

# Dispense del Corso di MECCANICA DEI SOLIDI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

**PARTE TERZA**

## **Sistemi di travi**

Corsi di Laurea specialistici in  
Ingegneria delle Infrastrutture e dei sistemi di trasporto  
Strutture ed opere dell'ingegneria civile  
Ingegneria edile

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Navale

Trieste, 31 agosto 2007



# Indice

<b>1</b>	<b>Analisi statica e cinematica dei sistemi di travi rigide</b>	<b>3</b>
1.1	Cinematica dei sistemi rigidi piani . . . . .	3
1.1.1	Centri assoluti di rotazione . . . . .	3
1.1.2	Centri relativi di rotazione . . . . .	4
1.1.3	Allineamento dei centri relativi di tre corpi in moto . . . . .	8
1.1.4	Vincoli e centri di rotazione . . . . .	9
1.1.5	Esempio 1 . . . . .	10
1.1.6	Esempio 2 . . . . .	12
1.2	Il principio dei lavori virtuali per il corpo rigido libero . . . . .	13
1.2.1	Esempio . . . . .	14
1.3	Labilità infinitesima . . . . .	15
1.4	Problema cinematico per i sistemi spaziali di travi rigide . . . . .	20
1.4.1	Matrice cinematica . . . . .	21
1.4.2	Condizione di non labilità di un sistema di travi . . . . .	23
1.5	Problema statico per i sistemi spaziali di travi rigide . . . . .	24
1.5.1	Matrice statica . . . . .	25
1.5.2	Condizione di equilibrio di un sistema di travi . . . . .	26
1.6	Dualità statico cinematica . . . . .	27
1.7	Il principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi di travi vincolate . . . . .	29
1.8	Esempio sull'analisi statica e cinematica . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Travi elastiche lineari</b>	<b>35</b>
2.1	Equazioni della teoria tecnica delle travi . . . . .	35
2.2	Trave di Timoshenko . . . . .	38
2.3	Trave piana inflessa . . . . .	42
2.4	Sovrapposizione degli effetti . . . . .	48
2.5	Integrazione dell'equazione della linea elastica . . . . .	51
2.5.1	Esempio: Trave incastro-appoggio . . . . .	51
2.5.2	Travi caricate solo alle estremità . . . . .	53

<b>3</b>	<b>Calcolo di spostamenti</b>	<b>55</b>
3.1	Calcolo di spostamenti in sistemi isostatici con il principio dei lavori virtuali . . . . .	55
3.1.1	Esempio: sistema di travi iperstatico spaziale . . . . .	59
3.2	Un esempio di calcolo di spostamenti col metodo cinematico: mensola di sezione a C . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Soluzione dei sistemi iperstatici col metodo degli spostamenti</b>	<b>67</b>
4.1	Esempi . . . . .	67
4.1.1	Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale . . . . .	67
4.1.2	Sistema di pendoli paralleli . . . . .	71
4.1.3	Trave continua . . . . .	72
4.1.4	Analisi qualitativa basata sulle rigidezze . . . . .	73
4.1.5	Telaio soggetto ad una coppia concentrata . . . . .	75
4.2	Schema fondamentale dei telai a nodi fissi . . . . .	77
4.3	Schema fondamentale dei telai a nodi spostabili . . . . .	79
4.3.1	Rigidezze taglianti . . . . .	81
4.3.1.1	Rigidezza tagliante della trave appoggio-doppio pendolo . . . . .	81
4.3.1.2	Rigidezza tagliante della trave incastro-doppio pendolo . . . . .	81
4.3.2	esempi di telai con traversi rigidi . . . . .	82
4.3.2.1	Portale con traverso rigido . . . . .	82
4.3.2.2	Telaio con traverso rigido e tre ritti . . . . .	83
4.3.2.3	Telaio simmetrico con traverso rigido e tre ritti . . . . .	86
4.4	Sistema di pendoli connessi in un nodo . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Analisi del metodo delle forze per la soluzione dei sistemi iperstatici</b>	<b>91</b>
5.1	Struttura delle equazioni di congruenza . . . . .	91
5.2	Scrittura delle equazioni di congruenza . . . . .	93
5.3	Indeformabilità assiale . . . . .	95
5.4	Esempio: telaio a un nodo spostabile . . . . .	96
5.5	Esempio: Struttura reticolare . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Analisi del metodo degli spostamenti per la soluzione dei sistemi iperstatici</b>	<b>107</b>
6.1	Struttura delle equazioni risolventi . . . . .	107
6.2	Scrittura delle equazioni di equilibrio . . . . .	110

---

6.3	Esempio di un telaio a un nodo spostabile risolto col metodo degli spostamenti . . . . .	112
6.4	Costruzione della matrice di rigidezza per assemblaggio delle matrici delle singole travi: un esempio . . . . .	115
6.4.1	Matrice di rigidezza di una trave inflessa con tutti i movimenti di nodo vincolati . . . . .	115
6.4.2	Matrice di rigidezza di una trave inflessa nella quale una rotazione di nodo non è vincolata . . . . .	116
6.4.3	Matrici di rigidezza delle singole travi e loro assemblaggio . . . . .	117
6.5	Metodo iterativo di Cross: un esempio . . . . .	118
6.6	Esercizi . . . . .	121
6.6.1	Telaio simmetrico soggetto ad un carico concentrato	121
6.6.2	Struttura reticolare iperstatica simmetrica . . . . .	123

## Capitolo 1

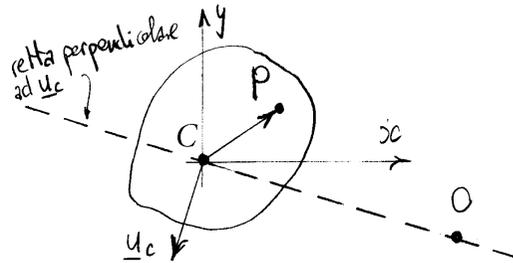
### Analisi statica e cinematica dei sistemi di travi rigide

#### 1.1 Cinematica dei sistemi rigidi piani

##### 1.1.1 Centri assoluti di rotazione

Sia dato un corpo rigido vincolato a muoversi parallelamente ad un piano di normale  $\underline{e}_z$ . Si può sempre il moto rigido nella somma di una traslazione (parallela al piano) e di una rotazione (attorno ad un asse perpendicolare al piano):

$$\underline{u} = \underline{u}_c + \varphi \times (P - C), \quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_z.$$



L'equazione:

$$\underline{u}_c + \varphi \underline{e}_z \times (O - C) = \underline{0},$$

sempre risolvibile se  $\varphi \neq 0$ , individua il

centro assoluto di rotazione  $O$ , ossia quel punto che resta fisso nel moto rigido. Perché:

$$\begin{aligned} \underline{e}_z \times \{ \underline{e}_z \times (O - C) \} &= \\ &= \{ \underline{e}_z \cdot (O - C) \} \underline{e}_z - (\underline{e}_z \cdot \underline{e}_z) (O - C) = -(O - C), \end{aligned}$$

si ottiene:

$$O - C = \frac{1}{\varphi} \underline{e}_z \times \underline{u}_c,$$

e in componenti:

$$O - C = \frac{1}{\varphi} \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{cx} & u_{cy} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_{cy}}{\varphi} \\ \frac{u_{cx}}{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

oppure:

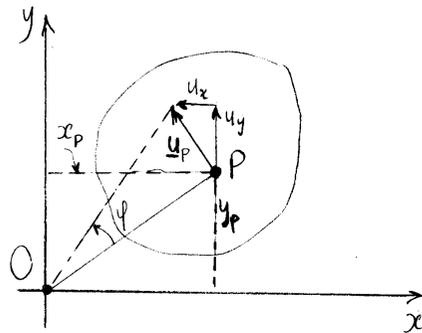
$$\begin{cases} x_o = -u_{cy}/\varphi \\ y_o = u_{cx}/\varphi \end{cases}.$$

Se il centro assoluto è noto e  $P$  è un punto qualunque si ha:

$$\underline{u} = \underline{\varphi} \times (P - O) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & \varphi \\ x_p & y_p & 0 \end{vmatrix},$$

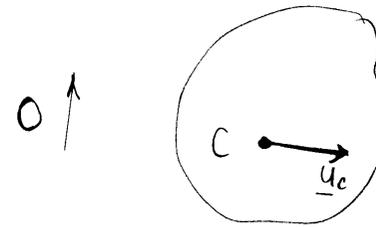
$$\begin{cases} u_x = -\varphi y_p \\ u_y = \varphi x_p \end{cases} .$$

Lo spostamento di un punto avviene sempre perpendicolarmente alla congiungente del punto con il centro di rotazione.

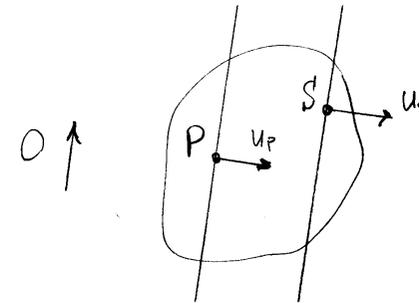


Se  $\varphi = 0$ , si ha un moto di traslazione:  
 $\underline{u} = \underline{u}_c = \text{cost}$

In tal caso il moto di un punto avviene sempre perpendicolarmente ad una data direzione del piano, direzione che individua un punto improprio del piano che acquista quindi il ruolo di centro assoluto di rotazione. Tale direzione è individuata dalla direzione ortogonale ad  $\underline{u}_c$ .

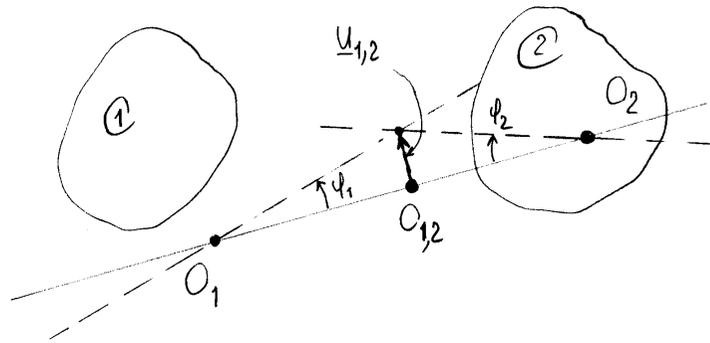


In altri termini, qualunque retta del fascio di rette parallele ortogonali ad  $\underline{u}_c$  gode della proprietà di essere ortogonale allo spostamento di uno qualunque dei suoi punti, cioè gode della stessa proprietà di cui gode il fascio di rette proprio di sostegno il centro assoluto O nel caso  $\varphi \neq 0$ .



### 1.1.2 Centri relativi di rotazione

Siano ora dati due corpi rigidi vincolati a muoversi parallelamente ad un piano. Siano  $O_1$  il centro assoluto di un moto rigido del primo corpo ed  $O_2$  il centro assoluto di un moto rigido del secondo corpo.

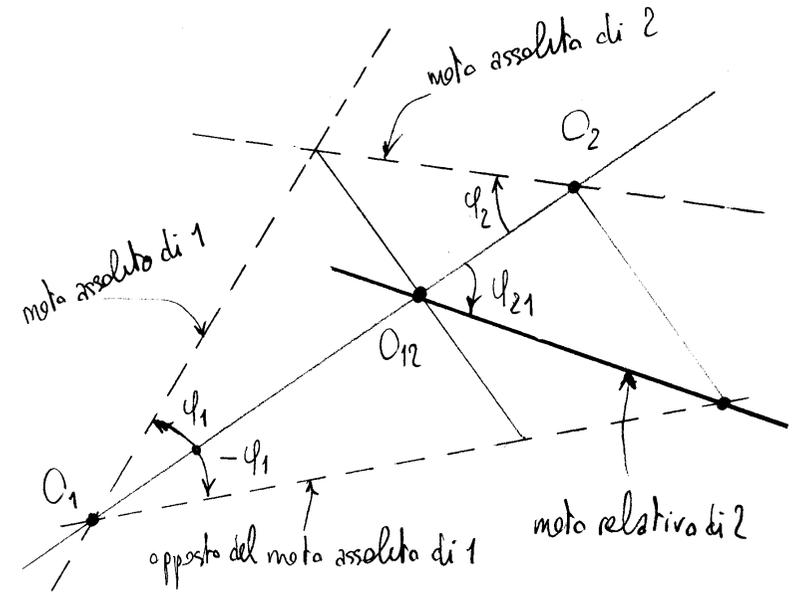


e, per il momento, sia  $O_1 \neq O_2$ . I campi di spostamento rigido dei due corpi risultano:

$$\underline{u} = \underline{\varphi}_1 \times (P - O_1), \quad \underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (P - O_2).$$

I punti e solo i punti della congiungente  $O_1 O_2$ , ritenuti appartenenti allo spazio rigido del primo corpo e poi allo spazio rigido del secondo, subiscono per effetto dei due moti uno spostamento nella stessa direzione e solo uno di tali punti, detto centro relativo (relativo al moto dei due corpi), subisce, per effetto dei due moti, lo stesso spostamento. Se il moto viene descritto da un osservatore connesso ad uno dei due corpi rigidi, per es. il corpo 1, l'altro corpo rigido, il corpo 2, appare avere il centro relativo  $O_{12}$  quale centro assoluto di rotazione.

Tale descrizione può ottenersi sovrapponendo ai due moti rigidi un moto rigido complessivo pari



a quello di uno dei due corpi rigidi cambiato di segno:

$$\underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (P - O_2) - \underline{\varphi}_1 \times (P - O_1).$$

Annullando tale espressione si ottiene il centro relativo:

$$\underline{\varphi}_2 \times (O_{12} - O_2) - \underline{\varphi}_1 \times (O_{12} - O_1) = 0.$$

Poiché, come detto, il centro relativo è necessariamente allineato

con centri assoluti, si può porre:

$$\begin{cases} O_{12} - O_1 = \alpha(O_2 - O_1) \\ O_{12} - O_2 = \beta(O_2 - O_1) \end{cases} ,$$

$$O_2 - O_1 = (\alpha - \beta)(O_2 - O_1) \Rightarrow \alpha - \beta = 1 .$$

Risulta:

$$\beta \varphi_2 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) - \alpha \varphi_1 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) = \underline{0} ,$$

$$\alpha \varphi_1 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) = (\alpha - 1) \varphi_2 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) ,$$

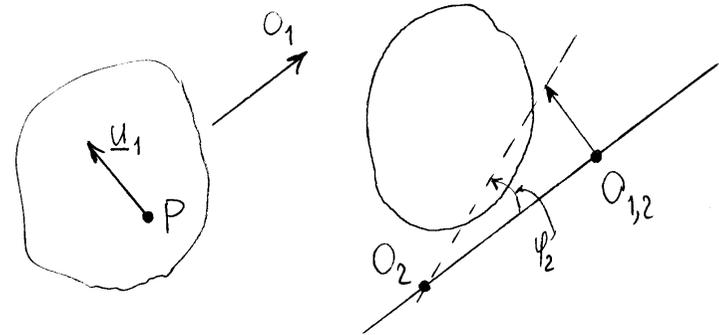
cioè:

$$\alpha \varphi_1 = (\alpha - 1) \varphi_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} .$$

Se il primo dei due corpi subisce una traslazione, il centro relativo giace sulla perpendicolare allo spostamento del primo dei due corpi tracciata per il centro assoluto del secondo corpo, cioè giace ancora sulla congiungente i due centri assoluti  $O_1$  e  $O_2$  dei quali il primo è improprio.

Moto relativo:

$$\underline{u} = \varphi_2 \times (P - O_2) - \underline{u}_1 .$$

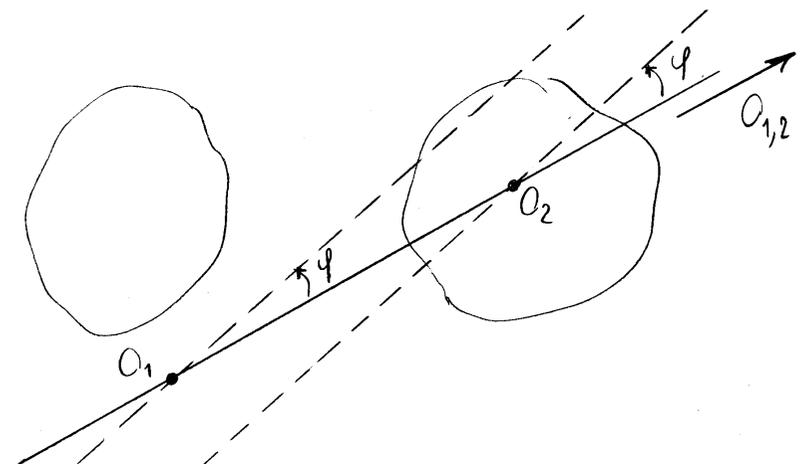


Risulta quindi:

$$\varphi_2 \times (O_{1,2} - O_2) = \underline{u}_1 , \quad |O_{1,2} - O_2| = \frac{|\underline{u}_1|}{\varphi_2} .$$

Se  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , il moto relativo assume l'espressione:

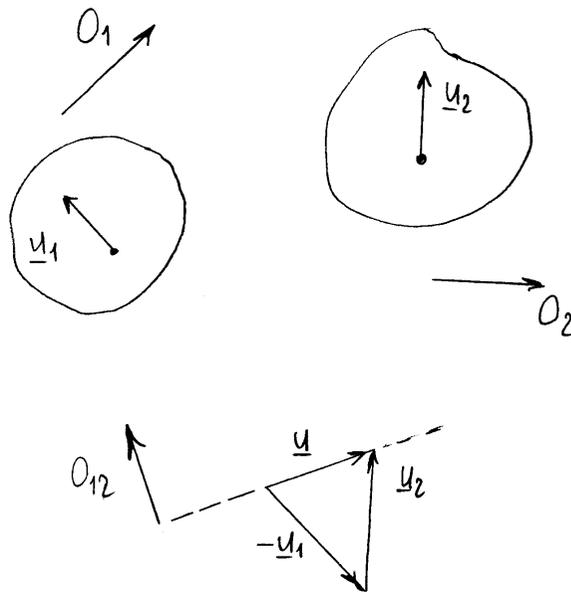
$$\underline{u} = \varphi \times (O_1 - O_2) = \text{cost} .$$



Tale espressione rappresenta una traslazione ortogonale alla congiungente  $O_1O_2$ . Ne risulta quindi un centro relativo improprio individuata dalla direzione della congiungente  $O_1O_2$ , ancora allineato con i centri assoluti.

Se tutti e due i corpi subiscono un moto rigido di traslazione, cioè se tutti e due i centri relativi sono impropri, il moto relativo è ancora una traslazione:

$$\underline{u} = \underline{u}_2 - \underline{u}_1.$$



Essendo tutti i centri impropri, il centro relativo è ancora allineato con i centri assoluti (allineamento lungo la retta impropria).

Supponiamo ora che  $O_1 = O_2 = O$ .

Nel caso di  $O$  proprio, se i due corpi subiscono una rotazione di ampiezza diversa allora anche la rotazione relativa avviene attorno allo stesso centro e risulta  $O_{12} = O$ . In caso contrario non vi è moto relativo e non esiste centro relativo.

Nel caso di  $O$  improprio, se i due corpi subiscono una traslazione di ampiezza diversa allora anche la traslazione relativa avviene nella stessa direzione e risulta, come nel caso precedente,  $O_{12} = O$ . In caso contrario non vi è moto relativo e non esiste centro relativo.

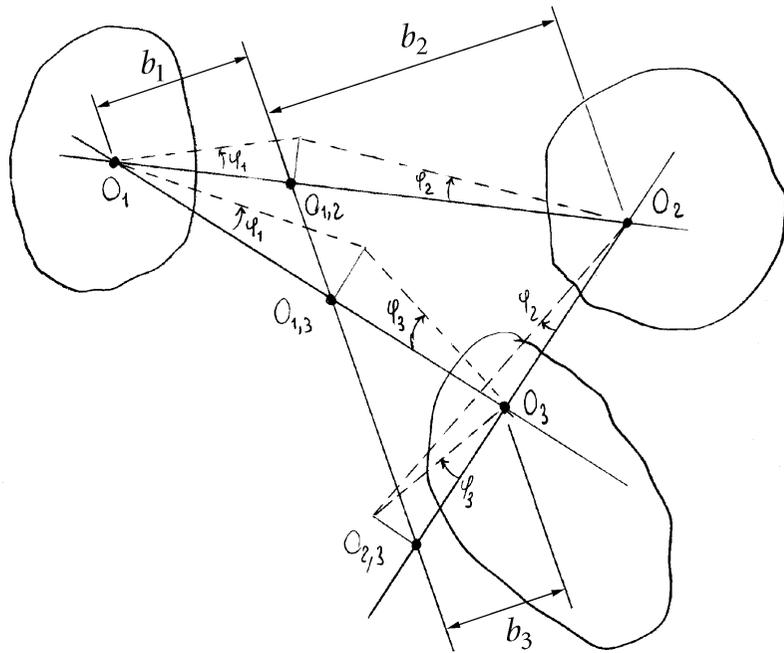
Riassumendo:

1. Due corpi in moto rigido definiscono due centri assoluti  $O_1$  e  $O_2$  eventualmente coincidenti;
2. Se due corpi subiscono un moto rigido relativo viene definito anche un centro relativo  $O_{12}$ , altrimenti i due corpi si muovono come un unico corpo e i due centri assoluti coincidono necessariamente;
3. Nel caso di moto rigido di entrambi i corpi con moto relativo tra i due corpi, i tre centri, che necessariamente esistono, sono tutti e tre distinti e allineati oppure tutti e tre coincidenti;
4. Se un primo corpo è fisso e un secondo corpo in moto,

il centro assoluto del primo corpo non esiste mentre il centro assoluto del secondo coincide con il centro relativo, cioè  $O_2 = O_{12}$ , poiché in tal caso il moto relativo del secondo corpo rispetto al primo coincide con il moto assoluto del secondo corpo.

### 1.1.3 Allineamento dei centri relativi di tre corpi in moto

Siano  $O_1, O_2$  ed  $O_3$  i centri assoluti dei tre moti e siano  $O_{1,2}, O_{1,3}$  ed  $O_{2,3}$  i centri relativi corrispondenti ad ogni coppia di moti. Si vuole mostrare che i tre centri relativi sono allineati.



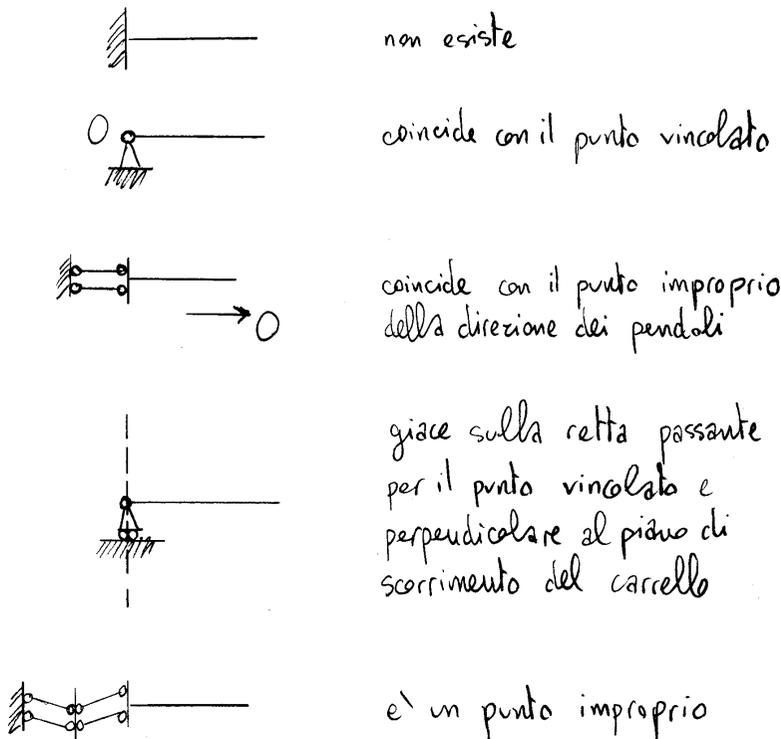
Infatti, si sovrappone ai tre moti un moto rigido complessivo che riparti il primo dei corpi nella configurazione originaria. Il risultato è che il primo corpo resta fisso, i centri assoluti di rotazione dei restanti due corpi risultano essere  $O_{1,2}$  ed  $O_{1,3}$ , mentre il centro relativo del moto risultante di questi due corpi risulta essere  $O_{2,3}$ . Poiché nel moto di due corpi i centri assoluti e quello relativo devono essere allineati, l'asserto è dimostrato.

Si noti che se si fissano a priori tre centri assoluti e tre centri relativi soddisfacenti gli allineamenti tra due centri assoluti qualsiasi e il corrispondente centro relativo e l'allineamento tra i tre centri relativi, allora, fissata a priori la rotazione, per esempio  $\varphi_1$ , di uno dei tre corpi, sono deducibili in catena le altre due rotazioni, nell'esempio  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ . Precisamente,  $\varphi_1$  determina  $\varphi_2$  appoggiandosi sui punti  $O_1, O_{1,2}$  e  $O_2$  mentre  $\varphi_2$  determina  $\varphi_3$  appoggiandosi ai punti  $O_2, O_{2,3}$  e  $O_3$ . Le rotazioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_3$  sono senz'altro in armonia fra loro. Infatti lo

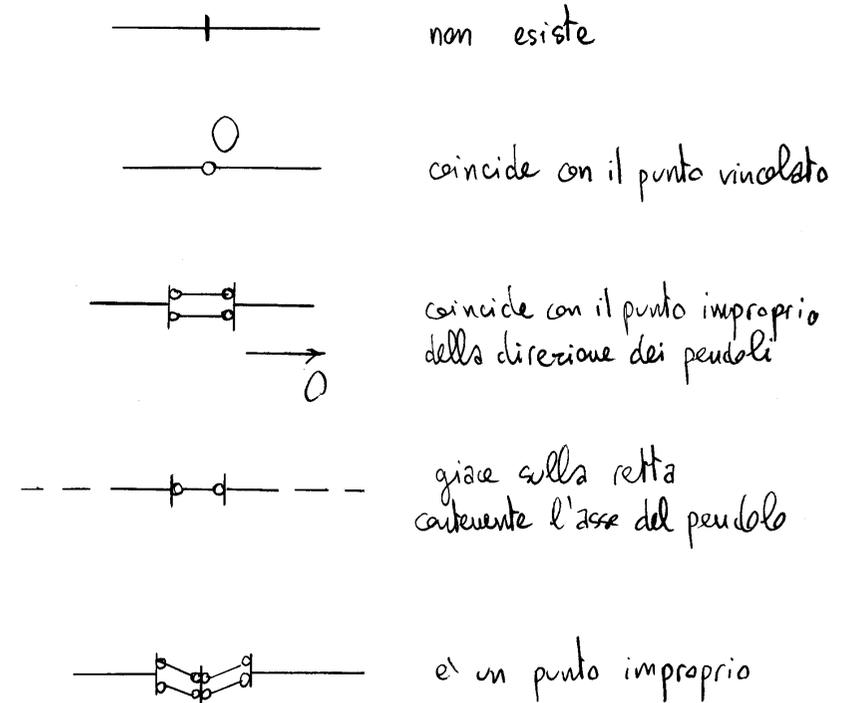
spostamento di  $O_{23}$  lungo l'allineamento dei centri relativi calcolato tramite  $\varphi_2$  vale  $\varphi_2 b_2$ , e tale quantità, per come è stata determinata  $\varphi_2$ , uguaglia  $\varphi_1 b_1$ , che rappresenta anche lo spostamento di  $O_{23}$  lungo l'allineamento dei centri relativi calcolato tramite  $\varphi_1$ .

**1.1.4 Vincoli e centri di rotazione**

Vincoli esterni e centri assoluti:



Vincoli interni e centri relativi:



Se la supposta esistenza di un centro assoluto di rotazione di un corpo conduce ad una contraddizione (per es. deve coincidere con due punti distinti del piano) allora il corpo non può subire moti rigidi.

Se il centro relativo è vincolato a coincidere con punti diversi del piano, l'unico moto possibile dei due corpi è un moto rigido complessivo.

Se i vincoli escludono l'allineamento dei tre centri relativi corrispondenti al moto di tre corpi, i tre corpi possono, al più, subire un moto rigido complessivo.

Se due centri assoluti coincidono deve coincidere con questi anche il corrispondente centro relativo, altrimenti il moto relativo non è possibile.

Se un centro assoluto e un corrispondente centro relativo coincidono, deve coincidere anche il secondo centro assoluto, altrimenti il secondo corpo non può subire moto rigido.

Se i possibili centri assoluti e relativi vengono determinati in modo unico, fissata la rotazione (o la traslazione) di uno dei corpi restano automaticamente determinate le rotazioni (o traslazioni) degli altri corpi, ovvero l'insieme di corpi rigidi possiede un grado di libertà (o di mobilità). Se invece la posizione dei centri assoluti e relativi dipendono da un parametro si hanno due gradi di libertà, e così via.

Schematicamente, dati i tre corpi I, II e III, valgono quindi le relazioni:

$$O_1 = O_{12} \neq O_2 \Rightarrow \text{II fisso,}$$

$$O_1 = O_2 \neq O_{12} \Rightarrow \text{non c'è moto relativo tra I e II,}$$

$$O_1, O_2 \text{ e } O_{12} \text{ distinti e non allineati} \Rightarrow \text{I e II fissi,}$$

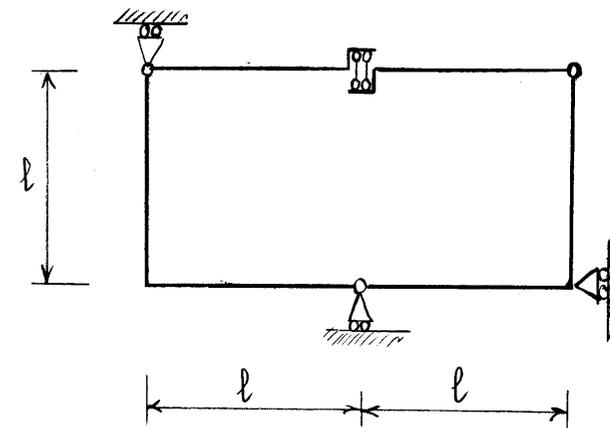
$$O_{12}, O_{13} \text{ e } O_{23} \text{ distinti e non allineati} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{non c'è moto relativo tra I, II e III,}$$

$$O_{12} = O_{13} \neq O_{23} \Rightarrow \text{non c'è moto relativo tra II e III.}$$

### 1.1.5 Esempio 1

Analizzare cinematicamente il seguente sistema di travi:



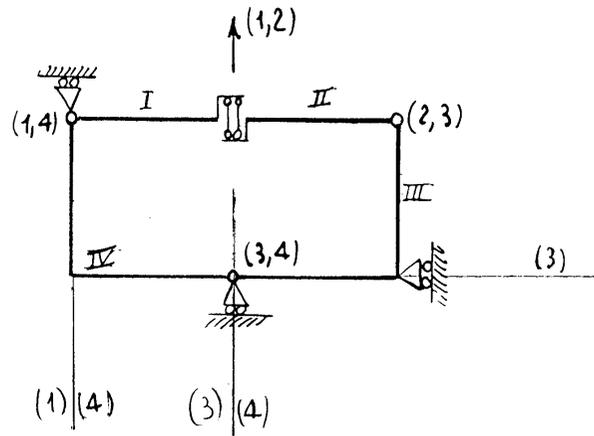
$$g = 4 \times 3 = 12$$

$$v = 3 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 11$$

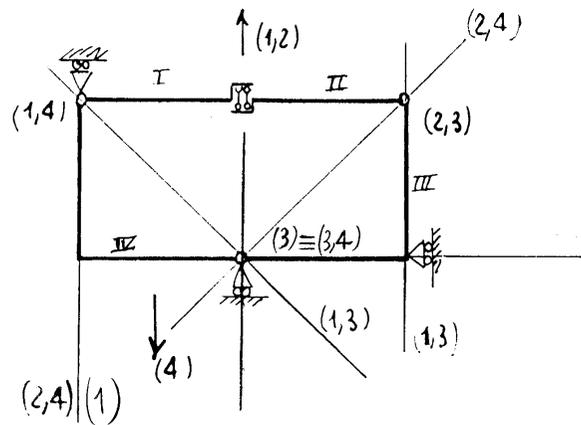
$\uparrow$  carrello  
 $\uparrow$  cerniera interna  
 $\uparrow$  doppio pendolo

$$g - v = 1 \Rightarrow l - i = 1$$

Vediamo di calcolare  $\varphi$  attraverso la determinazione dei centri assoluti e relativi.

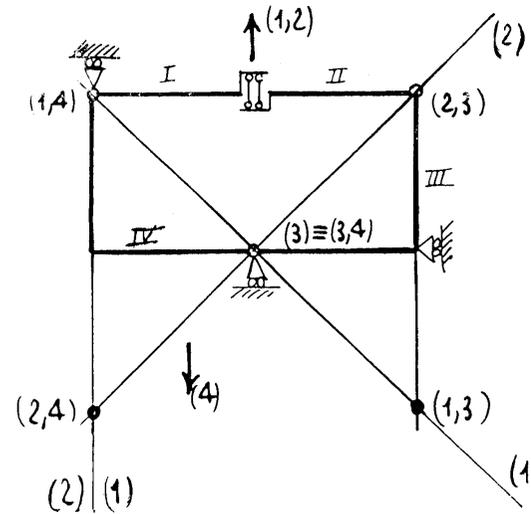


condizioni dovute ai vincoli



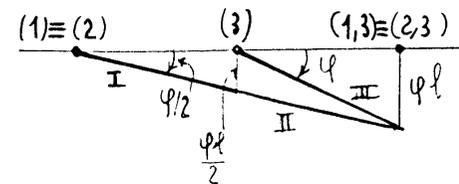
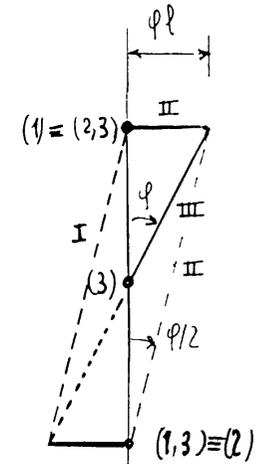
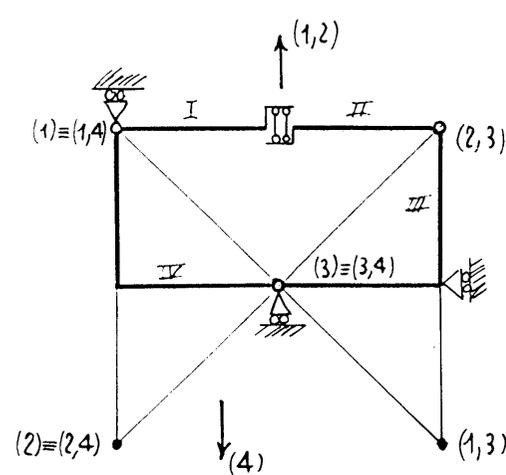
Allineamento dei centri relativi:

- (1,2), (1,4), (2,4)
- (3,4), (2,3), (2,4)
- (1,4), (3,4), (1,3)
- (1,2), (2,3), (1,3)



Allineamento dei centri assoluti e relativi:

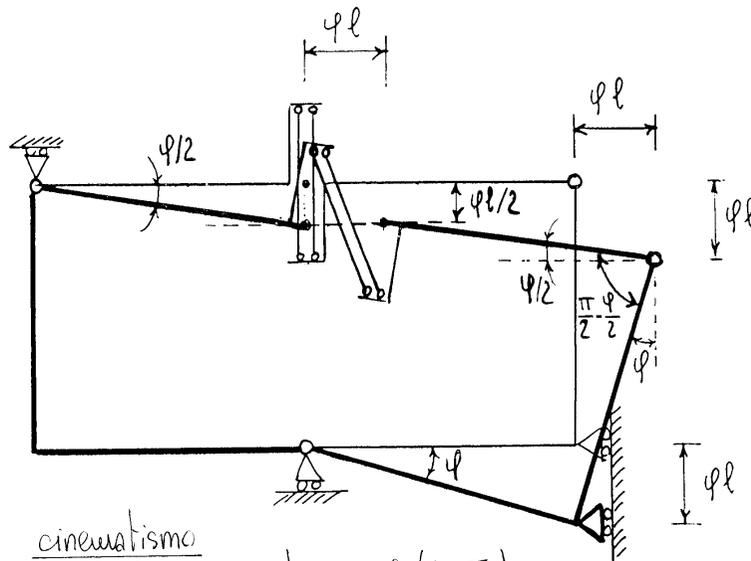
- (3), (2,3), (2)
- (3), (1,3), (1)
- (4), (2,4), (2)
- (4), (1,4), (1)



$$\left. \begin{aligned} (1) &\equiv (1,4) \\ (2) &\equiv (2,4) \\ (3) &\equiv (3,4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{trave IV fissa}$$

I centri assoluti e relativi sono univocamente determinati. La struttura è una volta labile e dunque:

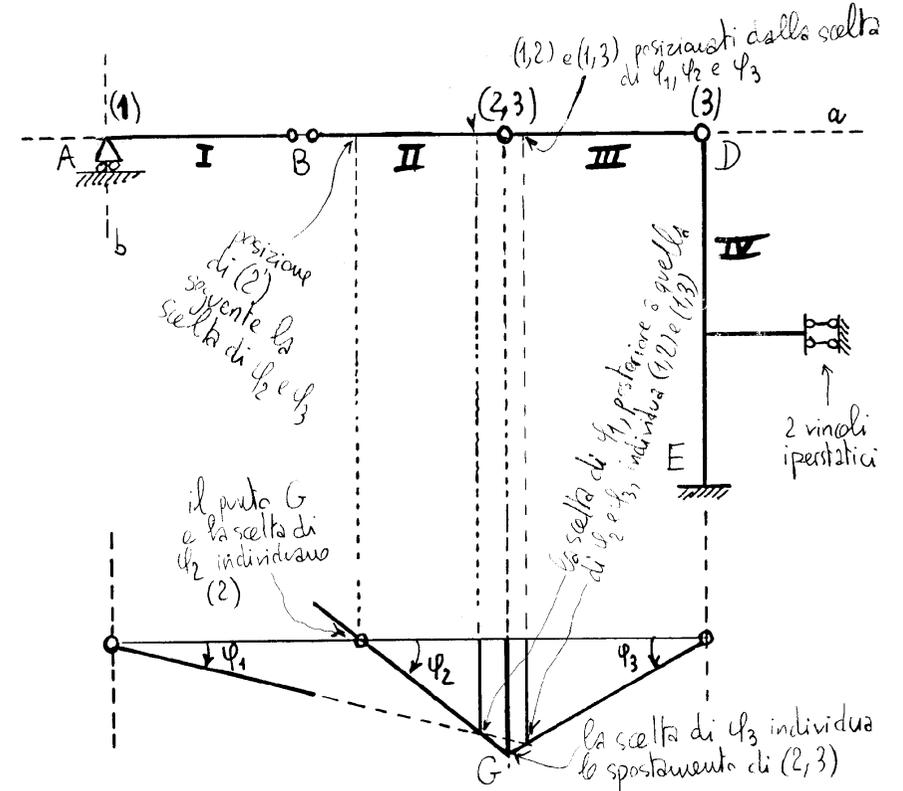
$$\left\{ \begin{aligned} l &= 1 \\ i &= 0 \end{aligned} \right.$$



cinematismo  
(parametro lagrangiano: rotazione  $\varphi$  di III)

### 1.1.6 Esempio 2

(2), (1,2) e (1,3) posizionati sulla retta (a)

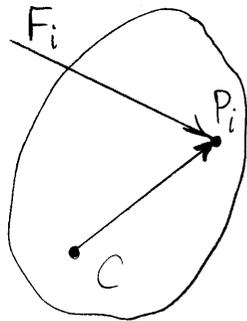


I parametri lagrangiani  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  individuano univocamente la configurazione e il sistema risulta quindi 3 volte labile e 2 volte iperstatico

$$g = 3 \times 4 = 12, \quad v = 11 \quad \Rightarrow \quad g - v = 1$$

$$l = 3, \quad l - i = 1 \quad \Rightarrow \quad i = 2$$

## 1.2 Il principio dei lavori virtuali per il corpo rigido libero



Spostamento virtuale

$$\underline{u} = \underline{u}_c + \underline{\varphi} \times (\underline{P} - \underline{C})$$

Uno spostamento virtuale rigido rappresenta la parte lineare di uno spostamento in accordo con i vincoli interni di rigidità (spostamenti cinematicamente ammissibili).

