

Dispense del Corso di MECCANICA DEI SOLIDI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Trieste

Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE QUARTA

Stabilità e biforcazione dell'equilibrio

Corsi di Laurea specialistici in
Ingegneria delle Infrastrutture e dei sistemi di trasporto
Strutture ed opere dell'ingegneria civile
Ingegneria edile

Trieste, 25 ottobre 2004

3.4.2 Esempio 2	52
3.5 Comportamento postcritico dell'asta di Eulero	53

Indice

1 Stabilità dell'equilibrio	3
1.1 Metodo statico o dell'equilibrio adiacente	5
1.2 Metodo energetico	7
1.3 Esempi sul metodo statico e sul metodo energetico	9
1.3.1 Primo esempio ad un grado di libertà	9
1.3.2 Secondo esempio ad un grado di libertà	10
1.3.3 Primo esempio a due gradi di libertà	11
1.3.4 Secondo esempio a due gradi di libertà	15
1.4 Metodo delle piccole oscillazioni	17
2 Biforcazione dell'equilibrio	21
2.1 Esempio a un grado di libertà	24
2.2 Esempio a due gradi di libertà (modello di Shanley)	30
3 Aste compresse	35
3.1 Asta di Eulero	35
3.1.1 Metodo statico	35
3.1.2 Metodo energetico	39
3.1.3 Esercizio	40
3.2 Instabilità flessionale di un'asta compressa sotto condizioni generiche di vincolo	41
3.2.1 Mensola	41
3.2.2 Luce libera di inflessione	42
3.2.3 Trave incastro-appoggio	42
3.2.4 Trave incastrata	45
3.2.5 Trave incastrata ad una estremità ed impedita di ruotare all'altra estremità	46
3.2.6 Schemi riassuntivi	47
3.2.7 Portali con traversi infinitamente rigidi	47
3.3 Limiti di validità della formula di Eulero	48
3.4 Pressoflessione nelle travi snelle (teoria del secondo ordine)	49
3.4.1 Esempio 1	50

Capitolo 1

Stabilità dell'equilibrio

Tra le assunzioni fondamentali della teoria dell'elasticità lineare vi è quella di scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione di riferimento.

Questa assunzione rende l'equilibrio indipendente dalla deformazione ed ha quale conseguenza che l'equilibrio di una struttura elastico-lineare è

sempre stabile, poiché una qualunque perturbazione della configurazione equilibrata non può disturbare l'equilibrio. D'altra parte, nell'elasticità lineare una soluzione del problema elastico rende minimo l'energia potenziale totale, e quindi è anche

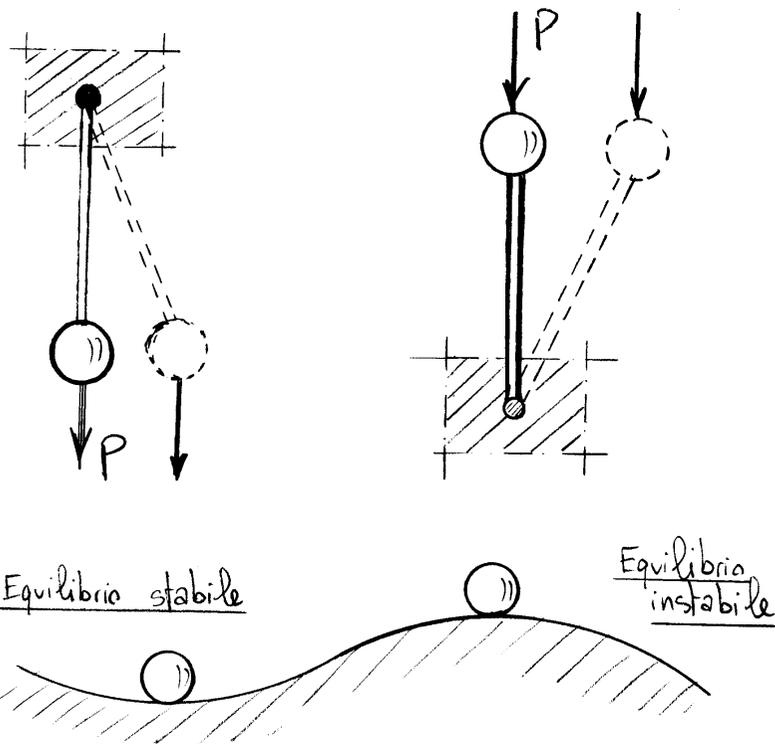
soddisfatto il criterio energetico di stabilità.

Il fenomeno della instabilità dell'equilibrio delle strutture elastiche appartiene dunque alla teoria dell'elasticità non lineare. Tale fenomeno si presenta importante perché permette delle strutture esistenti il livello dei carichi entro il quale esse si comportano quali strutture elastico-lineari può essere facilmente superato anche in condizioni vicine a quelle di esercizio.

La prima assunzione che cade in difetto è proprio quella che permette di scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione indeformata. Nell'ottica del metodo delle perturbazioni, si può supporre "piccola" la perturbazione applicata e quindi utilizzare ancora una

cinematica linearizzata, scrivendo però le equazioni di equilibrio nella configurazione indeformata (teoria del secondo ordine).

Ricordiamo che nel caso di sistemi rigidi, la qualità dell'equilibrio non dipende dalla intensità



delle forze, ma solo dalla configurazione del sistema. Perturbando un sistema elastico, entra in gioco la reazione elastica del sistema, reazione che è sempre di tipo stabilizzante. L'equilibrio è allora stabile se l'eventuale effetto instabilizzante associato alla perturbazione e dovuto ai carichi è minore dell'effetto stabilizzante dovuto alla reazione del sistema, instabile se maggiore. Dato che l'effetto instabilizzante dei carichi dipende dalla loro entità, la qualità dell'equilibrio di un sistema elastico dipende non solo dalla configurazione del sistema, ma anche dalla intensità delle forze.

Se le azioni instabilizzanti delle forze esterne uguagliano la reazione elastica del sistema, si dice

che la struttura è in una condizione di equilibrio critica ed il carico a cui è soggetta viene detto carico critico.

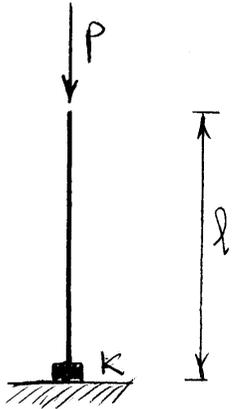
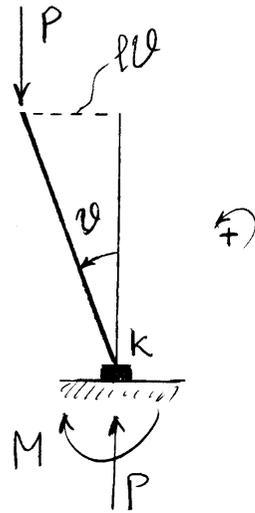
La ricerca dei carichi critici può essere eseguita con vari metodi. Fra questi, discuteremo il metodo statico ed il metodo energetico che sono, sostanzialmente, due metodi equivalenti. Discuteremo anche, brevemente, il metodo delle piccole oscillazioni, che, essendo un metodo dinamico, è più generale dei precedenti.

Nel caso in cui le forze applicate sono non conservative, i risultati del metodo delle piccole oscillazioni possono differire da quelli del metodo statico, metodo che è improprio utilizzare al di fuori di un contesto in cui sia definibile un'energia potenziale totale.

1.1 Metodo statico o dell'equilibrio adiacente

Il carico critico è definito come quel carico in corrispondenza del quale sono possibili configurazioni equilibrate nell'intorno della configurazione equilibrata di partenza. L'intorno di tale configurazione è esplorato tramite una cinematica linearizzata ed un legame costitutivo elastico-lineare, ma, naturalmente, l'equilibrio è scritto nella configurazione deformata.

Imporre l'equilibrio in una configurazione perturbata significa imporre l'uguaglianza degli effetti stabilizzanti ed instabilizzanti, secondo la definizione data precedentemente.

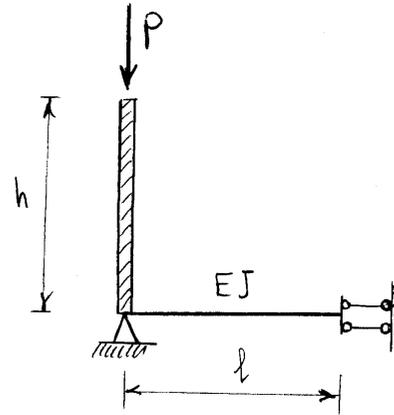
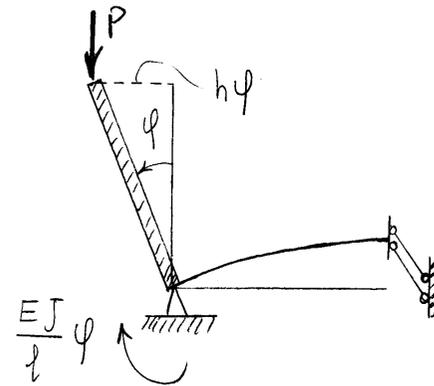
Esempio ad un grado di libertàsistema equilibratosistema perturbato

Risulta:

$$M = K\theta.$$

Equilibrio nella configurazione perturbata (adiacente quella equilibrata soggetta di indagine):

$$P l \theta - K \theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{K}{l}.$$

Esempio ad un grado di libertàSistema
equilibratoConfigurazione
adiacente

Equilibrio alla rotazione del tratto rigido:

$$P h \phi - \frac{EJ}{l} \phi = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{EJ}{h l}$$

1.2 Metodo energetico

In corrispondenza di una configurazione equilibrata, la variazione prima dell'energia potenziale totale è nulla:

$$\delta\pi = 0.$$

Affinché tale configurazione equilibrata sia anche stabile, la variazione seconda deve essere positiva:

$$\delta^2\pi > 0,$$

in corrispondenza di ogni variazione $\delta u \neq 0$ data al sistema (condizione di minimo dell'energia potenziale totale). Una configurazione di equilibrio critica è dunque individuata dalla condizione:

$$\begin{cases} \delta^2\pi \geq 0 & \text{per ogni } \delta u \\ \delta^2\pi = 0 & \text{per almeno un } \delta u \end{cases}$$

La variazione δu che rende nulla la variazione seconda $\delta^2\pi$ dell'energia potenziale totale viene detta modo critico. È evidente che la forma quadratica $\delta^2\pi$ ha un minimo in corrispondenza di un modo critico e la ricerca di tale minimo può condursi annullando la sua variazione prima:

$$\delta(\delta^2\pi) = 0.$$

Questa equazione rappresenta un problema agli autovalori ed autovettori, dove gli autovalori sono i carichi critici e gli autovettori i modi critici.

Nell'intorno di una configurazione equilibrata l'energia potenziale totale si può rappresentare nella forma:

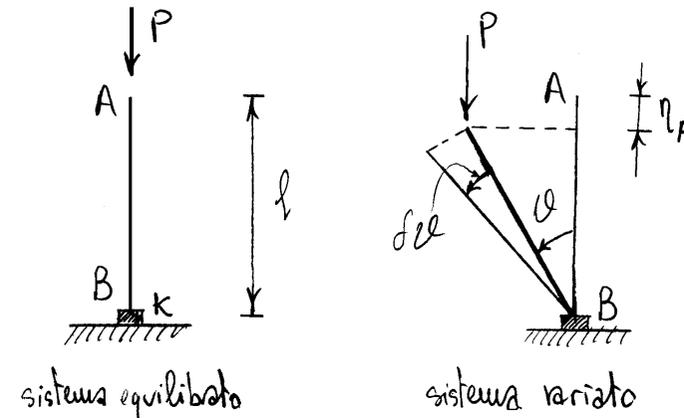
$$\Pi = \delta\Pi + \delta^2\Pi + \dots \cong \delta^2\Pi,$$

poiché $\delta\Pi = 0$ ed avendo trascurato i termini di ordine superiore. Imporre l'equilibrio in tale intorno richiede di annullare la variazione prima della variazione seconda:

$$\delta(\delta^2\Pi) = 0,$$

e, quindi, tale condizione è equivalente al metodo statico. Ciò dimostra l'equivalenza tra metodo energetico e metodo statico.

Esempio ad un grado di libertà



- 1) Energia elastica della molla: $\phi = \frac{1}{2} k \eta_A^2$;
- 2) Spostamento del punto A in cui è applicata la forza (occorre considerare i termini fino al secondo ordine):

$$\eta_A = l(1 - \cos\theta) \cong l \frac{\theta^2}{2};$$

- 3) Variazione seconda dell'energia potenziale totale:

$$\delta^2\Pi = -Pl \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2} k \eta_A^2,$$

dove ϑ rappresenta la variazione data al sistema;

4) Variazione prima (funzione dell'ulteriore variazione $\delta\vartheta$ del sistema) della variazione seconda dell'energia potenziale totale:

$$\delta(\delta^2\Pi) = (-Pl\vartheta + K\vartheta)\delta\vartheta;$$

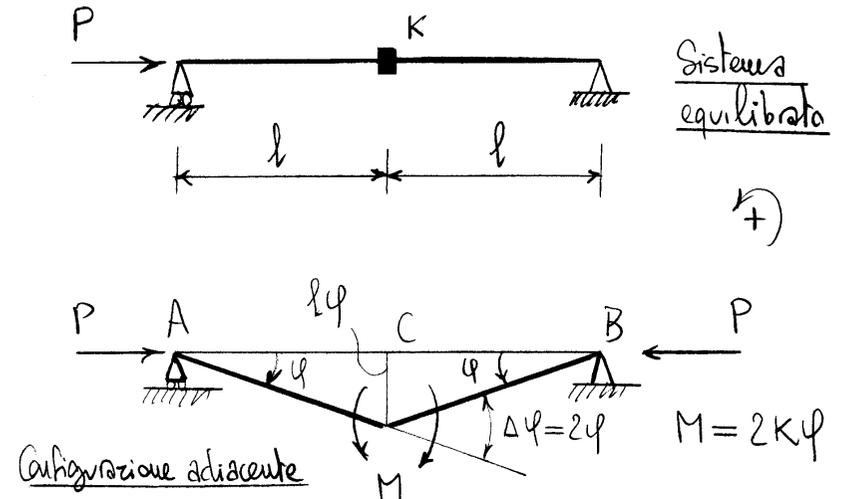
5) Annullamento di $\delta(\delta^2\Pi)$ (equilibrio adiacente), per ogni $\delta\vartheta$ sotto la condizione $\vartheta \neq 0$:

$$-Pl\vartheta + K\vartheta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{K}{l}.$$

Essendo il problema ad un grado di libertà il modo critico è obbligato.

