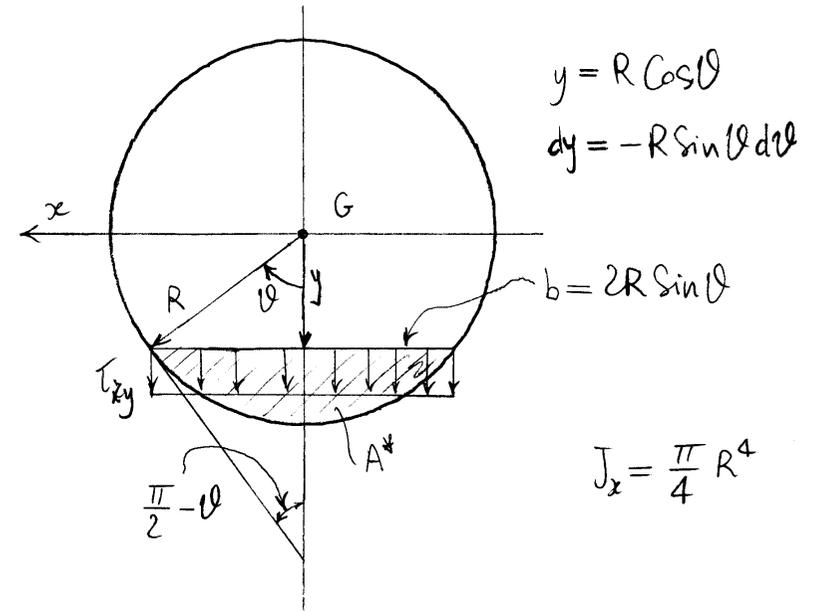
$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{J_x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{S_x^*}{b} dy = (12)^2 \frac{1}{b^2 h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b^2}{4} (h^2 - y^2)^2 dy \\ &= \frac{36}{h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4 \right) dy \\ &= \frac{36}{h^5} \left[ \frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ &= 36 \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80} \right) = \frac{36}{240} (15 - 10 + 3). \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\chi_y = \frac{6}{5} .$$

Procedendo allo stesso modo si ricaverebbe anche  $\chi_x = \frac{6}{5}$ ,  
 però occorre tenere presente che la soluzione trovata per  $\chi_y$  è  
 sufficientemente buona se  $b < h$ , e quindi  
 se  $\chi_y = \frac{6}{5}$  è una soluzione sufficientemente buona,  
 allora  $\chi_x = \frac{6}{5}$  non è sufficientemente buona.

### 6.5.2 Sezione circolare



$$\begin{aligned} y &= R \cos \vartheta \\ dy &= -R \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

$$J_x = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$S_x^* = \int_0^{\vartheta} 2R^2 \sin^2 \alpha R \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta$$

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin^2 \vartheta$$

$$\tau_{xz} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^3} x \cos \vartheta$$

Fattore di taglio:

$$\chi_y = \frac{\pi R^2}{\frac{\pi^2 R^8}{16}} \int_0^\pi \frac{\frac{4}{9} R^6 \sin^6 \vartheta}{2 R \sin \vartheta} \left(1 + \frac{1}{3 \tan^2 \vartheta}\right) R \sin \vartheta d\vartheta$$

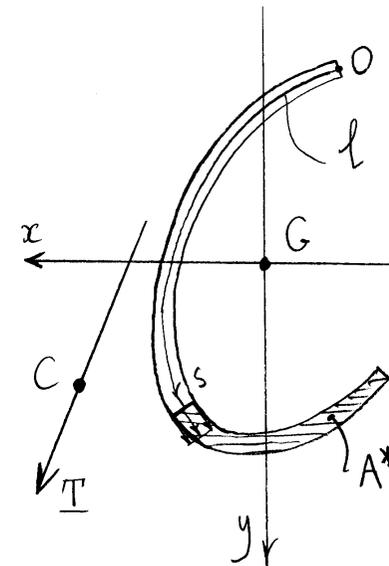
$$= \frac{16}{\pi R^6} \frac{2R^6}{9} \int_0^\pi \sin^6 \vartheta \left(1 + \frac{1}{3 \tan^2 \vartheta}\right) d\vartheta$$

Si ottiene:

$$\chi_y = \frac{32}{27} \cdot$$

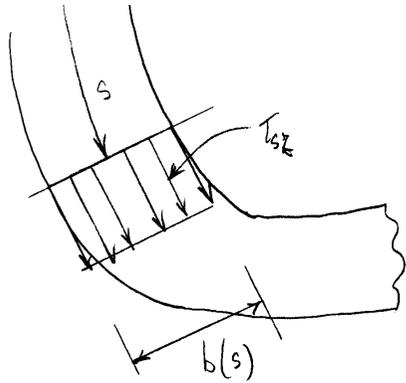
## 6.6 Il taglio nelle sezioni sottili aperte

Si faccia riferimento ad uno sforzo di taglio con retta d'azione passante per il centro di taglio.