Lavoro virtuale esterno

$$\begin{aligned} L_e &= \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u} \\ &= \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u}_c + \sum_i \underline{F}_i \cdot \{ \underline{\varphi} \times (\underline{P}_i - \underline{C}) \} \\ &= (\sum_i \underline{F}_i) \cdot \underline{u}_c + \left\{ \sum_i (\underline{P}_i - \underline{C}) \times \underline{F}_i \right\} \cdot \underline{\varphi} . \end{aligned}$$

Si ottiene l'espressione:

$$L_e = \underline{R} \cdot \underline{u}_c + \underline{M} \cdot \underline{\varphi} .$$

dove  $\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i$  e  $\underline{M} = \sum_i (\underline{P}_i - \underline{C}) \times \underline{F}_i$  sono risultante e momento risultante del dato sistema di forze.

Quindi, se  $\underline{u}$  è uno spostamento virtuale rigido e  $\underline{F}_i$  un sistema di forze equilibrato, il lavoro esterno è nullo:

$$\underline{R} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{M} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad L_e = 0 .$$

Inversamente:

$$\left. \begin{array}{l} L_e = 0 \\ \text{per ogni spostamento} \\ \text{virtuale rigido} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{R} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{M} = \underline{0} ,$$

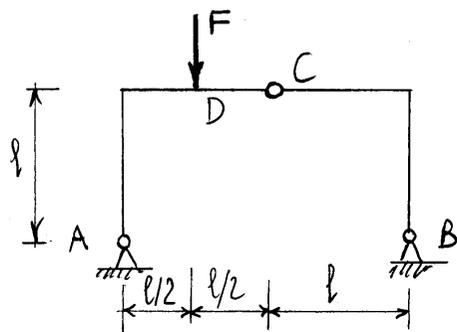
cioè se, dato un sistema  $\underline{F}_i$  di forze applicate, il lavoro virtuale esterno è nullo per ogni spostamento virtuale rigido allora il sistema di forze è in equilibrio.

Infatti, se  $L_e = 0$  per ogni spostamento virtuale, risulta:

$$\underline{R} \cdot \underline{u}_c + \underline{M} \cdot \underline{\varphi} = 0$$

per ogni  $\underline{u}_c$  e  $\underline{\varphi}$ , e, poiché  $\underline{u}_c$  e  $\underline{\varphi}$  sono indipendenti fra loro, ne consegue immediatamente l'asserto.

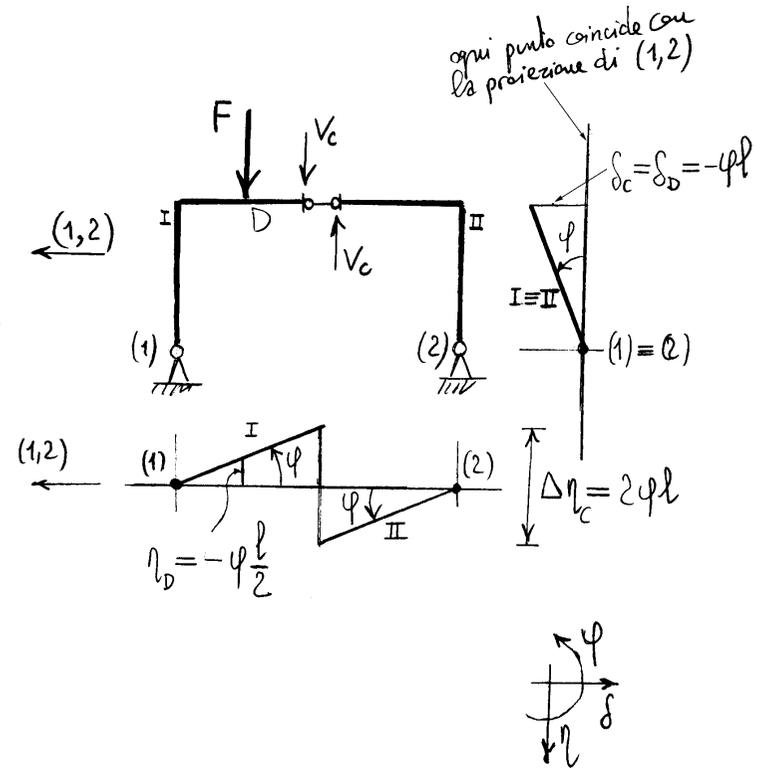
1.2.1 Esempio



$V_c$ ?

$H_A$ ?

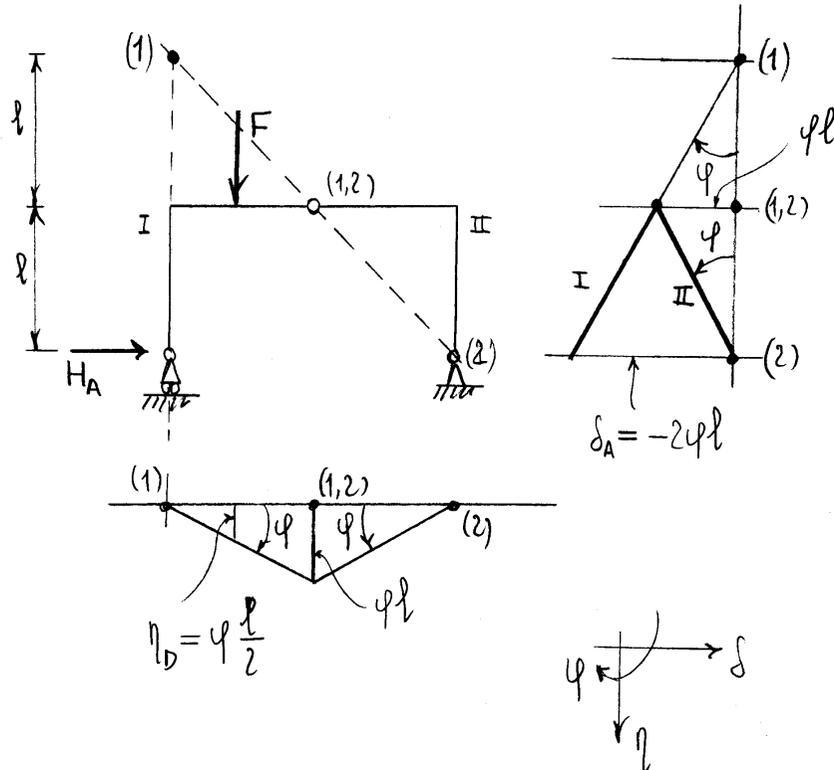
Calcolo di  $V_c$



$$L_e = F \eta_D - V_c \Delta \eta_c = -F \varphi \frac{l}{2} - V_c 2 \varphi l$$

$$L_e = 0 \implies V_c = -\frac{F}{4}$$

### Calcolo di $H_A$

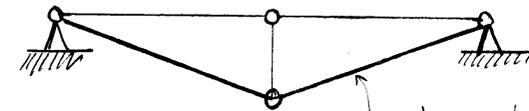
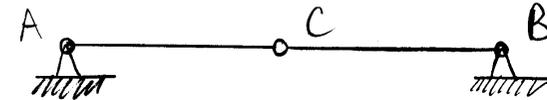


$$L_e = F \eta_D + H_A \delta_A = F \phi \frac{l}{2} - H_A 2\phi l$$

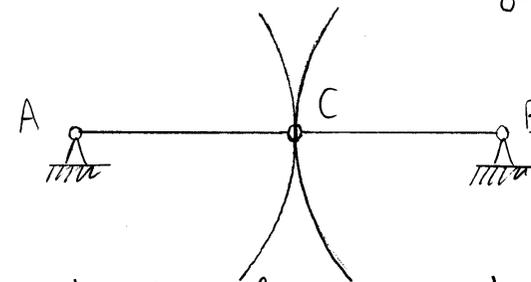
$$L_e = 0 \Rightarrow H_A = \frac{F}{4}$$

### 1.3 Labilità infinitesima

Esistono sistemi di travi rigide che possono subire un moto rigido infinitesimo, ma non un effettivo moto rigido. Esempio tipico:



moto rigido infinitesimo



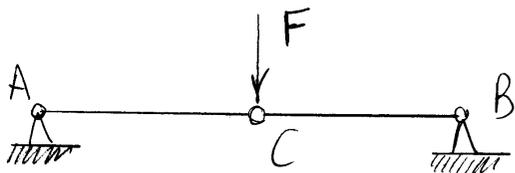
un moto rigido effettivo non e' possibile

se esiste un moto rigido possibile di AC, il punto C si muove sulla circonferenza per C di centro A

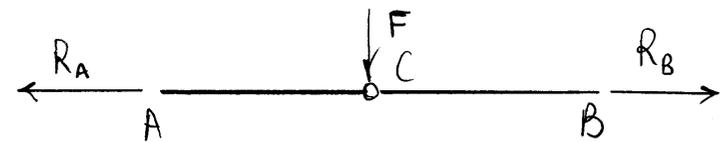
se esiste un moto rigido possibile di BC, il punto C si muove sulla circonferenza per C di centro B

Dal punto di vista dell'analisi condotta sulla base dei moti rigidi infinitesimi, la struttura è labile, ma ciò non toglie che, se le travi sono rigide, un moto rigido non è possibile.

Vediamo allora in qual senso tale struttura è labile. In una struttura propriamente labile, una forza avente la direzione di uno spostamento possibile mette in moto la struttura. Nel caso del nostro esempio, una forza siffatta è rappresentata da una forza verticale applicata in C.



Il fatto che tale forza mette in gioco la labilità infinitesima della struttura si riflette nella circostanza che le reazioni degli appoggi in A e in B non sono in grado di equilibrare la forza F.

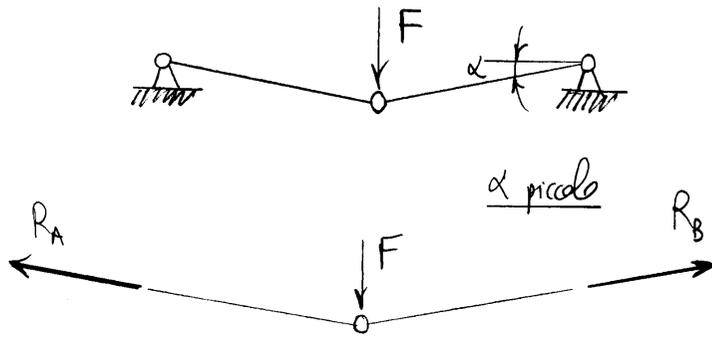


Infatti, per equilibrio alla rotazione del tratto AC intorno al punto C, la reazione  $R_A$  deve passare per C, così come la  $R_B$ . Le due reazioni devono essere orizzontali e non possono quindi equilibrare la forza F verticale.

Ciononostante, se le aste AC e BC sono rigide e i vincoli perfetti, il sistema non

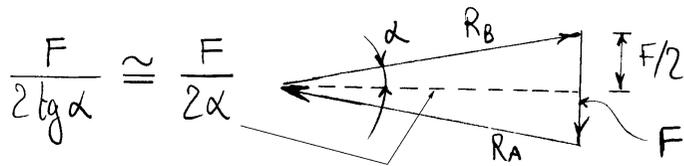
si mette in moto.

Vediamo di analizzare il sistema come limite di sistemi in cui le aste AC e BC sono inclinate.



Risulta:

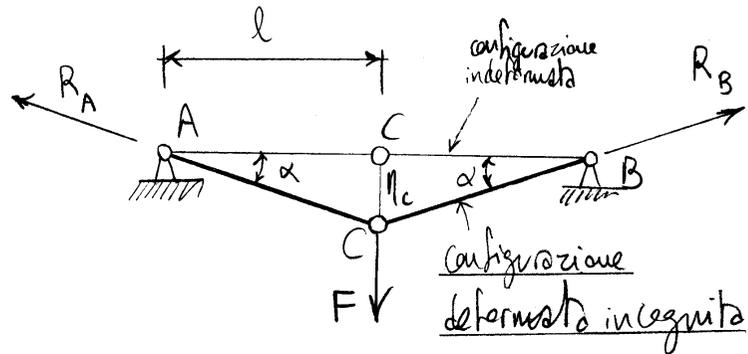
$$R_A = R_B = \frac{F}{2 \sin \alpha} \approx \frac{F}{2\alpha}$$



Ne consegue:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_A = \infty$$

Si arriva alla conclusione che per l'inclinazione delle aste tendente a zero le reazioni vincolari tendono all'infinito. Siamo, cioè, nella condizione in cui una cedevolezza assiale delle aste piccola a piacere provoca conseguenze cinematiche non trascurabili, essendo il suo effetto amplificato da una forza normale grande a piacere. Vediamo di analizzare la situazione in cui l'asta è deformabile assialmente. Siamo in un caso in cui l'equilibrio va scritto nella configurazione deformata (nella configurazione indeformata l'equilibrio non sussiste).



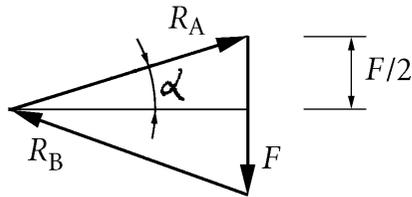
La configurazione indeformata è individuata dall'angolo  $\alpha$ .

L'allungamento dell'asta AC vale:

$$\Delta l = \frac{l}{\cos \alpha} - l = l \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right),$$

mentre la reazione  $R_A$  vale:

$$R_A = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$



Deve allora risultare:

$$\frac{R_A l}{EA} = \Delta l,$$

da cui:

$$(1 - \cos \alpha) \tan \alpha = \frac{F}{2EA}.$$

Se  $\alpha$  è piccolo può porsi:

$$\tan \alpha \approx \alpha, \quad 1 - \cos \alpha = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Dunque:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}.$$

Si possono quindi calcolare lo spostamento del punto C e la reazione  $R_A$ , che risultano:

$$\eta_c = \alpha l = l \sqrt[3]{\frac{F}{EA}},$$

$$R_A = \frac{F}{2\alpha}.$$

Si supponga che le aste siano costituite da due barre di ferro tondo di diametro  $\phi 20$  mm e lunghe 3.50 m. Siano inoltre  $F = 5000$  N ed  $E = 2.1 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>.

Si ottiene:

$$\alpha = 2.42^\circ,$$

$$\eta_c = 14.8 \text{ cm},$$

$$R_A = 59075 \text{ N}.$$

Siamo dunque arrivati alla conclusione che il moto rigido infinitesimo viene effettivamente innesco da una cedevolezza piccola a piacere.

Dal punto di vista delle strutture deformabili tale moto è quindi un moto deformativo effettivo. Non

solo, ma si può anche concludere che forze che mettono in gioco la labilità (infinitesima) del sistema vengono equilibrate, nella configurazione deformata, da reazioni che tendono all'infinito al tendere a zero della cedevolezza, indipendentemente dall'entità delle forze applicate. È evidente che una tale situazione statica è, normalmente, da evitare. La labilità (infinitesima) del sistema fornisce le informazioni necessarie ad evitare tali situazioni statiche precarie, o, comunque, ad affrontarle correttamente.

## 1.4 Problema cinematico per i sistemi spaziali di travi rigide

Si rivedono innanzitutto alcuni concetti relativi alla cinematica dei sistemi di corpi rigidi vincolati.

Il sistema è detto labile se sono ammissibili moti di parti del sistema. Il numero "l" di parametri logaritmici che individuano i possibili moti del sistema è detto grado di labilità. L'individuazione dei possibili centri assoluti e relativi di rotazione di un sistema piano permette di stabilire il numero "l" dei gradi di labilità.

Il numero "i" di vincoli semplici che possono essere rimossi senza alterare il grado di labilità del sistema è detto grado di iperstaticità. Se un sistema ha grado di iperstaticità diverso da zero viene detto iperstatico. Un sistema può essere contemporaneamente labile e iperstatico.

I gradi di libertà "g" delle parti rigide costituenti il sistema, considerate prive di vincoli (interni ed esterni), valgono:

$$g = \begin{cases} 6n & \text{per un sistema spaziale} \\ 3n & \text{per un sistema piano} \end{cases}$$

dove n è il numero delle parti costituenti il sistema. Detto v il numero di vincoli semplici, il numero di vincoli semplici efficaci vale  $v-i$  e quindi

$$g - (v - i) = l,$$

da cui si ottiene:

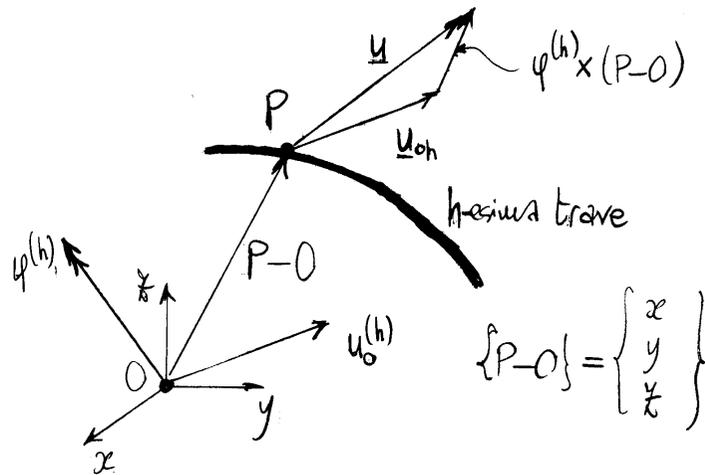
$$v - g = i - l.$$

Se  $i = l = 0$  il sistema viene detto isostatico. Condizione necessaria (ma non sufficiente) di isostaticità:

$$v = g.$$

### 1.4.1 Matrice cinematica

Si consideri un sistema di  $n$  travi rigide e si consideri un sistema di riferimento  $Oxyz$ .



La  $h$ -esima trave possiede, come corpo rigido, 6 gradi di libertà. Si pensi il punto  $O$  rigidamente connesso alla  $h$ -esima trave. Lo spostamento di un punto  $P$  connesso rigidamente alla  $h$ -esima trave si può allora esprimere nella forma:

$$\underline{u} = \underline{u}_0^{(h)} + \varphi^{(h)} \times (P-O),$$

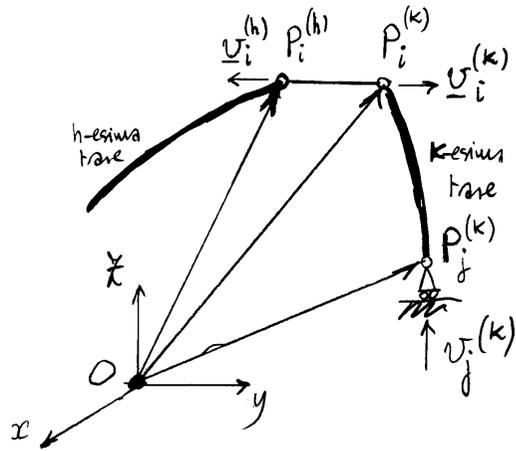
dove  $\underline{u}_0^{(h)}$  è lo spostamento del punto  $O$  pensato connesso rigidamente alla trave  $h$ -esima e  $\varphi^{(h)}$  è il vettore rotazione della trave  $h$ -esima, indipendente da  $O$ .

Si consideri il generico vincolo (rigido) semplice  $i$ -esimo esterno od interno, agente sulla trave  $h$  nel punto  $P_i^{(h)}$ . Sia  $\underline{v}_i^{(h)}$  il versore della direzione dello spostamento generalizzato (spostamento o rotazione) impedito dal vincolo.

Se il vincolo  $i$ -esimo è interno, agente sulle travi  $h$ -esima e  $k$ -esima in corrispondenza dei punti  $P_i^{(h)}$  e  $P_i^{(k)}$ , il verso dei versori  $\underline{v}_i^{(h)}$  e  $\underline{v}_i^{(k)}$  verrà scelto in modo tale che risulti:

$$\underline{v}_i^{(k)} = -\underline{v}_i^{(h)}.$$

Si svincolino ora le diverse travi componenti il



sistema. Se con  $\gamma_i^{(h)}$  si indica il modulo dello spostamento generalizzato del punto  $P_i^{(h)}$  nella direzione e nel verso di  $\underline{v}_i^{(h)}$ , risulta:

$$(1a) \quad \gamma_i^{(h)} = \left\{ \underline{u}_0^{(h)} + \varphi^{(h)} \times (P_i^{(h)} - O) \right\} \cdot \underline{v}_i^{(h)},$$

se  $\underline{v}_i^{(h)}$  rappresenta uno spostamento, oppure:

$$(1b) \quad \gamma_i^{(h)} = \underline{\varphi}^{(h)} \cdot \underline{v}_i^{(h)},$$

se  $\underline{v}_i^{(h)}$  rappresenta una rotazione.

Detto  $\underline{r}$  il vettore degli spostamenti (generalizzati) impediti dai vincoli, di dimensione pari al numero  $\nu$  dei vincoli,

risulta:

$$(2a) \quad \gamma_i = \gamma_i^{(h)},$$

se il vincolo  $i$ -esimo è esterno (applicato alla trave  $h$ -esima), oppure:

$$(2b) \quad \gamma_i = \gamma_i^{(h)} + \gamma_i^{(k)},$$

se il vincolo  $i$ -esimo è interno (applicato alle travi  $h$ -esima e  $k$ -esima).

Nota che se il vincolo  $i$ -esimo è interno,  $\gamma_i \underline{v}_i^{(h)}$  rappresenta lo spostamento relativo di  $h$  rispetto a  $k$  e viceversa per  $\gamma_i \underline{v}_i^{(k)}$ .

Sia poi  $\underline{s}$  il vettore degli spostamenti indipendenti (Lagrangiane) del sistema svincolato, di dimensione  $g = 6n$ :

$$\underline{s} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{s}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(h)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(n)} \end{array} \right\},$$

dove il generico vettore  $\underline{s}^{(h)}$ , di dimensione 6, contiene le 3 componenti dello spostamento  $\underline{u}_0^{(h)}$  e le tre componenti della rotazione  $\underline{\varphi}^{(h)}$ :

$$\underline{s}^{(h)} = \begin{Bmatrix} u_{01}^{(h)} \\ u_{02}^{(h)} \\ u_{03}^{(h)} \\ \varphi_1^{(h)} \\ \varphi_2^{(h)} \\ \varphi_3^{(h)} \end{Bmatrix}.$$

Poiché le equazioni (2) sono lineari, possono allora essere scritte in forma algebrica nella forma seguente:

$$(3) \quad \underline{r} = \underline{A} \underline{s},$$

dove la matrice  $\underline{A}$ , di dimensione  $v \times g$ , è detta matrice cinematica.

#### 1.4.2 Condizione di non labilità di un sistema di travi

Nel sistema vincolato  $\underline{r} = \underline{0}$ . La (3) rappresenta allora un sistema omogeneo di  $v$  equazioni nelle  $g$  incognite  $\underline{s}$ .

Si può allora affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni

$$\underline{A} \underline{s} = \underline{0},$$

abbia  $\underline{s} = \underline{0}$  quale unica soluzione, ovvero sia affinché il sistema di travi non sia labile, è che la caratteristica  $C_A$  della matrice  $\underline{A}$  sia uguale a  $g$ :

$$C_A = g.$$

Poiché  $v \geq C_A$  è evidente che deve necessariamente essere  $v \geq g$  affinché il sistema di travi non sia labile.

Le righe di  $\underline{A}$  rappresentano i vincoli. Se una riga di  $\underline{A}$  è ottenuta per combinazione lineare delle altre righe, il corrispondente vincolo è inessenziale (cioè è un vincolo iperstatico). Il numero

$$\begin{array}{c} \nu \\ \left[ \begin{array}{c} \underline{A} \\ \hline \end{array} \right] \\ g \end{array} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \underline{s} \\ \hline \end{array} \right\} \\ g \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \underline{0} \\ \hline \end{array} \right\} \\ g \end{array}$$

di righe di  $\underline{A}$  linearmente dipendenti coincide quindi con il numero  $i$  di vincoli iperstatici. La caratteristica della matrice  $\underline{A}$  rappresenta il numero di righe linearmente indipendenti:

$$c_A = \nu - i.$$

Ne risulta che il grado di iperstaticità  $i$  vale:

$$i = \nu - c_A,$$

e che il sistema di travi non è labile se e solo se:

$$g = \nu - i.$$

Se  $g > \nu - i = c_A$  il numero  $g - c_A$  rappresenta il numero di soluzioni  $\underline{s} \neq \underline{0}$  linearmente indipendenti

del sistema omogeneo  $\underline{A} \underline{s} = \underline{0}$ , cioè rappresenta i gradi di labilità del sistema:

$$l = g - c_A = g - (\nu - i).$$

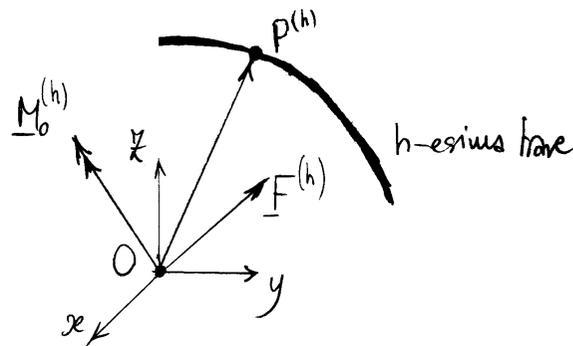
### 1.5 Problema statico per i sistemi spaziali di travi rigide

Si rivedono innanzitutto alcuni concetti relativi alla statica dei sistemi di corpi rigidi vincolati.

Il sistema è detto equilibrato se esiste un sistema di reazioni vincolari ammissibile equilibrante le forze esterne. Un sistema equilibrato è detto staticamente determinato se le reazioni vincolari sono univocamente determinate dalle equazioni di equilibrio, in caso contrario il sistema è detto staticamente indeterminato.

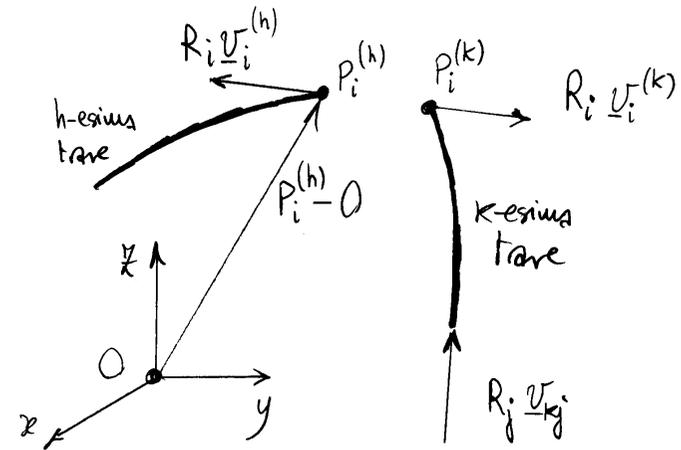
### 1.5.1 Matrice statica

Si consideri ancora un sistema di  $n$  travi rigide e un sistema di riferimento  $Oxyz$ .



Siano  $\underline{F}^{(h)}$  e  $\underline{M}_o^{(h)}$  rispettivamente risultante e momento risultante rispetto al polo  $O$  delle forze esterne applicate alla  $h$ -esima trave. Detta poi  $R_i$  la componente della  $i$ -esima reazione, in direzione e verso di  $\underline{v}_i^{(h)}$ , le equazioni vettoriali di equilibrio della trave  $h$ -esima si scrivano:

$$(4) \begin{cases} \underline{F}^{(h)} + \sum_{R_i \text{ forza}} R_i \underline{v}_i^{(h)} = \underline{0} \\ \underline{M}_o^{(h)} + \sum_{R_i \text{ coppia}} R_i \underline{v}_i^{(h)} + \sum_{R_i \text{ forza}} (P_i^{(h)} - O) \times R_i \underline{v}_i^{(h)} = \underline{0} \end{cases}$$



dove le sommatorie sono limitate ai vincoli che agiscono sulla  $h$ -esima trave.

Si introducano il vettore delle reazioni vincolari (generalizzate):

$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_v \end{Bmatrix}$$

di dimensione  $v$ , pari al numero di vincoli semplici esterni ed interni, e il vettore delle forze applicate (generalizzate), di dimensione  $g = 6n$ , pari ai gradi di libertà del sistema svinco-

lato:

$$\underline{S} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{S}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{S}^{(h)} \\ \vdots \\ \underline{S}^{(n)} \end{array} \right\},$$

dove il vettore  $\underline{S}^{(h)}$ , di dimensione 6, contiene le componenti della risultante e del momento risultante relativi alla trave h-esima:

$$\underline{S}^{(h)} = \left\{ \begin{array}{c} F_x^{(h)} \\ F_y^{(h)} \\ F_z^{(h)} \\ M_{0x}^{(h)} \\ M_{0y}^{(h)} \\ M_{0z}^{(h)} \end{array} \right\}.$$

Dalla (4) si ottiene allora:

$$(5) \quad \underline{B} \underline{R} + \underline{S} = \underline{0},$$

dove la matrice  $\underline{B}$ , di dimensione  $g \times v$ , è detta matrice statica.

### 1.5.2 Condizione di equilibrio di un sistema di travi

La (5) rappresenta un sistema di  $g$  equazioni nelle  $v$  incognite  $\underline{R}$  e di termine noto il vettore  $-\underline{S}$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni (5) nelle incognite  $\underline{R}$  ammetta soluzione, ovvero affinché il sistema di travi sia equilibrato sotto l'azione delle forze  $\underline{S}$ , è che la caratteristica  $c_B$  di  $\underline{B}$  coincida con la caratteristica  $c_0$  della matrice  $\underline{B}_0$ , di dimensione  $g \times (v+1)$ , che si ottiene dalla  $\underline{B}$  orlandola con il vettore  $\underline{S}$ :

$$c_B = c_0.$$

$$\underline{B}_0 \equiv \left[ \begin{array}{c|c} \underline{B} & \underline{S} \\ \hline \nu & 1 \end{array} \right] g$$

## 1.6 Dualità statico cinematica

Vogliamo ora mostrare che :

$$\underline{B} = \underline{A}^T .$$

Infatti siano  $\underline{R}$  e  $\underline{s}$  due vettori qualunque e si consideri il sistema di travi svincolate. Se si pone:

$$(6) \quad \begin{aligned} \underline{S} &= -\underline{B} \underline{R} , \\ r &= \underline{A} \underline{s} , \end{aligned}$$

il sistema di forze  $\underline{R}$ ,  $\underline{S}$  è equilibrato e il sistema di spostamenti  $r$ ,  $s$  è congruente per il sistema svincolato. Quindi, per il principio dei lavori virtuali applicato alle singole travi svincolate, deve essere:

$$L_e + L_R = 0 ,$$

dove  $L_e$  rappresenta il lavoro di tutte le forze

esterne applicate :

$$L_e = \underline{S}^T \underline{s} ,$$

mentre  $L_R$  rappresenta il lavoro delle reazioni vincolari:

$$L_R = \underline{R}^T r .$$

Tenere presente che se  $r \neq 0$  le reazioni vincolari lavorano e che il sistema  $s$ ,  $r$  è congruente per il sistema libero, ma non lo è, in generale, per quello vincolato.

Risulta, utilizzando le (6) :

$$\begin{aligned} L_e + L_R &= \underline{S}^T \underline{s} + \underline{R}^T r \\ &= -\underline{R}^T \underline{B}^T \underline{s} + \underline{R}^T \underline{A} \underline{s} \\ &= \underline{R}^T (\underline{A} - \underline{B}^T) \underline{s} = \underline{0} , \end{aligned}$$

per ogni vettore  $\underline{R}$  e  $\underline{s}$  e quindi  $\underline{A} - \underline{B}^T = \underline{0}$ ,  
come volevasi dimostrare.

Una conseguenza di tale proprietà è che

$$C_B = C_A = v - i.$$

Nel caso di struttura labile, cioè se:

$$g > v - i = C_B,$$

l'equilibrio dipende dalle forze  $\underline{S}$  (si ha equilibrio se  $\underline{S}$  è linearmente dipendente dai  $v-i$  vincoli efficaci).

Se invece il sistema di travi non è labile l'equilibrio è sempre possibile poiché in tal caso

$$g = C_A = v - i \leq v,$$

e la caratteristica della matrice orlata  $\underline{B}_0$  risulta

$$\begin{array}{c} g \\ \boxed{\underline{B}} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \left\{ \underline{R} \right\} \\ v \end{array} + \begin{array}{c} \left\{ \underline{S} \right\} \\ g \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ \underline{0} \right\} \\ g \end{array}$$

necessariamente pari a  $g$ , indipendentemente da  $\underline{S}$ .

Se  $i = 0$  e  $g = v$  il sistema di travi è isostatico e il sistema di equazioni (5) ammette una e una sola soluzione. Se invece  $i = 0$  e  $g > v$  il sistema di travi è labile e la (5) ammette una e una sola soluzione nel caso  $C_0 = C_B$ , mentre non ammette soluzioni se  $C_0 = C_B + 1$ .

Se  $i \neq 0$  e  $g = v - i$ , il sistema di travi è iperstatico e il sistema di equazioni (5) ammette  $\infty^i$  soluzioni, cioè il numero di soluzioni linearmente indipendenti (grado di indeterminazione statica) è pari al grado di iperstaticità  $i$ .

Se  $i \neq 0$  e  $g > v - i$  la struttura è labile e il sistema di equazioni (5) ammette  $\infty^i$  soluzioni se  $C_0 = C_B$

mentre non ammette soluzioni se  $C_0 = C_B + 1$ .

Riassumendo, la labilità di un sistema non dipende dalle forze applicate, ma solo dalla geometria del sistema. Un sistema labile può essere equilibrato se soggetto a un certo sistema di forze mentre può essere non equilibrato se soggetto ad un altro sistema di forze.