1.3 Esempi sul metodo statico e sul metodo energetico

1.3.1 Primo esempio ad un grado di libertà

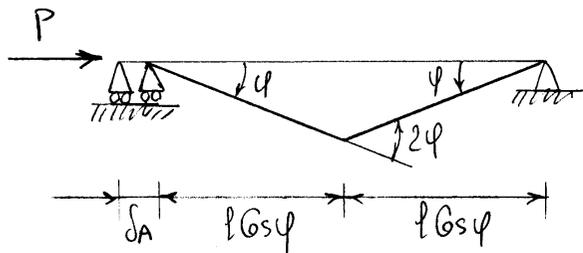


La reazione verticale degli appoggi è nulla per gli equilibri globali alla traslazione verticale e alla rotazione. L'equilibrio alla rotazione della parte CB attorno al punto C risolve il problema del carico critico:

$$Pl\vartheta - 2K\vartheta = 0 \Rightarrow P_{cr} = 2K/l.$$

Volendo invece applicare il metodo energetico, occorre calcolare, al secondo ordine, lo spostamento del punto A:

$$\delta_A = 2l(1 - \cos\varphi) \approx l\varphi^2.$$



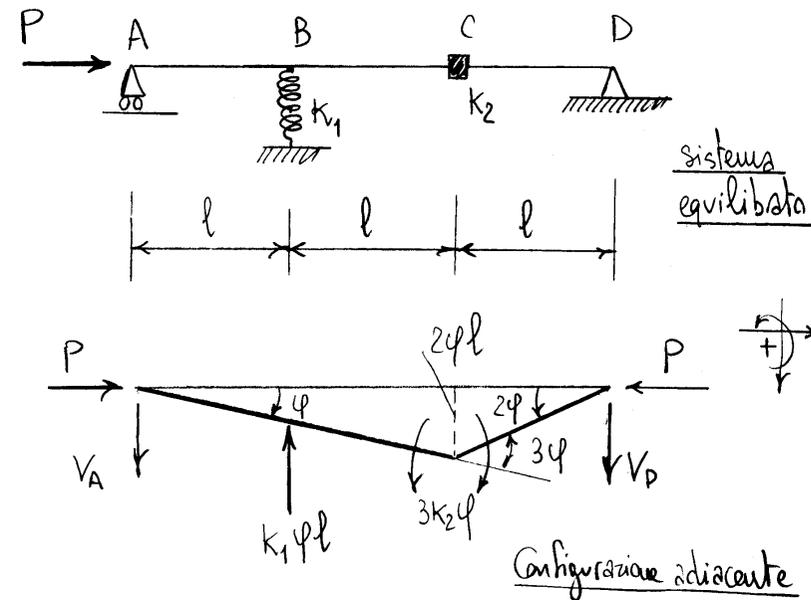
Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \delta^2 \pi &= -Pl\varphi^2 + \frac{1}{2}k(2\varphi)^2 \\ &= -(Pl - 2k)\varphi^2, \end{aligned}$$

da cui:

$$\delta(\delta^2 \pi) = 0 \Rightarrow Pl - 2k = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{2k}{l}.$$

1.3.2 Secondo esempio ad un grado di libertà



Per l'equilibrio alla rotazione attorno ai punti A e D risulta:

$$\begin{cases} V_A = \frac{2}{3}k_1\varphi l \\ V_D = \frac{1}{3}k_1\varphi l \end{cases}.$$

L'equilibrio alla rotazione del tratto DC attorno

al punto C permette poi di ottenere il carico

critico:

$$-\frac{1}{3} k_1 \varphi l^2 + 2P\varphi l - 3k_2 \varphi = 0,$$

e quindi:

$$P_{cr} = \frac{1}{6} k_1 \varphi l + \frac{3}{2} \frac{k_2}{l}.$$

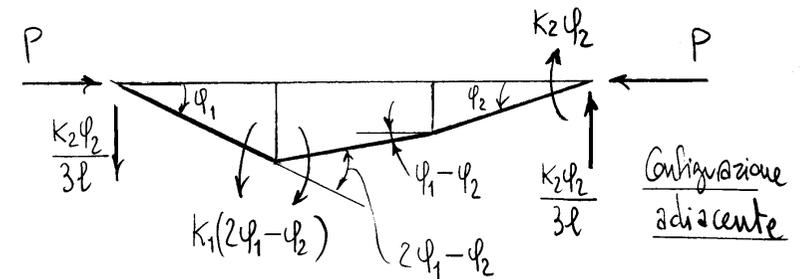
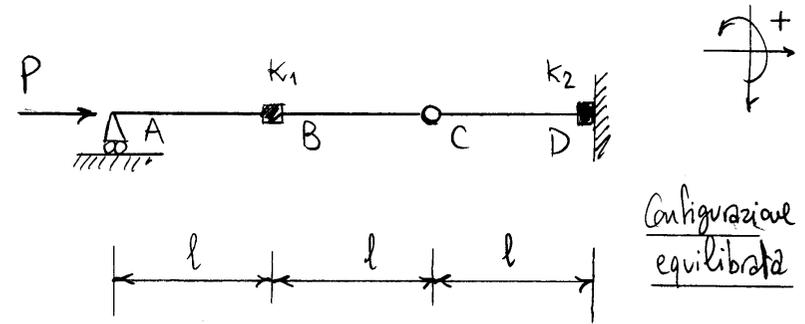
Volendo invece utilizzare il metodo energetico, occorre valutare lo spostamento δ_A del punto A:

$$\begin{aligned} \delta_A &= 3l - 2l \cos \varphi - l \cos 2\varphi \\ &= 2l(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos 2\varphi) \\ &\approx \varphi^2 l + 2\varphi^2 l \approx 3\varphi^2 l. \end{aligned}$$

Indi risulta:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= -3P\varphi^2 l + \frac{1}{2} k_1 (\varphi l)^2 + \frac{1}{2} k_2 (3\varphi)^2 \\ &= -3 \left(P - \frac{1}{6} k_1 l - \frac{3}{2} \frac{k_2}{l} \right) \varphi^2 l. \end{aligned}$$

1.3.3 Primo esempio a due gradi di libertà



Equazioni di equilibrio alla rotazione attorno ai punti B e C dei tratti AB e CD rispettivamente:

$$\begin{cases} k_1(2\varphi_1 - \varphi_2) - P\varphi_1 l + \frac{1}{3} k_2 \varphi_2 = 0 \\ P\varphi_2 l - k_2 \varphi_2 + \frac{1}{3} k_2 \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Si è così ottenuto un sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite φ_1 e φ_2 dipendente dal parametro P . In forma matriciale tale sistema rappresenta un problema agli autovalori (carichi critici) ed autovettori (modi critici):

$$\begin{bmatrix} 2\frac{k_1}{l} - P & -\frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{3l} \\ 0 & -\frac{2k_2}{3l} + P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0.$$

I carichi critici si ottengono annullando il determinante dei coefficienti (condizione che assicura l'esistenza di soluzioni diverse da quella indeformata):

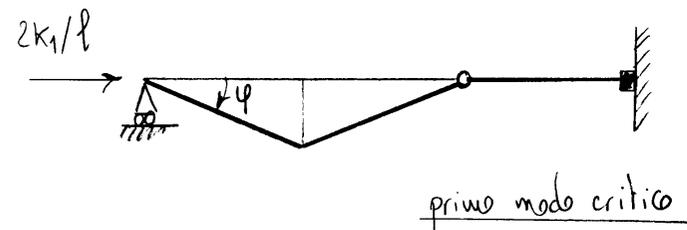
$$\begin{cases} P_1 = 2\frac{k_1}{l} \\ P_2 = \frac{2}{3}\frac{k_2}{l} \end{cases}$$

Dal punto di vista strutturale, il carico critico del sistema è il più piccolo dei carichi precedenti. Per esempio, nel caso $k_1 = k_2 = k$ il carico critico strutturale risulta $P_{cr} = 2k/3l$.

Sostituendo i valori dei carichi critici nel sistema di equazioni si ottengono i due modi critici:

$$P = \frac{2k_1}{l} \Rightarrow$$

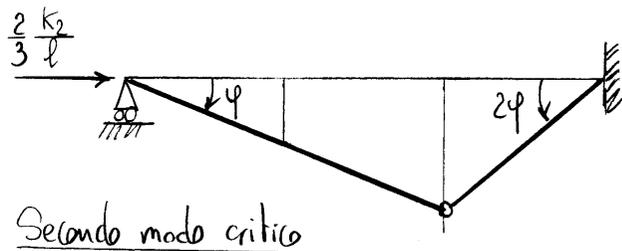
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{3l} \\ 0 & -\frac{2k_2}{3l} + \frac{2k_1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0.$$



$$P = \frac{2k_2}{3l} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2k_1}{l} - \frac{2k_2}{3l} & -\frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{3l} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{k_1}{l} - \frac{k_2}{3l}\right)\varphi_1 - \left(\frac{k_1}{l} - \frac{k_2}{3l}\right)\varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = 2\varphi_1$$



Se $\frac{k_1}{l} - \frac{k_2}{3l} = 0$ risulta $P_1 = P_2$ e tutte le possibili configurazioni adiacenti sono critiche.

Procediamo ora col metodo energetico. Lo spostamento del punto A vale:

$$\begin{aligned} \delta_A &= l(1 - \cos\varphi_1) + l\{1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\} \\ &+ l(1 - \cos\varphi_2) \approx l\frac{\varphi_1^2}{2} + l\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} + l\frac{\varphi_2^2}{2} \\ &= l\varphi_1^2 + l\varphi_2^2 - l\varphi_1\varphi_2, \end{aligned}$$

e quindi risulta:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= -Pl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \\ &+ \frac{1}{2}k_1(2\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k_2\varphi_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_2 & \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4k_1 - Pl & -2k_1 + Pl \\ -2k_1 + Pl & k_1 + k_2 - 2Pl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Dato che:

$$\delta(\delta^2 \Pi) = \frac{\partial \delta^2 \Pi}{\partial \varphi_1} \delta\varphi_1 + \frac{\partial \delta^2 \Pi}{\partial \varphi_2} \delta\varphi_2,$$

La condizione $\delta(\delta^2\pi) = 0$ origina le due equazioni:

$$\frac{\partial \delta^2\pi}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta^2\pi}{\partial \varphi_2} = 0,$$

e cioè:

$$-P\ell(2\varphi_1 - \varphi_2) + 2K_1(2\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

$$-P\ell(2\varphi_2 - \varphi_1) - K_1(2\varphi_1 - \varphi_2) + K_2\varphi_2 = 0,$$

che equivalgono al sistema:

$$\begin{bmatrix} 4K_1 - 2P\ell & -2K_1 + P\ell \\ -2K_1 + P\ell & K_1 + K_2 - 2P\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Poichè:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 4K_1 - 2P\ell & -2K_1 + P\ell \\ -2K_1 + P\ell & K_1 + K_2 - 2P\ell \end{bmatrix} &= \\ &= (4K_1 - 2P\ell)(K_1 + K_2 - 2P\ell) \\ &\quad - (-2K_1 + P\ell)(-2K_1 + P\ell) \\ &= (2K_1 - P\ell)(2K_2 - 3P\ell), \end{aligned}$$

l'equazione caratteristica risulta:

$$(2K_1 - P\ell)(2K_2 - 3P\ell) = 0,$$

da cui i due valori critici:

$$\begin{cases} P_1 = 2K_1/\ell \\ P_2 = 2K_2/3\ell \end{cases}.$$

Sostituendo i valori critici nel sistema di equazioni si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad (P = P_1),$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{2}{3}\alpha & -\frac{1}{3}\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad (P = P_2),$$

dove si è posto $\alpha = K_2 - 3K_1$. Dalla prima si ottiene:

$$\varphi_2 = 0, \quad (\text{primo modo critico}),$$

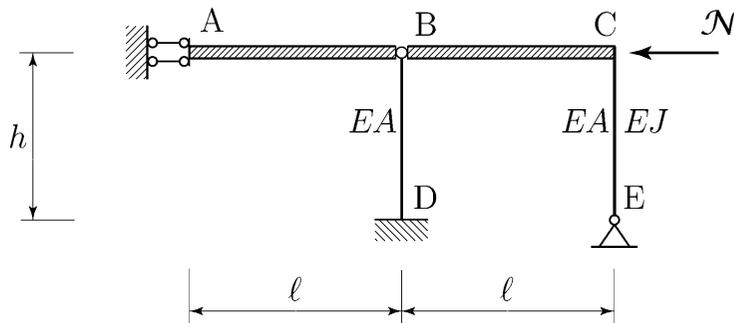
mentre dalla seconda si ha:

$$\psi_2 = 2\psi_1, \quad (\text{secondo modo critico}),$$

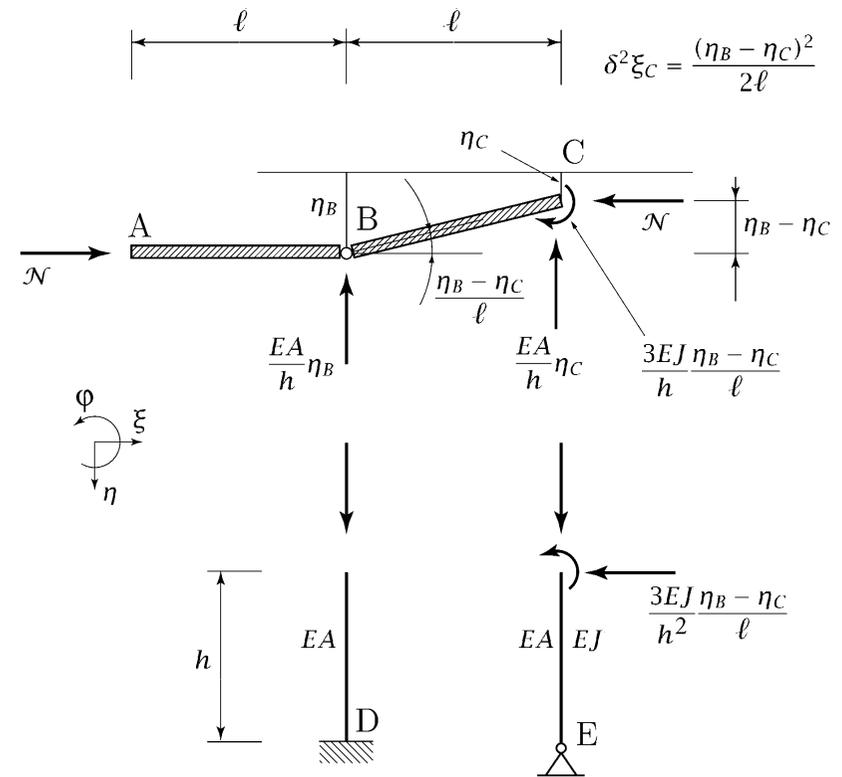
in accordo con quanto già ottenuto via metodo statico.

1.3.4 Secondo esempio a due gradi di libertà

Determinare il carico critico sia con il metodo statico che con il metodo energetico e disegnare la deformata critica.