La tensione tangenziale  $\tau_{sz}$  è approssimativamente costante lungo la corda e vale:

$$\tau_{sz} = \frac{T_x S_y^*}{b J_y} + \frac{T_y S_x^*}{b J_x}.$$



Energia di deformazione per unità di linea in forma complementare:

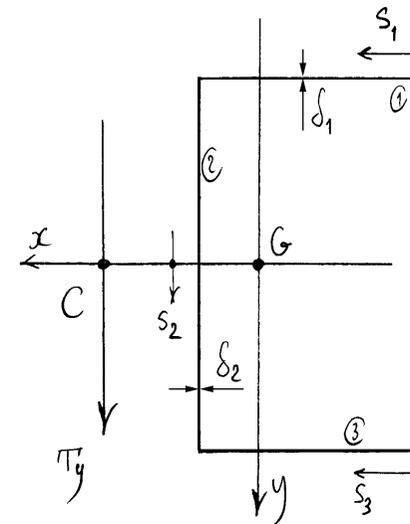
$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2G} \int_A \tau_{s\alpha}^2 dA = \\ &= \frac{1}{2G} \int_l \tau_{s\alpha}^2 b ds = \frac{1}{2G} \int_l \left( \frac{\tau_y S_x^*}{b J_x} + \frac{\tau_x S_y^*}{b J_y} \right)^2 b ds \\ &= \frac{1}{2GA} \left\{ \left( \frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{b} ds \right) \tau_y^2 + \left( \frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds \right) \tau_x^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{A}{J_x J_y} \int_l \frac{S_x^* S_y^*}{b} ds \right) \tau_x \tau_y \right\}. \end{aligned}$$

fattori di taglio:

$$\begin{cases} \chi_y = \frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{b} ds, \\ \chi_x = \frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds, \\ \chi_{xy} = \frac{A}{J_x J_y} \int_l \frac{S_x^* S_y^*}{b} ds. \end{cases}$$

### 6.6.1 La sezione a C

Taglio secondo y per C



$$\begin{cases} S_x^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \frac{H}{2}, \\ S_x^*(s_2) = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \delta_2 \left( \frac{H}{2} + s_2 \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H}{2} + s_2 \right) - s_2 \right] \\ \quad = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{H^2}{4} - s_2^2 \right), \\ S_x^*(s_3) = \delta_1 s_3 \frac{H}{2}. \end{cases}$$

$$= \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{\delta_1 B^3 H^2}{6} + \frac{\delta_1^2 B^2 H^3}{4 \delta_2} + \frac{\delta_1 B H^4}{8} - \frac{\delta_1 B H^4}{24} + \frac{\delta_2 H^5}{4 \times 16} - \frac{\delta_2 H^5}{6 \times 16} + \frac{\delta_2 H^5}{20 \times 16} \right\},$$

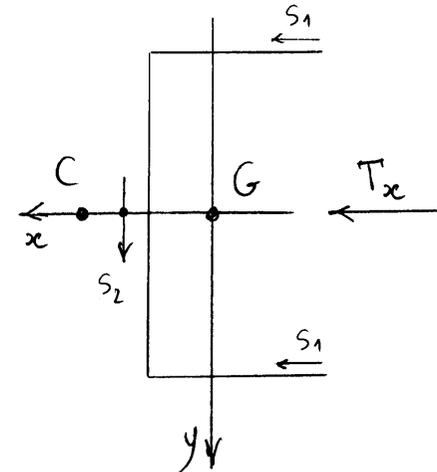
e infine:

$$X_y = \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{1}{6} \delta_1 B^3 H^2 + \frac{1}{4 \delta_2} \delta_1^2 B^2 H^3 + \frac{1}{12} \delta_1 B H^4 + \frac{1}{120} \delta_2 H^5 \right\}.$$

Fattore di taglio

$$\begin{aligned} X_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{\delta_1} ds = \\ &= \frac{A}{J_x^2} \left\{ 2 \int_0^B \frac{\delta_1 H^2}{4} \xi^2 d\xi + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{\delta_2} \left[ \delta_1 B \frac{H}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{H^2}{4} - \xi^2 \right) \right]^2 d\xi \right\} \\ &= \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{\delta_1 B^3 H^2}{6} + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[ \frac{\delta_1^2 B^2 H^2}{4 \delta_2} + \frac{\delta_1 B H^3}{8} - \frac{\delta_1 B H \xi^2}{2} + \frac{\delta_2 H^4}{4 \times 16} - \frac{\delta_2 H^2 \xi^2}{8} + \frac{\delta_2 \xi^4}{4} \right] d\xi \right\} = \end{aligned}$$

Taglio secondo x per C



$$S_y^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \left( B - d_G - \frac{s_1}{2} \right),$$

$$S_y^*(s_2) = \delta_2 \left( \frac{H}{2} + s_2 \right) d_G - \delta_1 B \left( \frac{B}{2} - d_G \right).$$

Fattore di taglio secondo x

$$\begin{aligned} \chi_x &= \frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds = \\ &= \frac{A}{J_y^2} \left\{ 2 \int_0^B \delta_1 s_1^2 \left( B - d_G - \frac{s_1}{2} \right)^2 ds_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{\delta_2} \left[ \delta_2 \left( \frac{H}{2} + s_2 \right) d_G - \delta_1 B \left( \frac{B}{2} - d_G \right) \right]^2 ds_2 \right\}. \end{aligned}$$

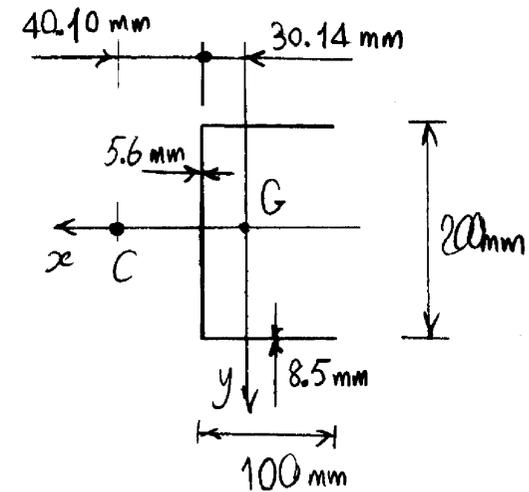
Fattore di taglio misto

Poiché  $x$  è asse di simmetria il fattore di taglio misto si annulla:

$$\chi_{xy} = 0.$$

In altre parole,  $x$  e  $y$  sono assi principali di taglio.

Nel caso:



si ottiene:

$$\chi_y = 2.906.$$