I sistemi non labili sono equilibrati per ogni sistema di forze. I sistemi isostatici sono sempre staticamente determinati mentre quelli iperstatici sono sempre staticamente indeterminati.

### 1.7 Il principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi di travi vincolate

Dato un sistema di travi rigide vincolato con vincoli (interni ed esterni) rigidi, bilaterali e privi di attrito, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un sistema di reazioni vincolari in equilibrio con un dato sistema di forze esterne applicate è che risulti:

$$L_e = 0,$$

per ogni spostamento virtuale del sistema (compatibile con i vincoli di rigidità e con i vincoli interni ed esterni) dove con  $L_e$  si intende il lavoro delle sole forze esterne applicate (in tal caso le reazioni vincolari non svolgono lavoro).

1) Necessità: Per ipotesi  $r = A s = 0$  e,

dunque, il lavoro  $L_R$  delle reazioni vincolari, che vale  $\underline{R}^T \underline{r}$ , e' nullo. Quindi  $L_e = 0$ .

2) Sufficienza

Sia quindi  $L_e = 0$  per ogni sistema di spostamenti congruente con i vincoli di rigidità e i vincoli interni ed esterni, quindi tale che  $\underline{r} = \underline{0}$ , cioè:

$$(7) \quad \underline{A} \underline{s} = \underline{0}.$$

Vogliamo mostrare allora che il sistema di forze e' equilibrato, cioè che in corrispondenza del sistema di forze esterne  $\underline{S}$  e' possibile determinare un sistema di reazioni  $\underline{R}$  tale che:

$$\underline{B} \underline{R} + \underline{S} = \underline{0}.$$

Per un noto teorema di algebra ciò e' senz'altro possibile se la matrice  $\underline{B}$  e la

matrice  $\underline{B}_0$  che si ottiene da  $\underline{B}$  orlandata con i termini noti  $\underline{S}$  hanno la stessa caratteristica.

$$\underline{B}_0 \equiv \left[ \begin{array}{c|c} & \underline{S} \\ \hline \underline{B} = \underline{A}^T & \end{array} \right]_g$$

$\nu + 1$

Risulta:

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \nu \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \underline{S}^T \\ \hline \underline{A} \end{array} \right]_g \left\{ \begin{array}{c} \underline{s} \\ \vdots \\ \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} \underline{S}^T \underline{s} \\ \hline \underline{A} \underline{s} \end{array} \right\}_{(\nu+1)}.$$

$\underline{B}_0^T$

Poiché  $\underline{S}^T \underline{s} = L_e = 0$  per ipotesi, e  $\underline{A} \underline{s} = \underline{0}$  per congruenza si ha in definitiva:

$$(8) \quad \underline{B}_0^T \underline{s} = \underline{0}.$$

Se le (7) e (8) sono intesi come due sistemi di equazioni omogenei nelle incognite  $\underline{s}$ , questi due sistemi hanno le stesse soluzioni (che sono gli spostamenti  $\underline{s}$  congruenti) e quindi  $\underline{B}^T$  e  $\underline{B}_0^T$  hanno la stessa caratteristica.

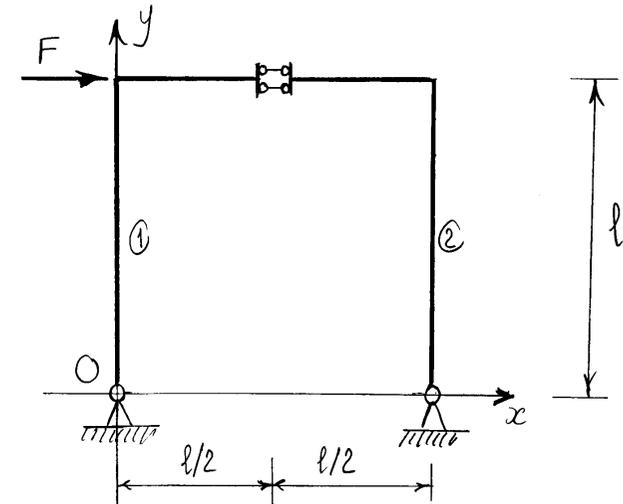
Questo per un altro teorema di algebra che dice:

“Una matrice  $\underline{M}$  e la sua ordinata  $\underline{M}_0$  che si ottiene aggiungendo un vettore riga alle righe di  $\underline{M}$ , hanno la stessa caratteristica se e solo se i due sistemi di equazioni omogenei associati:

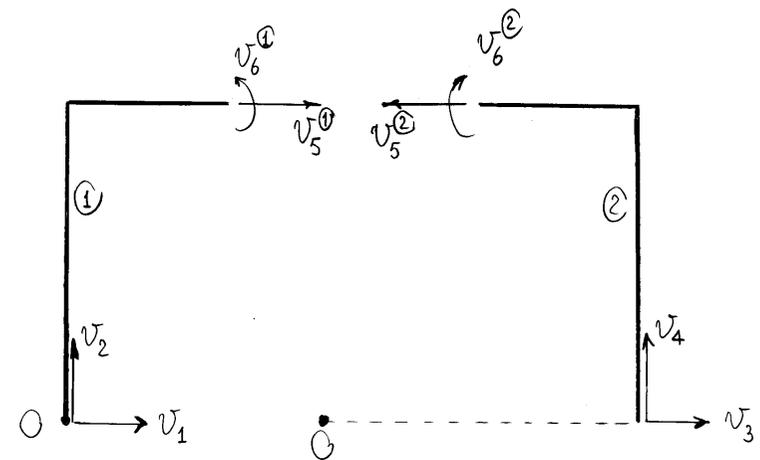
$$\underline{M} \underline{x} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{M}_0 \underline{x} = \underline{0},$$

nelle incognite  $\underline{x}$  hanno le stesse soluzioni.”

## 1.8 Esempio sull'analisi statica e cinematica



### Analisi cinematica



$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = u_x^{\textcircled{1}} \\ \gamma_2 = u_y^{\textcircled{1}} \\ \gamma_3 = u_x^{\textcircled{2}} \\ \gamma_4 = u_y^{\textcircled{2}} + \varphi^{\textcircled{2}} l \\ \gamma_5 = u_x^{\textcircled{1}} - \varphi^{\textcircled{1}} l - u_x^{\textcircled{2}} + \varphi^{\textcircled{2}} l \\ \gamma_6 = \varphi^{\textcircled{1}} - \varphi^{\textcircled{2}} \end{array} \right.$$

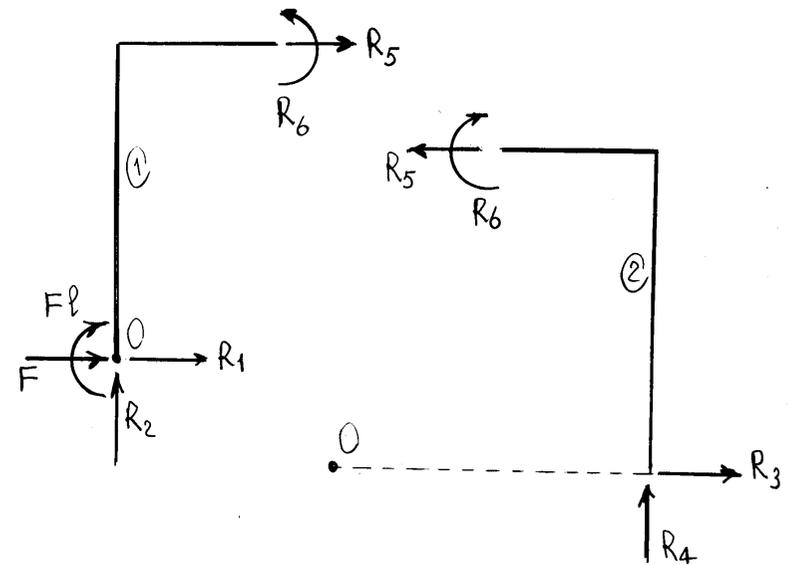
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 1 & 0 & -l & -1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^{\textcircled{1}} \\ u_y^{\textcircled{1}} \\ \varphi^{\textcircled{1}} \\ u_x^{\textcircled{2}} \\ u_y^{\textcircled{2}} \\ \varphi^{\textcircled{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Quale centro di riduzione è stato utilizzato il punto O, sia per il corpo rigido ① che per quello ②. Si noti che la matrice cinematica ha determinate nulle e che quindi il sistema di equazioni ammette soluzioni non nulle.

Infatti:

1<sup>a</sup> riga - 3<sup>a</sup> riga - 5<sup>a</sup> riga = (6<sup>a</sup> riga) l  
e dunque le righe della matrice cinematica non sono linearmente indipendenti.

### Analisi statica



Scrivendo le equazioni di equilibrio con riduzione il punto O per entrambi i corpi rigidi si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 + R_5 + F = 0 \\ R_2 = 0 \\ -R_5 l + R_6 - Fl = 0 \\ R_3 - R_5 = 0 \\ R_4 = 0 \\ R_4 l + R_5 l - R_6 = 0 \end{array} \right.$$

In notazioni matriciali:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & l & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ -Fl \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Resta dunque confermato che le matrici cinematica e statica sono l'una la trasposta dell'altra.



## Capitolo 2

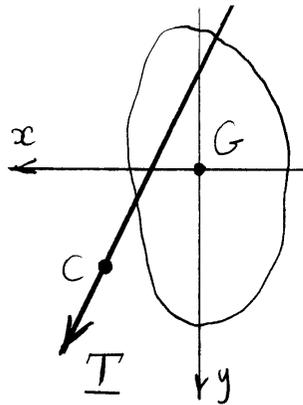
### Travi elastiche lineari

#### 2.1 Equazioni della teoria tecnica delle travi

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \Theta \underline{e}_z + \underline{\kappa}_f = \frac{d\varphi}{ds} \\ \varepsilon \underline{e}_z + \underline{\gamma}_c - \Theta \underline{e}_z \times (C - G) = \frac{du}{ds} - \varphi \times \underline{e}_z \end{cases},$$

poichè  $\underline{y} = \underline{y}_C - \Theta \underline{e}_z \times (C - G)$ .



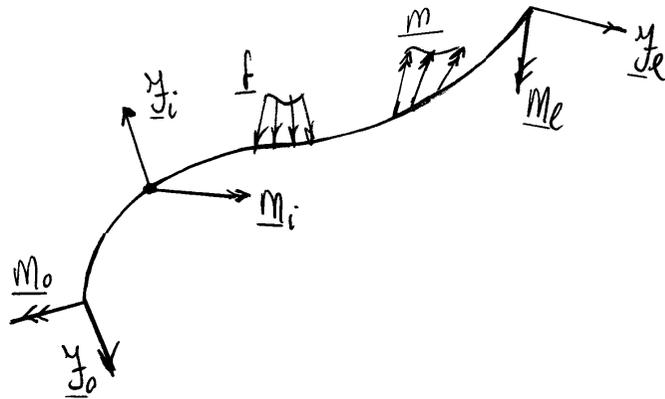
Si ottiene:

$$\begin{cases} \Theta = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{\kappa}_f = \frac{d\varphi}{ds} - \left( \frac{d\varphi}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z \\ \varepsilon = \frac{du}{ds} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{\gamma}_c = \frac{du}{ds} - \left( \frac{du}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z - \varphi \times \underline{e}_z \\ \quad + \left( \frac{d\varphi}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z \times (C - G) \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} (N \underline{e}_z + \underline{T}) + \underline{f} = \underline{0} \\ \frac{d}{ds} (M_c \underline{e}_z + (C - G) \times \underline{T} + \underline{M}_f) + \underline{m} + \underline{e}_z \times \underline{T} = \underline{0} \end{cases},$$

poichè  $M_c \underline{e}_z = M_C \underline{e}_z + (C - G) \times \underline{T}$ .



Equazioni di equilibrio al contorno

$$\begin{cases} N e_x + T \Big|_{s=0} = - \underline{Y}_0 \\ M_c e_x + (C-G) \times T + M_f \Big|_{s=0} = - \underline{M}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N e_x + T \Big|_{s=l} = \underline{Y}_e \\ M_c e_x + (C-G) \times T + M_f \Big|_{s=l} = \underline{M}_e \end{cases}$$

Equazioni di discontinuità

$$\begin{cases} (\Delta N e_x + \Delta T)_i + \underline{Y}_i = \underline{0} \\ (\Delta M_c e_x + (C-G) \times \Delta T + \Delta M_f)_i + \underline{M}_i = \underline{0} \end{cases}$$

Legami costitutivi

$$\begin{cases} N = EA \underline{\epsilon} \\ M_f = E J \underline{\kappa}_f \end{cases} \quad \begin{cases} M_c = G J_t \Theta \\ T = GA \underline{\chi}^{-1} \underline{\delta}_c \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{cases} L_{ve} = \int_l (f \cdot \underline{u} + m \cdot \underline{\varphi}) ds + \underline{Y}_0 \cdot \underline{u}_0 + \underline{M}_0 \cdot \underline{\varphi}_0 \\ \quad + \underline{Y}_l \cdot \underline{u}_l + \underline{M}_l \cdot \underline{\varphi}_l + \sum_i (\underline{Y}_i \cdot \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \underline{\varphi}_i) \\ L_{vi} = \int_l (N \underline{\epsilon} + M_f \cdot \underline{\kappa}_f + M_c \Theta + T \cdot \underline{\delta}_c) ds \end{cases}$$

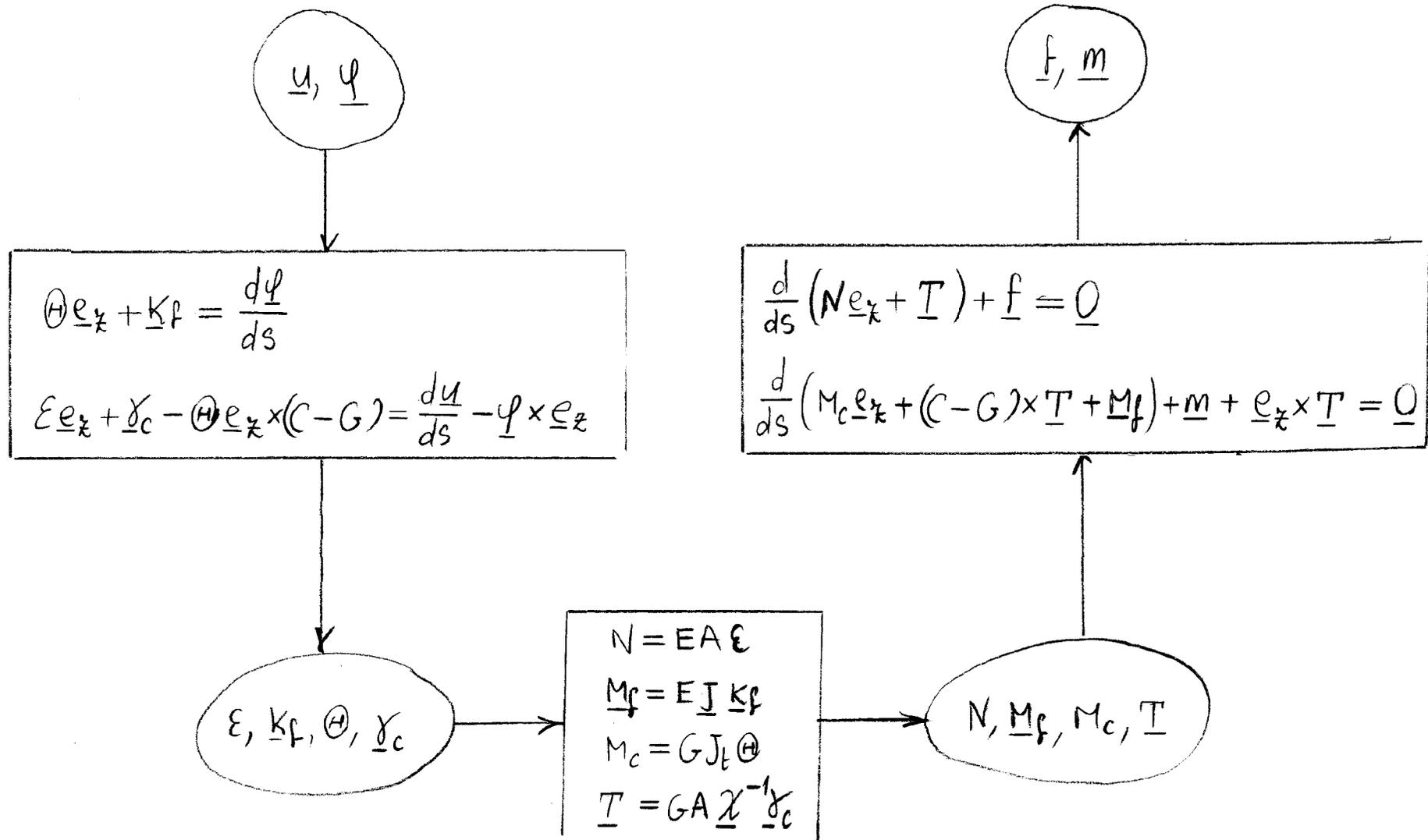
Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} ( EA \underline{\epsilon}^2 + E \underline{\kappa}_f \cdot J \underline{\kappa}_f + G J_t \Theta^2 + GA \underline{\delta}_c \cdot \underline{\chi}^{-1} \underline{\delta}_c )$$

Energia elastica complementare

$$\Psi = \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{1}{E} M_f \cdot J^{-1} M_f + \frac{M_c^2}{G J_t} + \frac{1}{GA} T \cdot \underline{\chi} T \right)$$

Diagramma teoria tecnica delle travi



## 2.2 Trave di Timoshenko

Trave piana elastica lineare ad asse rettilineo.

### Forze esterne

Forze distribuite :  $q, p$

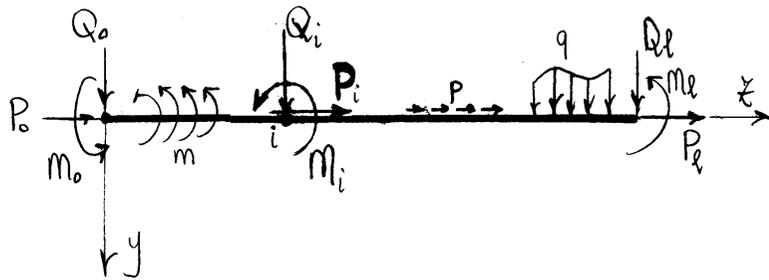
Momenti distribuiti :  $m$

Forze concentrate :  $Q, P$

Momenti concentrati :  $M$

Forze e momenti alle due estremità:

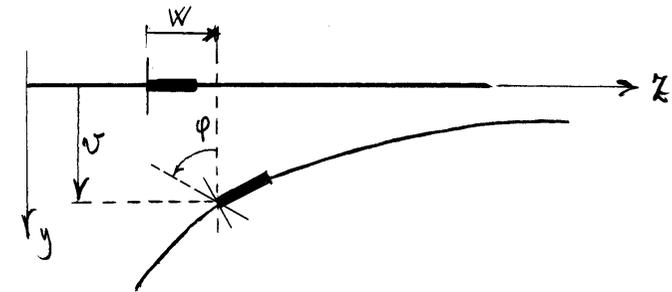
$Q_0, P_0, M_0; Q_\ell, P_\ell, M_\ell$



### Variabili cinematiche

Spostamenti dei punti della linea d'asse :  $v, w$

Rotazione della sezione :  $\varphi$



### Deformazioni

Dilatazione della linea d'asse :  $\varepsilon$

Curvatura flessionale :  $k$

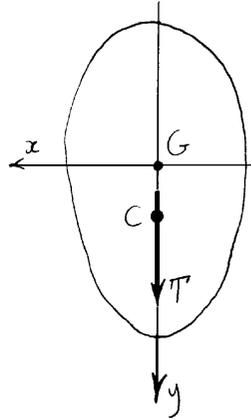
Scorrimento tra linea d'asse e sezione retta :  $\gamma$

### Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{dw}{dz} \\ k = \frac{d\varphi}{dz} \\ \gamma = \varphi + \frac{dv}{dz} \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m = 0 \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio al contorno:

$$\begin{cases} N(0) = -P_0 \\ T(0) = -Q_0 \\ M(0) = -M_0 \end{cases} \quad \begin{cases} N(l) = P_l \\ T(l) = Q_l \\ M(l) = M_l \end{cases}$$

Equazioni di discontinuità

$$\begin{cases} (\Delta N)_i + P_i = 0 \\ (\Delta T)_i + Q_i = 0 \\ (\Delta M)_i + m_i = 0 \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^l (Pw + qv + m\varphi) dz \\ &+ P_0 w_0 + Q_0 v_0 + M_0 \varphi_0 + P_l w_l + Q_l v_l + M_l \varphi_l \\ &+ \sum_i (P_i w_i + Q_i v_i + M_i \varphi_i) \end{aligned}$$

$$L_i = \int_0^l (N\varepsilon + MK + T\gamma) dz$$

Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} \left( EA\varepsilon^2 + EJK^2 + \frac{GA}{\chi} \gamma^2 \right)$$

Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} + \chi \frac{T^2}{GA} \right)$$

Equazioni di legame

$$\begin{cases} N = EA\varepsilon \\ M = EJK \\ T = \frac{GA}{\chi} \gamma \end{cases}$$

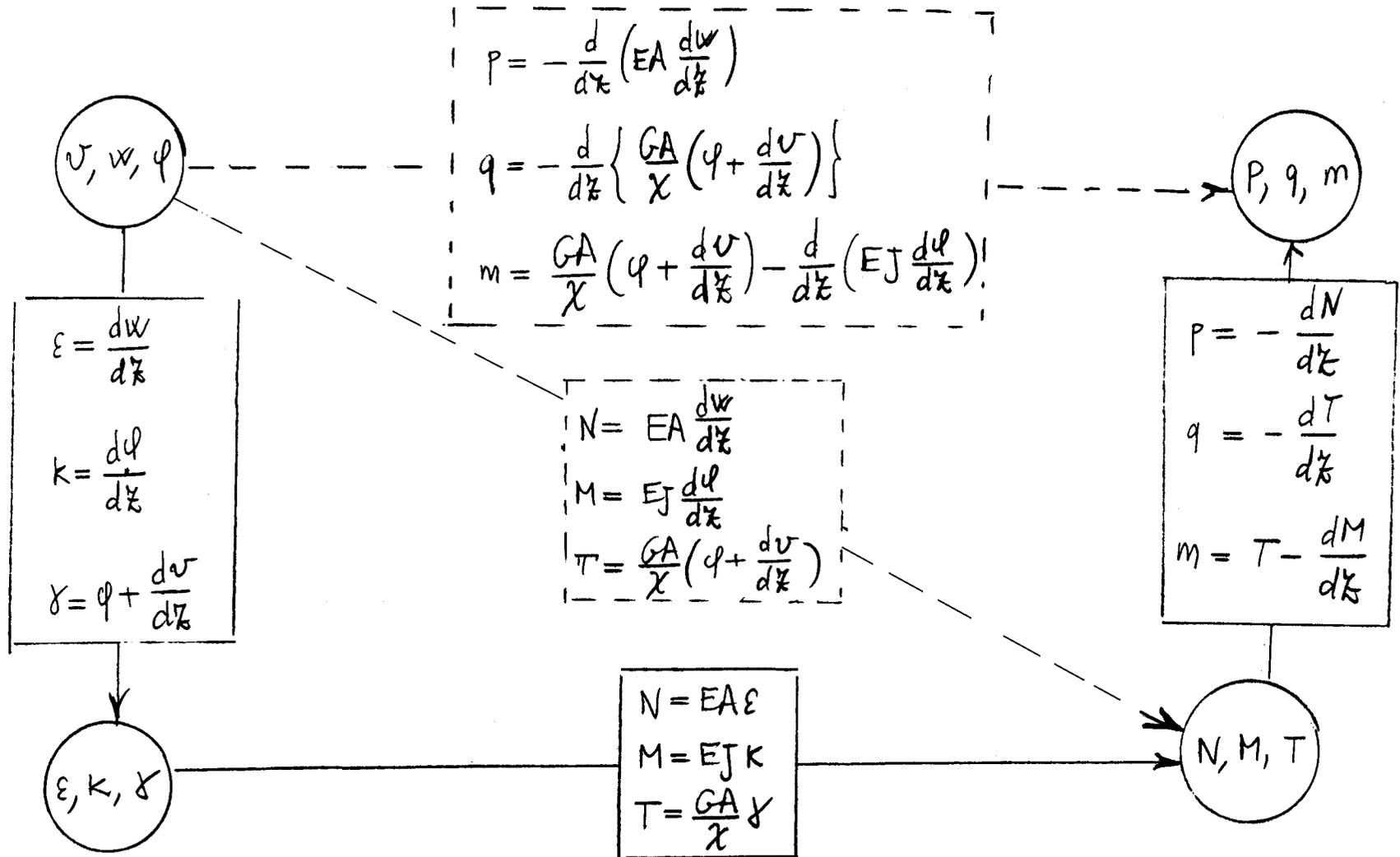
Equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left( EA \frac{dw}{dz} \right) + P = 0 \\ \frac{d}{dz} \left\{ \frac{GA}{\chi} \left( \varphi + \frac{dv}{dz} \right) \right\} + q = 0 \\ \frac{d}{dz} \left( EJ \frac{d\varphi}{dz} \right) - \frac{GA}{\chi} \left( \varphi + \frac{dv}{dz} \right) + m = 0 \end{cases}$$

Equazioni che permettono di imporre le condizioni al contorno

$$\begin{cases} N = EA \frac{dw}{dz} \\ M = EJ \frac{d\varphi}{dz} \\ T = \frac{GA}{\chi} \left( \varphi + \frac{dv}{dz} \right) \end{cases}$$

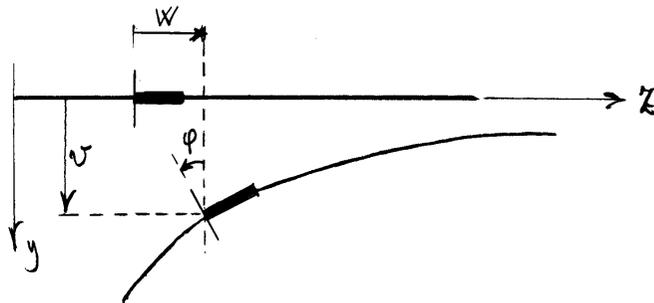
# Diagramma trave di Timoshenko



## 2.3 Trave piana inflessa

### Variabili cinematiche

Spostamenti dei punti della linea d'asse:  $v, w$



Vincolo interno sulla rotazione  $\varphi$  della sezione

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{dv}{dz}$$

### Deformazioni

Dilatazione della linea d'asse:  $\varepsilon$

Curvatura flessionale:  $\kappa$

### Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{dw}{dz} \\ \kappa = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2} \end{cases}$$

### Taglio in funzione dei momenti esterni ed interni

$$T = m + \frac{dM}{dz} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dz} = \frac{dm}{dz} + \frac{d^2M}{dz^2}$$

### Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{d^2M}{dz^2} + \frac{dm}{dz} + q = 0 \end{cases}$$

### Principio dei lavori virtuali

$$\begin{aligned} \int_0^l m \varphi dz &= - \int_0^l m \frac{dv}{dz} dz \\ &= \int_0^l \frac{dm}{dz} v dz - [m v]_0^l \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^l (q v + m \varphi) dz + Q_0 v(0) + Q_l v(l) &= \\ &= \int_0^l \left( q + \frac{dm}{dz} \right) v dz \\ &\quad + (Q_0 + m(0)) v(0) + (Q_l - m(l)) v(l) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^l (q v + p w + m \varphi) dz \\ &\quad + Q_0 v(0) + P_0 w(0) + M_0 \varphi(0) + Q_l v(l) + P_l w(l) + M_l \varphi(l) \\ &\quad + \sum_i (Q_i v_i + P_i w_i + M_i \varphi_i) = \\ &= \int_0^l \left\{ \left( q + \frac{dm}{dz} \right) v + p w \right\} dz \\ &\quad + (Q_0 + m(0)) v(0) + P_0 w(0) + M_0 \varphi(0) \\ &\quad + (Q_l - m(l)) v(l) + P_l w(l) + M_l \varphi(l) \\ &\quad + \sum_i (Q_i v_i + P_i w_i + M_i \varphi_i), \\ L_i &= \int_0^l (N \varepsilon + M \kappa) dz \end{aligned}$$

### Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} (EA \varepsilon^2 + EJ \kappa^2)$$

### Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right)$$

### Equazioni di legame

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon \\ M = EJ \kappa \end{cases}$$

Tali equazioni impongono  $N=0$  e  $M=0$  se  $\varepsilon=0$  e  $\kappa=0$ , cioè se la trave è indeformata. Questo significa che tali equazioni sono valide sotto l'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida con la configurazione naturale della trave, che rappresenta appunto quella configurazione in corrispondenza della quale le sollecitazioni interne si annullano.

Equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left( EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left( EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) = \left( q + \frac{dm}{dz} \right) \end{cases}$$

Equazioni che permettono di imporre le condizioni al contorno

$$\begin{cases} T - m = - \frac{d}{dz} \left( EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) \\ M = - EJ \frac{d^2v}{dz^2} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ N = EA \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

condizioni al contorno

$$\begin{cases} EA w'(0) = -P_0 \\ EJ v''(0) = M_0 \\ (EJ v'')'(0) = Q_0 + m_0 \\ EA w'(l) = P_l \\ EJ v''(l) = -M_l \\ (EJ v'')'(l) = -(Q_l - m_l) \end{cases}$$

Se  $m=0$  le equazioni divergono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left( EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left( EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = - \frac{d}{dz} \left( EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) \\ M = - EJ \frac{d^2v}{dz^2} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ N = EA \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

Travi elastiche inflesse omogenee a sezione costante ( $m=0$ )

$$\begin{cases} EA \frac{d^2w}{dz^2} + p = 0 \\ EJ \frac{d^4v}{dz^4} = q \end{cases}$$

Se  $p = q = 0$

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \end{cases}$$

In entrambi i casi :

$$\begin{cases} N = EA \frac{dw}{dz} \\ \varphi = -\frac{dv}{dz} \\ M = -EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ T = -EJ \frac{d^3 v}{dz^3} \end{cases}$$

# Diagramma trave piana inflessa ad asse rettilineo

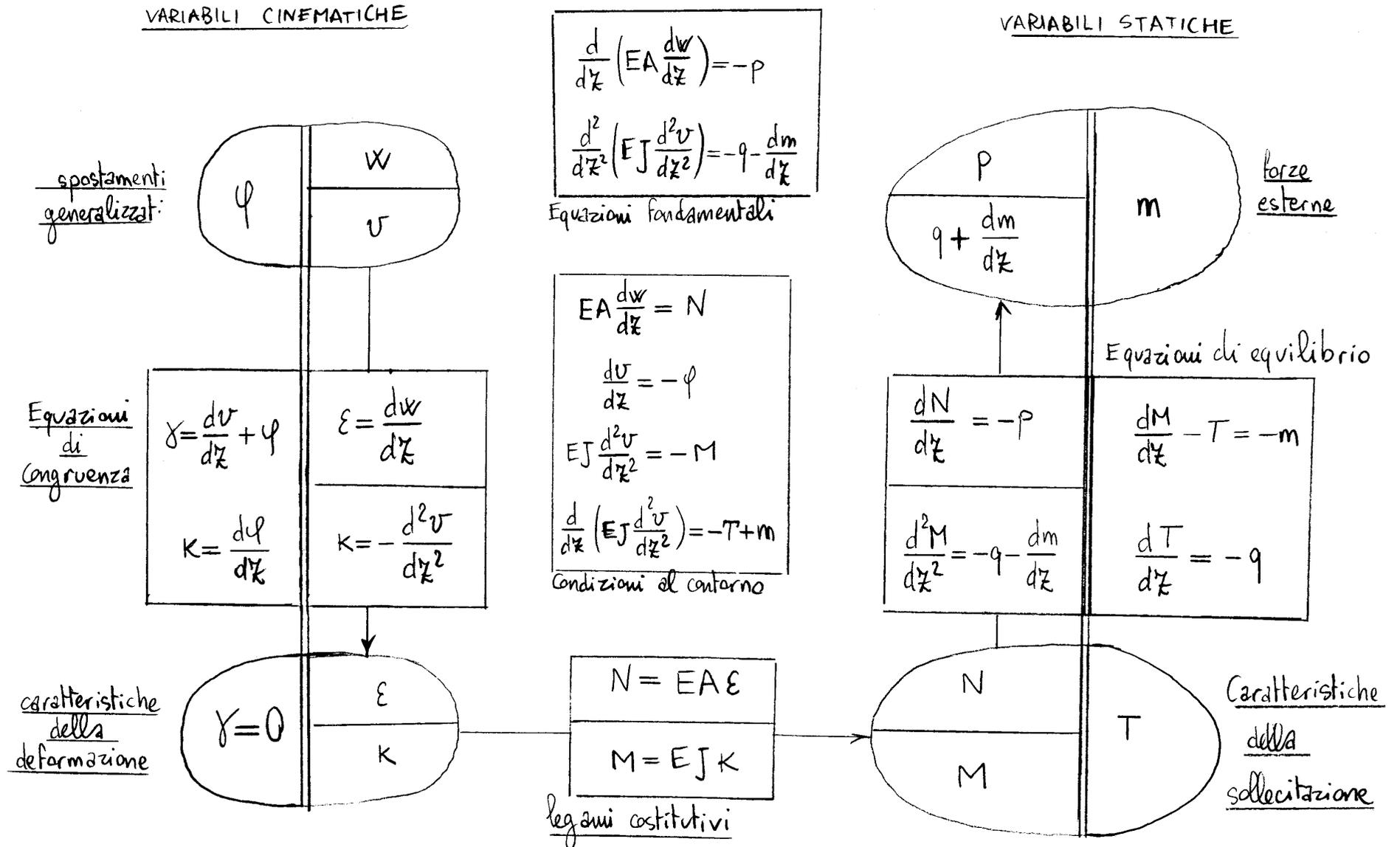


Diagramma relativo al problema dello sforzo assiale

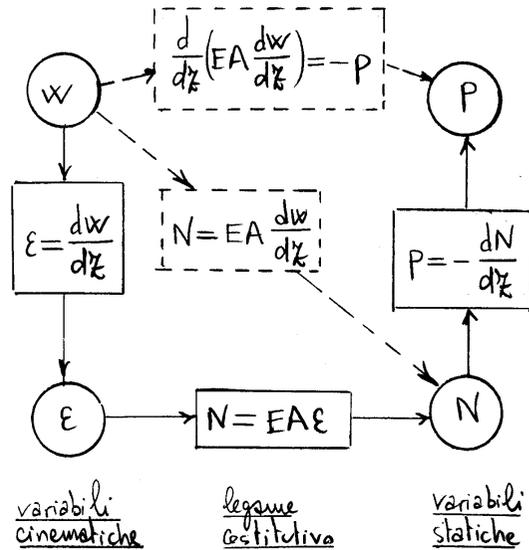
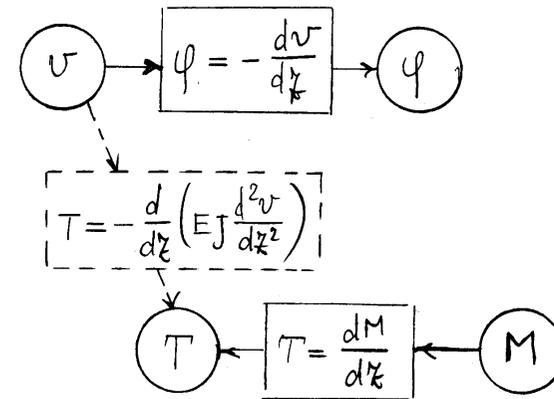
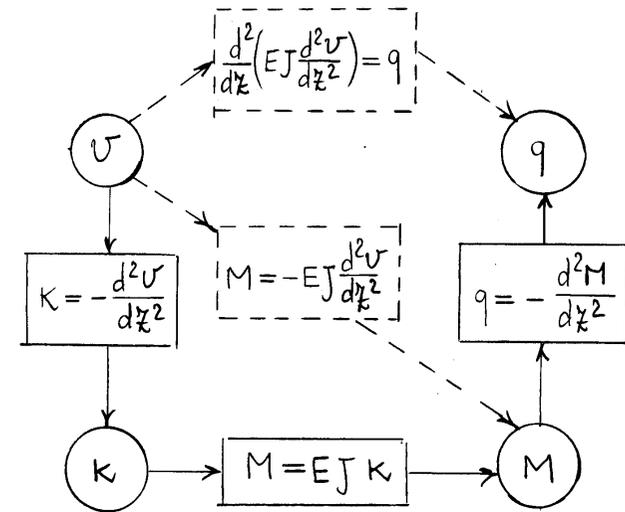


Diagramma relativo al problema flessionale  
( $m=0$ )



## 2.4 Sovrapposizione degli effetti

Sia data una trave, un primo sistema di forze applicate e di condizioni al contorno e infine un secondo sistema di forze applicate e di condizioni al contorno. La soluzione (in termini delle caratteristiche della sollecitazione, delle caratteristiche della deformazione e degli spostamenti) corrispondente ai due sistemi di forze agenti contemporaneamente e alla somma delle condizioni al contorno è uguale alla somma delle soluzioni corrispondenti ai due sistemi di forze agenti separatamente, ognuno con le proprie condizioni al contorno (additività).