La forza orizzontale agente alla sommità del montante EC vale $\frac{3EJ}{h^2} \frac{\eta_B - \eta_C}{l}$ e risulta quindi un infinitesimo del primo ordine negli spostamenti. Tale forza non da quindi contributi rispetto alla forza finita \mathcal{N} agente sulla travata rigida.



Gli equilibri alla traslazione verticale e alla rotazione attorno al punto B risultano:

$$\begin{cases} \frac{EA}{h} \eta_B + \frac{EA}{h} \eta_C = 0 \\ N(\eta_B - \eta_C) + \frac{EA}{h} \eta_C \ell - \frac{3EJ}{h} \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{h} & \frac{EA}{h} \\ N - \frac{3EJ}{h\ell} & -N + \frac{EA}{h}\ell + \frac{3EJ}{h\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_B \\ \eta_C \end{Bmatrix} = 0.$$

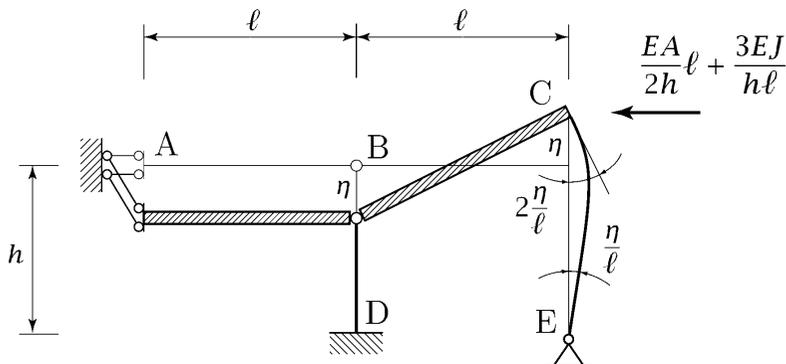
Annullando il determinante della matrice dei coefficienti si ottiene l'equazione definitrice del carico critico:

$$\left(-N + \frac{EA}{h}\ell + \frac{3EJ}{h\ell}\right) - \left(N - \frac{3EJ}{h\ell}\right) = 0,$$

da cui, infine:

$$N_{cr} = \frac{EA}{2h}\ell + \frac{3EJ}{h\ell}.$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale richiede $\eta_C = -\eta_B$. In corrispondenza del carico critico, valore del carico che annulla il determinante dei coefficienti, anche l'equazione di equilibrio alla rotazione impone tale identità senza aggiungere nulla di nuovo. Ne consegue immediatamente la deformata critica.



Procedendo con il metodo energetico, occorre scrivere la variazione seconda dell'energia potenziale totale associata ad una qualunque variazione η_B ed η_C dei parametri lagrangiani del sistema:

$$\delta^2\pi = -N \left\{ \frac{(\eta_B - \eta_C)^2}{2\ell} \right\} + \frac{1}{2} \frac{EA}{h} \eta_B^2 + \frac{1}{2} \frac{EA}{h} \eta_C^2 + \frac{3EJ}{2h} \left(\frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} \right)^2.$$

La condizione $\delta(\delta^2\pi) = 0$, determinatrice del carico critico, conduce alle due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta^2\pi}{\partial \eta_B} = -N \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} + \frac{EA}{h} \eta_B + \frac{3EJ}{h} \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell^2} = 0 \\ \frac{\partial \delta^2\pi}{\partial \eta_C} = N \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} + \frac{EA}{h} \eta_C - \frac{3EJ}{h} \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell^2} = 0 \end{cases}.$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -\frac{N}{\ell} + \frac{EA}{h} + \frac{3EJ}{h\ell^2} & \frac{N}{\ell} - \frac{3EJ}{h\ell^2} \\ \frac{N}{\ell} - \frac{3EJ}{h\ell^2} & -\frac{N}{\ell} + \frac{EA}{h} + \frac{3EJ}{h\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_B \\ \eta_C \end{Bmatrix} = 0.$$

Annullando il determinante dei coefficienti si riottiene il valore critico già ottenuto con il metodo statico.

OSSERVAZIONE. L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale è indipendente dal carico di punta e determina univocamente il modo critico nella forma

$$\eta_C = -\eta_B = \eta.$$

In corrispondenza a tale modo critico, l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto B

$$2N\eta + \frac{EA}{h}\eta\ell - \frac{3EJ}{h}\frac{2\eta}{\ell} = 0.$$

determina univocamente il carico critico.

1.4 Metodo delle piccole oscillazioni

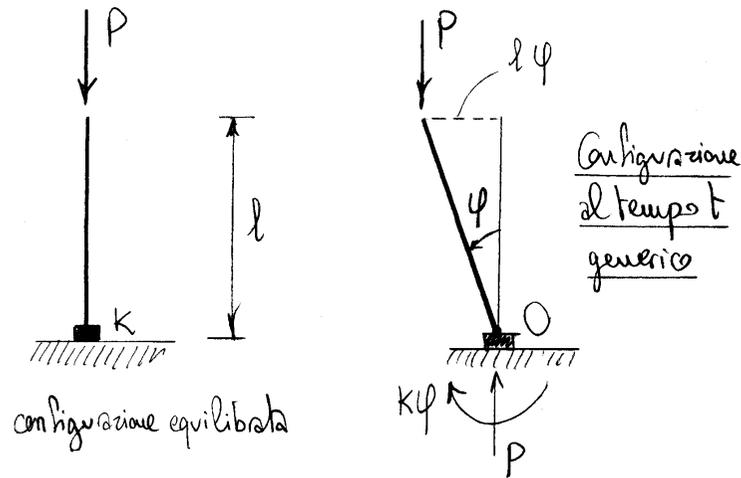
Poiché una perturbazione imposta ad un sistema equilibrato può mettere in moto tale sistema, un criterio generale per valutare la stabilità dell'equilibrio è quello che richiede ad un moto così innescato di non allontanare il sistema dalla sua configurazione equilibrata. A tale scopo si studia il comportamento di piccole oscillazioni del sistema in funzione dei carichi applicati (piccole oscillazioni è sinonimo, naturalmente, di cinematica

linearizzata). Se le "piccole" oscillazioni tendono a divenire "grandi" a piacere al crescere del tempo la configurazione è instabile, viceversa essa è stabile. Dato che il termine "piccolo" sta per parte lineare del moto, l'instabilità significa che la parte lineare del moto tende a divenire grande a piacere.

Esempio ad un grado di libertà

Sia data un'asta verticale incernierata al piede con una molla elastica di rigidità k e soggetta ad un carico verticale P alla sommità.

L'equazione del moto di tale asta può essere ottenuta utilizzando la versione dinamica del principio degli spostamenti virtuali valida per i corpi rigidi. Si richiede quindi che il lavoro virtuale delle



$$\ddot{w} = z(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \approx 0,$$

a meno di termini del secondo ordine negli spostamenti.

Ne deriva inoltre che lo spostamento verticale del punto di estremità vale, a meno di termini superiori al secondo ordine negli spostamenti:

$$w_l \approx l \frac{\varphi^2}{2},$$

e quindi la sua variazione, a meno di termini del secondo ordine negli spostamenti, risulta:

$$\delta w_l \approx l \varphi \delta \varphi.$$

forze esterne sia nullo:

$$L_{ve} = 0,$$

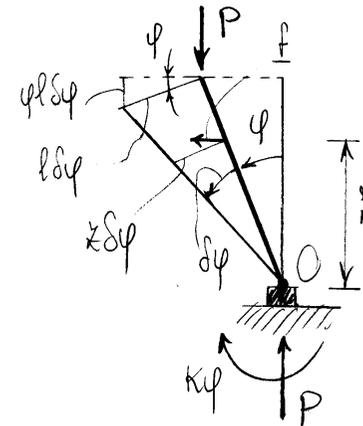
per ogni spostamento virtuale. Nel lavoro virtuale esterno va conteggiato anche il lavoro dovuto alle forze di inerzia.

Le componenti di spostamento dei punti dell'asta, in direzione orizzontale e verticale rispettivamente, valgono:

$$v = z \sin \varphi, \quad w = z(1 - \cos \varphi),$$

da cui conseguono le accelerazioni:

$$\ddot{v} = z(\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \approx z\ddot{\varphi},$$



Le forze di inerzia risultano quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore, orizzontali e di modulo:

$$f = -\mu \ddot{\varphi} z,$$

dove μ è la massa per unità di linea, e il principio dei lavori virtuali richiede pertanto che sia:

$$P \varphi l \delta \varphi - K \varphi \delta \varphi - \int_0^l \mu \ddot{\varphi} x^2 \delta \varphi = 0$$

qualsunque sia $\delta \varphi$. Si ottiene l'equazione:

$$J \ddot{\varphi} - (Pl - K) \varphi = 0,$$

dove $\ddot{\varphi}$ rappresenta la derivata seconda rispetto al tempo dell'angolo di rotazione φ e J è il momento di inerzia polare dell'asta rispetto al punto O incernierato. Si noti che $Pl - K$ rappresenta il momento totale M agente sull'asta rigida, per cui l'equazione ottenuta non è altro che la particolareggiata dell'equazione $J \ddot{\varphi} = M$, che regge il moto di un'asta

rigida incernierata. Ponendo:

$$\alpha = (Pl - K) / J,$$

l'equazione del moto diviene:

$$\ddot{\varphi} - \alpha \varphi = 0.$$

L'equazione algebrica associata risulta:

$$\lambda^2 - \alpha = 0$$

ed occorre distinguere dunque due casi:

$$1) P > K/l \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\alpha},$$

$$2) P < K/l \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{-\alpha},$$

separati dal caso critico:

$$3) P_{cr} = K/l \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Nei vari casi si hanno gli integrali generali:

$$1) \varphi = C_1 e^{\sqrt{\alpha}t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}t},$$

$$2) \quad \varphi = C_1 \sin(\sqrt{-\alpha} t) + C_2 \cos(\sqrt{-\alpha} t),$$

$$3) \quad \varphi = C_1 t + C_2.$$

Nel primo caso il moto diverge e quindi la configurazione è instabile, mentre nel secondo caso il moto è limitato in ampiezza e quindi la configurazione è stabile.

In fine, nel terzo caso (il caso critico) il moto diverge se al sistema viene imposta una velocità iniziale (un impulso) e in tal caso la configurazione critica è instabile.

Se, per esempio, l'asta fosse soggetta ad un impulso al tempo $t=0$, questo si tradurrebbe in una velocità angolare iniziale ω_0 . Imponendo le condizioni al contorno $\varphi(0)=0$ e $\dot{\varphi}(0)=\omega_0$

si ottiene:

$$1) \quad \varphi = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}} (e^{\sqrt{\alpha} t} - e^{-\sqrt{\alpha} t});$$

$$2) \quad \varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{-\alpha}} \sin(\sqrt{-\alpha} t);$$

$$3) \quad \varphi = \omega_0 t.$$

Capitolo 2

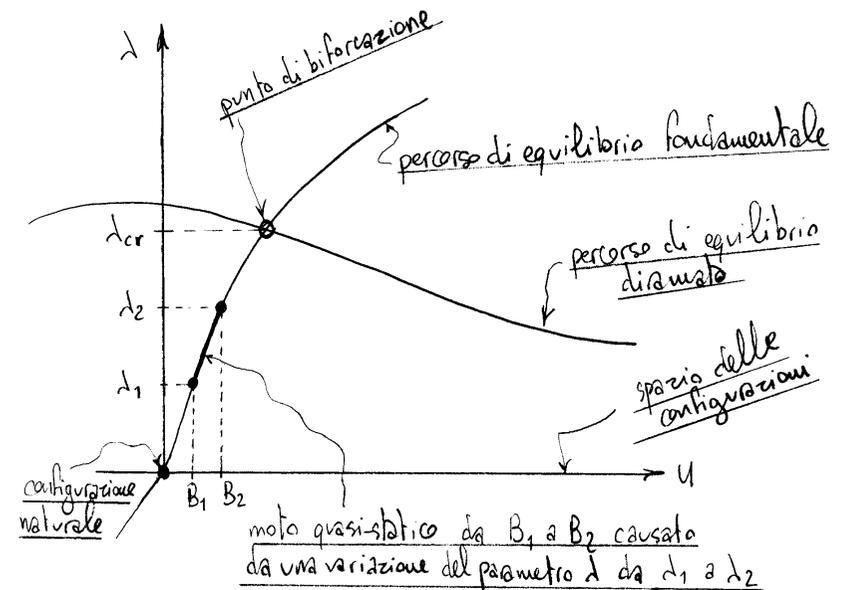
Biforcazione dell'equilibrio

Se si incrementano le forze applicate ad una struttura in modo quasi statico, a partire, per esempio, dalla configurazione naturale, la struttura passa attraverso una successione continua di stati di equilibrio.

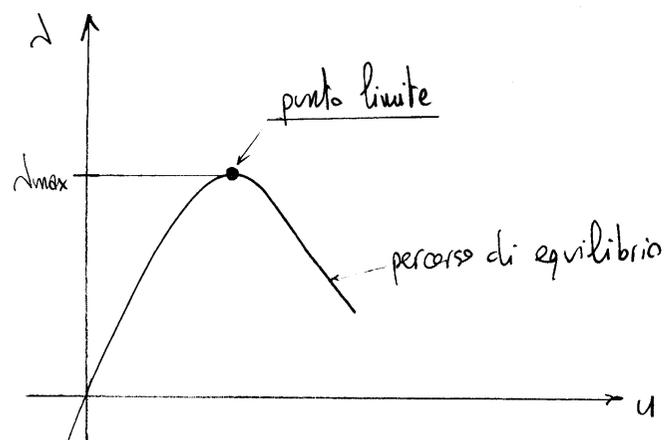
Se le forze applicate vengono fatte dipendere da un parametro scalare λ , detto parametro di carico, le configurazioni equilibrate al variare di λ disegnano, nello spazio delle configurazioni del sistema, un percorso di equilibrio.

Più in generale, dal parametro λ possono essere fatte dipendere oltre che dalle forze, che rappresentano delle condizioni statiche al contorno, anche degli spostamenti,

che rappresentano delle condizioni cinematiche al contorno. Se da un punto dello spazio delle configurazioni e del parametro di carico passano più percorsi di equilibrio, il punto è detto di biforcazione. Se i percorsi sono due il punto è detto di biforcazione semplice.



Inoltre, un punto di massimo di λ su un percorso di equilibrio è detto punto limite.