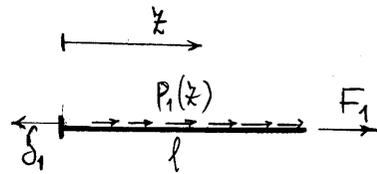
Inoltre, la soluzione corrispondente a un sistema di forze e condizioni al contorno, amplificate

entrambe da uno scalare  $\alpha$  arbitrario, si ottiene amplificando, sempre tramite  $\alpha$ , la soluzione che corrisponde al sistema di forze e condizioni al contorno non amplificate (omogeneità di grado 1).

Queste due proprietà sono la conseguenza della linearità delle equazioni che reggono il problema e del fatto che le equazioni indefinite di equilibrio sono scritte (per l'ipotesi delle piccole deformazioni) nella configurazione indeformata, che dunque non cambia al variare del sistema di forze applicate.

È chiaro che le condizioni al contorno, nei due sistemi, devono essere dello stesso tipo per poter essere sommate.

Come esempio, verifichiamo le due proprietà nel caso di trave rettilinea soggetta a sole forze di tipo assiale.

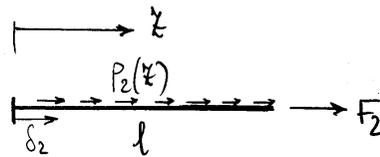
Sistema 1 :

La soluzione  $w_1(z)$ ,  $\varepsilon_1(z)$ ,  $N_1(z)$  soddisfa le equazioni :

$$\frac{dw_1}{dz} = \varepsilon_1, \quad N_1 = EA\varepsilon_1, \quad \frac{dN_1}{dz} + p_1 = 0,$$

e le condizioni al contorno :

$$w_1(0) = -\delta_1, \quad N(l) = F_1$$

Sistema 2 :

La soluzione  $w_2(z)$ ,  $\varepsilon_2(z)$ ,  $N_2(z)$  soddisfa le equazioni :

$$\frac{dw_2}{dz} = \varepsilon_2, \quad N_2 = EA\varepsilon_2, \quad \frac{dN_2}{dz} + p_2 = 0,$$

e le condizioni al contorno :

$$w_2(0) = \delta_2, \quad N_2(l) = F_2.$$

Sistema 1 + Sistema 2

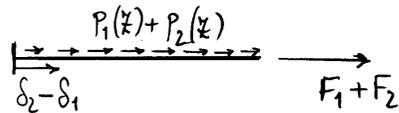
Le funzioni  $w_1(z) + w_2(z)$ ,  $\varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z)$ ,  $N_1(z) + N_2(z)$  soddisfano le equazioni :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(w_1 + w_2) = \frac{dw_1}{dz} + \frac{dw_2}{dz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ N_1 + N_2 = EA\varepsilon_1 + EA\varepsilon_2 = EA(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \frac{d}{dz}(N_1 + N_2) + (p_1 + p_2) = \left(\frac{dN_1}{dz} + p_1\right) + \left(\frac{dN_2}{dz} + p_2\right) = 0 \end{cases},$$

e le condizioni al contorno :

$$\begin{cases} (w_1 + w_2)_{z=0} = w_1(0) + w_2(0) = \delta_2 - \delta_1 \\ (N_1 + N_2)_{z=l} = N_1(l) + N_2(l) = F_1 + F_2 \end{cases},$$

e dunque sono la soluzione corrispondente al sistema di forze e condizioni al contorno somma dei due sistemi:



Sistema 1 amplificato di  $\alpha$

Le funzioni  $\alpha w_1(z)$ ,  $\alpha \varepsilon_1(z)$ ,  $\alpha N_1(z)$  soddisfanno

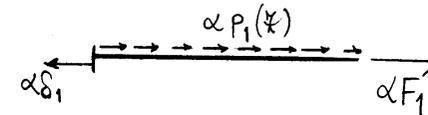
le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} (\alpha w_1) = \alpha \frac{dw_1}{dz} = \alpha \varepsilon_1 \\ \alpha N_1 = \alpha EA \varepsilon_1 = EA (\alpha \varepsilon_1) \\ \frac{d}{dz} (\alpha N_1) + \alpha P_1 = \alpha \left( \frac{dN_1}{dz} + P_1 \right) = 0 \end{array} \right.$$

e le condizioni al contorno:

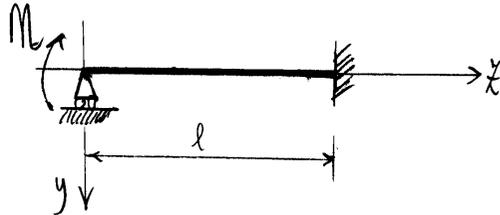
$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha w_1)_{z=0} = \alpha w_1(0) = -\alpha \delta_1 \\ (\alpha N_1)_{z=l} = \alpha N_1(l) = \alpha F_1 \end{array} \right.$$

e dunque sono la soluzione corrispondente al primo sistema di forze e condizioni al contorno amplificato tramite lo scalare  $\alpha$ :



## 2.5 Integrazione dell'equazione della linea elastica

### 2.5.1 Esempio: Trave incastro-appoggio



$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 & \Rightarrow w = a_1 z + a_2 \\ \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 & \Rightarrow \begin{cases} v = b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4 \\ \varphi = -3b_1 z^2 - 2b_2 z - b_3 \\ M = -EJ(6b_1 z + 2b_2) \\ T = -6b_1 EJ \end{cases} \end{cases}$$

Condizioni al contorno geometriche (essenziali):

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ \varphi(l) = 0 \\ w(l) = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno statiche (naturali):

$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ M(0) = \mathcal{M} \end{cases}$$

$$N(0) = 0 \Rightarrow EA \frac{dw}{dz} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow b_4 = 0$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow b_1 l^3 + b_2 l^2 + b_3 l = 0$$

$$\varphi(l) = 0 \Rightarrow -3b_1 l^2 - 2b_2 l - b_3 = 0$$

$$M(0) = \mathcal{M} \Rightarrow -2b_2 EJ = \mathcal{M} \Rightarrow b_2 = -\frac{\mathcal{M}}{2EJ}$$

$$\begin{cases} b_1 l^2 + b_3 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M} l}{EJ} \\ 3b_1 l^2 + b_3 = \frac{\mathcal{M} l}{EJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{M}}{EJ l} \\ b_3 = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{M} l}{EJ} \end{cases}$$

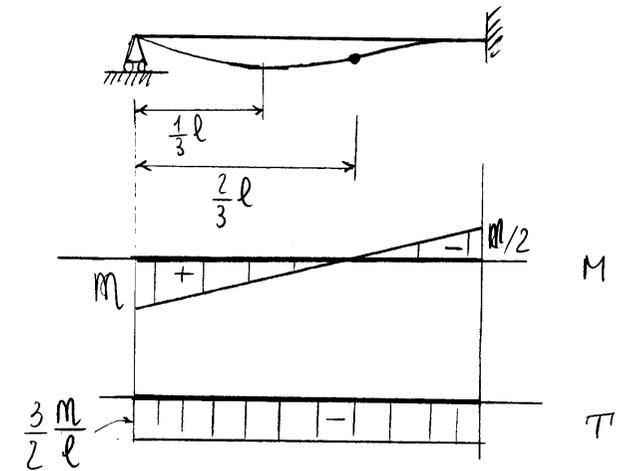
Soluzione del problema assiale:

$$\begin{cases} w=0 \\ N=0 \end{cases}$$

Soluzione del problema flessionale:

$$\begin{cases} v = \frac{Mz^3}{4EJl} - \frac{Mz^2}{2EJ} + \frac{Mlz}{4EJ} \\ \varphi = -\frac{3}{4} \frac{Mz^2}{EJl} + \frac{Mz}{EJ} - \frac{Ml}{4EJ} \\ M = -\frac{3}{2} \frac{Mz}{l} + M \\ T = -\frac{3}{2} \frac{M}{l} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\Rightarrow z^2 - 2\left(\frac{2}{3}l\right)z + \frac{l^2}{3} = 0 \\ &\Rightarrow z = \frac{2}{3}l \pm \sqrt{\frac{4}{9}l^2 - \frac{1}{3}l^2} \\ &= \frac{2}{3}l \pm \frac{1}{3}l = \begin{cases} l \\ \frac{1}{3}l \end{cases} \end{aligned}$$



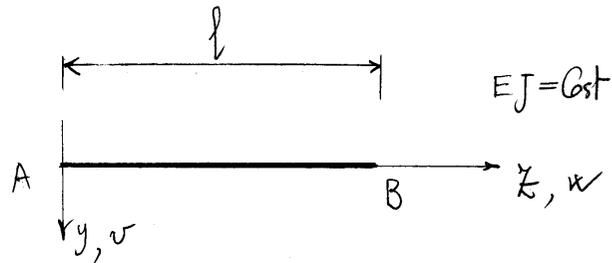
$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \frac{2}{3}l$$

$$v_{\max} = v\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{Ml^2}{27EJ}$$

$$\varphi(0) = -\frac{Ml}{4EJ}$$

## 2.5.2 Travi caricate solo alle estremità

Integrazione della linea elastica nel caso in cui non agiscano forze distribuite e le condizioni al contorno sono tutte sugli spostamenti:



$$\frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \\ \varphi = -3a_1 z^2 - 2a_2 z - a_3 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \Rightarrow w = a_5 z + a_6$$

$$\begin{cases} a_3 = -\varphi_A \\ a_4 = v_A \\ a_6 = w_A \end{cases}$$

$$w_B = a_5 l + w_A \Rightarrow a_5 = \frac{w_B - w_A}{l}$$

$$\begin{cases} v_B = a_1 l^3 + a_2 l^2 - \varphi_A l + v_A \\ \varphi_B = -3a_1 l^2 - 2a_2 l + \varphi_A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 l^2 + a_2 l = \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_A \\ -3a_1 l^2 - 2a_2 l = \varphi_B - \varphi_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 l^2 = 2 \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_B + \varphi_A \\ a_2 l = 3 \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_B + 2\varphi_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \frac{v_B - v_A}{l^3} - \frac{\varphi_B + \varphi_A}{l^2} \\ a_2 = 3 \frac{v_B - v_A}{l^2} + \frac{\varphi_B + 2\varphi_A}{l} \end{cases}$$

Quindi, dati gli spostamenti  $v_A, w_A, \varphi_A$  del punto A e  $v_B, w_B, \varphi_B$  del punto B, la situazione statica e cinematica della trave è definita. Ovverossia, noti gli spostamenti delle

estremità della trave sono note la deformata e le caratteristiche della sollecitazione.

Si osservi che imporre degli spostamenti significa vincolare la trave: la trave è obbligata a subire tali spostamenti.

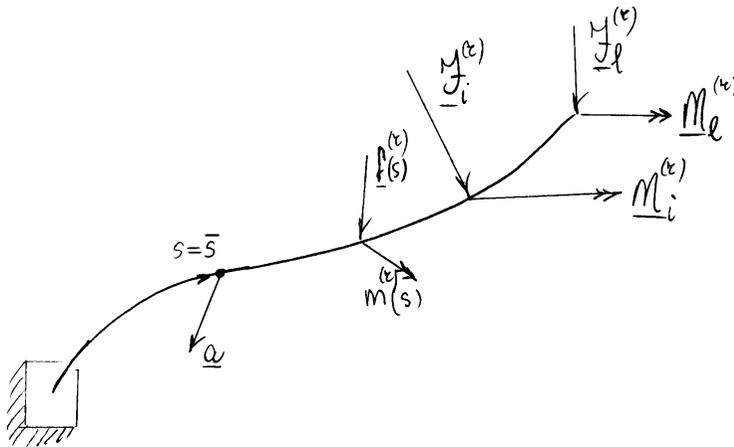
Per quanto precede, una trave elastica piana a sezione costante non soggetta a forze lungo l'asse della trave risulta un sistema a 6 gradi di libertà.

## Capitolo 3

### Calcolo di spostamenti

#### 3.1 Calcolo di spostamenti in sistemi isostatici con il principio dei lavori virtuali

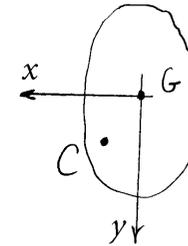
Sistema di spostamenti - deformazioni reali



comprese le eventuali distorsioni distribuite

$$\varepsilon_d^{(z)}, \delta_{Cd}^{(z)}, \Theta_d^{(z)}, \kappa_{fd}^{(z)}$$

$\bar{s} \equiv$  ascissa del punto di cui si vuole lo spostamento (oppure la rotazione della sezione) individuato dal vettore  $\underline{a}$



G = Baricentro

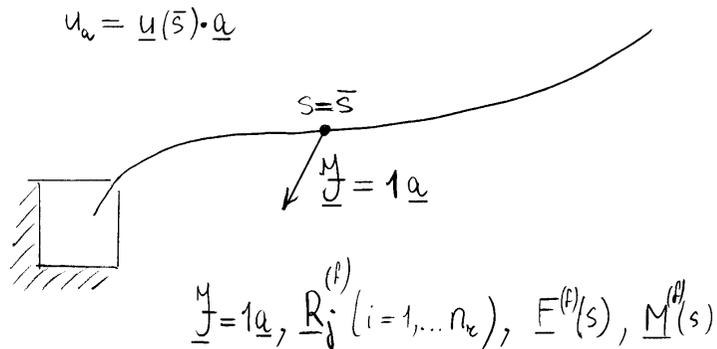
C = Centro di taglio

$$\underline{u}^{(z)}, \varphi^{(z)}$$

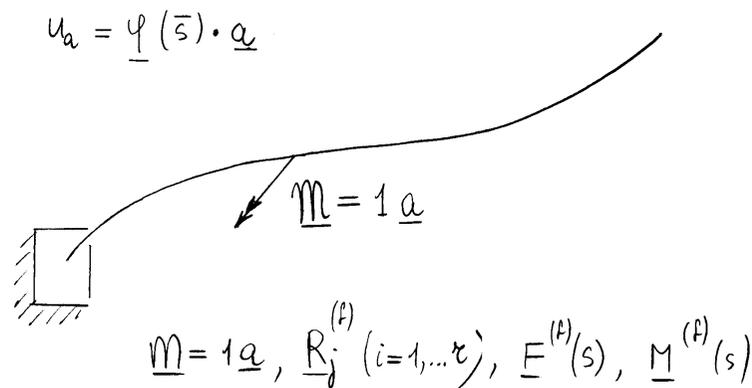
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{(z)} = \frac{N^{(z)}}{EA} + \varepsilon_d^{(z)} \\ \delta_C^{(z)} = \frac{1}{GA} \chi T^{(z)} + \delta_{Cd}^{(z)} \\ \Theta^{(z)} = \frac{M_c^{(z)}}{GJ_t} + \Theta_d^{(z)} \\ \kappa_f^{(z)} = \frac{1}{E} \underline{J}^{-1} \underline{M}_f^{(z)} + \kappa_{fd}^{(z)} \end{array} \right.$$

Sistemi di forze-caratteristiche della sollecitazione equilibrate

Caso in cui si vuole uno spostamento

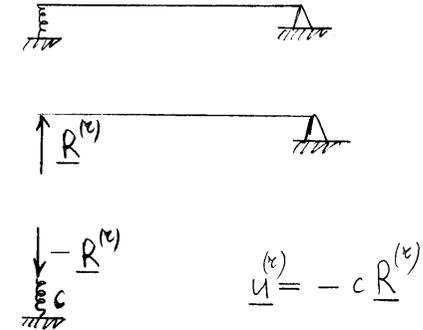


Caso in cui si vuole una rotazione



Lavoro virtuale esterno:

$$L_e = u_a + \sum_j \underline{R}_j^{(F)} \cdot (\underline{u}_j^o - c_j \underline{R}_j^{(r)})$$



$\underline{u}_j^o \equiv$  cedimenti (generalizzati) elastici dei vincoli

$\underline{R}_j \equiv$  Reazioni vincolari generalizzate

$c_j \equiv$  cedevolezza dei vincoli

Lavoro virtuale interno:

$$L_i = \int_l \left\{ N^{(F)} \left( \frac{N^{(r)}}{EA} + \varepsilon_d^{(r)} \right) + T^{(F)} \cdot \left( \frac{1}{GA} \chi T^{(r)} + \delta_{cd}^{(r)} \right) + M_c^{(F)} \left( \frac{M_c^{(r)}}{GJ_t} + \Theta_d^{(r)} \right) + M_f^{(F)} \cdot \left( \frac{1}{E} \underline{J}^{-1} \underline{M}_f^{(r)} + \underline{k}_{fd}^{(r)} \right) \right\} ds$$

Travi piane

$$L_i = \int_l N^{(F)} \left( \frac{N^{(T)}}{EA} + \varepsilon_d^{(T)} \right) ds$$

$$+ \int_l T^{(F)} \left( \frac{\chi T^{(T)}}{GA} + \gamma_{Cd}^{(T)} \right) ds$$

$$+ \int_l M^{(F)} \left( \frac{M^{(T)}}{GJ} + \kappa_{fd}^{(T)} \right) ds$$

Inoltre :

$$L_e = u_a + \sum_j R_j^{(F)} (u_j^o - c_j R_j^{(T)})$$

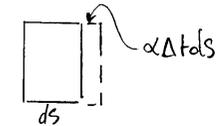
dove le componenti  $R_j^{(F)}$ ,  $R_j^{(T)}$  e  $u_j^o$  sono rispetto al versore  $\underline{x}_j$  che individua la direzione di efficacia del vincolo  $j$ -esimo.

Distorsioni termiche

Variazione termica uniforme sullo spessore :

$$\varepsilon_d^{(T)} = \alpha \Delta t$$

$\alpha \equiv$  coefficiente di dilatazione termica

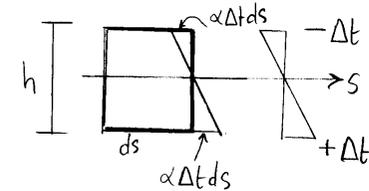


Variazione termica a farfalla :

$$\kappa_{fd}^{(T)} = 2 \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h}$$

$h \equiv$  altezza della sezione

$$\bar{\Delta t} \equiv \Delta t$$



Strutture prevalentemente inflesse

(si trascurano i lavori dovuti alle deformazioni provocate dal taglio e dallo sforzo normale)

Sistema spaziale

$$L_i = \int_l \underline{M}_f^{(F)} \cdot \left( \frac{1}{E} \underline{J}^{-1} \underline{M}_f^{(z)} + \underline{\kappa}_{fd}^{(z)} \right) ds$$

$$+ \int_l M_c^{(F)} \left( \frac{M_c^z}{EJ} + \Theta_d^{(z)} \right) ds$$

$$+ \int_l N^{(F)} \epsilon_d^{(z)} + \int_l \underline{T}^{(F)} \cdot \underline{\delta}_{Cd}^{(z)} ds$$

sistema piano

$$L_i = \int_l M^{(F)} \left( \frac{M^{(z)}}{EJ} + \kappa_{fd}^{(z)} \right) ds$$

$$+ \int_l N^{(F)} \epsilon_d^{(z)} ds + \int_l \underline{T}^{(F)} \cdot \underline{\delta}_{Cd}^{(z)} ds$$

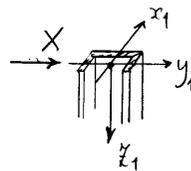
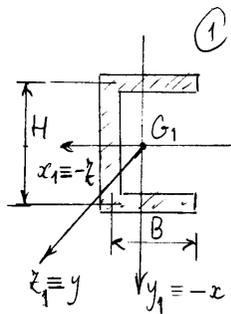
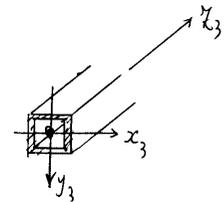
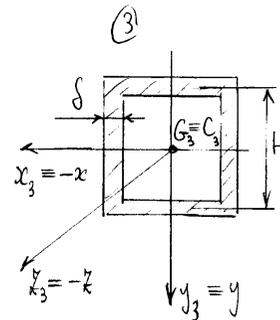
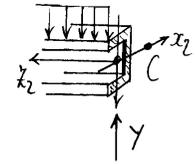
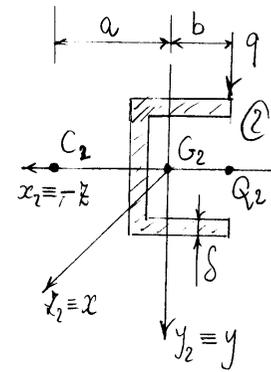
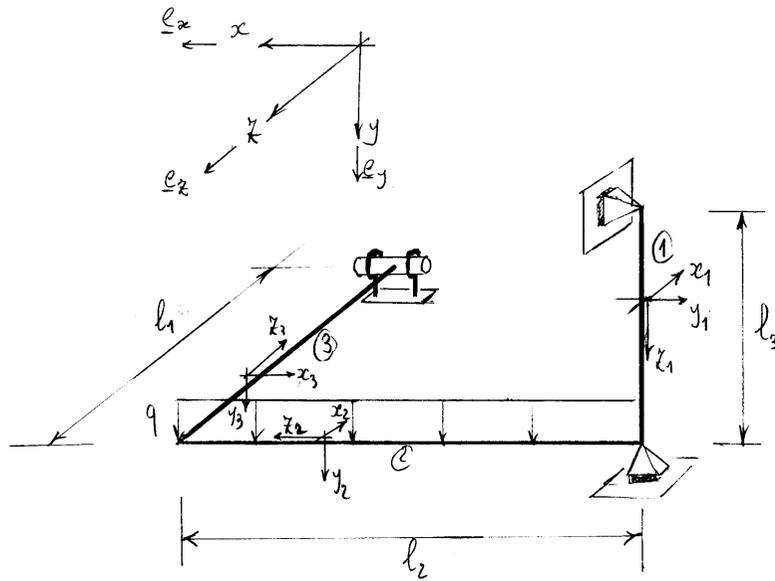
Travature reticolari

$$L_i = \sum_i \left\{ N_i^{(F)} \left( \frac{N_i^{(z)}}{EA} + \epsilon_d^{(z)} \right) l_i \right\}$$

$l_i$  = lunghezza dell'asta  $i$ -esima

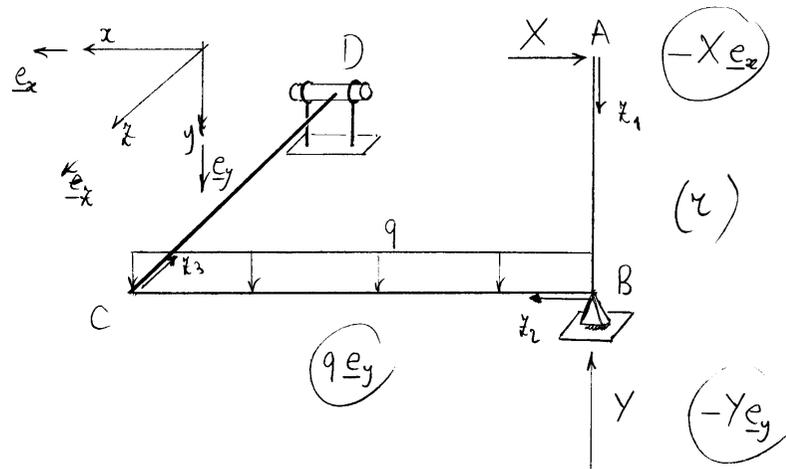
$N_i$  = sforzo normale nell'asta  $i$ -esima

3.1.1 Esempio: sistema di travi iperstatico spaziale



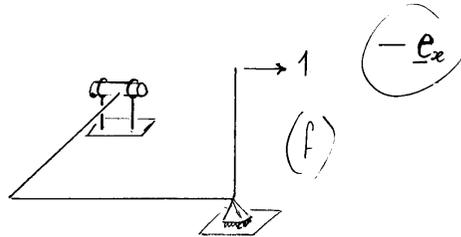
$$J_{t_3} = \frac{4\Omega^2}{\int_s \frac{ds}{\delta}}$$

$$J_{t_2} = J_{t_1} = \frac{1}{3} \int_s \delta^3 ds$$



Rotazione attorno ad  $x$

$$Y l_1 - q l_2 (l_1 + b) = 0 \Rightarrow Y = q l_2 \left(1 + \frac{b}{l_1}\right)$$



Momenti flettenti:

Trave ①

$$M_{x_1}^{(f)}(z_1) = -z_1 \quad M_{x_1}^{(v)} = -X z_1$$

Trave ②

$$\begin{cases} M_{x_2}^{(a)} = Y z_2 - \frac{q z_2^2}{2} \\ M_{x_2}^{(a)} = -Y a + q(a+b) z_2 \\ M_{x_2}^{(f)} = -l_1 \quad M_{x_2}^{(v)} = Y z_2 - \frac{q z_2^2}{2} + X l_1 \end{cases}$$

Trave ③

$$\begin{cases} M_{x_3}^{(a)} = Y z_3 - q l_2 (z_3 + b) \\ M_{x_3}^{(a)} = Y l_2 - q \frac{l_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{y_3}^{(f)} = z_3 \\ M_{x_3}^{(f)} = -l_1 \end{cases}$$

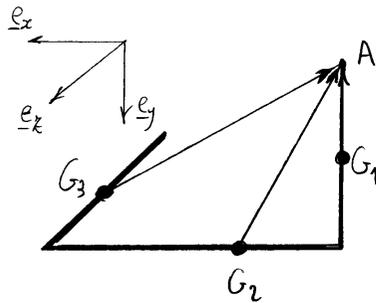
$$\begin{cases} M_{y_3}^{(v)} = X z_3 \\ M_{x_3}^{(v)} = Y l_2 - q \frac{l_2^2}{2} - X l_1 \end{cases}$$

Equazione di congruenza:

$$\int_0^{l_1} \frac{X}{EJ_{x_1}} z_1^2 dz_1 + \int_0^{l_2} \frac{-l_3}{EJ_{x_2}} \left( y z_2 - \frac{q z_2^2}{2} - X l_3 \right) dz_2$$

$$+ \int_0^{l_3} \frac{X}{EJ_{y_3}} z_3^2 dz_3 + \int_0^{l_3} \frac{-l_3}{EJ_{x_3}} \left( y l_2 - q \frac{l_2^2}{2} - X l_3 \right) dz_3 = 0$$

APPENDICE: Particolari sul calcolo dei momenti



$$A - G_1 = -z_1 e_y$$

$$A - G_2 = -z_2 e_x - l_1 e_y$$

$$A - G_3 = z_3 e_x - l_2 e_x - l_1 e_y$$

$$\underline{M}^{(F)} = - (A - G) \times (-\underline{e}_x) = (A - G) \times \underline{e}_x$$

$\underline{M}^{(F)}$  dalla parte della normale uscente positiva

Momento fittizio

Trave ①  $A - G = -z_1 e_y$

$$\underline{M}_1^{(F)} = -z_1 e_y \times \underline{e}_x = z_1 e_z = -z_1 e_{x_1}$$

Trave ②  $A - G = -l_1 e_y - z_2 e_x$

$$\underline{M}_2^{(F)} = -l_1 e_y \times \underline{e}_x = l_1 e_z = -l_1 e_{x_2}$$

Trave ③  $A - G = z_3 e_x - l_2 e_x - l_1 e_y$

$$\underline{M}_3^{(F)} = z_3 e_x \times \underline{e}_x - l_1 e_y \times \underline{e}_x = z_3 e_y + l_1 e_z =$$

$$= z_3 e_{y_3} - l_1 e_{z_3}$$

Momento dovuto ai soli carichi esterni

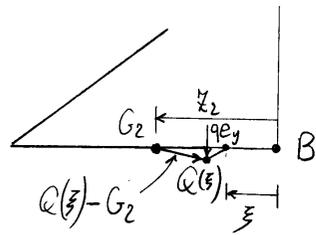
Trave ①

$$\underline{M}^{(a)} = 0$$

Trave (2)

$$\underline{M}^{(0)} = -(B - G_2) \times (-\gamma \underline{e}_y) - \int_0^{z_2} (Q - G_2) \times q \underline{e}_y dz_2$$

$$= \gamma (B - G_2) \times \underline{e}_y - q \int_0^{z_2} (Q - G_2) \times \underline{e}_y dz_2$$



$$B - G_2 = -z_2 \underline{e}_x$$

$$Q(\xi) - G_2 = (\xi - z_2) \underline{e}_x + b \underline{e}_z$$

$$\underline{M}^{(0)} = -\gamma z_2 \underline{e}_z - q \int_0^{z_2} \left\{ (\xi - z_2) \underline{e}_x - b \underline{e}_x \right\} dz_2$$

$$= \gamma z_2 \underline{e}_z - q \frac{z_2^2}{2} \underline{e}_x + qb z_2 \underline{e}_z$$

$$\underline{T}_2^{(0)} = (\gamma - q z_2) \underline{e}_y$$

$$\underline{M}_{G_2}^{(0)} = \underline{M}_{z_2}^{(0)} + \underline{e}_{z_2} \cdot (G_2 - C_2) \times \underline{T}_2^{(0)} =$$

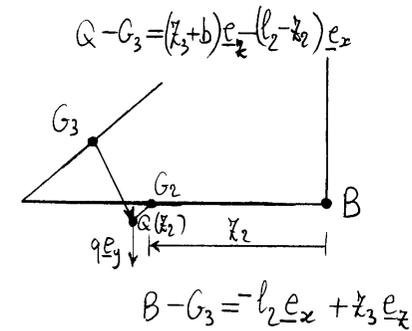
$$= qb z_2 + (\gamma - q z_2) a \underline{e}_{z_2} \cdot (-\underline{e}_{x_2}) \times \underline{e}_{y_2} =$$

$$= -\gamma a + q(b + a) z_2$$

Trave (3)

$$\underline{M}^{(0)} = -(B - G_3) \times (-\gamma \underline{e}_y) - \int_0^{l_2} (Q - G_3) \times q \underline{e}_y dz_2 =$$

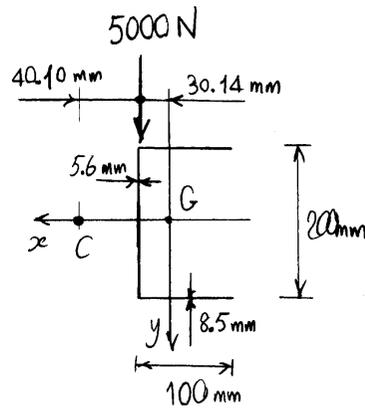
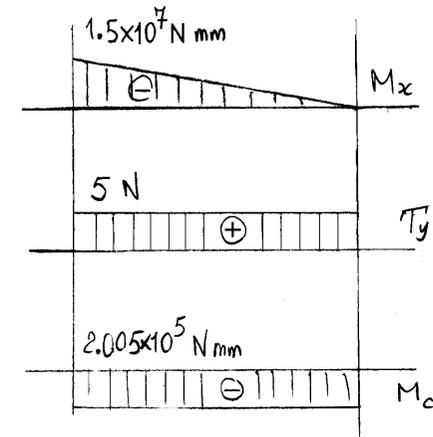
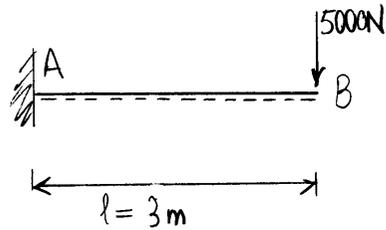
$$= \gamma (B - G_3) \times \underline{e}_y - q \int_0^{l_2} (Q - G_3) \times \underline{e}_y dz_2$$



$$\underline{M}^{(0)} = -\gamma l_2 \underline{e}_z - \gamma z_3 \underline{e}_x + q l_2 (z_3 + b) \underline{e}_z + q \frac{l_2^2}{2} \underline{e}_z$$

$$= \left\{ \gamma z_3 - q l_2 (z_3 + b) \right\} \underline{e}_{x_3} + \left( \gamma l_2 - q \frac{l_2^2}{2} \right) \underline{e}_{z_3}$$

### 3.2 Un esempio di calcolo di spostamenti col metodo cinematico: mensola di sezione a C



$$A = 2820. \text{ mm}^2$$

$$d_c = 30.14 \text{ mm}$$

$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_t = 5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

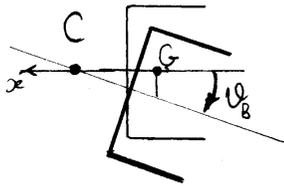
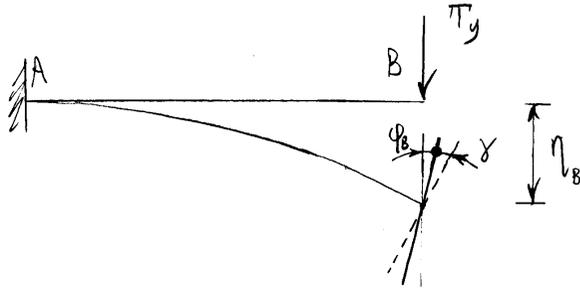
$$d_c = 41.00 \text{ mm}$$

$$\chi_y = 2.906$$

$$M_c = -T_y d_c = -2.050 \times 10^5 \text{ N mm}$$

$$M_x^o = -T_y l = 1.5 \times 10^7 \text{ N mm}$$

Spostamenti dell'estremità libera:



$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$d\varphi_B = \frac{M_x}{EJ_x} dz = -\frac{T_y(l-z)}{EJ_x} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_B = -\frac{T_y l^2}{2EJ_x}$$

$$d\vartheta_B = \frac{M_c}{GJ_t} dz = -\frac{T_y dc}{GJ_t}$$

$$\Rightarrow \vartheta_B = \frac{M_c l}{GJ_t} = -\frac{T_y dc l}{GJ_t}$$

$$d\eta_B = -\frac{M_x}{EJ_x}(l-z)dz + \chi_y \frac{T_y}{GA} dz - \frac{M_c}{GJ_t}(d_c + d_g)dz$$

$$\Rightarrow \eta_B = \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \chi_y \frac{T_y l}{GA} - \frac{M_c(d_c + d_g)l}{GJ_t}$$

$$= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \gamma l - \vartheta(d_c + d_g)$$

$$\varphi_B = \frac{-T_y l^2}{2EJ_x} = -5.426 \times 10^{-3} \text{ rad} = -0.31^\circ$$

$$\gamma = \chi_y \frac{T_y}{GA} = 6.443 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0.0037^\circ$$

$$\vartheta_B = \frac{M_c l}{GJ_t} = -0.146 \text{ rad} = -8.37^\circ$$

$$\begin{aligned} \eta_B &= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \gamma l - \vartheta_B (d_c + d_e) \\ &= 10.85 + 0.19 + 10.39 = 21.43 \text{ mm} \end{aligned}$$



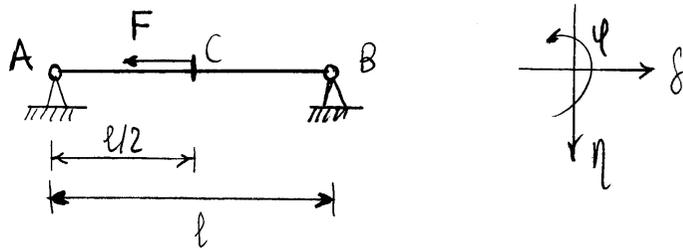
## Capitolo 4

### Soluzione dei sistemi iperstatici col metodo degli spostamenti

Si assumono come incognite un numero di spostamenti sufficienti a rendere definita la struttura e si scrivono delle equazioni di equilibrio.

#### 4.1 Esempi

##### 4.1.1 Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale



Per rendere definita la trave basta conoscere gli spostamenti del punto C :  $\delta_c, \eta_c, \varphi_c$ .  
Queste sono le nostre incognite.

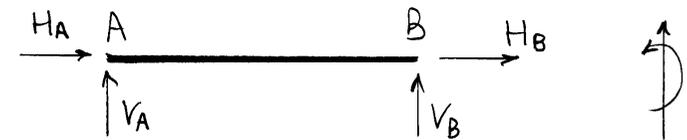
Dal punto di vista flessionale la trave è staticamente determinata. Infatti le reazioni verticali in A e B sono nulle:

1) equilibrio alla rotazione attorno ad A:

$$V_B l = 0 \Rightarrow V_B = 0;$$

2) equilibrio alla traslazione verticale:

$$V_B + V_A = 0 \Rightarrow V_A = 0.$$



Quindi il taglio e il momento flettente sono nulli in tutti i punti della trave e l'asse della trave resta rettilineo. Poiché i punti A e B sono fissi

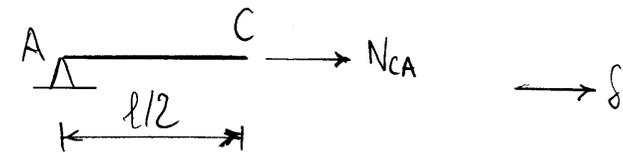
ne consegue che l'asse deformato (ancora rettilineo) giace sulla retta AB e dunque  $\eta_c = \varphi_c = 0$ .

Resta dunque la sola incognita  $\delta_c$ . Si imponga allora uno spostamento  $\delta_c$  arbitrario e si risolva la struttura. Imporre uno spostamento significa imporre un vincolo. Dunque, ad uno spostamento  $\delta_c$  corrisponde una reazione vincolare  $R_c$  duale, avente la stessa direzione di  $\delta_c$ . La somma  $R_c + F$  misura l'assenza di equilibrio della struttura vincolata a subire lo spostamento  $\delta_c$ , poiché nella struttura originaria la forza applicata in C vale  $-F$ .

Per ripristinare l'equilibrio occorre imporre:

$$R_c + F = 0.$$

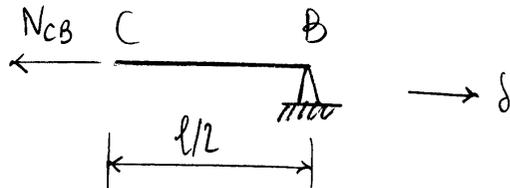
Tratto AC



Vediamo quale forza normale  $N_{CA}$  occorre applicare in C affinché lo spostamento valga  $\delta_c$ :

$$\frac{N_{CA} \frac{l}{2}}{EA} = \delta_c \implies N_{CA} = 2 \frac{EA}{l} \delta_c.$$

La quantità  $2EA/l$  (dimensionalmente una forza per unità di lunghezza) rappresenta la forza normale che occorre applicare per avere lo spostamento assiale  $\delta_c$  unitario ed è detta rigidezza assiale (in tal caso dell'asta AC).

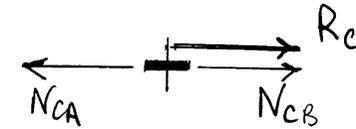
T tratto CB

$$-\frac{N_{CB} \frac{l}{2}}{EA} = \delta_c \Rightarrow N_{CB} = -\frac{2EA}{l} \delta_c$$

Il segno negativo dipende dal fatto che una  $N_{CB}$  positiva sposta il punto C nel verso negativo di  $\delta$ . La rigidezza di CB vale  $2EA/l$ , come per l'asta AC. D'altronde le due parti AC e BC sono equivalenti.

Reazione del vincolo in C

$$R_C = N_{CA} - N_{CB}.$$

Equilibrio del nodo C

$$R_C + F = N_{CA} - N_{CB} + F = 0.$$

Risulta quindi:

$$F + 2 \frac{EA}{l} \delta_c + 2 \frac{EA}{l} \delta_c = 0,$$

e infine:

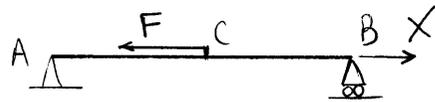
$$\delta_c = -\frac{Fl}{4EA}.$$

Le caratteristiche della sollecitazione risultano quindi:

$$\begin{cases} N_{CA} = 2 \frac{EA}{l} \delta_c = -\frac{2EA}{l} \frac{Fl}{4EA} = -\frac{F}{2} \\ N_{CB} = -2 \frac{EA}{l} \delta_c = \frac{2EA}{l} \frac{Fl}{4EA} = \frac{F}{2} \end{cases}$$

### Metodo delle forze

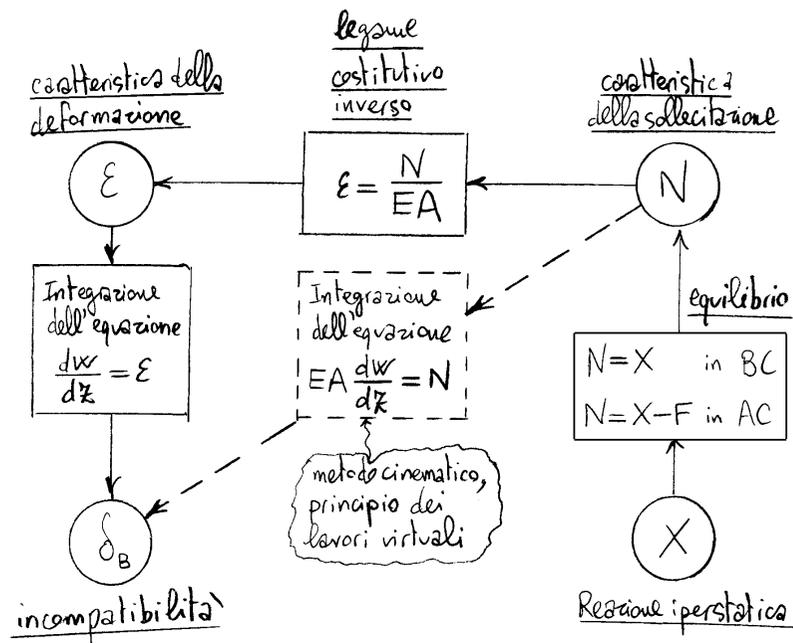
Struttura principale equilibrata (staticamente nota)



Equazione risolvente (di congruenza)

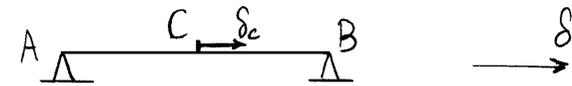
$$\delta_B = 0$$

Diagramma



### Metodo delle deformazioni

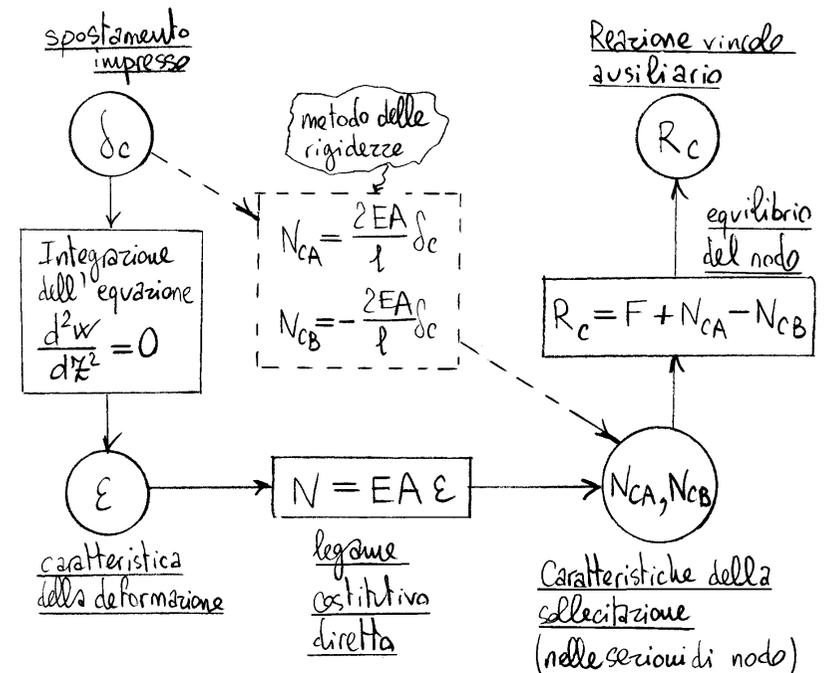
struttura principale congruente (cinematicamente nota)



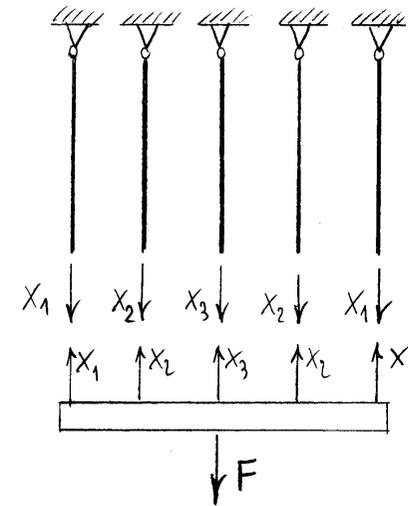
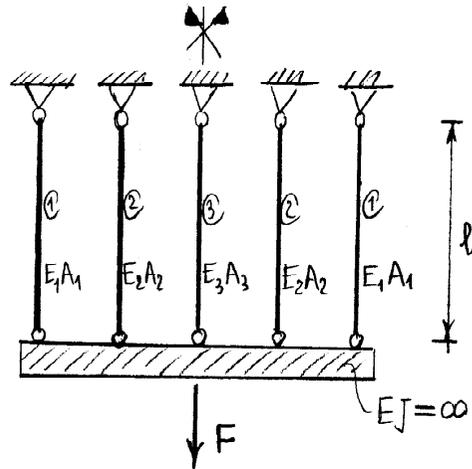
Equazione risolvente (di equilibrio)

$$R_c + F = 0$$

Diagramma



4.1.2 Sistema di pendoli paralleli



$$\begin{cases} g = 6 \times 3 = 18 \\ v = 10 \times 2 = 20 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases} \quad \text{oppure, considerando} \\ \text{la trave vincolata} \\ \text{dei pendoli:} \quad \begin{cases} g = 3 \\ v = 5 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases}$$

Equilibrio della trave alla traslazione verticale :

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 = F \Rightarrow \eta = \frac{F}{K_t}$$

$\eta \equiv$  spostamento verticale della trave rigida

$K_i \equiv$  rigidezza assiale dell' $i$ -esimo pendolo:

$$K_i = \frac{E_i A_i}{l}$$

Risulta:

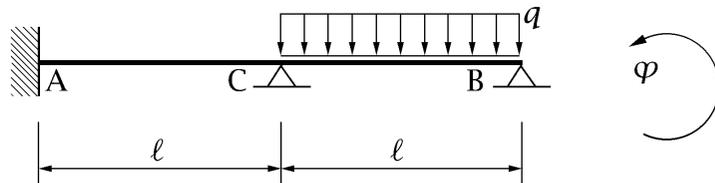
$$X_1 = K_1 \eta, \quad X_2 = K_2 \eta, \quad X_3 = K_3 \eta.$$

dove  $K_t = 2K_1 + 2K_2 + K_3$  rappresenta la rigidezza totale delle 5 aste. Gli sforzi nelle aste risultano quindi :

$$X_i = \frac{K_i}{K_t} F.$$

### 4.1.3 Trave continua

La trave continua di figura è 4 volte iperstatica, due volte assialmente e due volte flessionalmente. La soluzione col metodo delle forze richiede quindi 4 incognite iperstatiche, a meno di semplificazioni.

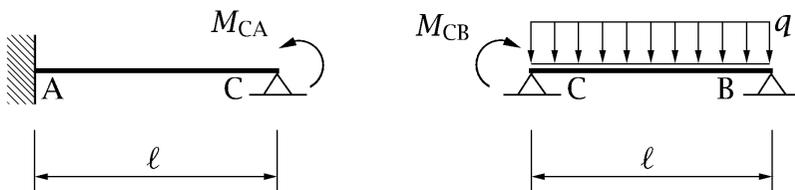


L'unico nodo C della struttura può solo ruotare e quindi il metodo degli spostamenti richiede una sola incognita, la rotazione  $\varphi_C$  del nodo C.

Si risolvano separatamente, in funzione di  $\varphi_C$ , i due tratti AC e CB della struttura.

Detti  $M_{CA}$  e  $M_{CB}$  i momenti agenti nelle estremità C dei tratti AC e CB rispettivamente, positivi se tendono le fibre inferiori, risulta:

$$\varphi_C = \frac{M_{CA} \ell}{4EJ} \Rightarrow M_{CA} = \frac{4EJ}{\ell} \varphi_C,$$



$$\varphi_C = -\frac{M_{CB} \ell}{4EJ} - \frac{q \ell^3}{24EJ} \Rightarrow M_{CB} = -\frac{3EJ}{\ell} \varphi_C - \frac{q \ell^2}{8}.$$

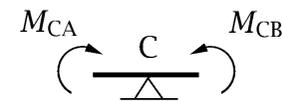
I termini:

$$k_{CA} = \frac{4EJ}{\ell}, \quad k_{CB} = \frac{3EJ}{\ell},$$

rappresentano le *rigidezze alla rotazione* dei due tratti AC e CB rispettivamente, ovvero sia le coppie che applicate nelle estremità C dei due tratti provocano la rotazione unitaria dell'estremità del tratto relativo. La quantità  $-\frac{q \ell^2}{8}$  rappresenta invece, per il tratto CB, il momento in C corrispondente al vincolo  $\varphi_C = 0$ , e detto per tale motivo *momento di incastro perfetto*. Il momento di incastro perfetto per il tratto AC è invece nullo, non essendo il tratto caricato.

L'equilibrio del nodo C impone:

$$M_{CA} - M_{CB} = 0 \Rightarrow \frac{7EJ}{\ell} \varphi_C + \frac{q \ell^2}{8} = 0.$$



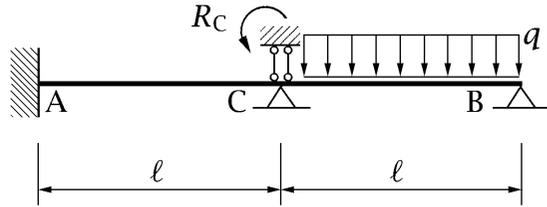
Il termine:

$$k_C = \frac{7EJ}{\ell},$$

rappresenta la *rigidezza alla rotazione* del nodo C, ovvero sia la coppia che applicata nel nodo C provoca la rotazione unitaria del nodo stesso. La quantità:

$$R_C = \frac{q\ell^2}{8},$$

rappresenta invece la *reazione di incastro perfetto* in C, ovvero la reazione del vincolo  $\varphi_C = 0$ .

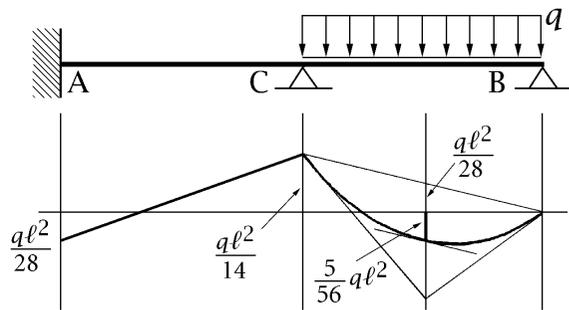


Risulta quindi:

$$\varphi_C = -\frac{q\ell^3}{56EJ},$$

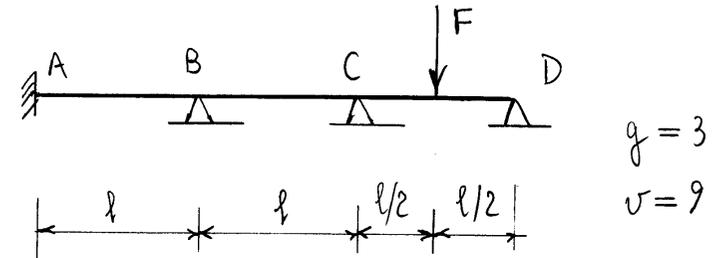
e i momenti  $M_{CA}$  e  $M_{CB}$  risultano infine:

$$M_{CA} = M_{CB} = -\frac{4}{56}q\ell^2.$$



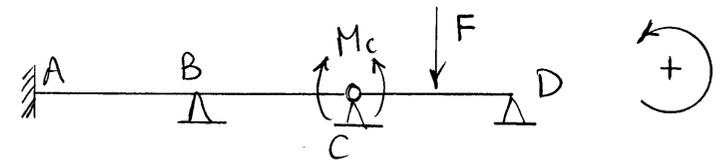
#### 4.1.4 Analisi qualitativa basata sulle rigidezze

Trave continua 6 volte iperstatica (3 iperstaticità flessionali e tre iperstaticità assiali)



Si sovrappone in C e si indichi con  $K$  la rigidezza alla rotazione del tratto AC (coppia unitaria in C che provoca la rotazione unitaria). Risulta quindi:

$$M_C = -K\varphi_{CA}.$$



Congruenza :

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CD}$$

Poiché:

$$\varphi_{CA} = - \frac{M_c}{K}$$

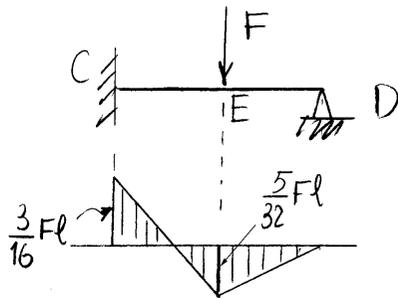
$$\varphi_{CD} = \frac{M_c l}{3EJ} - \frac{Fl^2}{16EJ}$$

si ottiene quindi:

$$M_c = \frac{\frac{3}{16} Fl}{1 + 3EJ/kl}$$

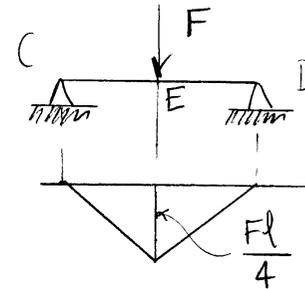
Si presentano due casi limite:

1)  $K \rightarrow \infty$  (trave incastra appoggio)



$$M_c = \frac{3}{16} Fl$$

2)  $K \rightarrow 0$  (trave appoggiata)



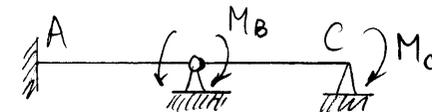
$$M_c = 0$$

Quindi:

$$0 < M_c < \frac{3}{16} Fl \quad (\text{tense le fibre dell'estradosso})$$

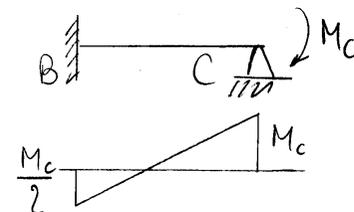
$$\frac{5}{32} Fl < M_E < \frac{Fl}{4} \quad (\text{tense le fibre dell'intradosso})$$

Si sconnetta ora in B:

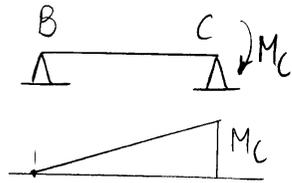


Casi limite per il momento in B :

1) trave incastra appoggio



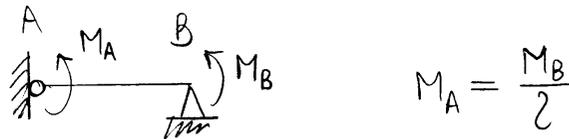
2) trave appoggiata



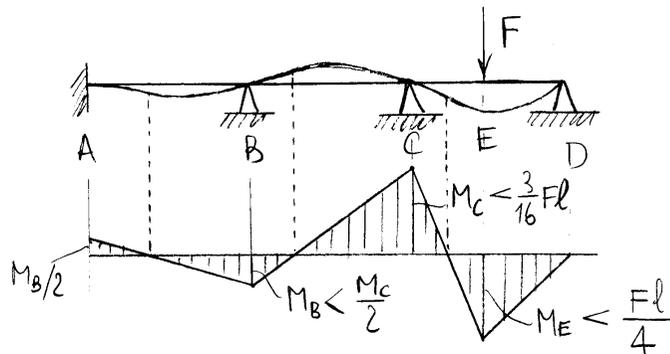
Dunque:

$$0 < M_B < \frac{M_C}{2} \quad (\text{tese le fibre dell'intradosso})$$

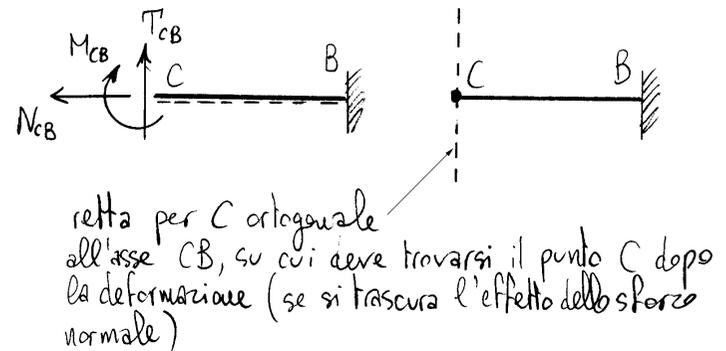
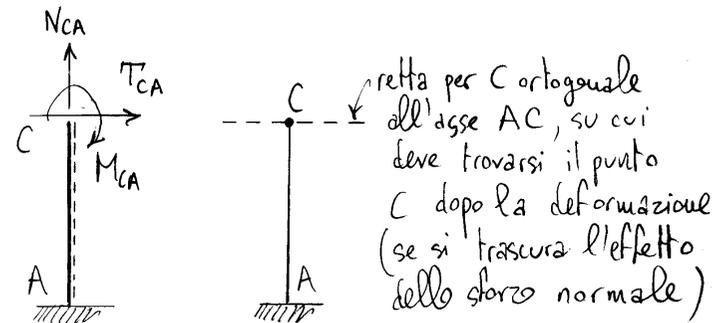
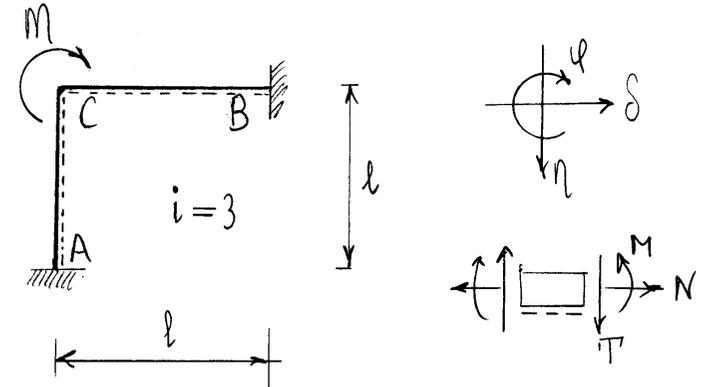
Per quel che riguarda il tratto AB, non si hanno casi limite dato che il tratto è equivalente a una trave incastro-appoggio.



Deformata e diagramma del momento:



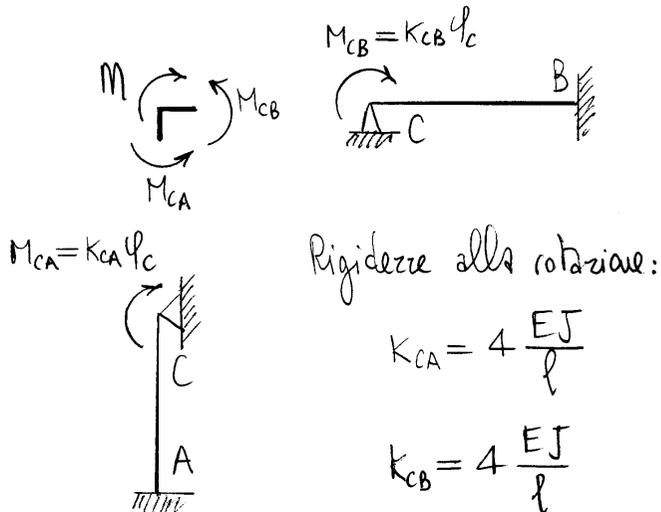
### 4.1.5 Telaio soggetto ad una coppia concentrata



Dovendo il punto C trovarsi, dopo la deformazione, contemporaneamente su due rette che hanno il solo punto C in comune, il punto C non si sposta e quindi:

$$\eta_c = \delta_c = 0$$

Si può dunque applicare il metodo delle deformazioni prendendo quale unica incognita la rotazione  $\varphi_c$  del nodo C.



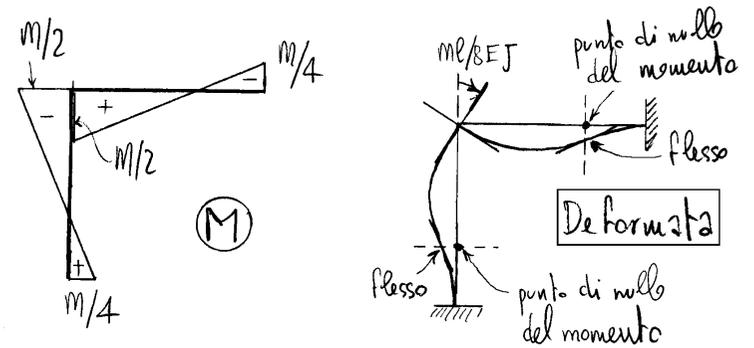
Equilibrio alla rotazione del nodo C:

$$-M_{Ca} - M_{Cb} + M = 0,$$

$$K_{Ca} \varphi_c + K_{Cb} \varphi_c = M,$$

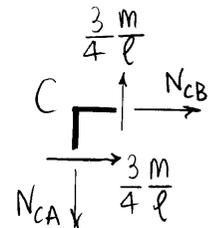
$$\varphi_c = \frac{M}{K_{Ca} + K_{Cb}} = \frac{m l}{8 E J},$$

$$M_{Ca} = M_{Cb} = M/2$$

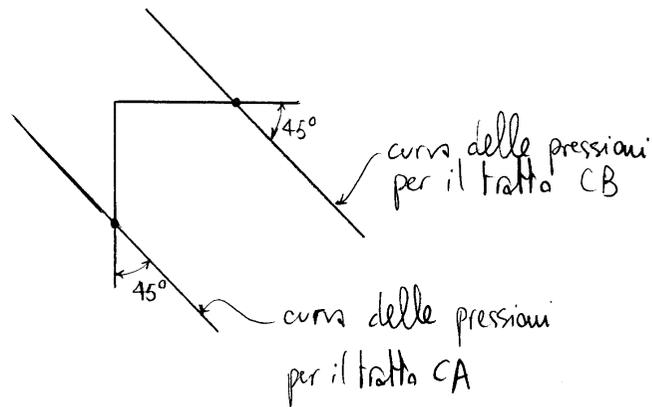
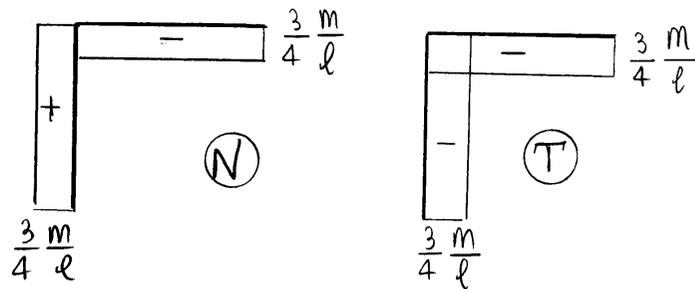


Equilibrio alla traslazione del nodo C:

$$N_{Ca} = \frac{3}{4} \frac{m}{l}, \quad N_{Cb} = -\frac{3}{4} \frac{m}{l}$$

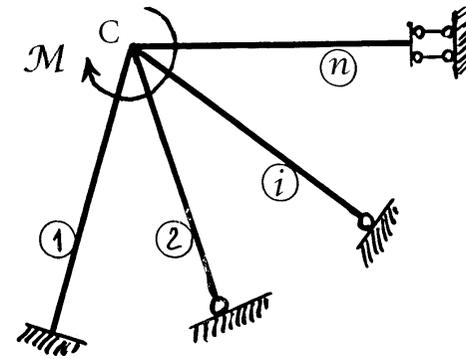


Notare che lo sforzo normale non è nullo e che quindi è essenziale trascurare i suoi effetti sulla deformazione per poter affermare che il nodo C ruota senza spostarsi.



### 4.2 Schema fondamentale dei telai a nodi fissi

Si consideri un sistema di  $n$  travi ad asse rettilineo connesse ad una estremità in un nodo rigido C soggetto ad una coppia concentrata  $\mathcal{M}$ . Se si trascura la deformabilità assiale delle travi componenti la struttura il nodo non può subire spostamenti, salvo il caso di due sole travi aventi la stessa direzione, caso che però rientra nell'analisi seguente se il nodo si suppone vincolato esternamente da un appoggio fisso. L'unico nodo della struttura può quindi solo ruotare e il metodo degli spostamenti richiede una sola incognita, la rotazione  $\varphi_C$  del nodo.

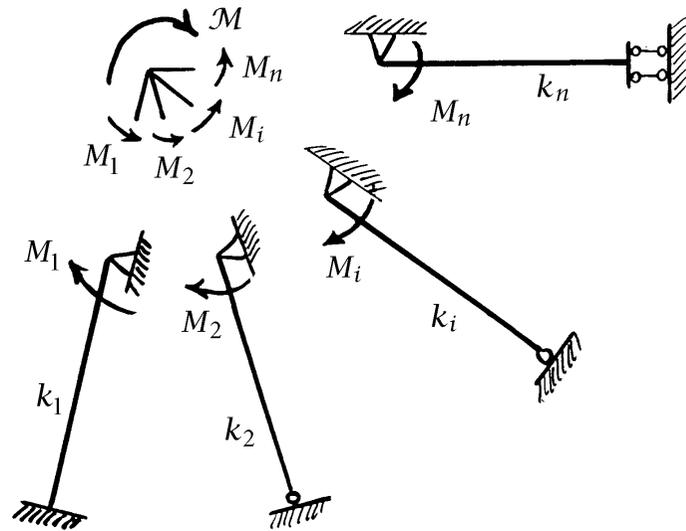


L'equazione di equilibrio del nodo richiede:

$$\sum_i M_i = \mathcal{M}.$$

Occorre allora esprimere i momenti  $M_i$  in funzione della rotazione  $\varphi_C$  del nodo:

$$M_i = k_i \varphi_C,$$



dove  $k_i$  è la *rigidezza alla rotazione* dell' $i$ -esima trave. Si ottiene quindi:

$$\sum_i k_i \varphi_C = \mathcal{M} \Rightarrow \varphi_C = \frac{\mathcal{M}}{k_C},$$

dove:

$$k_C = \sum_i k_i,$$

rappresenta la *rigidezza alla rotazione* del nodo C.

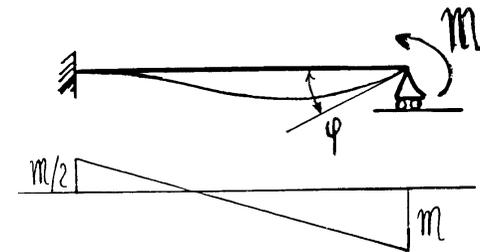
I momenti  $M_i$  che agiscono in C alla estremità delle travi valgono quindi:

$$M_i = \frac{k_i}{k_C} \mathcal{M},$$

dove i rapporti  $\frac{k_i}{k_C}$  tra le rigidezze delle aste e la rigidezza del nodo rappresentano i *coefficienti di ripartizione* del momento  $\mathcal{M}$  applicato nel nodo.

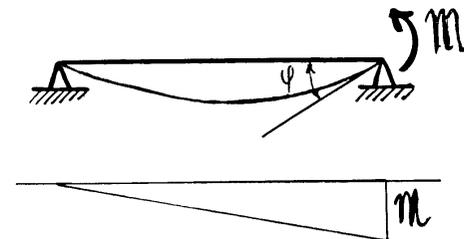
Rigidezza alla rotazione della trave incastro-appoggio:

$$\varphi = \frac{m \ell}{4EJ} \Rightarrow k = \frac{4EJ}{\ell}$$



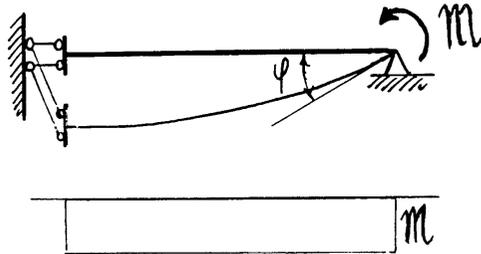
Rigidezza alla rotazione della trave appoggio-appoggio:

$$\varphi = \frac{m \ell}{3EJ} \Rightarrow k = \frac{3EJ}{\ell}$$



Rigidezza alla rotazione della trave doppio pendolo-appoggio:

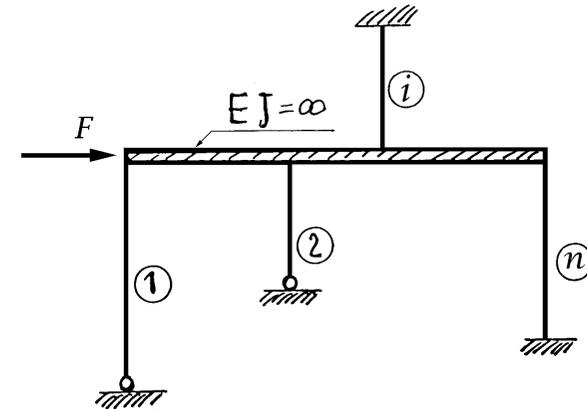
$$\varphi = \frac{m l}{EJ} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{EJ}{l}$$



### 4.3 Schema fondamentale dei telai a nodi spostabili

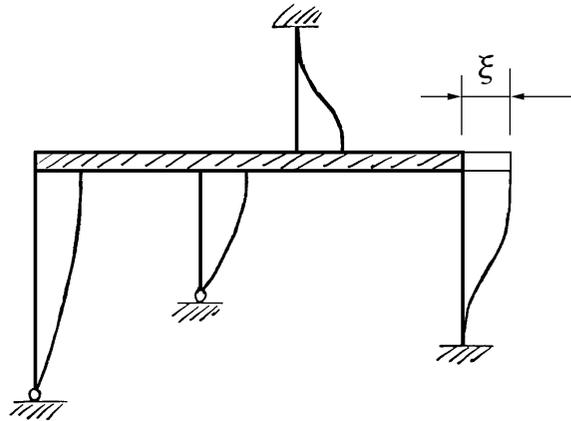
Si consideri un sistema composto:

1. di una trave ad asse rettilineo che resta indeformata flessionalmente, o perché tale deformazione è impedita da opportuni vincoli o perché infinitamente rigida, e soggetta in un suo punto ad una forza concentrata  $F$  avente la direzione della trave stessa;
2. di  $n$  travi ad asse rettilineo ortogonali alla trave precedente e connesse a questa ad una estremità.



Se si trascura la deformabilità assiale delle travi componenti la struttura, la trave indeformabile non può traslare nella direzione ortogonale alla trave stessa e non può ruotare, salvo il caso in cui sia connessa, ad una o a due travi, in un solo punto. Tale caso particolare rientra però nell'analisi seguente se la trave indeformabile è opportunamente vincolata.

La trave indeformabile può quindi solo traslare nella direzione della trave stessa e il metodo degli spostamenti richiede questa traslazione quale unica incognita.



L'equazione di equilibrio alla traslazione della trave indeformabile, nella direzione della stessa trave, si scrive:

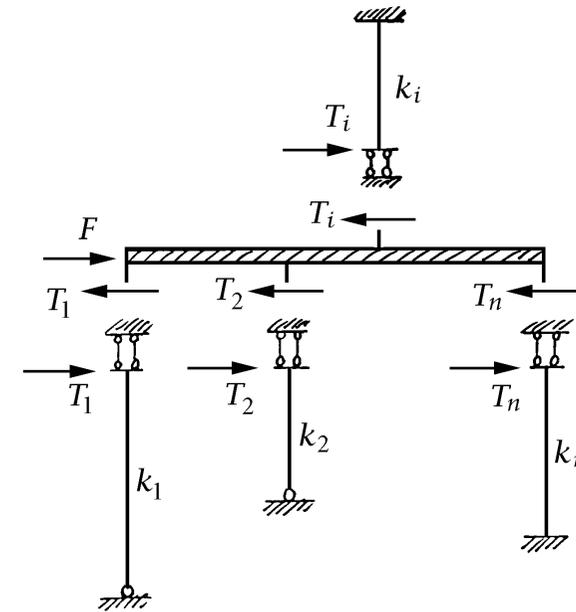
$$\sum_i T_i = F.$$

Occorre allora esprimere i tagli  $T_i$  in funzione dello spostamento  $\xi$  della trave:

$$T_i = k_i \xi,$$

dove  $k_i$  è la *rigidezza tagliante* dell' $i$ -esima trave, ovvero sia la forza che occorre applicare alla sua estremità per provocare lo spostamento unitario in direzione ortogonale al suo asse (senza che la sezione di estremità ruoti). Si ottiene quindi:

$$\sum_i k_i \xi = F \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{F}{k},$$



dove:

$$k = \sum_i k_i,$$

rappresenta la rigidezza alla traslazione della trave indeformabile.