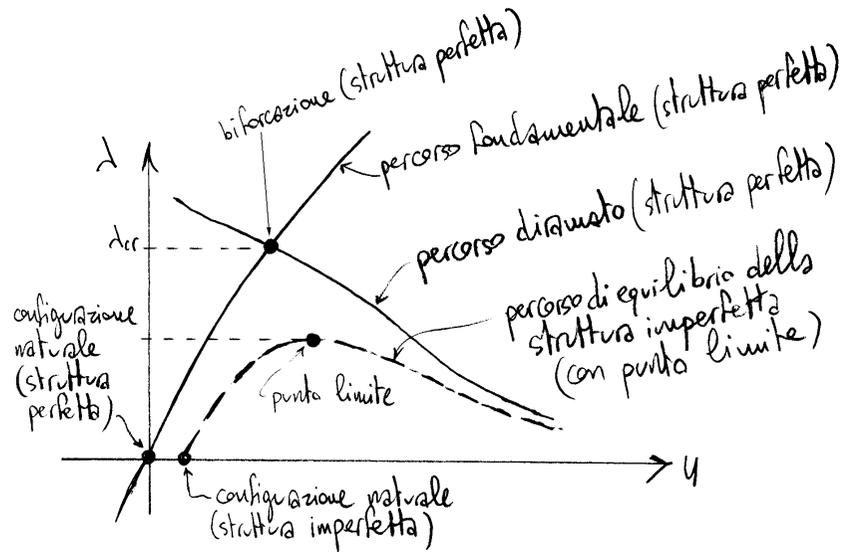
Infine, un percorso di equilibrio che passa dalla configurazione naturale viene detto fondamentale o naturale, mentre i percorsi di equilibrio che intersecano il percorso fondamentale sono detti diramati. Il più piccolo valore di biforcazione di λ sul percorso fondamentale viene detto critico.

Il valore critico di λ separa il percorso fondamentale in due parti. Normalmente, la parte inferiore si compone di stati di equilibrio stabili e la superiore instabili.

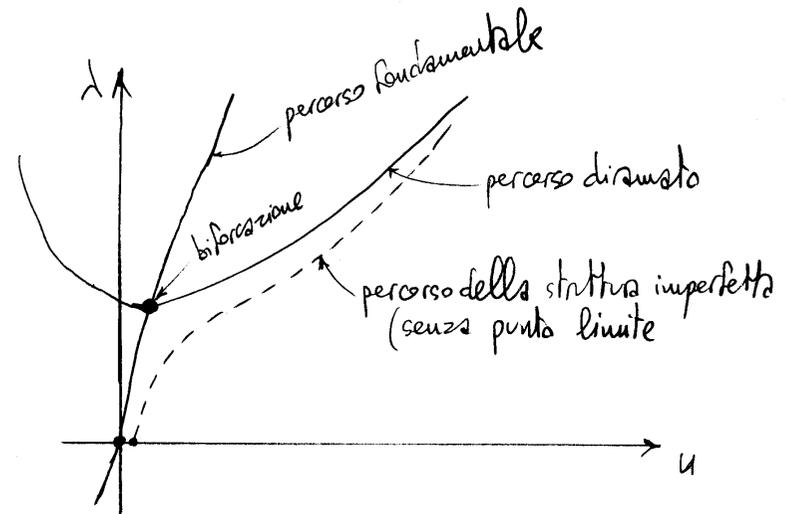
Una struttura reale presenta sempre delle "imperfezioni" rispetto al modello "perfetto", preso come base dei calcoli e della realizzazione della struttura. Risulta quindi importante la valutazione del comportamento della struttura imperfetta, sia che queste imperfezioni riguardino la configurazione geometrica della struttura oppure le forze applicate. Si supponga di avere, per esempio, una imperfezione nella configurazione geometrica. La configurazione naturale

della struttura imperfetta differisce da quella della struttura perfetta. Il percorso di equilibrio della struttura imperfetta presenta fin dall'inizio, per via delle imperfezioni, le caratteristiche del percorso di ramo della struttura perfetta, dove invece compare solo all'atto della biforcazione dell'equilibrio.

Per questo motivo, tale percorso si presenta normalmente

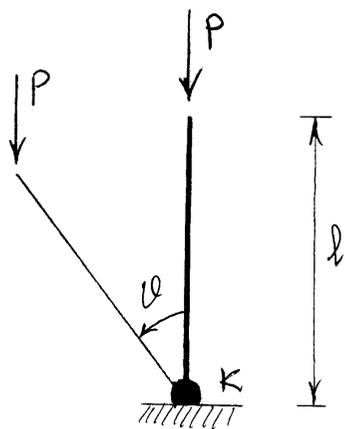


regolare, a differenza del passaggio tra i percorsi fondamentale e di ramo della struttura perfetta attraverso il punto di biforcazione. Se il percorso di equilibrio della struttura imperfetta presenta un punto limite si dice che la struttura è sensibile alle imperfezioni, poiché in tal caso il carico effettivamente raggiungibile dalla struttura "reale" è inferiore al carico critico.



2.1 Esempio a un grado di libertà

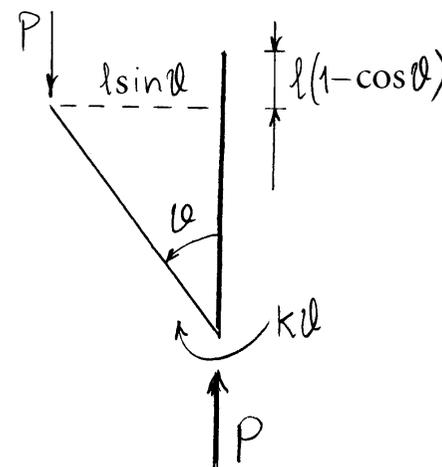
Analizziamo il comportamento del sistema ad un grado di libertà sotto illustrato, supponendo dapprima una cinematica finita ed un legame costitutivo elastico lineare nella rotazione posta al piede dell'asta rigida.



$P \equiv$ parametro di carico

L'equazione di equilibrio alla rotazione nella configurazione generica richiede:

$$Pl \sin \vartheta - K \vartheta = 0$$

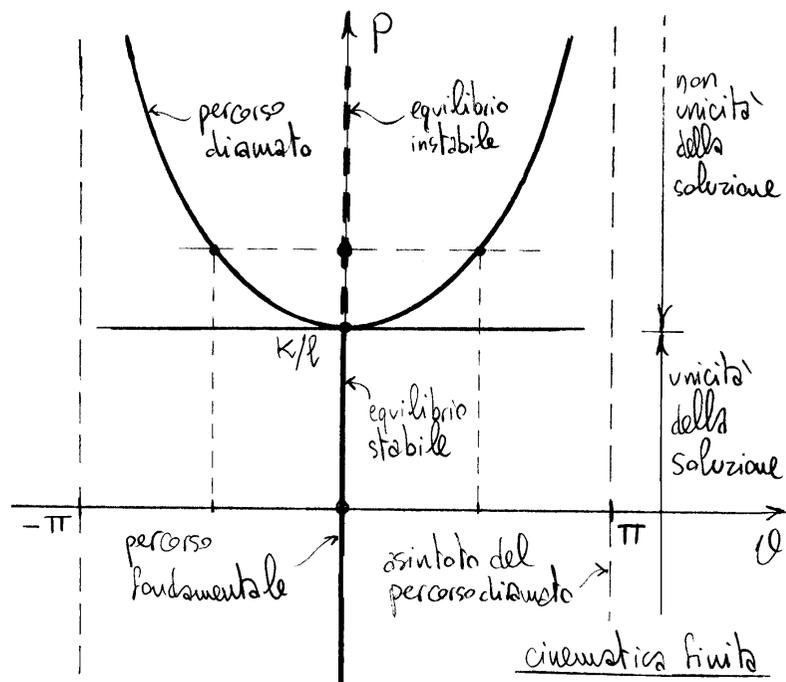


Questa equazione è sempre soddisfatta per $\vartheta = 0$ e dunque la retta $\vartheta = 0$ nello spazio P - ϑ rappresenta la curva di equilibrio fondamentale.

Per $\vartheta \neq 0$ si ottiene poi la curva di equilibrio diramata:

$$P = \frac{K}{l} \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

Poiché $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} (\vartheta / \sin \vartheta) = 1$, tale curva interseca



il percorso fondamentale in corrispondenza del valore critico del carico, già valutato col metodo statico:

$$P_{cr} = \frac{k}{l}$$

la pendenza del percorso diamato vale:

$$\frac{dP}{d\vartheta} = \frac{k}{l} \frac{1}{\sin \vartheta} \left(1 - \frac{\vartheta}{\tan \vartheta} \right)$$

Poiché:

$$\sin \vartheta = \vartheta (1 - \vartheta^2/6 + \dots), \quad \tan \vartheta = \vartheta (1 + \vartheta^2/3 + \dots),$$

risulta:

$$1/\sin \vartheta = (1 + \vartheta^2/6 + \dots)/\vartheta, \quad \vartheta/\tan \vartheta = 1 - \vartheta^2/3 + \dots$$

e dunque:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{dP}{d\vartheta} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1 + \vartheta^2/6}{\vartheta} \frac{\vartheta^2}{3} = 0.$$

Inoltre, poiché $\vartheta/\tan \vartheta < 1$, risulta:

$$\frac{dP}{d\vartheta} \begin{cases} > 0 & \text{per } \vartheta > 0 \\ < 0 & \text{per } \vartheta < 0 \end{cases}$$

Quindi il percorso diamato è crescente a partire dal punto di biforcazione ed ha tangente orizzontale in corrispondenza del punto di biforcazione. Inoltre la curva diamato è simmetrica rispetto all'asse del parametro di carico P ed ha per asintoti le rette verticali $\vartheta = \pm \pi$.

Per valutare la stabilità dell'equilibrio, si consideri l'energia potenziale totale:

$$\pi = \frac{1}{2} k \vartheta^2 - P l (1 - \cos \vartheta) .$$

La variazione prima:

$$\delta \pi = \frac{d\pi}{d\vartheta} \delta \vartheta = (k \vartheta - P l \sin \vartheta) \delta \vartheta ,$$

se uguagliata a zero per ogni variazione $\delta \vartheta \neq 0$ individua l'equazione di equilibrio già utilizzata.

La sua variazione seconda vale:

$$\delta^2 \pi = \frac{1}{2} \frac{d^2 \pi}{d\vartheta^2} \delta \vartheta^2 = \frac{1}{2} (k - P l \cos \vartheta) \delta \vartheta^2 .$$

Sul percorso fondamentale $\delta^2 \pi$ è positivo se e solo se $k - P l > 0$. Analogamente $\delta^2 \pi$ è negativo se e solo se $k - P l < 0$. Dunque,

sul percorso fondamentale risulta:

$$\begin{cases} P < P_{cr} & \Rightarrow \text{equilibrio stabile} \\ P > P_{cr} & \Rightarrow \text{equilibrio instabile} \end{cases} .$$

Sul percorso diramato, per $\vartheta \neq 0$, si ha:

$$P l \cos \vartheta = k \frac{\vartheta}{\tan \vartheta} ,$$

e poiché $\vartheta / \tan \vartheta < 1$ risulta sempre $\delta^2 \pi > 0$.

Gli stati di equilibrio sul percorso diramato sono dunque stabili. Si noti che tale equilibrio stabile, che occorre per valori del carico superiore al carico critico, avviene al prezzo di notevoli rotazioni ϑ imposte alla molla rotazionale. In un sistema reale, prima dello sviluppo di forti spostamenti, si ha normalmente lo sovraccarico o la rottura del

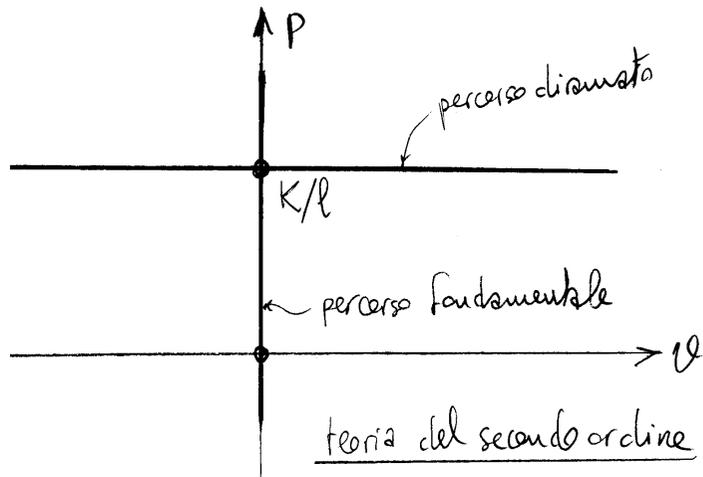
materiale.

Se lo stesso sistema viene analizzato utilizzando una cinematica linearizzata (teoria del secondo ordine) occorre utilizzare l'equazione di equilibrio scritta nella forma

$$(Pl - k) \vartheta = 0,$$

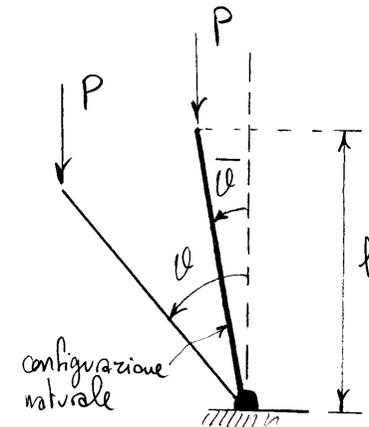
che è la stessa utilizzata nel metodo statico.

Si ottengono la curva fondamentale $\vartheta = 0$ e



la curva di amata $P = P_{cr}$.

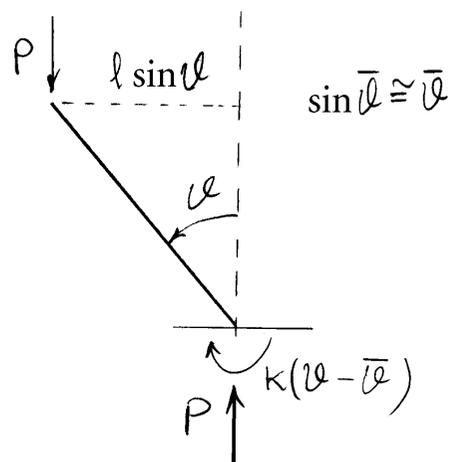
Si supponga ora la presenza di una piccola imperfezione nella forma di un angolo di rotazione $\bar{\vartheta}$ iniziale rispetto alla verticale.



L'equazione di equilibrio (in cinematica finita) si scrive:

$$Pl \sin \vartheta - k (\vartheta - \bar{\vartheta}) = 0,$$

da cui si ottiene l'equazione del percorso di equilibrio della struttura imperfetta:

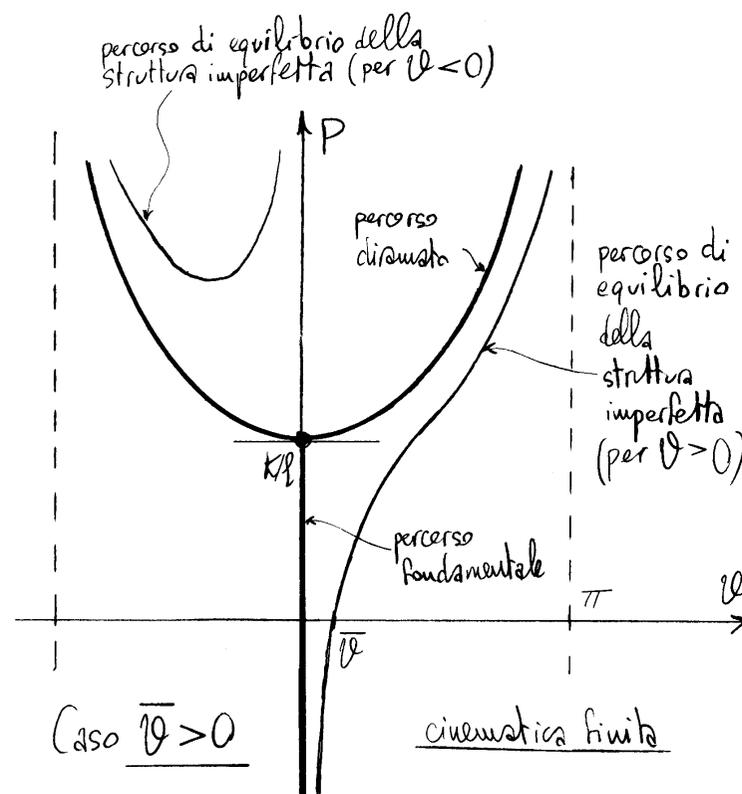


$$P = \frac{k}{l} \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} .$$

Nel caso $\bar{\vartheta} > 0$, e limitandosi a valori di $\vartheta \geq 0$, tale curva si compone di un solo ramo regolare che interseca l'asse delle rotazioni ϑ nel punto $\bar{\vartheta}$ ed è asintotica alla retta $\vartheta = \pi$ e quindi anche alla curva di ammettibilità della struttura perfetta. Tale curva è anche sempre crescente. In fatti:

$$\frac{dP}{d\vartheta} = \frac{k}{l} \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ 1 - \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{\tan \vartheta} \right\} > 0 ,$$

poiché $\vartheta / \tan \vartheta < 1$ e a maggior ragione $(\vartheta - \bar{\vartheta}) / \tan \vartheta < 1$. Inoltre, l'inclinazione iniziale vale:



$$\left. \frac{dP}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\bar{\vartheta}} = \frac{k}{l} \frac{1}{\sin \bar{\vartheta}} \approx \frac{k}{l \bar{\vartheta}},$$

e questa tende all'infinito per $\bar{\vartheta} \rightarrow 0$. Poiché la curva presenta un asintoto verticale e' evidente che deve presentare anche un punto di flesso, almeno per imperfezioni $\bar{\vartheta}$ sufficientemente piccole.

Notiamo che la curva della struttura imperfetta non interseca la curva della struttura perfetta. Infatti, in tal caso dovrebbe aversi:

$$\frac{k}{l} \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} = \frac{k}{l} \frac{\vartheta}{\sin \vartheta},$$

e quindi:

$$-\frac{k}{l} \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} = 0.$$

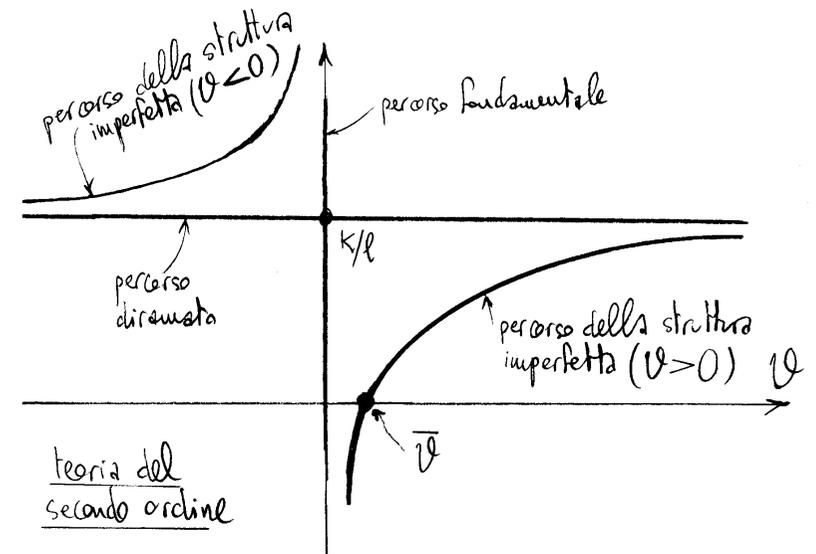
Tale relazione non e' mai soddisfatta per $\bar{\vartheta} \neq 0$

e ne segue quindi quanto volevamo dimostrare.

Se, infine, la cinematica e' linearizzata, si ottiene la curva:

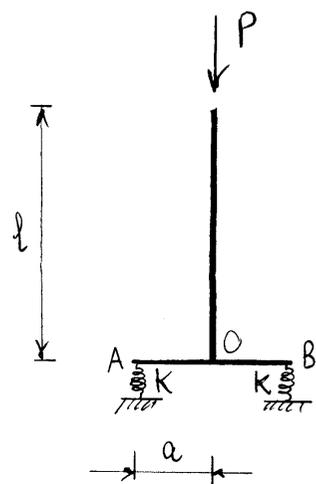
$$P = \frac{k}{l} \left(1 - \frac{\bar{\vartheta}}{\vartheta} \right),$$

sempre crescente e che presenta l'asintoto orizzontale $P = P_{cr}$.



2.2 Esempio a due gradi di libertà (modello di Shanley)

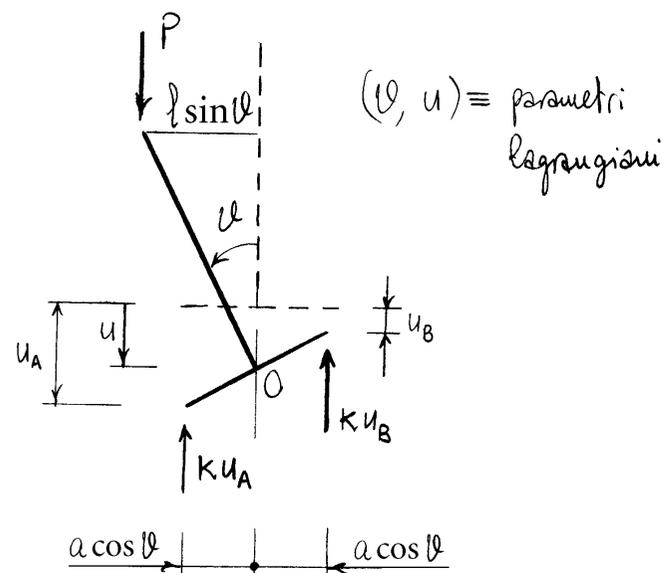
Il modello è composto da una struttura rigida a forma di T, con il centro O del T vincolato a restare sulla verticale e i due bracci del T vincolati alle estremità A e B da due molle estensibili elastiche lineari e di uguale rigidità K . Come parametri



$P \equiv$ parametro di carico

lagrangiani indipendenti possono assumersi lo spostamento verticale u del punto O e la rotazione

ϑ della struttura rigida. In funzione di questi, gli



spostamenti verticali u_A ed u_B dei punti A e B valgono:

$$\begin{cases} u_A = u + a \sin \vartheta \\ u_B = u - a \sin \vartheta \end{cases}$$

le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale

ed alla rotazione attorno al punto O si scrivano:

$$\begin{cases} P = k(u_A + u_B) \\ P l \sin \vartheta - k(u_A - u_B) a \cos \vartheta = 0 \end{cases},$$

ed anche, poiché $u_A + u_B = 2u$ e $u_A - u_B = 2a \sin \vartheta$:

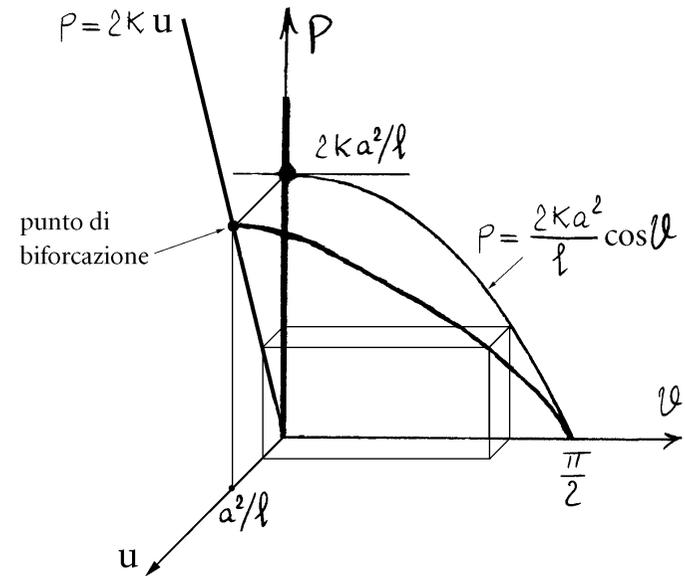
$$\begin{cases} P = 2ku \\ (Pl - 2ka^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta = 0 \end{cases}.$$

Si individuano dunque le due curve di equilibrio seguenti:

$$\begin{cases} P = 2ku \\ \vartheta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} P = 2ku \\ P = \frac{2ka^2}{l} \cos \vartheta \end{cases},$$

Le due curve si intersecano in corrispondenza dei valori:

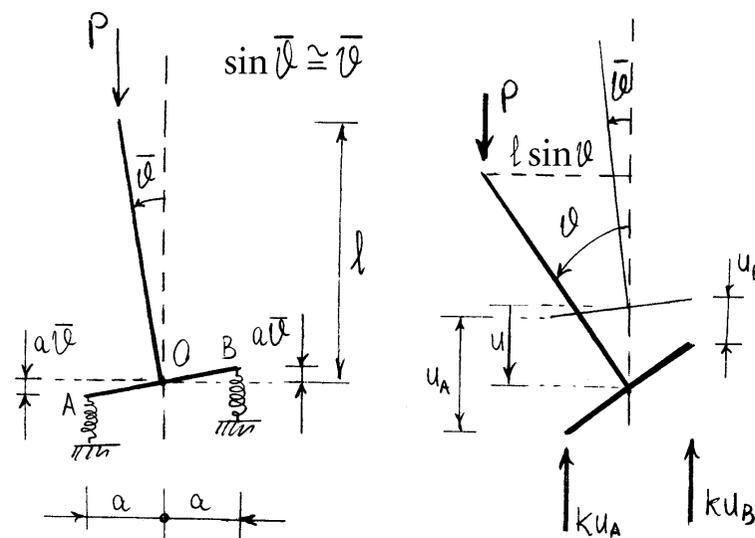
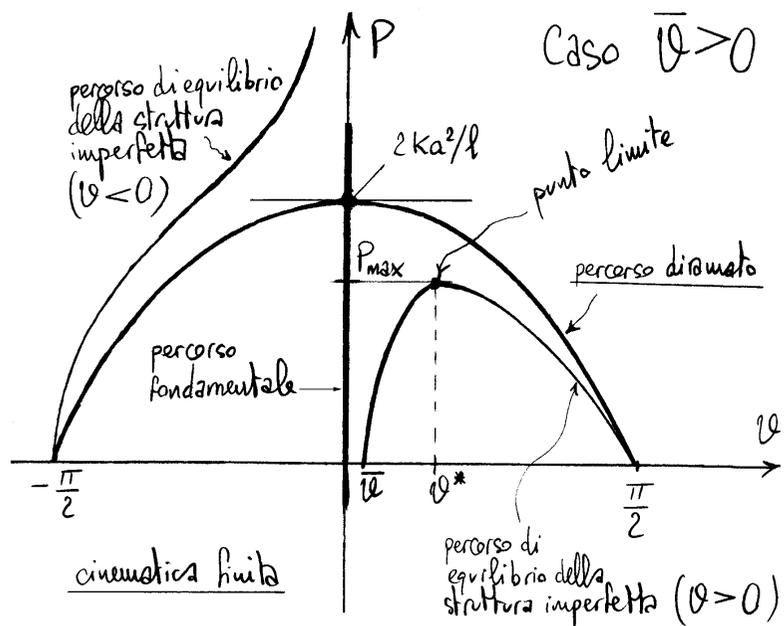
$$P_{cr} = \frac{2ka^2}{l}, \quad u = \frac{a^2}{l}, \quad \vartheta = 0.$$



In un piano $P-\vartheta$ la prima curva rappresenta la retta $\vartheta = 0$ e la seconda la curva:

$$P = \frac{2ka^2}{l} \cos \vartheta.$$

La curva diramata è decrescente ed interseca l'asse delle ϑ per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (quando l'angolo del T è diventata orizzontale).



e quindi :

$$\begin{cases} u_A + u_B = 2u \\ u_A - u_B = 2a(\sin \vartheta - \bar{\vartheta}) \end{cases}$$

Le equazioni di equilibrio divergono quindi:

$$\begin{cases} P = 2ku \\ P = 2 \frac{ka^2}{l} \cos \vartheta \left(1 - \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} \right) \end{cases}$$

Vediamo ora che succede se è presente una piccola imperfezione iniziale $\bar{\vartheta}$ nella verticalità dell'ansa del T.