I momenti  $T_i$  che agiscono alle estremità delle travi valgono quindi:

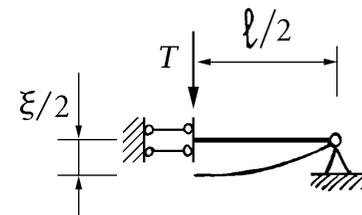
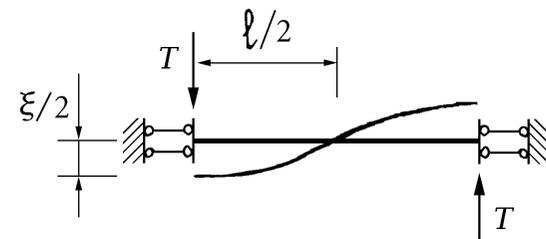
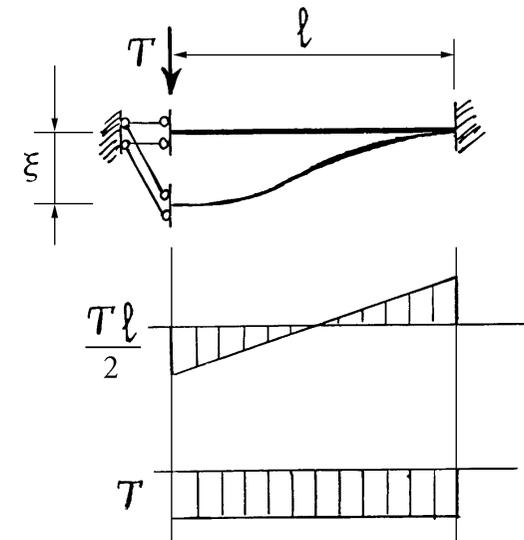
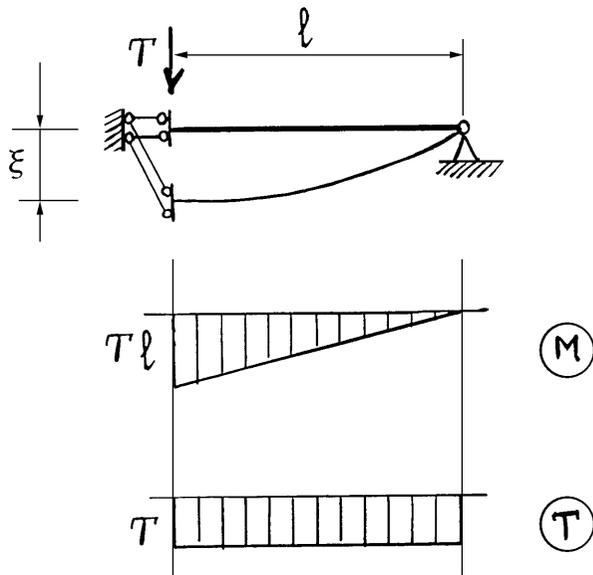
$$T_i = \frac{k_i}{k} F,$$

dove i rapporti  $\frac{k_i}{k}$  tra le rigidezze delle travi deformabili e la rigidezza alla traslazione della trave indeformabile rappresentano i *coefficienti di ripartizione* della forza  $F$  applicata alla trave indeformabile.

### 4.3.1 Rigidezze taglienti

#### 4.3.1.1 Rigidezza tagliente della trave appoggio-doppio pendolo

$$\xi = \frac{T \ell^3}{3EJ} \Rightarrow k = \frac{3EJ}{\ell^3}$$

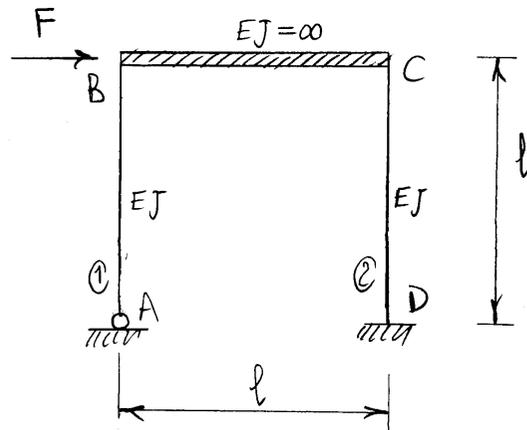


#### 4.3.1.2 Rigidezza tagliente della trave incastro-doppio pendolo

$$\xi = \frac{T \ell^3}{12EJ} \Rightarrow k = \frac{12EJ}{\ell^3}$$

### 4.3.2 esempi di telai con traversi rigidi

#### 4.3.2.1 Portale con traverso rigido



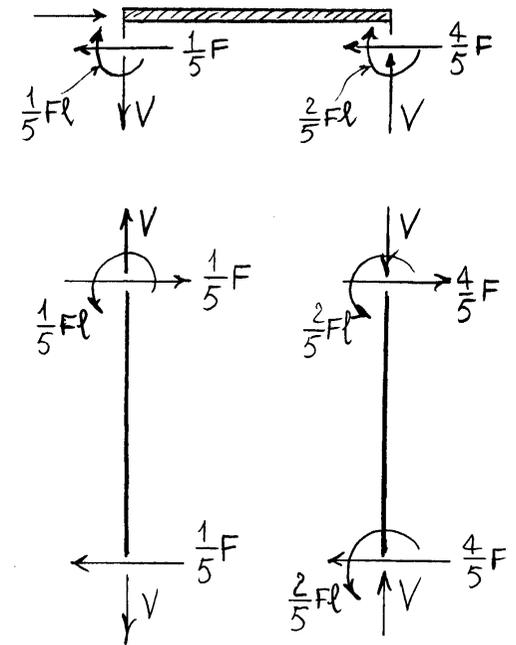
Rigidità tagliante della colonna ①:  $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$

Rigidità tagliante della colonna ②:  $k_2 = 12 \frac{EJ}{l^3}$

Rigidità tagliante globale:  $k = k_1 + k_2 = 15 \frac{EJ}{l^3}$

Coefficienti di ripartizione del carico orizzontale:

$$c_1 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \quad c_2 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$



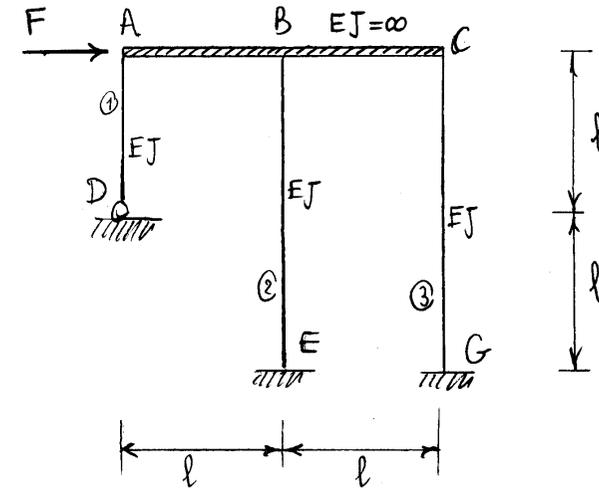
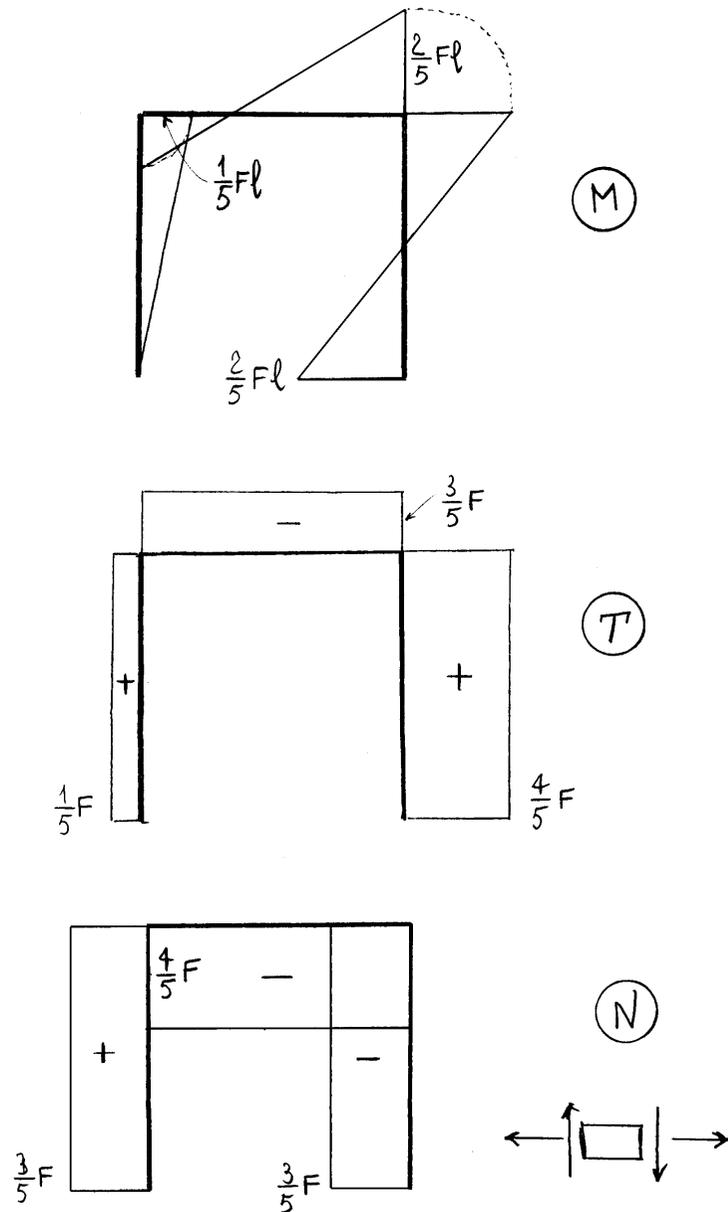
Spostamento del traverso:

$$\xi_{BC} = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{15EJ}$$

Equilibrio alla rotazione del traverso:

$$Vl = \frac{3}{5} Fl \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{5} F$$

4.3.2.2 Telaio con traverso rigido e tre ritti

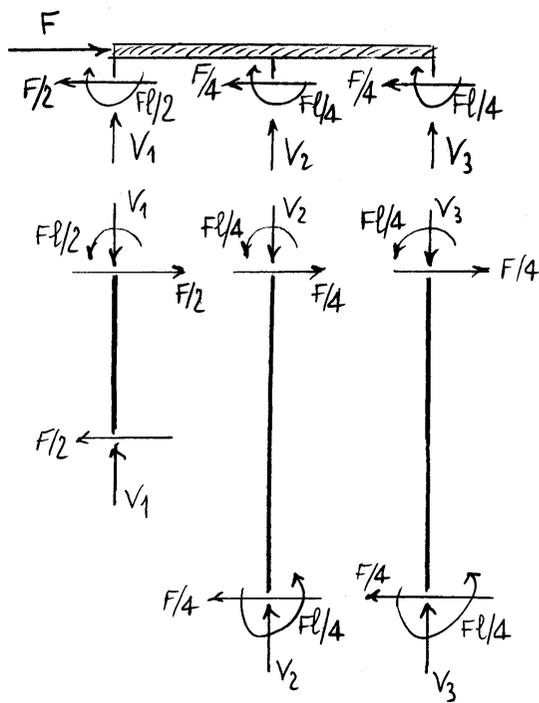


Rigidezze taglianti:  $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$ ,  $k_2 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l^3}$ ,  $k_3 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l^3}$ .

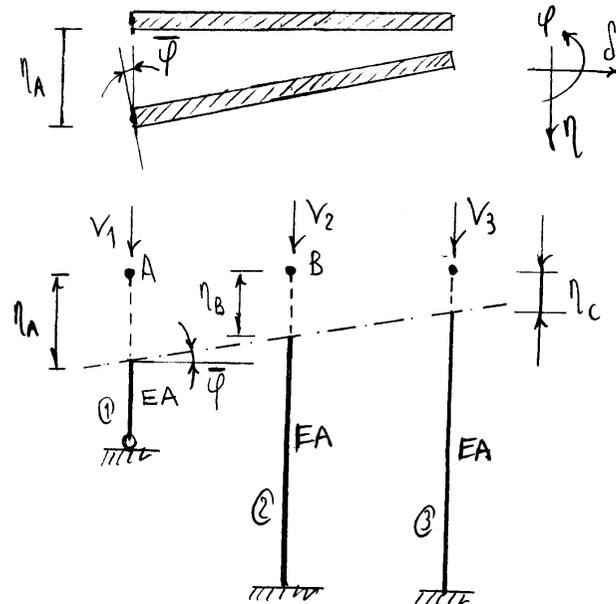
Rigidezza globale:  $k = 6 \frac{EJ}{l^3}$ .

Spostamento trasverso:  $\xi = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{6EJ}$ .

Coefficienti di ripartizione:  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{4}$ ,  $c_3 = \frac{1}{4}$ .



dei ritti. Procedendo poi via metodo delle deformazioni, si possono assumere quali incognite lo spostamento verticale  $\eta_A$  del punto A e la rotazione  $\varphi$  del traverso rigido. In funzione dei parametri  $\eta_A$  e  $\varphi$  si determinano gli sforzi normali nei ritti e si impongono poi le due equazioni di equilibrio, sufficienti a determinare le due incognite.



Gli equilibri alla rotazione ed alla traslazione verticale del traverso rigido non sono sufficienti per determinare gli sforzi normali  $V_1, V_2, V_3$  nei ritti. Per rimuovere l'indeterminazione, che è di tipo assiale, occorre rimuovere l'ipotesi di indeformabilità assiale

Spostamenti  $\eta_B$  e  $\eta_C$  in funzione di  $\eta_A$  e  $\bar{\varphi}$  :

$$\begin{cases} \eta_B = \eta_A - \bar{\varphi} l \\ \eta_C = \eta_A - 2\bar{\varphi} l \end{cases}$$

Rigiderezze assiali:  $k_1 = \frac{EA}{l}$ ,  $k_2 = \frac{EA}{2l}$ ,  $k_3 = \frac{EA}{2l}$ .

Sforzi normali (di compressione) nei ritti:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{EA}{l} \eta_A \\ V_2 = \frac{EA}{2l} \eta_B = \frac{EA}{2l} (\eta_A - \bar{\varphi} l) \\ V_3 = \frac{EA}{2l} \eta_C = \frac{EA}{2l} (\eta_A - 2\bar{\varphi} l) \end{cases}$$

Equilibrio alla traslazione verticale del traverso:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow 2\eta_A - \frac{3}{2}\bar{\varphi} l = 0.$$

Equilibrio alla rotazione del traverso attorno al punto C:

$$-V_1 2l - V_2 l - \frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{4} - \frac{Fl}{4} = 0,$$

e quindi:

$$-\frac{5}{2}EA\eta_A + \frac{1}{2}EA l \bar{\varphi} - Fl = 0.$$

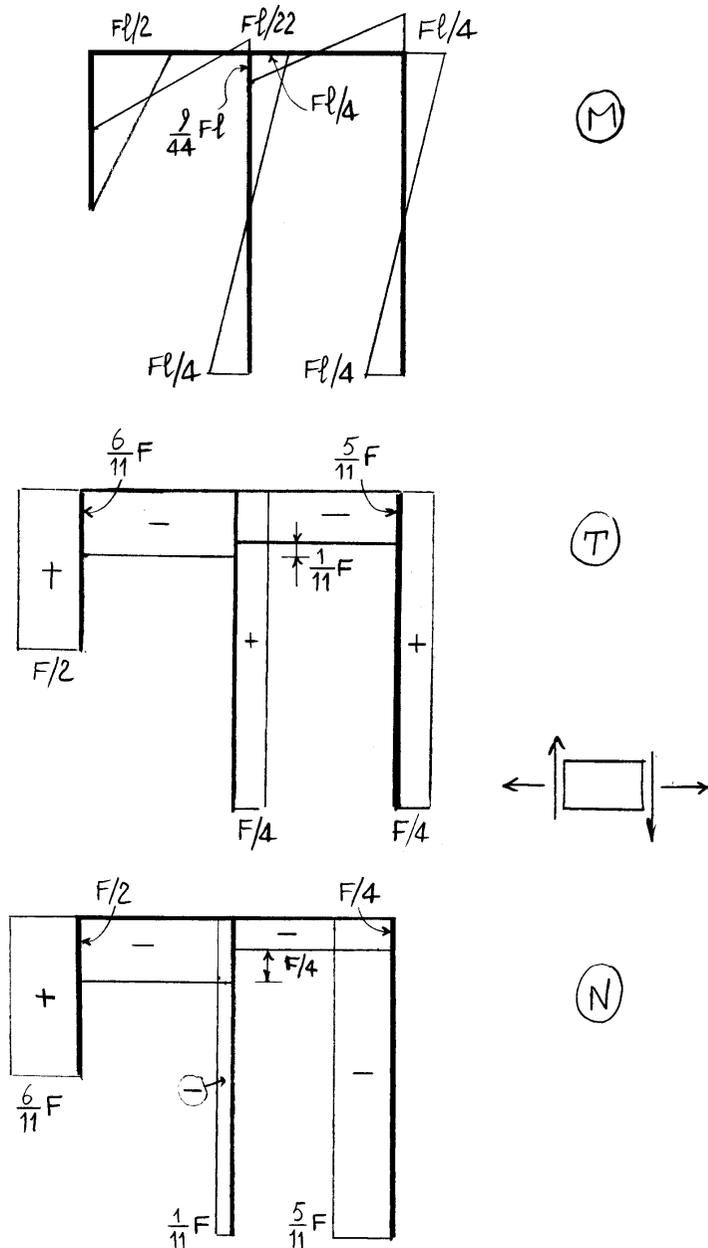
Si ottiene:

$$\begin{cases} 4\eta_A - 3l\bar{\varphi} = 0 \\ 5\eta_A - l\bar{\varphi} = -2\frac{Fl}{EA} \end{cases}$$

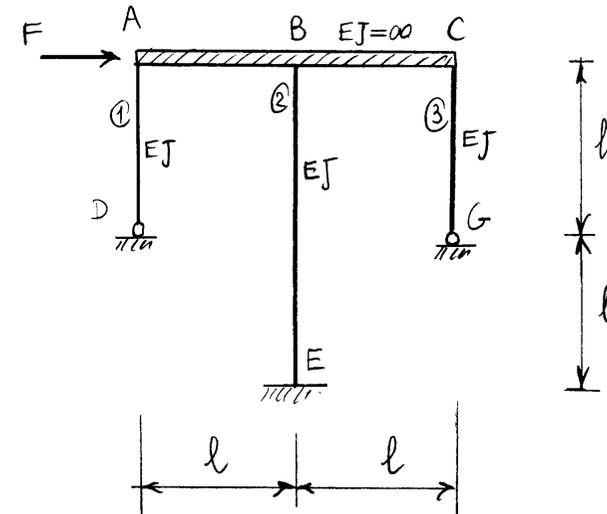
$$\begin{cases} \eta_A = -\frac{6}{11}\frac{Fl}{EA} \\ \bar{\varphi} = -\frac{8}{11}\frac{F}{EA} \end{cases}$$

e infine:

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{6}{11}F \\ V_2 = \frac{1}{11}F \\ V_3 = \frac{5}{11}F \end{cases}$$



4.3.2.3 Telaio simmetrico con traverso rigido e tre ritti

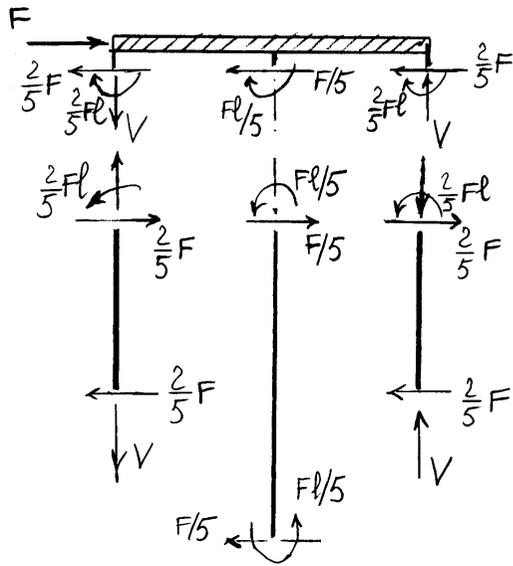


Rigidzze taglianti:  $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$ ,  $k_2 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l^3}$ ,  $k_3 = 3 \frac{EJ}{l^3}$ .

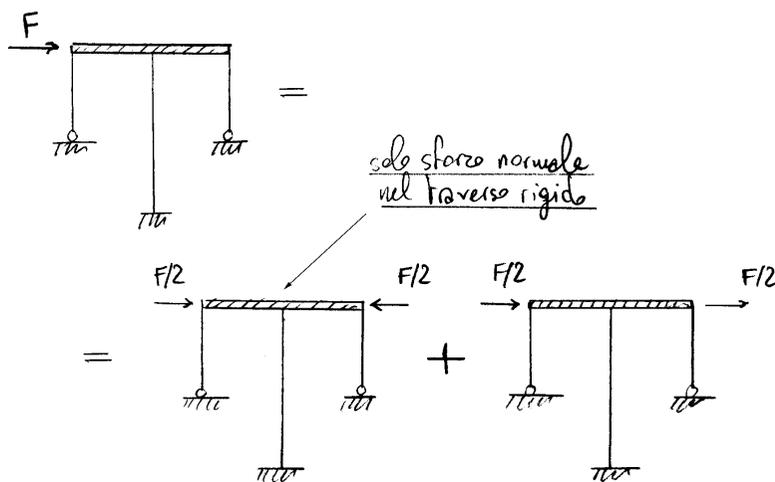
Rigidzza globale:  $k = \frac{15}{2} \frac{EJ}{l^3}$ .

Spostamento trasverso:  $\xi = \frac{F}{k} = \frac{2}{15} \frac{Fl^3}{EJ}$ .

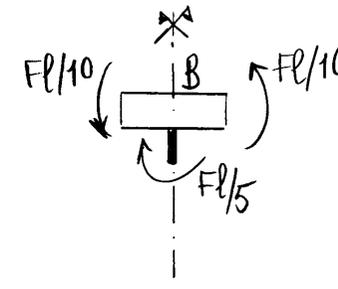
Coefficienti di ripartizione:  $c_1 = \frac{2}{5}$ ,  $c_2 = \frac{1}{5}$ ,  $c_3 = \frac{2}{5}$ .



La struttura è simmetrica e il carico può essere scisso nella somma di un carico simmetrico e di un carico antisimmetrico:

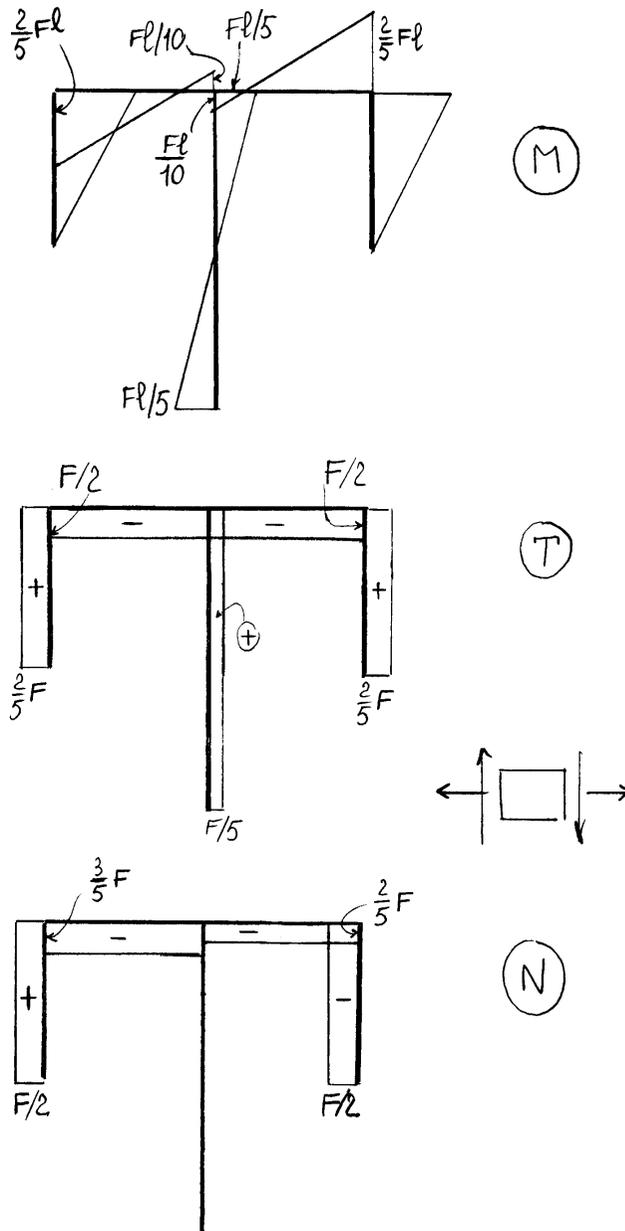


Ne consegue che in corrispondenza della sezione B posta sull'asse di simmetria il momento  $F\ell/5$  trasmesso dal ritto BE si sciinde in due quote emisimmetriche due pari a  $F\ell/10$ , lo sforzo normale nel ritto BE



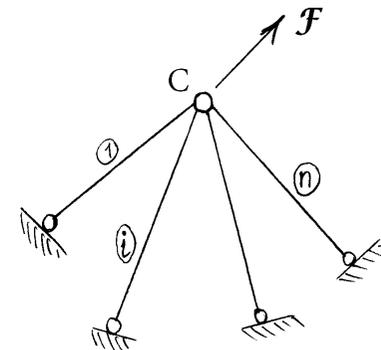
è nullo e gli sforzi normali nei ritti AD e CG sono emisimmetrici, uguali in modulo ed opposti in verso. L'equilibrio alla rotazione della trave richiede:

$$V = F/2 .$$



### 4.4 Sistema di pendoli connessi in un nodo

Si consideri un sistema di  $n$  pendoli connessi ad una estremità in un nodo cerniera C soggetto ad una forza concentrata  $\mathcal{F}$ . Il sistema è soggetto a solo sforzo normale e quindi occorre mettere in conto la deformabilità assiale. Escludendo il caso, labile, di due pendoli aventi la stessa direzione, il sistema è determinato dallo spostamento  $u_C$  del nodo, spostamento che diventa quindi l'unica incognita del metodo degli spostamenti.



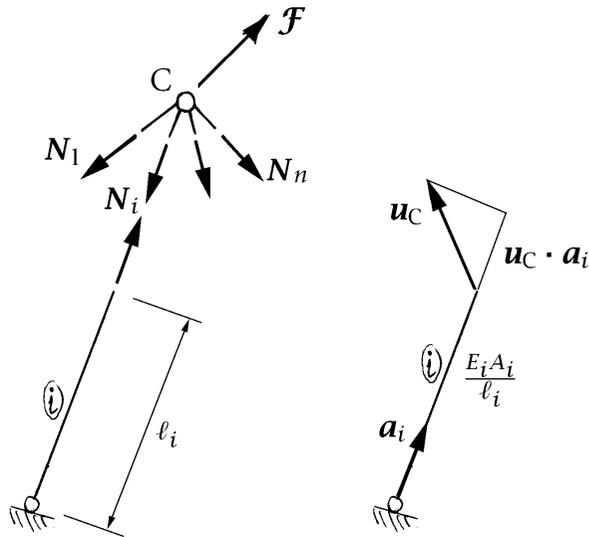
L'equazione vettoriale di equilibrio alla traslazione del nodo richiede:

$$\sum_i N_i = \mathcal{F},$$

dove  $N_i$  è la forza assiale trasmessa al nodo dall' $i$ -esimo pendolo, avente la direzione dell'asse del pendolo.

Occorre allora esprimere le forze assiali  $N_i$  in funzione dello spostamento  $u_C$  del nodo:

$$N_i = k_i u_C,$$



dove  $k_i$  è il *tensore di rigidezza assiale* dell' $i$ -esimo pendolo. Per esplicitare tale tensore si considerino i versori  $\mathbf{a}_i$  delle direzioni dei pendoli, di versi positivi uscenti dalle estremità dei pendoli, e le rigidezze assiali  $k_i = \frac{E_i A_i}{l_i}$  dei pendoli. Risulta:

$$\mathbf{N}_i = k_i (\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i = k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{u}_C,$$

poiché  $\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i$  è l'allungamento del pendolo. Il tensore di rigidezza assiale vale dunque:

$$\mathbf{k}_i = k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i),$$

L'equazione di equilibrio del nodo diventa quindi:

$$\sum_i \mathbf{k}_i \mathbf{u}_C = \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_C = \mathbf{k}_C^{-1} \mathcal{F},$$

dove:

$$\mathbf{k}_C = \sum_i k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i),$$

rappresenta il *tensore di rigidezza alla traslazione* del nodo C.

Gli sforzi normali  $N_i$  nei pendoli valgono quindi:

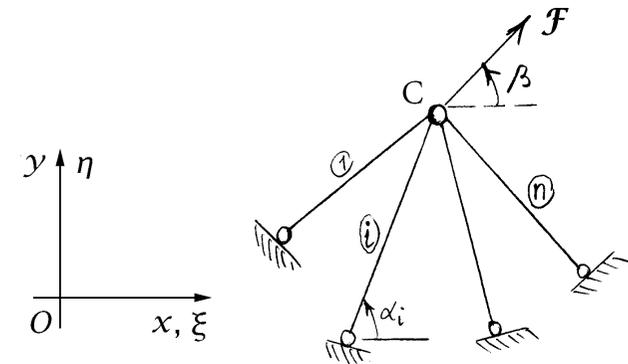
$$N_i = k_i (\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i) = k_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}_C^{-1} \mathcal{F}).$$

Si noti che l'analisi precedente vale in generale anche per i sistemi spaziali di pendoli connessi in un nodo.

Si consideri ora un sistema piano di pendoli connessi in un nodo e si assuma un sistema di riferimento piano  $Oxy$ . Sia poi  $\alpha_i$  l'angolo che individua l'asse dell' $i$ -esimo pendolo rispetto all'asse  $x$  e  $\beta$  l'analogo angolo che individua la retta d'azione della forza applicata  $\mathcal{F}$ . Le componenti del tensore  $\mathbf{k}_C$  di rigidezza risultano allora:

$$k_{xx} = \sum_i k_i \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_x = \sum_i k_i \cos^2 \alpha_i,$$

$$k_{yy} = \sum_i k_i \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_y = \sum_i k_i \sin^2 \alpha_i,$$



$$k_{xy} = k_{yx} = \sum_i k_i \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_y = \sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i.$$

Detto poi  $F$  il modulo della forza nodale  $\mathcal{F}$ , le componenti di questa risultano:

$$\{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} F \cos \beta \\ F \sin \beta \end{Bmatrix}.$$

Se infine  $\xi_C$  e  $\eta_C$  sono le componenti rispetto agli assi  $x$  e  $y$  dello spostamento  $\mathbf{u}_C$  del nodo, le equazioni scalari di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale risultano rispettivamente:

$$\begin{aligned} \left( \sum_i k_i \cos^2 \alpha_i \right) \xi_C + \left( \sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \eta_C &= F \cos \beta, \\ \left( \sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \xi_C + \left( \sum_i k_i \sin^2 \alpha_i \right) \eta_C &= F \sin \beta. \end{aligned}$$

## Capitolo 5

### Analisi del metodo delle forze per la soluzione dei sistemi iperstatici

#### 5.1 Struttura delle equazioni di congruenza

Se la struttura è  $n$  volte iperstatica, si sopprimono  $n$  vincoli (interni ed esterni) sovrabbondanti. Si ottiene così un sistema isostatico detto sistema principale.

Ai vincoli soppressi vengono sostituite le reazioni vincolari incognite  $X_i$ .

Il sistema effettivo e il sistema principale risultano identici staticamente e cinematicamente se alle  $X_i$  si attribuiscono i valori effettivi.

È chiaro che esistono diverse scelte riguardo agli

$n$  vincoli da sopprimere, dovendo questi soddisfare alla sola condizione di essere sovrabbondanti, e che ad ogni scelta corrisponde una diversa struttura principale.

Per valori arbitrari delle incognite iperstatiche  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) il sistema principale è equilibrato ma in generale non congruente, ovvero gli spostamenti  $u_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) corrispondenti ai vincoli soppressi non rispettano le condizioni imposte dai vincoli stessi nella struttura effettiva. Se con  $\bar{u}_i$  indichiamo lo spostamento imposto dal vincolo ( $\bar{u}_i = 0$  se il vincolo è rigido) le condizioni di congruenza si scrivono:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i=1, \dots, n)$$

Queste rappresentano  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $X_i$ . Se il vincolo è cedevole elasticamente  $\bar{u}_i$  dipende dalla  $X_i$ .

Vediamo di indagare la forma delle equazioni di congruenza, sia allo scopo di dedurre informazioni generali sulla risolubilità del sistema di equazioni che allo scopo di dedurre metodi generali per la scrittura dello stesso sistema di equazioni.

La struttura principale è soggetta ai carichi (eventualmente cedimenti elastici dei vincoli oppure a distorsioni di varia natura) e alle reazioni iperstatiche incognite  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Lo spostamento  $u_i$  può allora scriversi, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti:

$$u_i = u_{0i} + \sum_{j=1}^n c_{ij} X_j \quad (i=1, \dots, n),$$

dove  $u_{0i}$  rappresenta lo spostamento  $u_i$  nella struttura principale soggetta ai soli carichi (e/o distorsioni) mentre il generico coefficiente  $c_{ij}$ , detto cedevolezza, rappresenta lo spostamento  $u_i$  nella struttura principale soggetta al solo carico  $X_j = 1$ .

Per il teorema di Betti risulta:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Scritto il sistema risolvibile in forma matriciale

$$\underline{u}_0 + \underline{c} \underline{X} = \underline{\bar{u}},$$

la matrice  $\underline{c}$ , di cedevolezza, è quindi simmetrica:

$$\underline{c} = \underline{c}^T.$$

Non solo, ma poiché nella struttura principale soggetta alle sole  $X_i$  il lavoro di deformazione risulta:

$$L_e = \frac{1}{2} \underline{X}^T \underline{c} \underline{X},$$

dalla condizione

$$L_e \geq 0 \quad \& \quad (L_e = 0 \Leftrightarrow \underline{X} = \underline{0}),$$

si deduce che  $\underline{c}$  è definita positiva e quindi invertibile. Esiste perciò una e una sola soluzione del problema iperstatico:

$$\underline{X} = \underline{c}^{-1} (\underline{\bar{u}} - \underline{u}_0).$$

## 5.2 Scrittura delle equazioni di congruenza

Per la scrittura delle equazioni di congruenza, occorre determinare gli spostamenti  $u_i$  della struttura principale soggetta ai carichi e alle reazioni iperstatiche. Si può procedere per via cinematica (integrazione della linea elastica) oppure utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Procedendo con il principio dei lavori virtuali, al fine del calcolo dello spostamento  $u_i$  occorre considerare quale struttura fittizia delle forze la struttura principale soggetta alla  $X_i = 1$ . Occorre dunque considerare  $n$  strutture fittizie.

Limitandosi al caso piano, le caratteristiche della sollecitazione della struttura reale risultano pertanto:

$$\begin{cases} N^{(x)} = N^{(o)} + \sum_{i=1}^n X_i N^{(i)} \\ T^{(x)} = T^{(o)} + \sum_{i=1}^n X_i T^{(i)} \\ M^{(x)} = M^{(o)} + \sum_{i=1}^n X_i M^{(i)} \end{cases}$$

dove  $N^{(o)}$ ,  $T^{(o)}$  e  $M^{(o)}$  sono le caratteristiche della sollecitazione dovuta ai soli carichi e  $N^{(i)}$ ,  $T^{(i)}$  e  $M^{(i)}$  sono le caratteristiche della sollecitazione nella  $i$ -esima struttura fittizia.

Le caratteristiche della deformazione nella struttura reale valgono quindi:

$$\varepsilon^{(x)} = \varepsilon^{(d)} + \frac{N^{(o)}}{EA} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i N^{(i)}}{EA}$$

$$\gamma^{(x)} = \gamma^{(d)} + \chi \frac{T^{(o)}}{GA} + \sum_{i=1}^n \chi \frac{X_i T^{(i)}}{GA}$$

$$K^{(x)} = K^{(d)} + \frac{M^{(o)}}{EJ} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i M^{(i)}}{EJ},$$

dove  $\varepsilon^{(d)}$ ,  $\gamma^{(d)}$  e  $K^{(d)}$  sono gli effetti delle distorsioni sulla struttura principale. Gli spostamenti cercati risultano dunque:

$$u_i = \int_s \left\{ \begin{aligned} & N^{(i)} \left( \varepsilon^{(d)} + \frac{N^{(o)}}{EA} \right) \\ & + T^{(i)} \left( \gamma^{(d)} + \chi \frac{T^{(o)}}{GA} \right) \\ & + M^{(i)} \left( K^{(d)} + \frac{M^{(o)}}{EJ} \right) \end{aligned} \right\} ds \quad \left. \vphantom{\int_s} \right\} u_{oi}$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^n X_j \int_s \left\{ \frac{N^{(i)} N^{(j)}}{EA} + \chi \frac{T^{(i)} T^{(j)}}{GA} + \frac{M^{(i)} M^{(j)}}{EJ} \right\} ds}_{c_{ij}}$$

### 5.3 Indeformabilità assiale

Nel caso in cui si trascuri l'indeformabilità assiale delle travi, l'iperstaticità del sistema da mettere in conto è solo quella di tipo flessionale. Ovvero, non occorre tenere conto delle iperstaticità dovute a vincoli di tipo assiale, cioè a vincoli che, a seguito della indeformabilità assiale delle aste, non modificano il modo di deformarsi della struttura. Se  $n$  è l'iperstaticità del sistema,  $n_f$  l'iperstaticità di tipo flessionale e  $n_a$  quella di tipo assiale, risulta:

$$n = n_a + n_f.$$

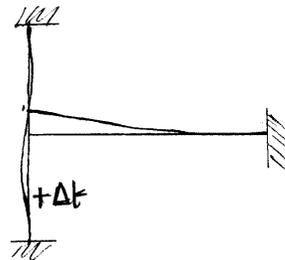
La struttura principale si ottiene eliminando  $n_f$  vincoli flessionali sovrabbondanti. La struttura

principale risulta determinata per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione di tipo flessionale, e cioè taglio  $T$  e momento  $M$ , mentre continua ad essere  $n_a$  volte iperstatica riguardo allo sforzo normale, sforzo che non influisce sul modo di deformarsi della struttura. Se  $n_a = 0$ , una volta risolto il problema iperstatico di tipo flessionale, è possibile determinare lo sforzo normale per via del solo equilibrio. Se  $n_a \neq 0$  questo non è possibile. Occorre allora rinvocare l'ipotesi di indeformabilità assiale nella struttura principale caricata dalle forze esterne più le reazioni iperstatiche di tipo flessionale già determinate, e scegliere quindi una nuova struttura principale, questa volta effettivamente isostatica, eliminando  $n_a$  vincoli sovrabbondanti.