In tal caso risulta:

$$\begin{cases} u_A = u + a \sin \vartheta - a\bar{\vartheta} \\ u_B = u - a \sin \vartheta + a\bar{\vartheta} \end{cases}$$

che rappresenta un'unica curva di equilibrio. Nel piano $P-\vartheta$ tale curva presenta un massimo che può essere calcolato annullando la derivata prima della $P(\vartheta)$:

$$2 \frac{ka^2}{l} \left\{ -\sin \vartheta \left(1 - \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\bar{\vartheta}}{\tan^2 \vartheta} \right\} = 0.$$

Risulta:

$$1 - \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} = \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta \tan^2 \vartheta},$$

oppure:

$$1 = \bar{\vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \Rightarrow \sin^3 \vartheta = \bar{\vartheta}.$$

Il massimo si ha dunque in corrispondenza del valore:

$$\vartheta^* = \arcsin \sqrt[3]{\bar{\vartheta}},$$

Poichè come visto:

$$1 - \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta^*} = \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta^* \tan^2 \vartheta^*},$$

il carico massimo vale:

$$P_{\max} = 2 \frac{ka^2}{l} \cos \vartheta^* \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \vartheta^* \tan^2 \vartheta^*},$$

e cioè:

$$P_{\max} = 2 \frac{ka^2}{l} \frac{\bar{\vartheta}}{\tan^3 \vartheta^*}.$$

Per esempio, se:

$$\bar{\vartheta} = 0.1 \text{ rad} = 5.73^\circ,$$

allora:

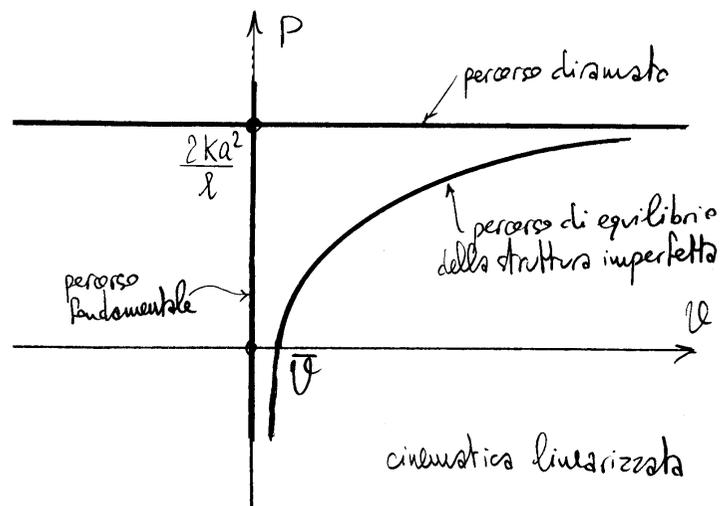
$$\begin{cases} \vartheta^* = 0.4827 \text{ radianti} = 27.66^\circ \\ P_{\max} = 0.695 \left(2 \frac{ka^2}{l} \right) = 0.695 P_{cr} \end{cases}.$$

Se si considera una cinematica linearizzata,
nel caso di struttura perfetta il percorso di ramato
risulta:

$$P = 2 \frac{ka^2}{l},$$

mentre nel caso di struttura imperfetta il percorso
di equilibrio diventa:

$$P = 2 \frac{ka^2}{l} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u} \right).$$

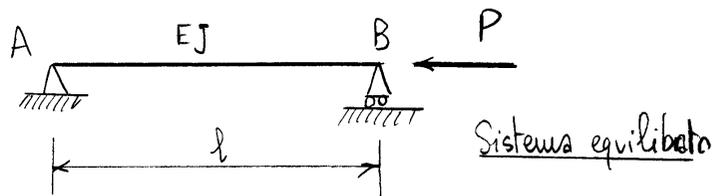


Capitolo 3

Aste compresse

3.1 Asta di Eulero

Il problema dell'asta di Eulero riguarda l'instabilità flessionale di un'asta appoggio-carrello soggetta ad una forza normale P di compressione in corrispondenza del carrello.

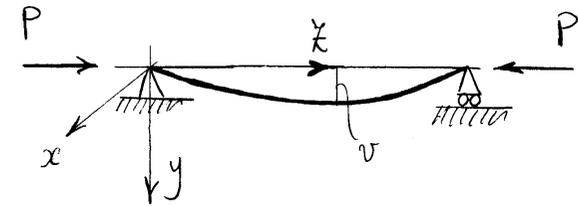


Nell'analisi del problema viene normalmente trascurata la deformabilità assiale dell'asta. In tale ipotesi la configurazione indeformata è equilibrata sotto l'azione del carico.

3.1.1 Metodo statico

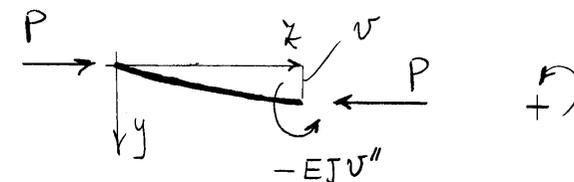
Si sceglie una configurazione deformata di tipo flessionale adiacente la configurazione indeformata equilibrata. La configurazione deformata definisce il piano di flessione che viene fatto coincidere col piano yz .

Per gli equilibri globali alla traslazione verticale ed alla rotazione le reazioni verticali degli appoggi



Sistema adiacente (deformata nel piano yz)

A e B sono nulle. Sezionando la trave in corrispondenza dell'ascissa z generica, si mette in evidenza un momento flettente proporzionale alla curvatura della trave, di asse momento in direzione x se e solo se y è principale di inerzia. Il taglio risulta nullo, per equilibrio alla traslazione verticale di una delle due parti in cui si è divisa la trave.



L'equilibrio alla rotazione della stessa parte è possibile solo se y è principale di inerzia, ed in tal caso si scrive:

$$-EJ v'' - P v = 0 .$$

Posto :

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ} ,$$

si ottiene:

$$(1) \quad v'' + \alpha^2 v = 0 .$$

L'equazione differenziale ottenuta è omogenea e quindi ammette la soluzione banale $v=0$.

Si è così ottenuto un problema agli autovalori ed autovettori. Gli autovalori sono i carichi critici, che saranno determinati richiedendo che l'equazione omogenea ammetta soluzioni $v \neq 0$. Sostituendo un valore critico nell'equazione differenziale si

ottencono poi i modi critici, cioè gli autovettori corrispondenti.

L'equazione algebrica associata all'equazione differenziale a coefficienti costanti (1) risulta:

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\alpha ,$$

e quindi si ha il seguente integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x .$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(l) = 0 \Rightarrow C_1 \sin \alpha l = 0 \end{cases} .$$

Volendo ottenere delle soluzioni $v \neq 0$ occorre che sia $C_1 \neq 0$. Dunque, l'equazione determinante dei carichi critici risulta:

$$\sin \alpha l = 0 ,$$

ovvero:

$$\alpha l = n\pi \quad (n \text{ intero}),$$

da cui, tenendo conto della definizione di α :

$$P_{cr} = n^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

Si hanno quindi infiniti carichi critici, uno per ogni valore di n . Il carico critico minimo, detto carico critico di Eulero o euleriano, si ottiene ponendo $n=1$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

In sua corrispondenza, il modo critico risulta:

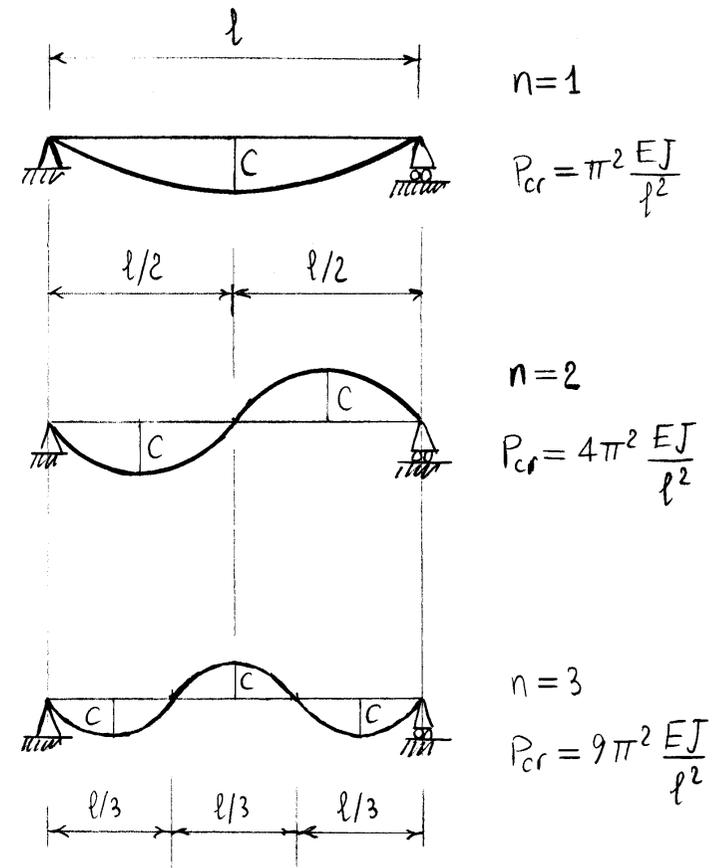
$$v = C \sin \frac{\pi}{l} x,$$

poiché, per $n=1$, $\alpha l = \pi$. Ponendo poi $\alpha l = 2\pi$, $\alpha l = 3\pi$ e così via, si hanno i modi critici corrispondenti ai successivi carichi critici:

$$v = C \sin \frac{2\pi}{l} x \quad (n=2),$$

$$v = C \sin \frac{3\pi}{l} x \quad (n=3),$$

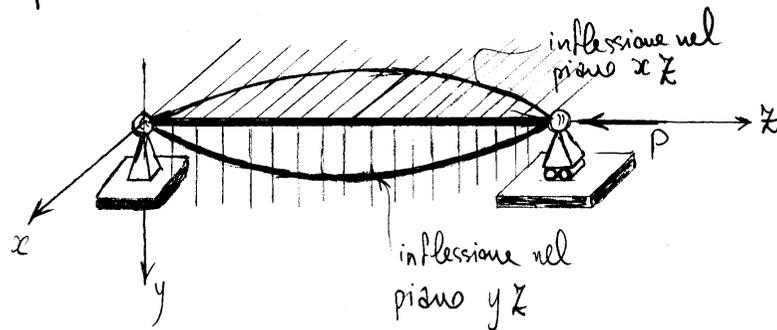
e così via.



In generale il modo critico risulta:

$$v = C \sin \frac{n\pi}{l} z .$$

Se l'asta è libera di inflettersi in ogni piano e se le cerniere alle due estremità sono sferiche, l'asta può inflettersi in uno qualunque dei due piani longitudinali contenenti un'asse principale di inerzia della sezione.



In tal caso il minimo carico critico dell'asta è quello relativo alla inflessione nel piano di

minima rigidità, normale all'asse principale di inerzia di minimo momento di inerzia:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E J_{min}}{l^2} ,$$

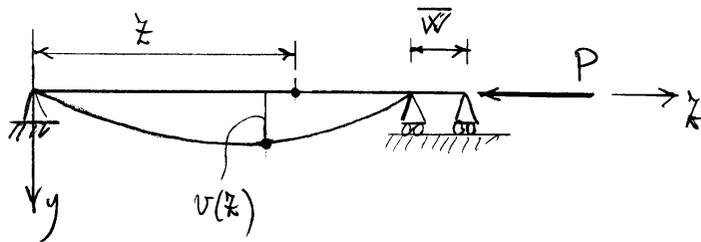
dove:

$$J_{min} = \min \{ J_x, J_y \} .$$

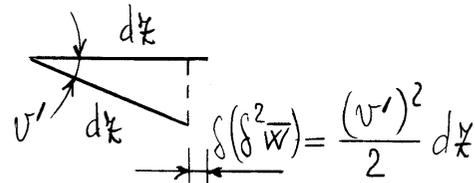
Se, invece, le cerniere sono cilindriche, con l'asse del cilindro nella direzione x , per l'inflessione nel piano $y-z$ continua a valere la formula $P_{cr} = \pi^2 E J_x / l^2$, mentre per l'inflessione nel piano $x-z$ occorre considerare le sezioni di estremità impedite di ruotare attorno all'asse y , e quindi come se fossero incastrate.

3.1.2 Metodo energetico

Procedendo con il metodo energetico, occorre innanzitutto calcolare la variazione seconda $\delta^2 \Pi$ dell'energia potenziale totale associata ad una variazione $v(z)$ a partire dalla configurazione indeformata.



Nell'ipotesi di indeformabilità assiale dell'asta lo spostamento della estremità soggetta al carico,



calcolata fino al secondo ordine vale:

$$\delta^2 \bar{W} = \int_0^l \frac{(v')^2}{2} dz$$

La variazione seconda $\delta^2 \Pi$ vale dunque:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l EJ (v'')^2 dz - P \int_0^l \frac{(v')^2}{2} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (EJ v''^2 - P v'^2) dz \end{aligned}$$

La variazione prima di $\delta^2 \Pi$, associata ad una variazione δv , calcolata in corrispondenza della variazione v , vale:

$$\delta(\delta^2 \Pi) = \int_0^l (EJ v'' \delta v'' - P v' \delta v') dz$$

Integrando per parti ed uguagliando a zero si ottiene:

$$\int_0^l (EJv'' + Pv) \delta v'' dz - [Pv \delta v]_0^l = 0$$

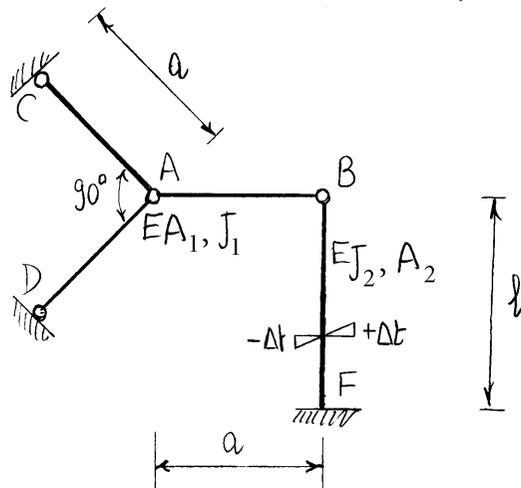
$$= \int_0^l (EJv'' + Pv) \delta v'' dz = 0.$$

Dovendo tale identità valere per ogni $\delta v''$ se ne deduce l'equazione differenziale:

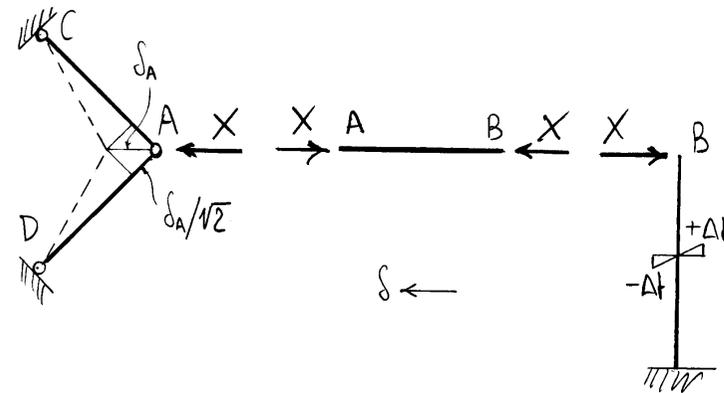
$$EJv'' + Pv = 0.$$

3.1.3 Esercizio

Determinare la variazione critica di temperatura



La struttura è una volta iperstatica. Scompresso il pendolo AB, la congruenza richiede che l'avvicinamento dei due

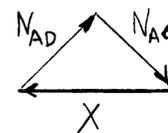


punti A e B sia uguale all'allungamento del pendolo AB:

$$\delta_B - \delta_A = \frac{Xa}{EA_1}.$$

L'equilibrio del nodo A richiede:

$$N_{AC} = N_{AD} = X/\sqrt{2},$$



equilibrio nodo A

e dunque:

$$\frac{\delta_A}{\sqrt{2}} = \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{a}{EA_1} \Rightarrow \delta_A = \frac{Xa}{EA_1}.$$

Lo spostamento dell'estremità B della mensola FB vale invece:

$$\delta_B = \frac{\alpha \Delta t l^2}{h} - \frac{X l^3}{3EJ_2}.$$

L'equazione di congruenza diviene:

$$\frac{\alpha \Delta t l^2}{h} - \frac{X l^3}{3EJ_2} = 2 \frac{Xa}{EA_1},$$

da cui:

$$X = \frac{3 \alpha E J_2 \Delta t}{h l \left(1 + \frac{6a J_2}{A_1 l^3}\right)}.$$

L'asta critica della struttura risulta essere l'asta AB, di uguale lunghezza delle aste AC ed AD ma soggetta ad uno sforzo normale maggiore. Deve dunque risultare:

$$\pi^2 \frac{E J_1}{a^2} = \frac{3 \alpha E J_2 \Delta t_{cr}}{h l \left(1 + \frac{6a J_2}{A_1 l^3}\right)},$$

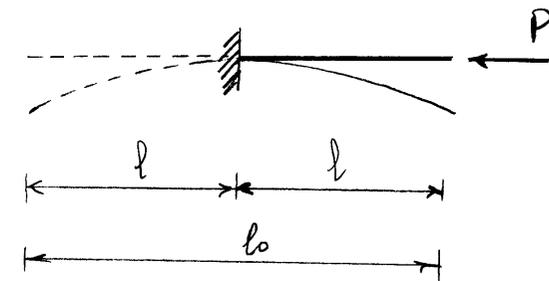
da cui:

$$\Delta t_{cr} = \left(1 + \frac{6a J_2}{A_1 l^3}\right) \frac{J_1}{J_2} \frac{\pi^2 h l}{3 \alpha a^2}.$$

3.2 Instabilità flessionale di un'asta compressa sotto condizioni generiche di vincolo

3.2.1 Mensola

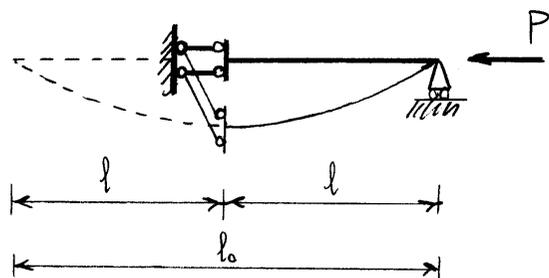
Per simmetria, la sezione di mezzzeria dell'asta incerniata alle due estremità non ruota durante l'inflessione laterale. Questo significa che la mensola si comporta



come una trave appoggiata di doppia lunghezza:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(2l)^2} = \pi^2 \frac{EJ}{4l^2} .$$

Analogia alla mensola e' l'asta incernierata ad una estremita' e con incastro scorrevole all'altra estremita'.



3.2.2 Luce libera di inflessione

Detta l_0 la lunghezza della trave appoggiata equivalente, che poi coincide con la distanza tra due flessi consecutivi della deformata critica ed e' detta

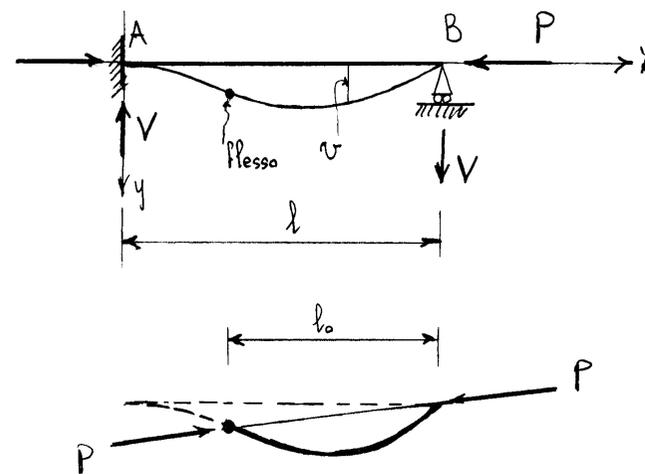
luce libera di inflessione, risulta in entrambi i casi:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2} ,$$

con $l_0 = 2l$.

3.2.3 Trave incastro-appoggio

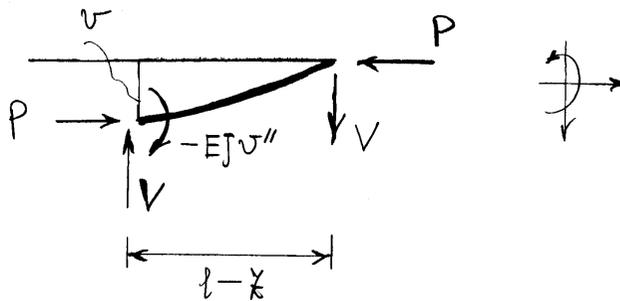
La configurazione adiacente presenta almeno un punto di flesso intermedio, oltre al punto B in corrispondenza dell'appoggio. La parte di trave compresa tra i due flessi e'



equivalente (nella cinematica linearizzata) alla trave appoggiata alle estremità. Se l_0 indica la luce libera di inflessione della trave, ovvero la distanza tra i due flessi, risulta quindi:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}.$$

La distanza l_0 non è però nota a priori. Per risolvere il problema,



consideriamo l'equilibrio alla rotazione di un tratto di trave:

$$EJv'' + Pv - V(l-z) = 0,$$

e cioè:

$$(1) \quad v'' + \alpha^2 v - \frac{V}{EJ}(l-z) = 0,$$

avendo ancora posto:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Un integrale particolare della (1) risulta:

$$v = \frac{V}{P}(l-z),$$

e quindi si ha il seguente integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + \frac{V}{P}(l-z).$$

Le condizioni al contorno impongono:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{V}{P}l = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{V}{P}l$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow \alpha C_1 - \frac{V}{P} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{V}{\alpha P}$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow \frac{V}{\alpha P} \sin \alpha l - \frac{V}{P}l \cos \alpha l = 0$$

L'equazione determinante dei carichi critici risulta dunque:

$$\sin(\alpha l) - \alpha l \cos(\alpha l) = 0,$$

oppure :

$$\tan(\alpha l) = \alpha l.$$

Limitandosi a riportare cinque cifre significative, la soluzione più piccola risulta:

$$\alpha_{cr} l = 4.49341 = 1.43030 \pi.$$

Tenendo conto che $(1.43030)^2 = 2.04575$, il più piccolo carico critico vale:

$$P_{cr} = 2.04575 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Il modo critico corrispondente risulta poi:

$$v = \frac{V}{\alpha_{cr} P_{cr}} \left\{ \sin(\alpha_{cr} \bar{x}) - \alpha_{cr} l \cos(\alpha_{cr} \bar{x}) + \alpha_{cr} (l - \bar{x}) \right\}$$

dove :

$$\alpha_{cr} = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EJ}} = 1.43030 \frac{\pi}{l}.$$

I punti di flesso sono definiti dalla condizione

$v'' = 0$, che risulta

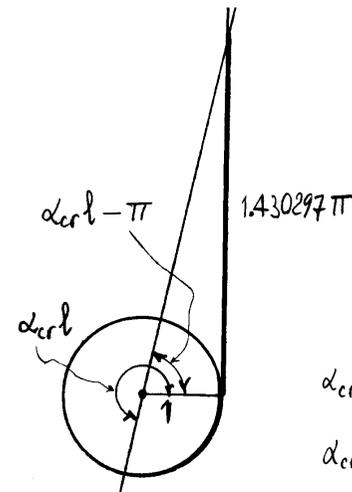
$$\tan(\alpha_{cr} \bar{x}) = \alpha_{cr} l.$$

Data che α_{cr} soddisfa l'uguaglianza:

$$\tan(\alpha_{cr} l) = \alpha_{cr} l,$$

è evidente che $\bar{x} = l$ rappresenta una radice. La seconda radice (contenuta nell'intervallo $0 \leq \bar{x} \leq l$) la si ottiene osservando che $\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha$ e che dunque :

$$\tan(\alpha_{cr} l - \pi) = \alpha_{cr} l.$$



$$\alpha_{cr} l = 1.430297 \pi$$

$$\alpha_{cr} l - \pi = 0.430297 \pi$$

Quindi:

$$\alpha_{cr} \bar{x} = \alpha_{cr} l - \pi = (1.43030 - 1)\pi,$$

oppure, in definitiva:

$$\bar{x} = \frac{1.43030 - 1}{1.43030} l = 0.30084 l.$$

Riassumendo, le soluzioni risultano:

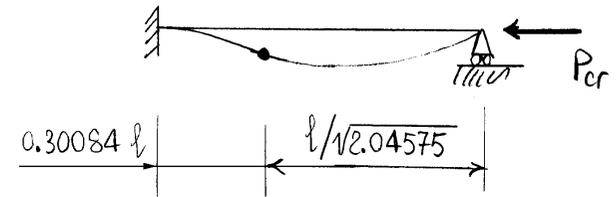
$$\bar{x} = \begin{cases} l \\ \frac{1.43030 - 1}{1.43030} l \end{cases} \Rightarrow l - \bar{x} = \frac{l}{1.43030}.$$

Poiché $(1.43030)^2 = 2.04575$, la luce libera di inflessione (distanza tra due flessi) risulta:

$$l_0 = l / \sqrt{2.04575},$$

e quindi il carico critico risulta:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{\left(\frac{l}{\sqrt{2.04575}}\right)^2}.$$

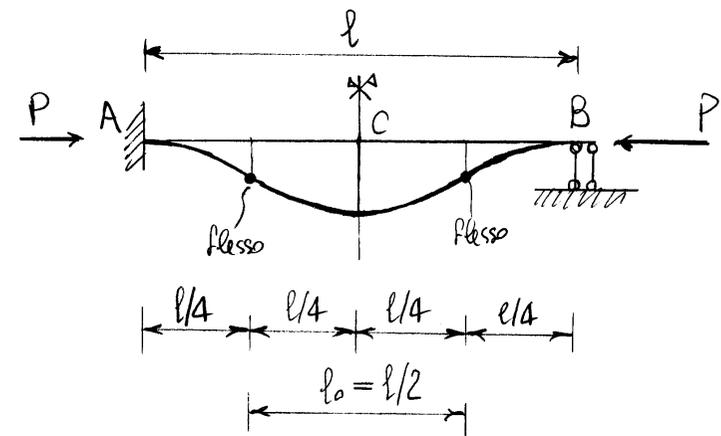


Una soluzione sufficientemente approssimata (2 sole cifre significative) la si ha ponendo:

$$l_0 = l / \sqrt{2}.$$

3.2.4 Trave incastrata

La simmetria rispetto all'asse verticale per la sezione C di mezzzeria della trave impone che le reazioni



verticali degli incastrati siano nulle e che la sezione di mezzaria non ruoti. Inoltre il numero minimo di flessi della configurazione adiacente è due, in posizione simmetrica. La sezione di mezzaria e i due flessi dividono la luce della trave in 4 parti equivalenti ad una configurazione adiacente ad una mensola.

Il carico critico della trave deve coincidere quindi con il carico critico delle mensole. Ciò impone che i punti di flesso e la sezione di mezzaria dividano la luce della trave in 4 parti uguali e che risulti:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{\left(2 \frac{l}{4}\right)^2} = 4 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

La luce libera di inflessione risulta $l_0 = l/2$

ed ancora può scriversi:

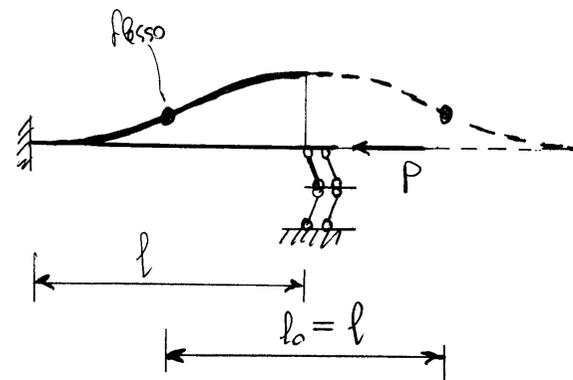
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}.$$

3.2.5 Trave incastrata ad una estremità ed impedita di ruotare all'altra estremità

Tale trave risulta equivalente ad una trave incastrata alle due estremità di luce doppia:

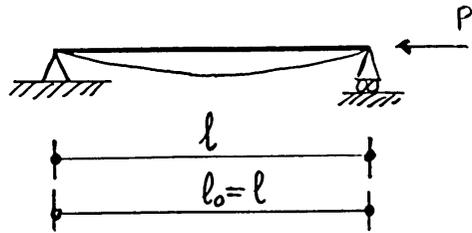
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

e la luce libera di inflessione coincide con la luce della trave.

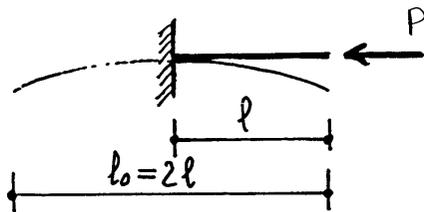


3.2.6 Schemi riassuntivi

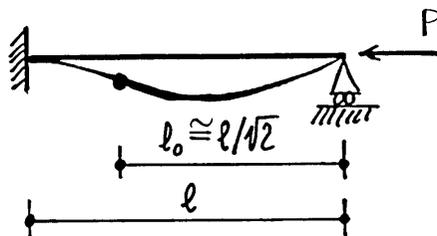
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2} \quad l_0 \equiv \text{Luce libera di inflessione}$$



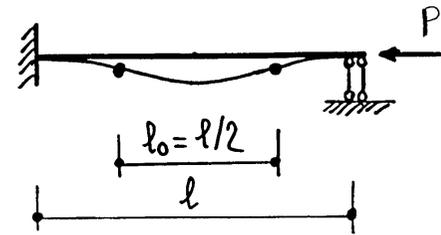
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



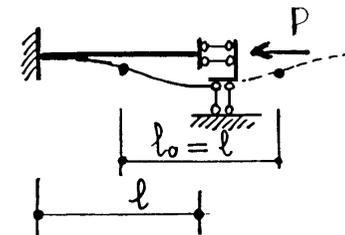
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$



$$P_{cr} \approx \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

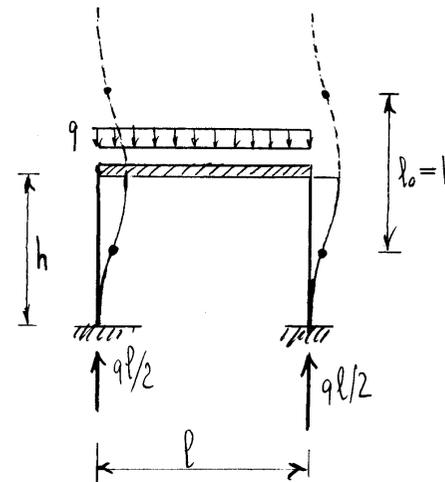


$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$



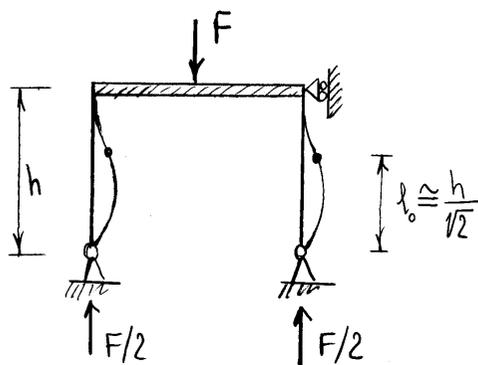
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