Quando si trascura la deformabilità assiale delle aste, oltre alla deformazione dovuta al taglio, il principio dei lavori virtuali si scrive:

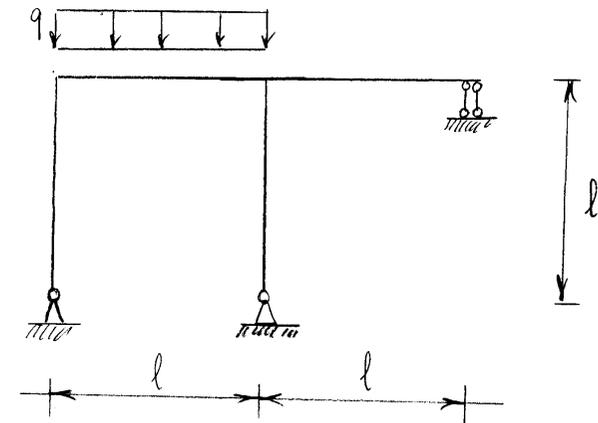
$$u_i = \int_s \left\{ N^{(i)} \varepsilon^{(d)} + T^{(i)} \gamma^{(d)} + M^{(i)} \left( \kappa^{(d)} + \frac{M^{(q)}}{EJ} \right) \right\} ds + \sum_{j=1}^{n_p} X_j \int_s \frac{M^{(i)} M^{(j)}}{EJ} ds \quad (i=1, \dots, n_f)$$

Osservare che nelle aste soggette ad una distorsione  $\varepsilon^{(d)}$  di tipo assiale lo sforzo normale deve essere staticamente determinato (nella struttura principale). In caso contrario, per rendere determinato il problema, occorre rimuovere anche degli

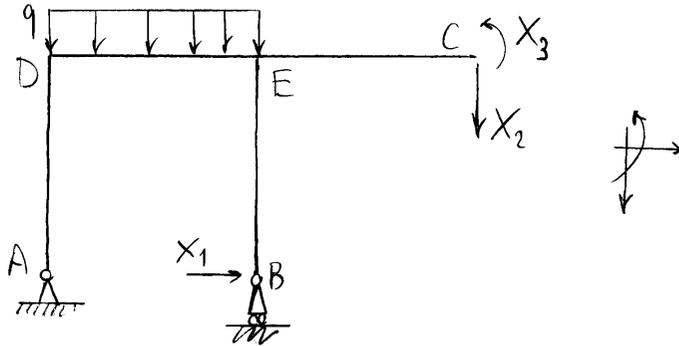


opportuni vincoli di tipo assiale e supporti deformabili assialmente tutte le aste interessate da tali vincoli, come nel caso illustrato in figura.

### 5.4 Esempio: telaio a un nodo spostabile



Struttura principale



Configurazione equilibrata dovuta al carico e alle tre forze  $X_1, X_2$  ed  $X_3$

In generale non congruente per valori arbitrari di  $X_1, X_2$  ed  $X_3$

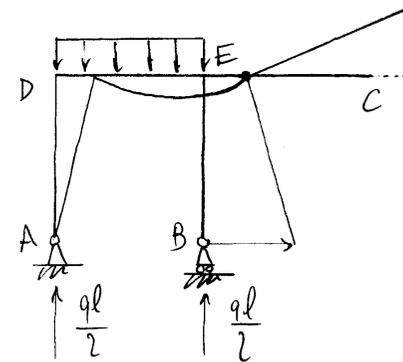
Anche congruente se  $X_1, X_2$  ed  $X_3$  sono i valori che assumono le incognite iperstatiche

Condizioni di congruenza (sugli spostamenti duali delle incognite)

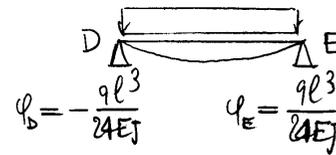
$$\begin{cases} u_B = 0 \\ v_C = 0 \\ \varphi_C = 0 \end{cases}$$

Spostamenti calcolati utilizzando il metodo cinematico (composizione degli spostamenti)

(0) Sole forze esterne :



$$\begin{cases} u_B^{(0)} = \frac{ql^4}{12EJ} \\ v_C^{(0)} = -\frac{ql^4}{24EJ} \\ \varphi_C^{(0)} = \frac{ql^3}{24EJ} \end{cases}$$



$\varphi_A = \varphi_D$  (congruenza in D)

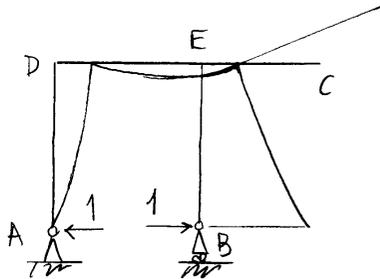
$$\varphi_D = \varphi_E = \varphi_C = -\varphi_D l = \frac{ql^4}{24EJ}$$

$$\varphi_C = \varphi_E = \frac{ql^3}{24EJ} \text{ (tracce appoggiate)}$$

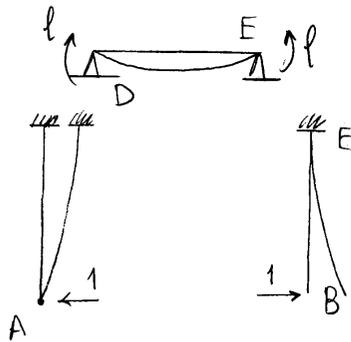
$$v_B = v_E + \varphi_E l = \frac{ql^4}{12EJ}$$

$$v_C = -\varphi_E l = -\frac{ql^4}{24EJ}$$

(1) Sola forza  $X_1$  unitaria:



$$\begin{cases} v_B^{(1)} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ} \\ v_C^{(1)} = -\frac{l^3}{2EJ} \\ \varphi_C^{(1)} = \frac{l^2}{2EJ} \end{cases}$$



$$\varphi_D = -\frac{l^2}{2EJ} \quad \varphi_C = \varphi_E = \frac{l^2}{2EJ}$$

$$\varphi_A = -\frac{l^2}{2EJ} + \varphi_D = -\frac{l^2}{EJ}$$

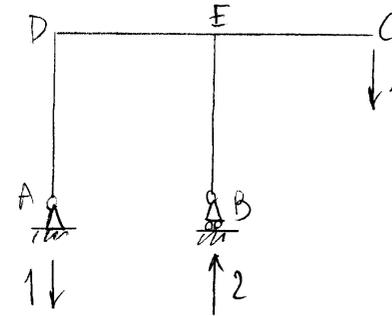
$$u_A = 0$$

$$v_D = v_E = v_C = \frac{l^3}{3EJ} - \varphi_D l = \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ}$$

$$v_B = v_E + \varphi_E l + \frac{l^3}{3EJ} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{l^3}{EJ} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$v_C = -\varphi_E l = -\frac{l^3}{2EJ}$$

(2) Sola forza  $X_2$  unitaria:



$$\begin{cases} v_B^{(2)} = -\frac{l^3}{2EJ} \\ v_C^{(2)} = +\frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ} \\ \varphi_C^{(2)} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ} \end{cases}$$



$$\varphi_A = \varphi_D = +\frac{l^2}{6EJ}$$

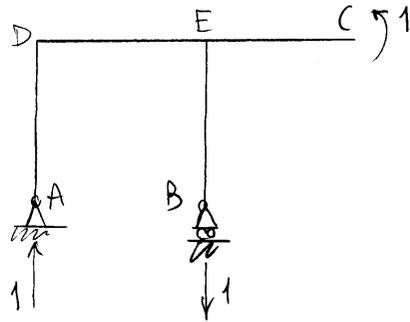
$$v_D = v_E = v_C = -\varphi_D l = -\frac{l^3}{6EJ}$$

$$\varphi_E = \frac{-l^2}{3EJ} \Rightarrow v_B = v_E + \varphi_E l = -\frac{l^3}{2EJ}$$

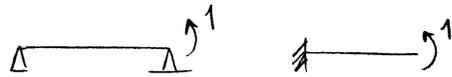
$$v_C = +\frac{l^3}{3EJ} - \varphi_E l = +\frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = \varphi_E - \frac{l^2}{2EJ} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ}$$

(3) Sola  $X_3$  unitaria



$$\begin{cases} v_B^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ} \\ v_C^{(3)} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ} \\ \varphi_C^{(3)} = \frac{4}{3} \frac{l}{EJ} \end{cases}$$



$$\varphi_A = \varphi_D = -\frac{l}{6EJ} \quad \varphi_E = \varphi_B = \frac{l}{3EJ}$$

$$\varphi_C = \varphi_E + \frac{l}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{l}{EJ}$$

$$v_D = v_E = v_C = -\varphi_A l = \frac{l^2}{6EJ}$$

$$v_B = v_E + \varphi_E l = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \frac{l^2}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ}$$

$$v_C = -\varphi_E l - \frac{l^2}{2EJ} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{l^2}{EJ} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ}$$

Matrice di cedevolezza:

$$\underline{c} = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 10l^2 & -3l^2 & 3l \\ -3l^2 & 4l^2 & -5l \\ 3l & -5l & 8 \end{bmatrix}$$

Spostamenti dovuti ai soli carichi esterni:

$$\underline{u}_0 = \frac{ql^3}{24EJ} \begin{Bmatrix} 2l \\ -l \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{ql^2}{4} \begin{Bmatrix} 2l \\ -l \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10l^2 & -3l^2 & 3l \\ -3l^2 & 4l^2 & -5l \\ 3l & -5l & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equazioni risolventi:

$$\begin{cases} 20X_1l - 6X_2l + 6X_3 = -ql^2 \\ 12X_1l - 16X_2l + 20X_3 = -ql^2 \\ 12X_1l - 20X_2l + 32X_3 = -ql^2 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla seconda:

$$4x_2 l - 12x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \frac{x_3}{l} .$$

Sostituendo nella prima e nella seconda:

$$20x_1 l - 12x_3 = -ql^2 .$$

$$12x_1 l - 28x_3 = -ql^2 .$$

Sottraendo la seconda di queste dalla prima di queste:

$$8x_1 l + 16x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \frac{x_3}{l} ,$$

e infine:

$$-40x_3 - 12x_3 = -ql^2 \Rightarrow x_3 = \frac{ql^2}{52} .$$

Soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{ql}{26} \\ x_2 = \frac{3}{52} ql \\ x_3 = \frac{ql^2}{52} \end{cases} .$$

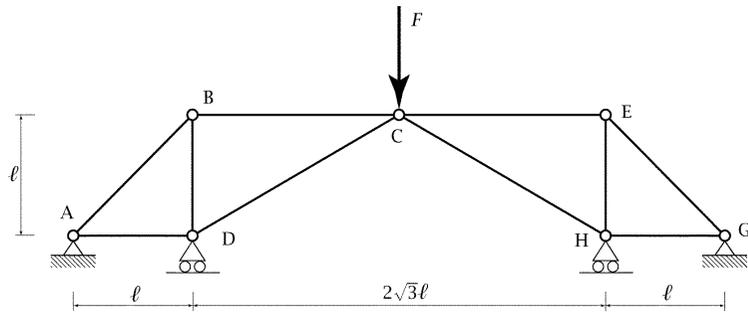
Spostamenti:

$$\begin{cases} \xi = \frac{ql^4}{24EJ} + \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ} x_1 - \frac{l^3}{6EJ} x_2 + \frac{l^2}{6EJ} x_3 \\ \eta_D = -\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{l^2}{2EJ} x_1 + \frac{l^2}{6EJ} x_2 - \frac{l}{6EJ} x_3 \\ \eta_E = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{l^2}{2EJ} x_1 - \frac{l^2}{3EJ} x_2 + \frac{l}{3EJ} x_3 \end{cases} ,$$

e quindi:

$$\begin{cases} \xi = \left( \frac{1}{24} - \frac{5}{6 \times 26} - \frac{3}{6 \times 52} + \frac{1}{6 \times 52} \right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{ql^4}{312EJ} \\ \eta_D = \left( -\frac{1}{24} + \frac{1}{2 \times 26} + \frac{3}{6 \times 52} - \frac{1}{6 \times 52} \right) \frac{ql^3}{EJ} = -\frac{5ql^3}{312EJ} \\ \eta_E = \left( \frac{1}{24} - \frac{1}{2 \times 26} - \frac{3}{3 \times 52} + \frac{1}{3 \times 52} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{ql^3}{104EJ} \end{cases} .$$

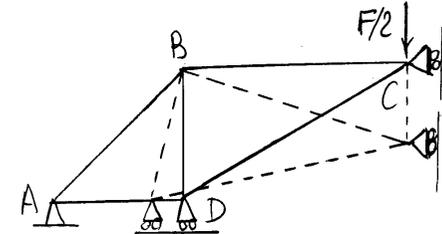
### 5.5 Esempio: Struttura reticolare



- 1) Risolvere la struttura reticolare iperstatica sopra illustrata utilizzando il metodo delle forze, scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali e supponendo che tutte le aste abbiano area uguale;
- 2) Compilare una tabella riassuntiva che riporti lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
- 3) Calcolare con il metodo cinematico gli spostamenti dei punti B, C e D;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura e calcolare l'energia elastica di deformazione.

### Soluzione di confronto

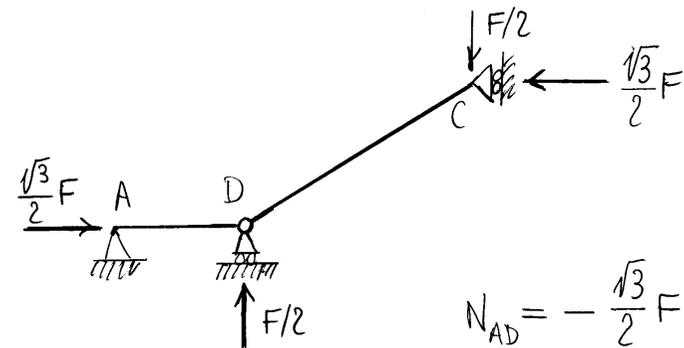
Risulta possibile deformare le aste AD e CD senza deformare le restanti aste soddisfacendo le



condizioni imposte dai vincoli.

Dato che il nodo B non è caricato risulta quindi

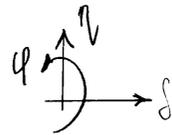
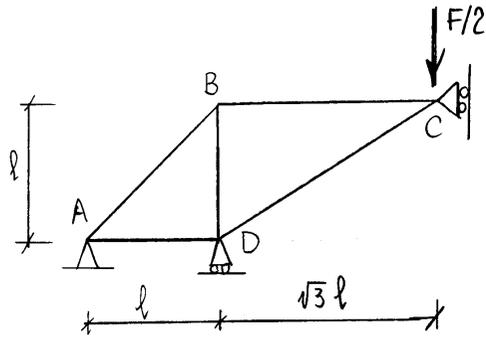
possibile assorbire il carico  $F/2$  tramite le aste AD e CD soddisfacendo la congruenza e ottenendo così la soluzione del sistema iperstatico.



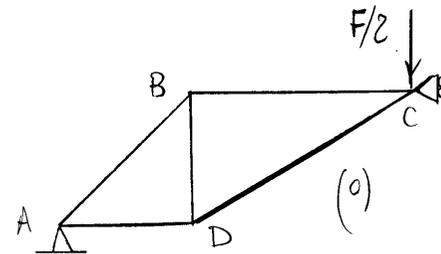
$$N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

$$N_{CD} = -F$$

Soluzione col metodo delle forze

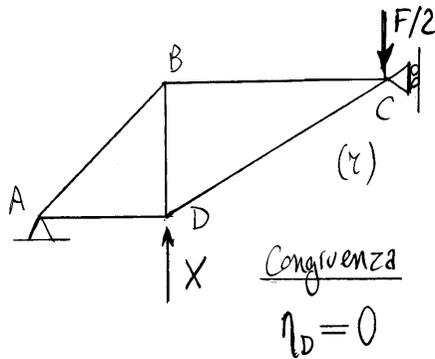
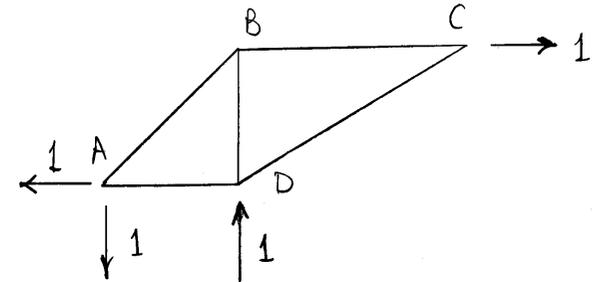


Struttura equivalente per simmetria



Struttura principale soggetta alle sole forze esterne

Schema (F)

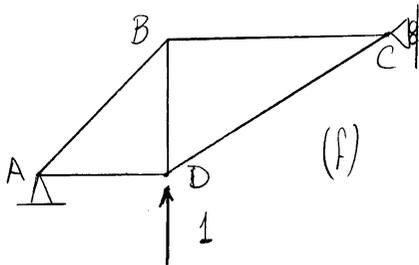


Struttura principale  
(schema degli spostamenti - deformazioni congruenti)

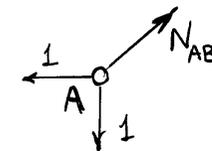
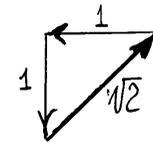
Equilibrio nodo C  $\Rightarrow$  Asta CD scarica,  $N_{BC} = 1$

Equilibrio nodo D  $\Rightarrow$  Asta AD scarica,  $N_{BD} = -1$

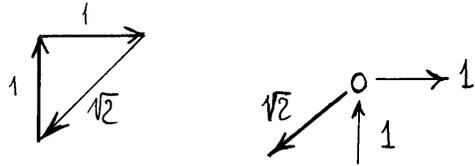
Equilibrio nodo A  $\Rightarrow N_{AB} = \sqrt{2}$



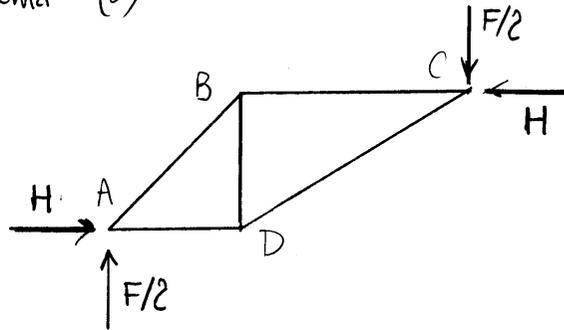
schema delle forze - caratteristiche della sollecitazione equilibrate  
(per il calcolo di  $n_D$  nella struttura principale)



Equilibrio nodo B (per controllo)

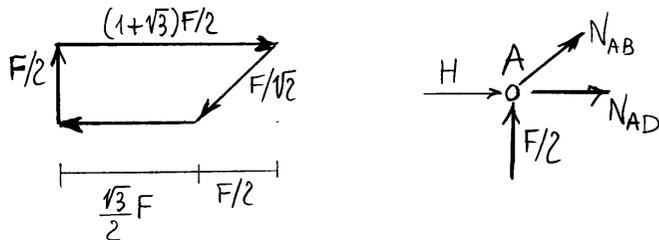


Schema (o)



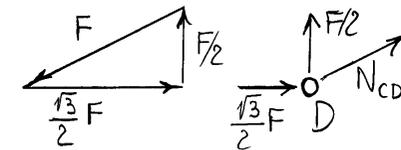
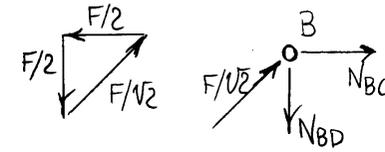
$$Hl = \frac{F}{2}(1+\sqrt{3})l \Rightarrow H = \frac{1+\sqrt{3}}{2}F$$

Equilibrio nodo A  $\Rightarrow N_{AB} = -F/\sqrt{2}, N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$



Equilibri nodi B e D

$$N_{BC} = -\frac{F}{2}, N_{BD} = \frac{F}{2}, N_{CD} = -F$$



Equilibrio nodo C (per controllo)

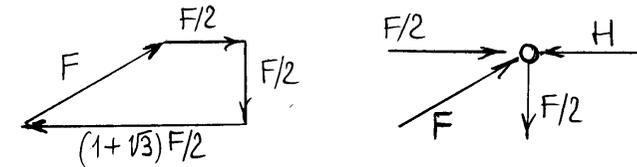


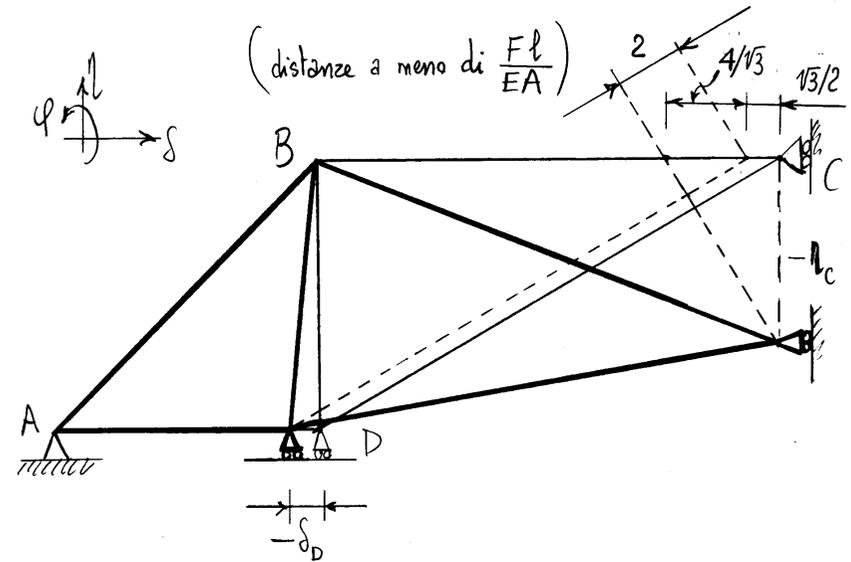
Tabella riassuntiva

					$X = F/2$	
Asta	$l_i$	$N^{(F)}$	$N^{(0)}$	$N^{(x)}$	Tipo	$N$ (in moduli)
AB	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}$	$-\frac{F}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}}$	Scarica	0
AD	$l$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	Puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2}F$
BD	$l$	-1	$\frac{F}{2}$	$-X + \frac{F}{2}$	Scarica	0
BC	$\sqrt{3}l$	1	$-\frac{F}{2}$	$X - \frac{F}{2}$	Scarica	0
CD	$2l$	0	-F	-F	Puntone	F

Principio dei lavori virtuali:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \eta_D &= \sum_{\text{aste } i} N_i^{(F)} \frac{N_i^{(x)} l_i}{EA} \\
 &= \frac{l}{EA} \left\{ \sqrt{2} \left( \sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} - 1 \left( -X + \frac{F}{2} \right) + 1 \left( X - \frac{F}{2} \right) \sqrt{3} \right\} \\
 &= (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \frac{l}{EA} \left( X - \frac{F}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\eta_D = 0 \Rightarrow X = \frac{F}{2}$$



$$-\delta_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$-\eta_C = \sqrt{3} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \eta_C = \frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$\delta_B = \eta_B = 0$$

Lavoro di deformazione (su tutta la struttura)

$$L_d = \frac{1}{2} \sum_{\text{aste}} i \frac{N_i^2 l_i}{EA} = \frac{l}{EA} \left\{ \frac{3}{4} F^2 + 2F^2 \right\} = \frac{11}{4} \frac{F^2 l}{EA}$$

Verifica con il teorema di Clapeyron

$$L_d = -\frac{1}{2} F \eta_c = \frac{11}{4} \frac{F^2 l}{EA}$$



## Capitolo 6

### Analisi del metodo degli spostamenti per la soluzione dei sistemi iperstatici

#### 6.1 Struttura delle equazioni risolventi

Si assumono come incognite del problema gli spostamenti (generalizzati) dei nodi della struttura, cioè dei punti intersezione delle singole travi. Conoscendo tali spostamenti è possibile determinare univocamente lo stato di deformazione e di sollecitazione in ogni sezione della struttura integrando l'equazione della linea elastica per ogni trave della struttura.

Siano  $u_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) gli spostamenti dei nodi (imposti) e siano  $R_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) le relative reazioni vincolari (tenere presente che imporre condizioni cinematiche

equivale ad imporre dei vincoli), ovvero sia le forze che occorre applicare ai nodi per ottenere gli spostamenti  $u_i$ .

Per valori arbitrari degli spostamenti  $u_i$  incogniti la deformata della struttura è congruente ma in generale non equilibrata, ovvero sia le reazioni  $R_i$  associate non coincidono con le forze effettivamente applicate nei nodi. Se con  $F_i$  indichiamo le forze applicate in corrispondenza dei nodi ( $F_i=0$  se i nodi sono scarichi) le equazioni risolventi si scrivono pertanto:

$$(1) \quad R_i = F_i \quad (i=1, \dots, n),$$

con le  $F_i$  che si ritengono indipendenti dalle  $u_i$ . Queste equazioni costituiscono un sistema di  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $u_i$ , e hanno il significato di equazioni di equilibrio dei nodi, nodi che sono appunto soggetti alle

forze  $F_i$  e a cui le aste trasmettono le forze  $-R_i$ .

Vediamo di indovinare la forma delle equazioni di equilibrio. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la reazione  $R_i$  può scriversi:

$$R_i = R_{oi} + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j \quad (i=1, \dots, n),$$

dove le  $R_{oi}$  rappresentano le reazioni  $R_i$  in corrispondenza della scelta  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ , avvenuta nella struttura con i nodi impediti di muoversi, e per tale motivo sono dette reazioni di incastro perfetto. Inoltre il generico coefficiente  $k_{ij}$  rappresenta la reazione  $R_i$  nella struttura scaria con tutti i movimenti di nodo impediti salvo  $u_j = 1$ , cioè rappresenta una rigidezza della struttura, dimensionalmente una forza per unità di spostamento (generalizzato).

In forma matriciale il sistema si scrive:

$$\mathbf{R}_o + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{F}.$$

La matrice  $\mathbf{k}$  è detta *matrice delle rigidezze* e risulta essere simmetrica:

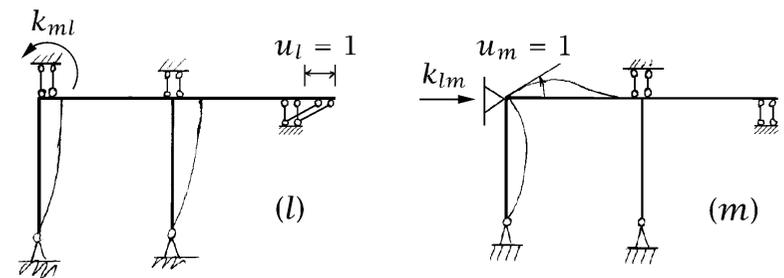
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^T.$$

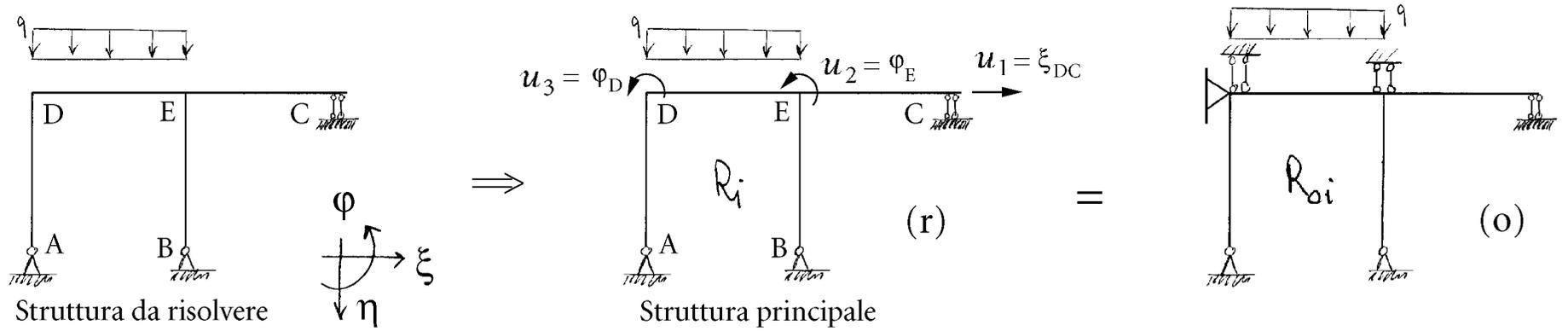
Infatti, si applichi il teorema di Betti alla struttura  $(l)$  soggetta all' $l$ -esimo spostamento di nodo unitario ( $u_l = 1$ ) e a tutti gli altri spostamenti nulli, e alla struttura  $(m)$  analogamente soggetta all' $m$ -esimo spostamento di nodo unitario ( $u_m = 1$ ) e a tutti gli altri spostamenti nulli. La struttura  $(m)$  è soggetta alle rigidezze  $k_{im}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e il loro lavoro per gli spostamenti del sistema  $(l)$ , che rappresenta il lavoro mutuo  $L_{ml}$ , vale:

$$L_{ml} = k_{lm} \times 1.$$

Analogamente il lavoro mutuo che compiono le forze del sistema  $(l)$  per gli spostamenti del sistema  $(m)$  valgono:

$$L_{lm} = k_{ml} \times 1,$$





Sovrapposizione degli effetti che conduce alle equazioni

$$R_i = R_{oi} + k_{i1} \xi_{DC} + k_{i2} \varphi_E + k_{i3} \varphi_D \quad (i = 1, 2, \dots, 3)$$

e quindi risulta:

$$k_{lm} = k_{ml},$$

come volevasi dimostrare.

Il sistema risolvibile può anche scriversi nella forma:

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{R}_0,$$

dove le forze  $-\mathbf{R}_0$  sono le reazioni di incastro perfetto cambiate di segno.

Se si considera la struttura soggetta ai soli movimenti di nodo (forze esterne nulle, cioè  $\mathbf{R}_0 = 0$ ), le reazioni  $\mathbf{R}$  valgono

$$\mathbf{R} = \mathbf{k} \mathbf{u},$$

e il lavoro di deformazione, per il teorema di Clapeyron, risulta:

$$L_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}.$$

La condizione  $L_e \geq 0$  e ( $L_e = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$ ) impone a  $\mathbf{k}$  di essere definita positiva.

E' allora possibile ottenere la soluzione nella forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{R}_0).$$

## 6.2 Scrittura delle equazioni di equilibrio

Per determinare le reazioni  $\mathbf{R}_0$  di incastro perfetto e i coefficienti della matrice si può procedere via integrazione della linea elastica oppure utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Nel caso si utilizzi il principio dei lavori virtuali occorre assumere quale struttura delle forze equilibrate quella reale, mentre la  $i$ -esima struttura fittizia congruente sarà individuata dallo spostamento  $u_i = 1$  e da tutti gli altri spostamenti  $u_j = 0$  ( $j \neq i$ ).

Le caratteristiche della sollecitazione della struttura reale risultano:

$$N^{(r)} = N^{(0)} + \sum_{i=1}^n N^{(i)} u_i,$$

$$T(x) = T^{(0)} + \sum_{i=1}^n T^{(i)} u_i,$$

$$M(x) = M^{(0)} + \sum_{i=1}^n M^{(i)} u_i,$$

dove  $N^{(0)}$ ,  $T^{(0)}$ ,  $M^{(0)}$  sono le caratteristiche della sollecitazione dovuta ai soli carichi (ed eventualmente dovute alle distorsioni imposte) sulla struttura con i nodi bloccati ( $u_i = 0$ ,  $i=1, \dots, n$ ), mentre  $N^{(i)}$ ,  $T^{(i)}$ ,  $M^{(i)}$  sono le caratteristiche della sollecitazione nella  $i$ -esima struttura fittizia ( $u_i = 1$ ,  $u_j = 0$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $j \neq i$ ). Le caratteristiche della deformazione nella  $i$ -esima struttura fittizia risultano

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{EA},$$

$$\gamma_C^{(i)} = \frac{\chi T^{(i)}}{GA},$$

$$\kappa^{(i)} = \frac{M^{(i)}}{EJ}.$$

Il lavoro virtuale esterno relativo alla  $i$ -esima struttura congruente vale:

$$L_{ve} = R_i \times 1 + \int_{\ell} (qv^{(i)} + pw^{(i)} + m\varphi^{(i)}) ds + \sum_h (Q_h v_h^{(i)} + P_h w_h^{(i)} + \mathcal{M}_h \varphi_h^{(i)}),$$

dove le  $R_i$  sono le reazioni nella struttura reale soggetta ai carichi  $q(s)$ ,  $p(s)$  e  $m(s)$  distribuiti, ai carichi  $Q_h$ ,  $P_h$  e  $\mathcal{M}_h$  concentrati nei punti  $P_h$  e ai vincoli  $u_i$ .

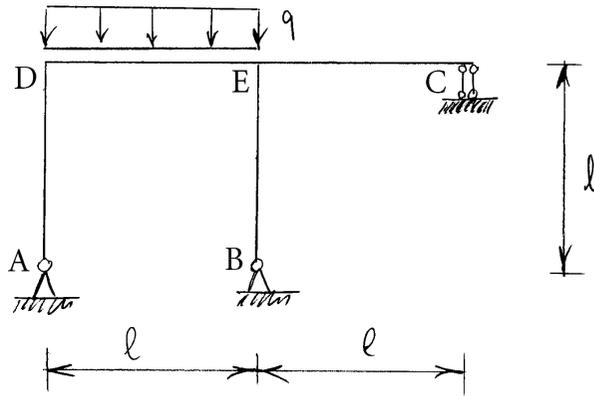
Uguagliando il lavoro virtuale esterno a quello interno si ottiene infine:

$$R_i = \int_{\ell} \left( \frac{N^{(0)} N^{(i)}}{EA} + \frac{M^{(0)} M^{(i)}}{EJ} \right) ds + \int_{\ell} (qv^{(i)} + pw^{(i)} + m\varphi^{(i)}) ds - \sum_h (Q_h v_h^{(i)} + P_h w_h^{(i)} + \mathcal{M}_h \varphi_h^{(i)}) \left. \vphantom{\int_{\ell}} \right\} R_{oi}$$

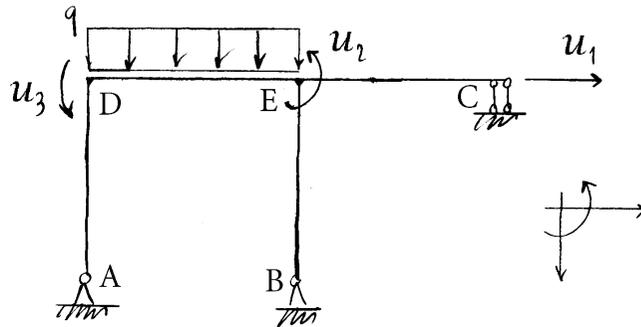
$$+ \sum_{j=1}^n u_j \underbrace{\int_{\ell} \left( \frac{N^{(j)} N^{(i)}}{EA} + \frac{M^{(j)} M^{(i)}}{EJ} \right) ds}_{k_{ij}}.$$

### 6.3 Esempio di un telaio a un nodo spostabile risolto col metodo degli spostamenti

Telaio a un nodo spostabile soggetto ad un carico distribuito



Struttura principale (metodo degli spostamenti)



Configurazione congruente dovuta al carico e ai tre spostamenti impressi  $u_1, u_2$  e  $u_3$  di nodo.

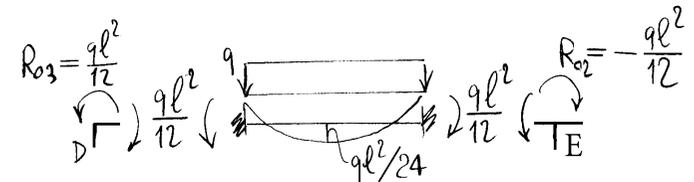
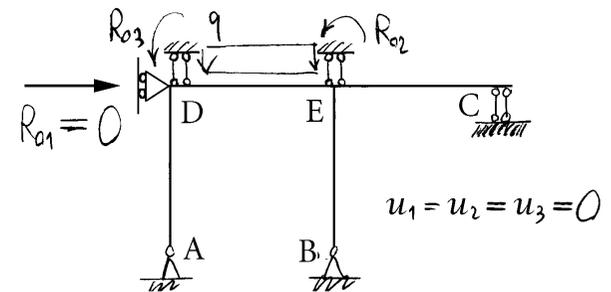
In generale non equilibrata per valori arbitrari di  $u_1, u_2$  e  $u_3$ .

Anche equilibrata se  $u_1, u_2$  e  $u_3$  sono i valori che assumono gli spostamenti reali.