3.2.7 Portali con traversi infinitamente rigidi



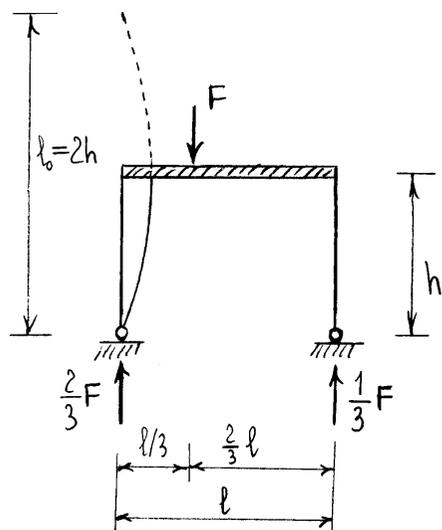
$$\frac{q_{cr} l}{2} = \pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$

$$q_{cr} = 2\pi^2 \frac{EJ}{lh^2}$$



$$\frac{F_{cr}}{2} \approx \pi^2 \frac{EJ}{(h/\sqrt{2})^2}$$

$$F_{cr} \approx 4\pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$



$$\frac{2}{3} F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(2h)^2}$$

$$F_{cr} = \frac{3}{8} \pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$

3.3 Limiti di validità della formula di Eulero

La formula di Eulero:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l_0^2},$$

può essere posta nella forma:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{A l_0^2} = \pi^2 E \frac{l_{\min}^2}{l_0^2},$$

dove σ_{cr} è la tensione normale corrispondente al carico critico. Posto:

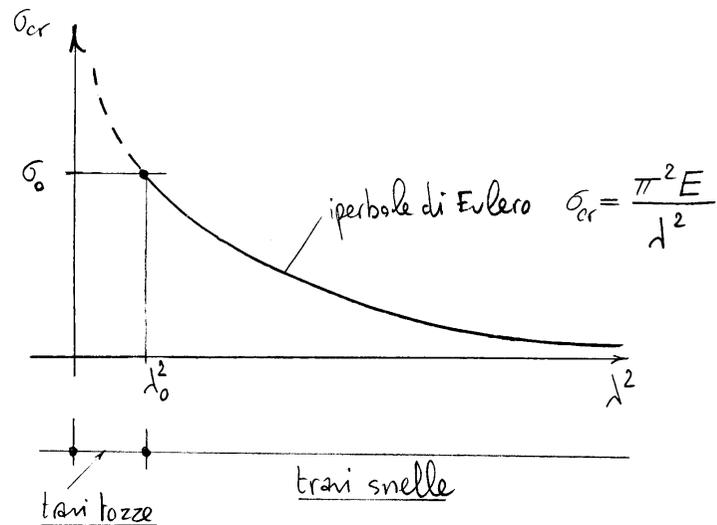
$$\lambda = l_0 / l_{\min},$$

dove λ è detta snellezza dell'asta, la formula di Eulero diviene:

$$(1) \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Se si riportano in ascissa λ^2 ed in ordinata σ_{cr}

l'equazione (1) descrive un'iperbole detta iperbole di Eulero.



La formula di Eulero è limitata in validità dalla richiesta che la σ_{cr} non superi il valore σ_0 della tensione normale al limite di proporzionalità. Il valore della snellezza corrispondente, λ_0 , detta snellezza limite, si ottiene imponendo che sia:

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2},$$

da cui:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}.$$

Se $\lambda > \lambda_0$ si dice che la trave è snella altrimenti che è tozza.

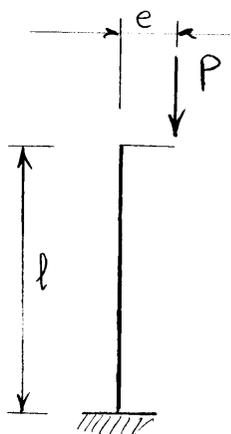
3.4 Pressoflessione nelle travi snelle (teoria del secondo ordine)

Se una trave è molto snella, e quindi sensibilmente flessibile, ed è soggetta a pressoflessione, gli spostamenti della linea d'asse non sono trascurabili nella scrittura delle equazioni di equilibrio.

Utilizzando la teoria del secondo ordine, si farà ancora riferimento ad una cinematica linearizzata

scrivendo però le condizioni di equilibrio nella configurazione deformata.

3.4.1 Esempio 1



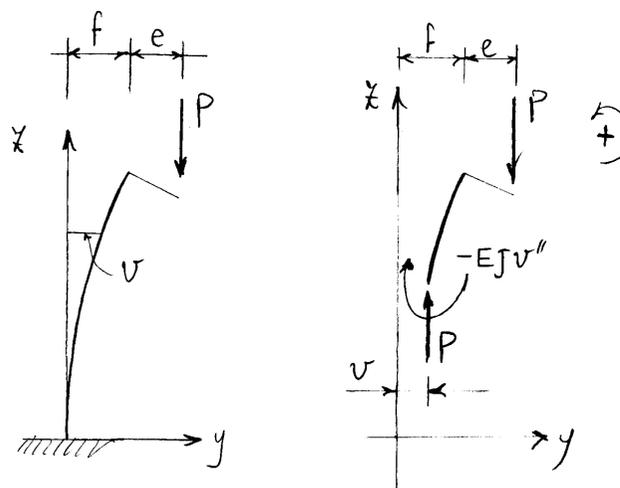
L'equilibrio richiede:

$$EJv'' - P(e + f - v) = 0,$$

cioè:

$$v'' + \alpha^2 v = \alpha^2(e + f),$$

dove, al solito:



$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + e + f.$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -(e + f) \end{cases}.$$

Soluzione:

$$v = (e + f)(1 - \cos \alpha z).$$

Inoltre:

$$v(l) = f \Rightarrow (e + f)(1 - \cos \alpha l) = f,$$

e dunque:

$$e + (e + f)(1 - \cos \alpha l) = e + f,$$

da cui infine:

$$e + f = \frac{e}{\cos \alpha l}.$$

In definitiva:

$$v = \frac{e}{\cos \alpha l} (1 - \cos \alpha z).$$

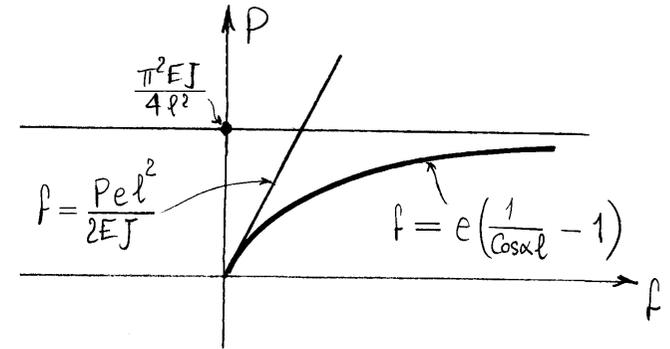
$$\text{Se } P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2} \text{ risulta } \cos \alpha l = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

e ne consegue:

$$\lim_{P \rightarrow P_{cr}} v(z) = \infty, \quad (0 < z \leq l).$$

Inoltre risulta, se $0 \leq P < P_{cr}$:

$$\frac{df}{dP} = e l \frac{d\alpha}{dP} \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} = \frac{e l}{2EJ \alpha} \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} > 0.$$

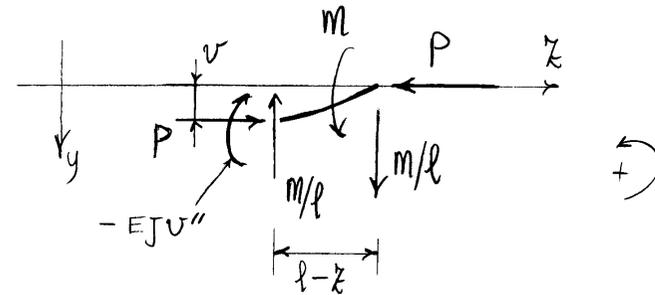


$$\text{Si noti che per } \alpha \rightarrow 0 \quad \frac{df}{dP} \rightarrow \frac{e l^2}{2EJ}.$$

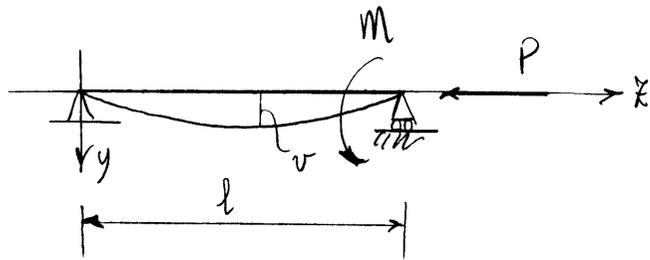
Nel caso delle travi inflesse elastiche lineari, la freccia vale:

$$f = \frac{(Pe) l^2}{2EJ} = P \frac{e l^2}{2EJ},$$

avendo tenuto conto che la mensola è sollecitata da una coppia Pe . Quindi, come ci si poteva aspettare, la pendenza iniziale coincide con quella, costante, che si aveva nel caso di travi inflesse elastiche lineari.



3.4.2 Esempio 2



L'equilibrio alla rotazione si scrive:

$$EJv'' + Pv + M - \frac{m}{l}(l-z) = 0,$$

e quindi:

$$v'' + \alpha^2 v = -\frac{m}{EJl} z,$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z - \frac{M}{Pl} z.$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 & \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(l) = 0 & \Rightarrow C_1 = \frac{M}{P \sin \alpha l} \end{cases}.$$

Soluzione:

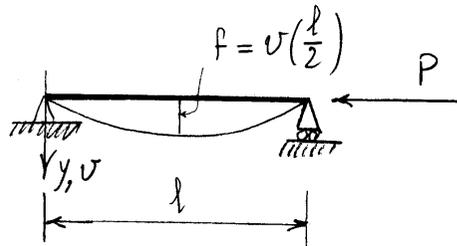
$$v = \frac{M}{P} \left(\frac{\sin \alpha z}{\sin \alpha l} - \frac{z}{l} \right).$$

Se $P = P_{cr}$ risulta $\sin \alpha l = \sin \pi$

e dunque:

$$\lim_{P \rightarrow P_{cr}} v(\frac{l}{2}) = \infty. \quad (0 < \xi < l)$$

3.5 Comportamento postcritico dell'asta di Eulero

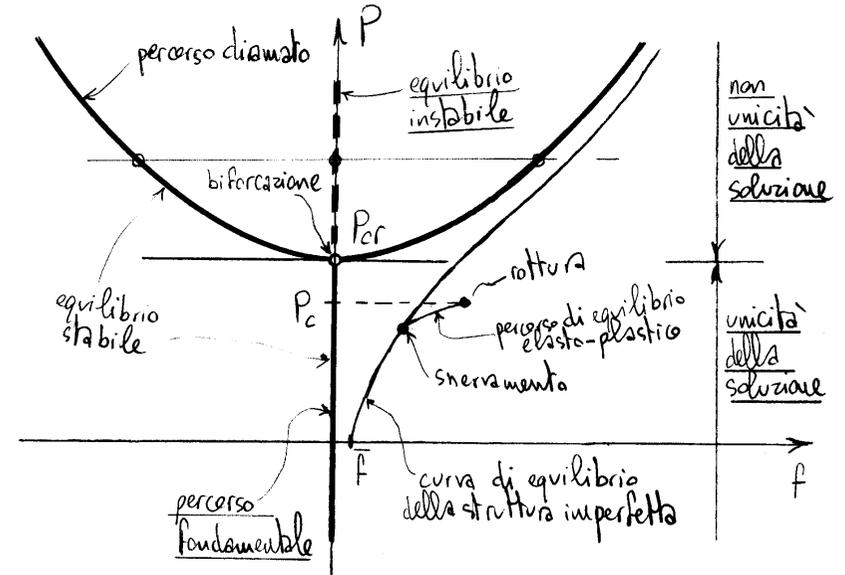


Carico critico:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

In cinematica finita, il post-critico dell'asta di Eulero è stabile. È quindi possibile incrementare il carico oltre il carico critico, però al prezzo di grandi

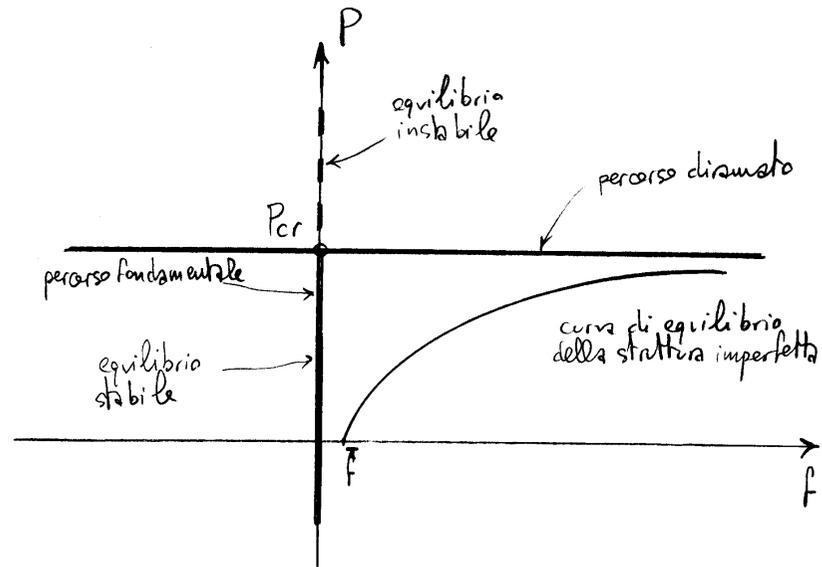
Cinematica finita e legame costitutivo elastico-lineare



spostamenti, che possono effettivamente svilupparsi in campo elastico solo per aste molto flessibili.

Se si sottopone a prova di compressione un profilo metallico standard, le inevitabili imperfezioni geometriche insieme con le inevitabili imperfezioni nell'applicazione dello sforzo normale centrato, fanno sì che il profilo, se

Teoria del secondo ordine e legame costitutivo elastico-lineare



snello, si inflette fin dall'inizio del caricamento. Questo fatto ha come conseguenza la circostanza che lo snervamento prima e la rottura poi si sviluppano ad un livello inferiore del carico critico P_{cr} . Il livello P_c raggiunto a rottura viene assunto dalla normativa europea quale base per la verifica dei profilati

metallici compressi. I carichi di rottura P_c sono stati determinati per vari tipi di profilati metallici grazie ad un progetto di ricerca organizzato a livello europeo, ed i risultati sono tabellati e graficati nelle Istruzioni CNR-UNI 10011/88 dal titolo "Istruzioni di acciaio: Istruzioni per il calcolo, l'esecuzione, il collaudo e la manutenzione", attualmente in vigore in Italia.