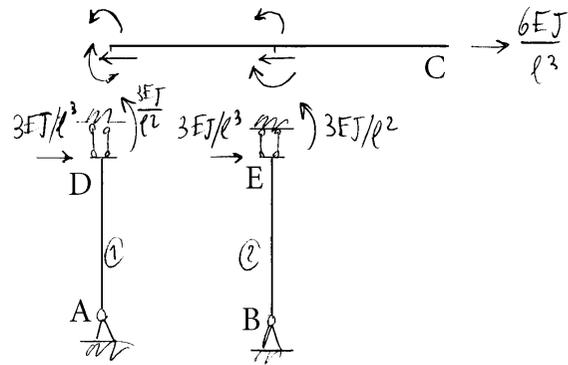
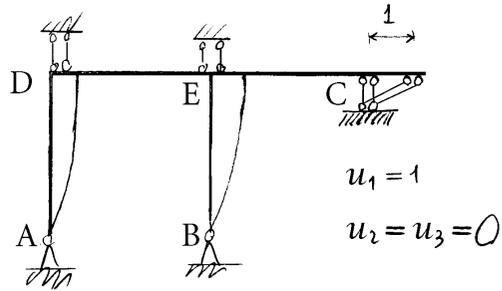
Condizioni di equilibrio (sulle reazioni duali degli spostamenti)

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Reazioni di incastro perfetta :



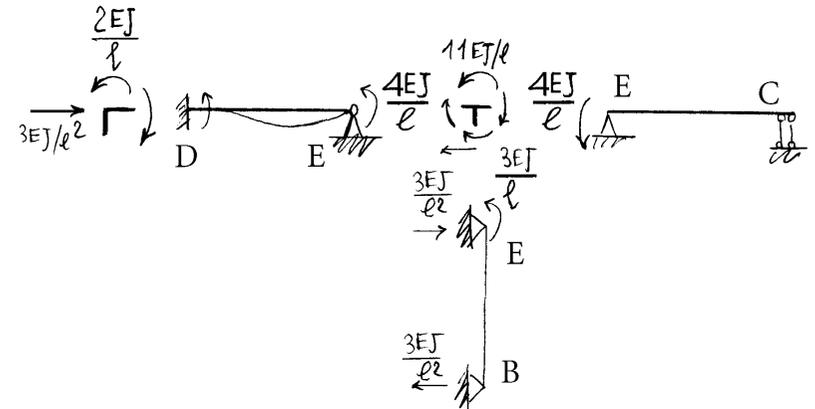
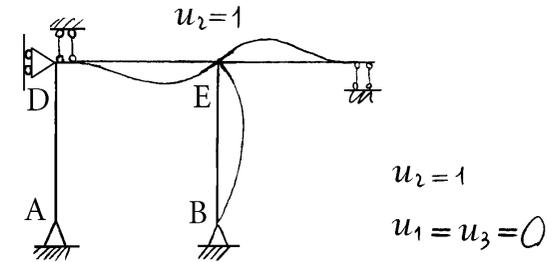
(1) Spostamento impresso  $u_1$  unitario :



$$k_{11} = \frac{6EJ}{l^3}$$

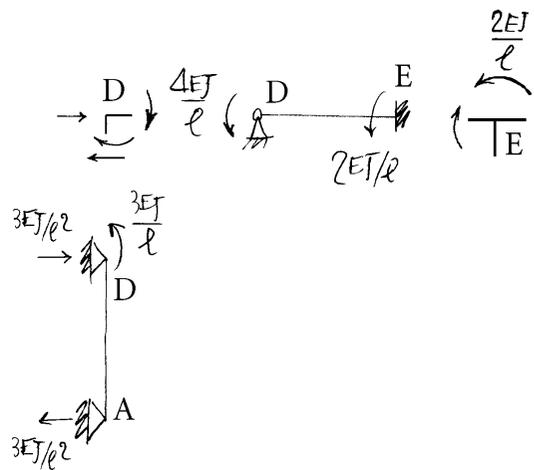
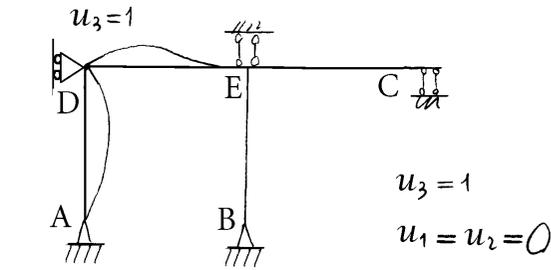
$$k_{13} = k_{12} = \frac{3EJ}{l^2}$$

(2) Spostamento impresso  $u_2$  unitario :



$$\begin{cases} k_{12} = 3EJ/l^2 \\ k_{22} = 11EJ/l \\ k_{32} = 2EJ/l \end{cases}$$

(3) Spostamento impresso  $\xi_3$  unitario:



$$\begin{cases} k_{13} = \frac{3EJ}{l^2} \\ k_{23} = \frac{2EJ}{l} \\ k_{33} = \frac{7EJ}{l} \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio:

$$\frac{ql^2}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & 3l \\ 3l & 11l^2 & 2l^2 \\ 3l & 2l^2 & 7l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sviluppando si ottiene:

$$\begin{cases} (i) & 6u_1 + 3lu_2 + 3lu_3 = 0 \\ (ii) & 3u_1 + 11lu_2 + 2lu_3 = +\frac{ql^4}{12EJ} \\ (iii) & 3u_1 + 2lu_2 + 7lu_3 = -\frac{ql^4}{12EJ} \end{cases}$$

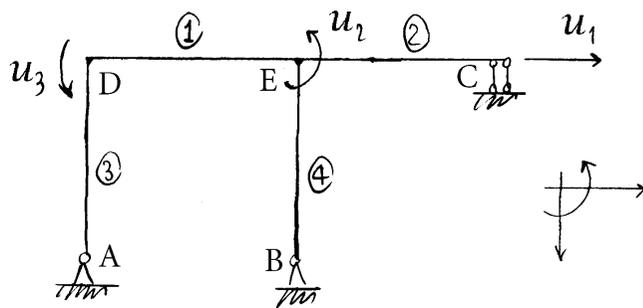
e manipolando tali equazioni si ha poi:

$$\begin{cases} (iv) & u_2 + u_3 = -2\frac{u_1}{l}, \quad (\text{dalla } i) \\ (v) & 13u_2 + 9u_3 = -6\frac{u_1}{l}, \quad (\text{sommando la ii alla iii}) \\ (vi) & 10u_2 + 6u_3 = 0, \quad (\text{togliendo la iv moltiplicata per 3 dalla v}) \\ (vii) & u_2 = -\frac{3}{5}u_3, \quad (\text{dalla vi}) \\ (viii) & u_1 = -\frac{1}{5}u_3l. \quad (\text{dalla v con la vii}) \end{cases}$$

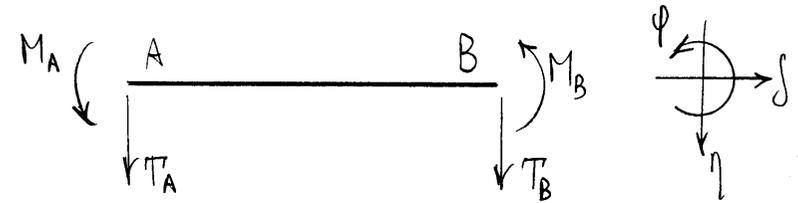
Inserendo le (vii) e (viii) nella (ii) si ottiene infine:

$$\begin{cases} u_3 = -\frac{5}{312} \frac{q l^3}{EJ} \\ u_1 = \frac{1}{312} \frac{q l^4}{EJ} \\ u_2 = \frac{1}{104} \frac{q l^3}{EJ} \end{cases}$$

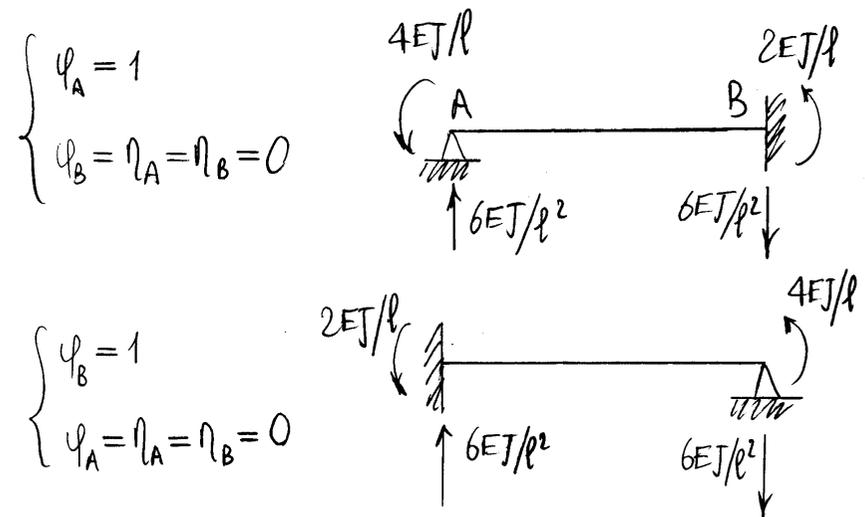
**6.4 Costruzione della matrice di rigidezza per assemblaggio delle matrici delle singole travi: un esempio**

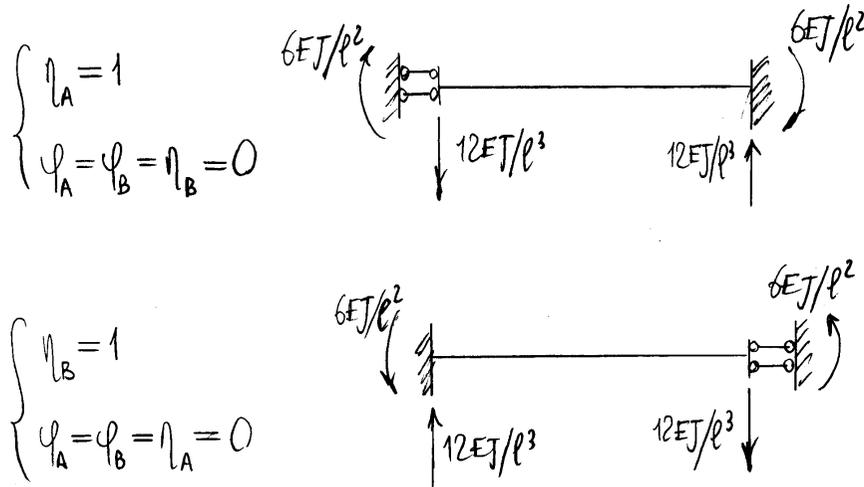


**6.4.1 Matrice di rigidezza di una trave inflessa con tutti i movimenti di nodo vincolati**



Generazione delle colonne della matrice della rigidezza dell'asta:

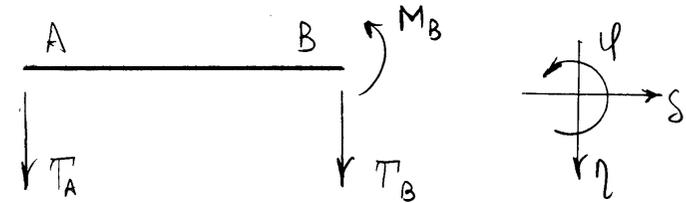




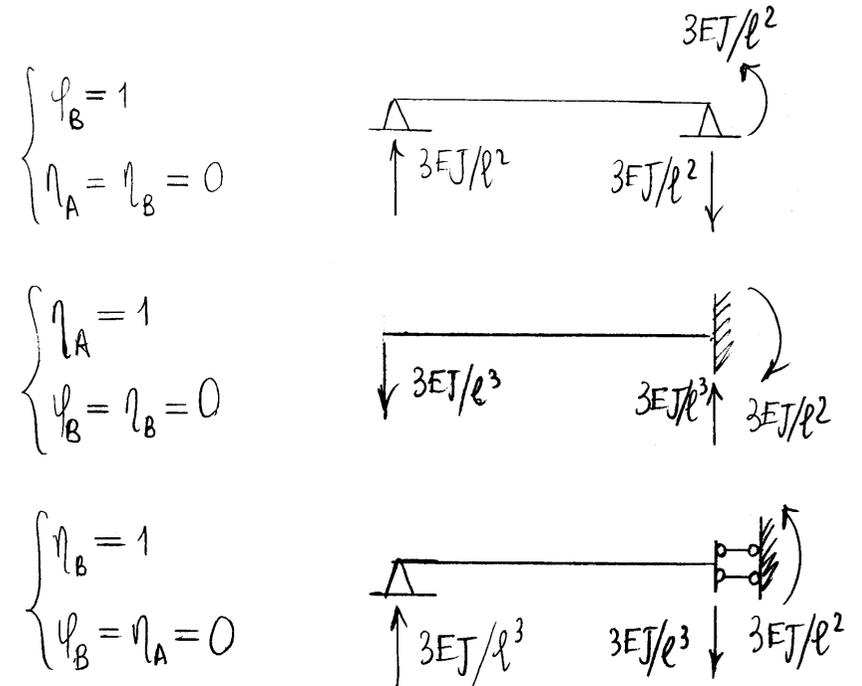
Si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 & -6l & 6l \\ 2l^2 & 4l^2 & -6l & 6l \\ -6l & -6l & 12 & -12 \\ 6l & 6l & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix}$$

### 6.4.2 Matrice di rigidezza di una trave inflessa nella quale una rotazione di nodo non è vincolata

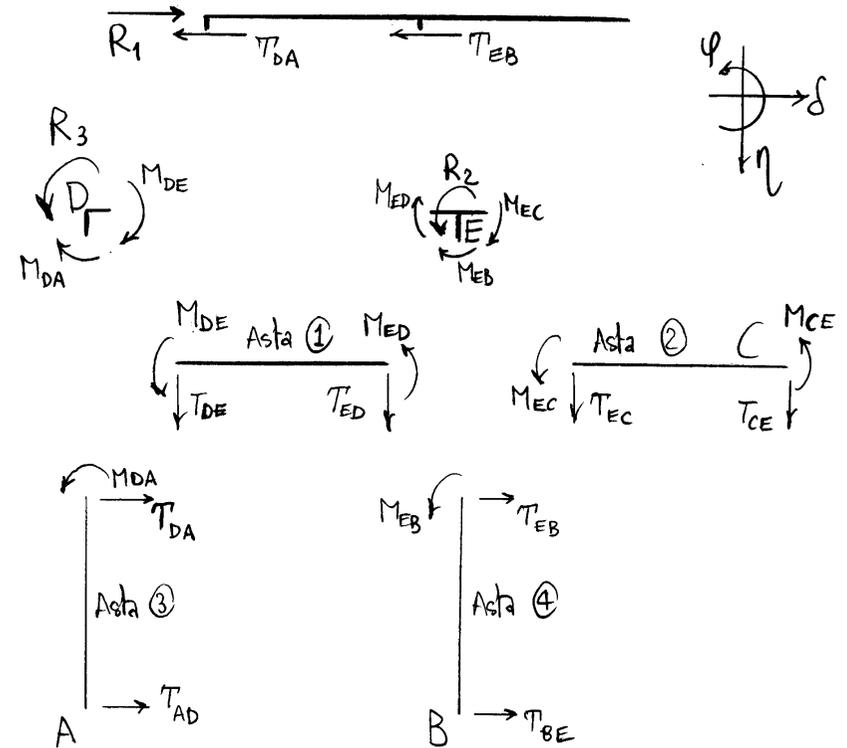


Generazione delle colonne della matrice della rigidezza dell'asta:



Si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} M_B \\ T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & -3l & 3l \\ -3l & 3 & -3 \\ 3l & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_B \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix}$$



**6.4.3 Matrici di rigidezza delle singole travi e loro assemblaggio**

Incidenze aste tipo 1

	$\psi_A$	$\psi_B$	$\eta_A$	$\eta_B$
Asta 1	$u_3$	$u_2$	0	0
Asta 2	$u_2$	0	0	0

Incidenze aste tipo 2

	$\psi_B$	$\eta_A$	$\eta_B$
Asta 3	$u_3$	0	$u_1$
Asta 4	$u_2$	0	$u_1$

Matrice Asta 1 ( $\eta_D = \eta_E = 0, \psi_D = u_3, \psi_E = u_2$ )

$$\begin{Bmatrix} M_{DE} \\ M_{ED} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Matrice Asta 2 ( $\psi_C = \eta_E = \eta_C = 0, \psi_E = u_2$ )

$$\begin{Bmatrix} M_{EC} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} [4l^2] \begin{Bmatrix} u_2 \end{Bmatrix}$$

Matrice Asta ③ ( $\delta_A = 0, \varphi_D = u_3, \delta_D = u_1$ )

$$\begin{Bmatrix} M_{DA} \\ T_{DA} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

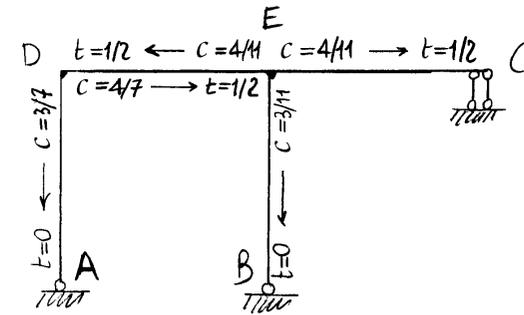
Matrice Asta ④ ( $\delta_B = 0, \varphi_E = u_2, \delta_E = u_1$ )

$$\begin{Bmatrix} M_{EB} \\ T_{EB} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

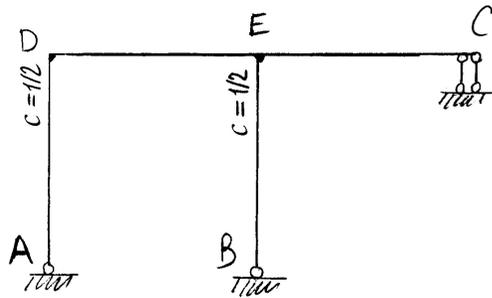
Matrice assemblata:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{DA} + T_{EB} \\ M_{ED} + M_{EC} + M_{EB} \\ M_{DA} + M_{DE} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3+3 & 3l & 3l \\ 3l & 4l^2+4l^2+3l^2 & 2l^2 \\ 3l & 2l^2 & 4l^2+3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

### 6.5 Metodo iterativo di Cross: un esempio

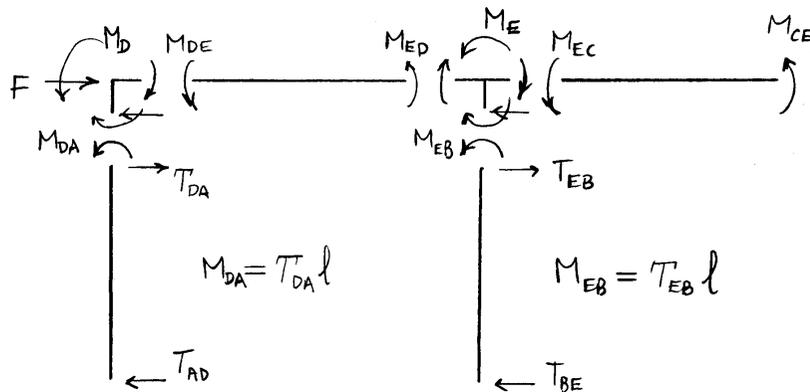


Nodo	Rigidzza alla rotazione (a meno di EJ/l)	Coefficiente di ripartizione	Coefficiente di trasmissione del momento
ⓓ	$k_{DA} = 3$ $k_{DE} = 4$ $k_D = 7$	$c_{DA} = 3/7$ $c_{DE} = 4/7$	$t_{DA} = 0$ $t_{DE} = 1/2$
ⓔ	$k_{ED} = 4$ $k_{EC} = 4$ $k_{EB} = 3$ $k_E = 11$	$c_{ED} = 4/11$ $c_{EC} = 4/11$ $c_{EB} = 3/11$	$t_{ED} = 1/2$ $t_{EC} = 1/2$ $t_{EB} = 0$

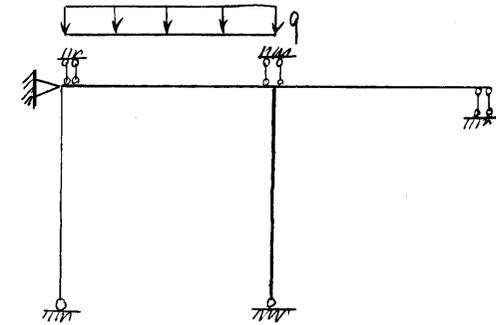


Travata	Rigidità alla traslazione (a meno di $EJ/l^3$ )	Coefficiente di ripartizione della forza	Coefficiente di trasformazione taglio $\rightarrow$ momento
DEC	$k_{DA} = 3$ $k_{EB} = 3$ <u><math>k_{DEC} = 6</math></u>	$c_{DA} = 1/2$ $c_{EB} = 1/2$	$l$ $l$

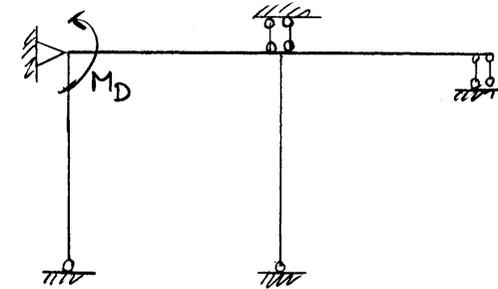
Convenzioni di segno



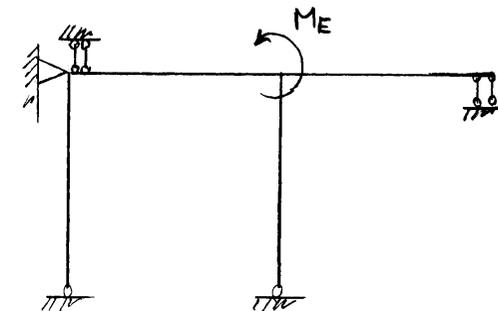
Momenti di incastro perfetto



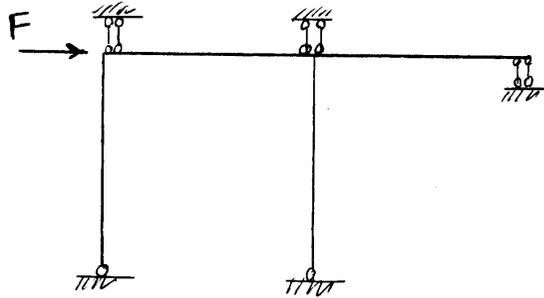
Equilibrio nodo D



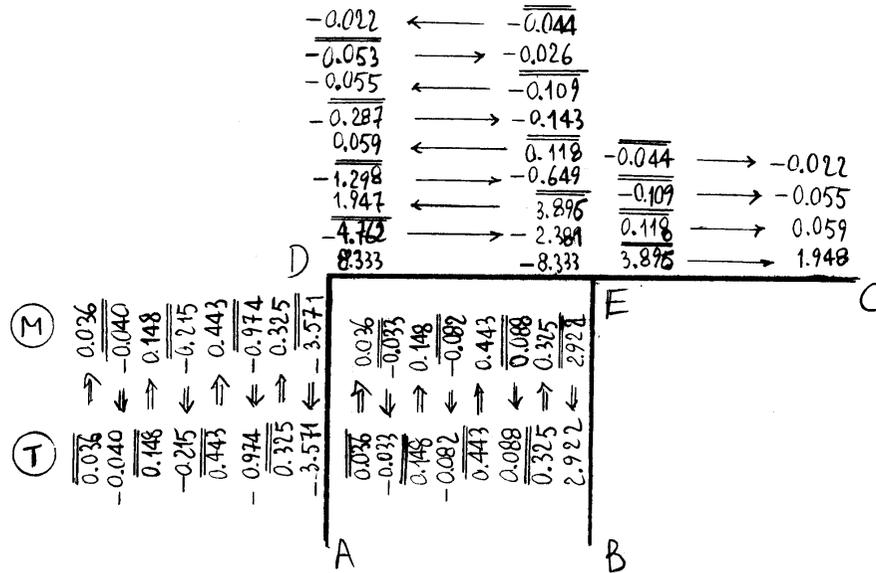
Equilibrio nodo E



Equilibrio travata DEC



Iterazioni



Momenti a meno di  $ql^2/100$ , tagli a meno di  $ql/100$

0) Momenti di incastro perfetto

- 1) Equilibrio nodo D  $M_D = -8.333$
- 2) Equilibrio nodo E  $M_E = 10.714$
- 3) Equilibrio travata DEC  $F = 0.649$
- 4) Equilibrio nodo D  $M_D = -2.272$
- 5) Equilibrio nodo E  $M_E = 0.324$
- 6) Equilibrio travata DEC  $F = 0.886$
- 7) Equilibrio nodo D  $M_D = -0.502$
- 8) Equilibrio nodo E  $M_E = -0.300$
- 9) Equilibrio travata DEC  $F = 0.297$
- 10) Equilibrio nodo D  $M_D = -0.093$
- 11) Equilibrio nodo E  $M_E = -0.122$
- 12) Equilibrio travata DEC  $F = 0.073$

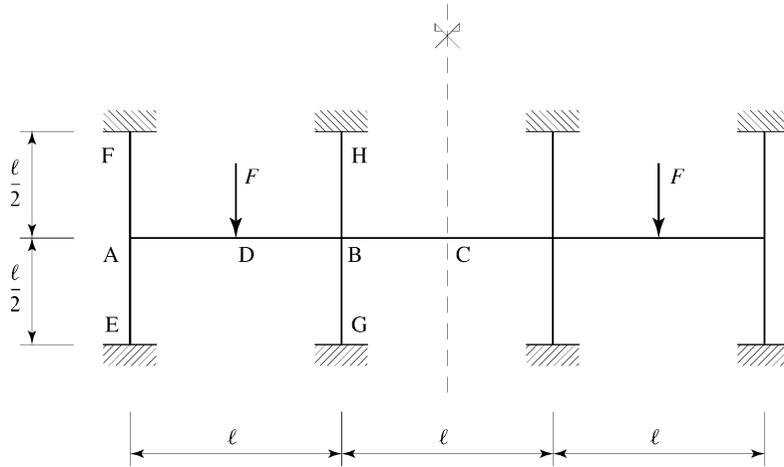
Valori iterati

Valori esatti

$M_{DA} = -3.848$	$(M_{DA} = -3.846)$
$M_{DE} = 3.862$	$(M_{DE} = 3.846)$
$M_{ED} = -7.671$	$(M_{ED} = -7.692)$
$M_{EB} = 3.847$	$(M_{EB} = 3.846)$
$M_{EC} = 3.861$	$(M_{EC} = 3.846)$
$M_{CE} = 1.930$	$(M_{CE} = 1.923)$

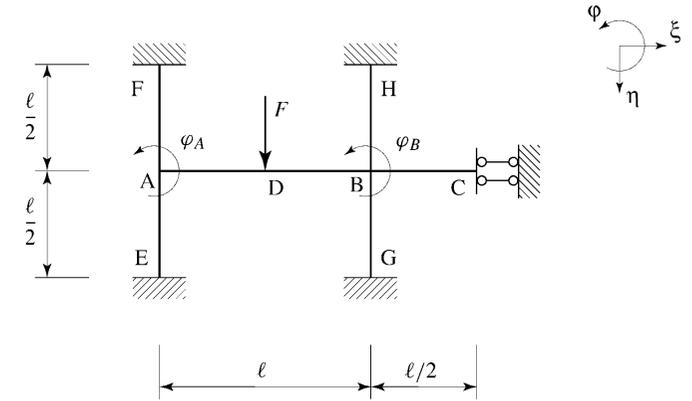
### 6.6 Esercizi

#### 6.6.1 Telaio simmetrico soggetto ad un carico concentrato

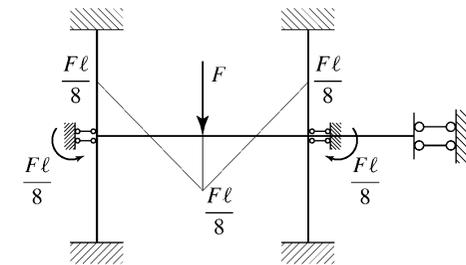


- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Calcolare lo spostamento del punto D di applicazione della forza concentrata e l'energia elastica di deformazione.

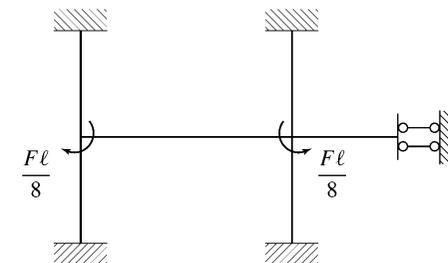
Schema equivalente



Incastri perfetti

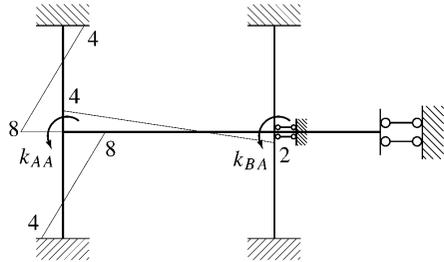


Reazioni cambiate di segno



$$\begin{Bmatrix} \mathcal{M}_A \\ \mathcal{M}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix}$$

1ª colonna matrice di rigidezza

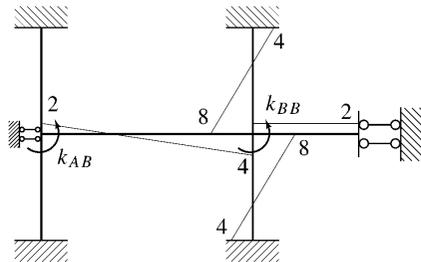


$$\begin{aligned} \varphi_A &= 1 \\ \varphi_B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{AA} &= \frac{20EJ}{\ell} \\ k_{BA} &= \frac{2EJ}{\ell} \end{aligned}$$

Rigidezze alla rotazione a meno di  $\frac{EJ}{\ell}$

2ª colonna matrice di rigidezza



$$\begin{aligned} \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{BB} &= \frac{22EJ}{\ell} \\ k_{AB} &= \frac{2EJ}{\ell} \end{aligned}$$

Rigidezze alla rotazione a meno di  $\frac{EJ}{\ell}$

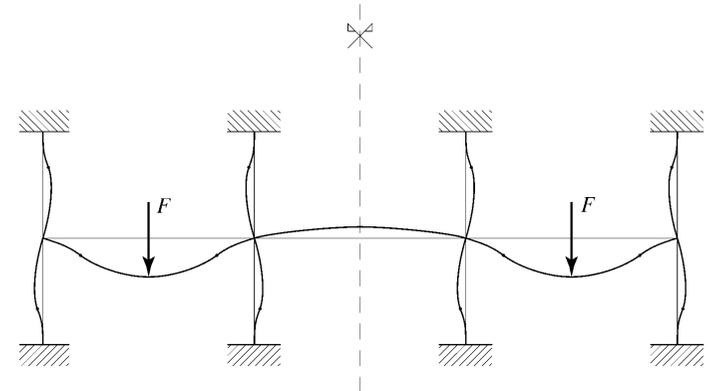
Sistema risolvete:

$$\frac{EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix} = \frac{F\ell}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

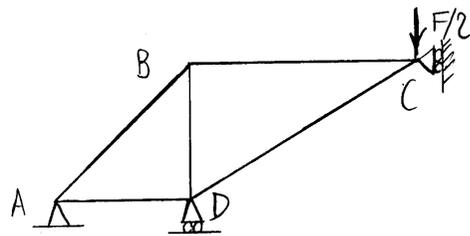
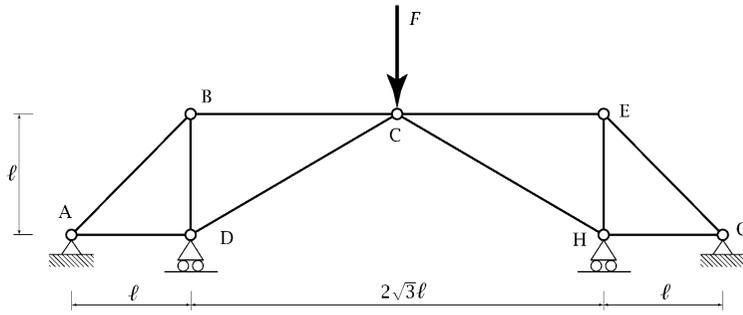
Soluzione:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\frac{3}{436} \frac{F\ell^2}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{11}{4 \times 436} \frac{F\ell^2}{EJ} \end{aligned}$$

Deformata:



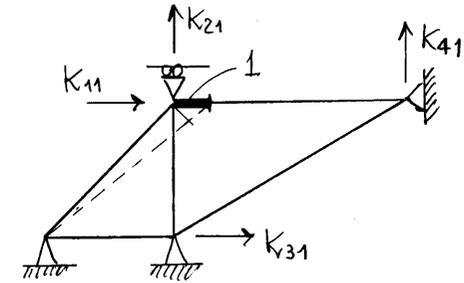
6.6.2 Struttura reticolare iperstatica simmetrica



Incognite:  $\delta_B, \eta_B, \delta_D, \eta_C$

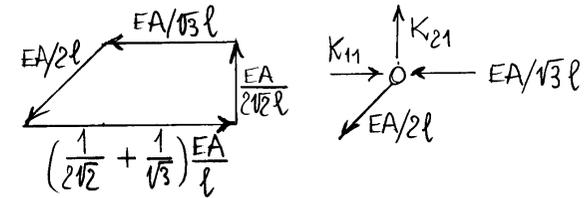
Prima colonna della matrice di rigidezza

$$\delta_B = 1 \quad \eta_B = \delta_D = \eta_C = 0$$



$$-\frac{N_{BC}(\sqrt{3}l)}{EA} = 1 \Rightarrow N_{BC} = -\frac{EA}{\sqrt{3}l}$$

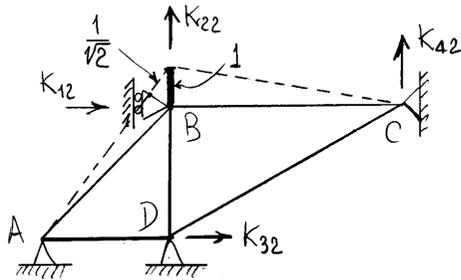
$$\frac{N_{AB}(\sqrt{2}l)}{EA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_{AB} = \frac{EA}{2l}$$



$$\begin{cases} K_{11} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{EA}{l} \\ K_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \\ K_{31} = K_{41} = 0 \end{cases}$$

Seconda colonna della matrice di rigidità

$$\eta_B = 1 \quad \delta_B = \delta_D = \eta_C = 0$$



Equilibrio nodo B

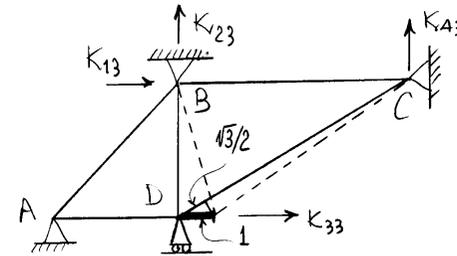
$$N_{BD} = \frac{EA}{l}$$

$$N_{AB} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l}$$

$$\begin{cases} K_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \\ K_{22} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{EA}{l} \\ K_{32} = K_{42} = 0 \end{cases}$$

Terza colonna della matrice di rigidità

$$\delta_D = 1 \quad \delta_B = \eta_B = \eta_C = 0$$



Nodo D

$$N_{AD} = \frac{EA}{l}$$

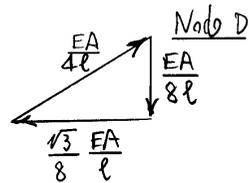
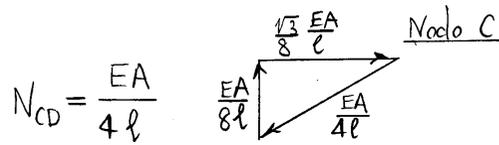
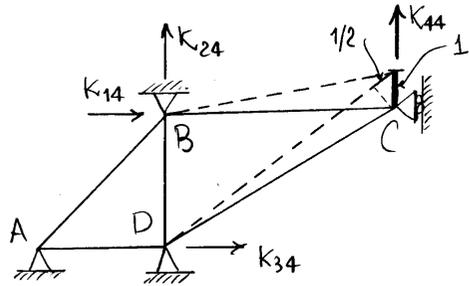
Nodo C

$$N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l}$$

$$\begin{cases} K_{13} = K_{23} = 0 \\ K_{33} = \frac{11}{8} \frac{EA}{l} \\ K_{43} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \end{cases}$$

Quarta colonna della matrice di rigidezza

$$\eta_c = 1 \quad \delta_B = \eta_B = \delta_D = 0$$



$$\begin{cases} K_{14} = K_{24} = 0 \\ K_{34} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \\ K_{44} = \frac{1}{8} \frac{EA}{l} \end{cases}$$

Risulta:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_B \\ \eta_B \\ \delta_D \\ \eta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \end{Bmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$\delta_B = \eta_B = 0,$$

$$\delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA},$$

$$\eta_c = -\frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}.$$

Gli sforzi normali valgono infine:

$$N_{AD} = \frac{EA}{l} \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} F,$$

$$N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l} \delta_D + \frac{EA}{4l} \eta_c = -F.$$