

Dispense del Corso di MECCANICA DEI SOLIDI

Prof. Daniele Zaccaria

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università di Trieste
Piazzale Europa 1, Trieste

PARTE QUINTA

Raccolta di esercizi

Corsi di Laurea specialistici in
Ingegneria delle Infrastrutture e dei sistemi di trasporto
Strutture ed opere dell'ingegneria civile
Ingegneria edile

Trieste, 12 novembre 2004

Indice

1	Esercizi sull'analisi della tensione e della deformazione	3
1.1	Esercizio 1	3
1.2	Esercizio 2	4
1.3	Esercizio 3	9
1.4	Esercizio 4	12
1.5	Esercizi proposti	18
1.5.1	Esercizio 1	18
1.5.2	Esercizio 2	18
1.5.3	Esercizio 3	19
2	Esercizi sui centri assoluti e relativi	21
2.1	Esercizio 5	21
2.2	Esercizio 6	21
2.3	Esercizio 7	22
2.4	Esercizio 8	23
2.5	Esercizio 9	24
2.6	Esercizio 10	25
3	Esercizi sul metodo degli spostamenti	27
3.1	Esercizio 11	27
3.2	Esercizio 12	28
3.3	Esercizio 13	29
3.4	Esercizio 14	31
3.5	Esercizio 15	35
3.6	Esercizio 16	39
3.7	Esercizio 17	41
3.8	Esercizi proposti	43
4	Esercizi sul lavoro di deformazione	47
4.1	Esercizio 18	47
4.2	Esercizio 19	48
4.3	Esercizio 20	50

4.4	Esercizi proposti	51
5	Esercizi sui carichi critici	53
5.1	Esercizi proposti	53
6	Esercizi di riepilogo	55
6.1	Esercizio 21	55
6.2	Esercizi proposti	60

Capitolo 1

Esercizi sull'analisi della tensione e della deformazione

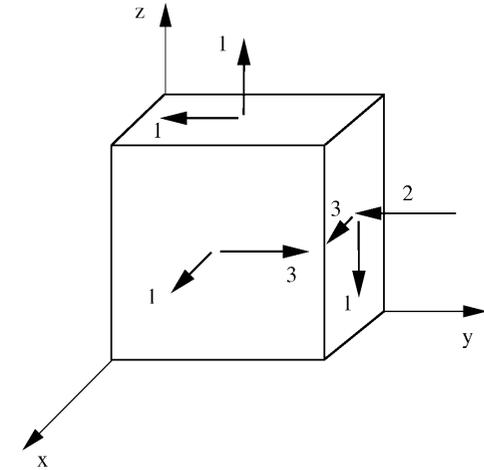
1.1 Esercizio 1

Nel sistema di riferimento $Oxyz$ il tensore degli sforzi agenti in un punto P di un corpo continuo ha le componenti (espresse in N/mm^2):

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Rappresentare lo stato tensionale sulle facce di un cubo posto nell'intorno del punto P e avente le facce stesse parallele ai piani coordinati;
2. Verificare che le tensioni principali valgono: 3 N/mm^2 , 1 N/mm^2 , -4 N/mm^2 ;
3. Determinare le direzioni principali di tensione.

Equazione caratteristica: $-\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0$



$$\sigma_{\xi} = 3 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow [\mathbf{e}_{\xi}] = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} \pm 3 \\ \pm 2 \\ \mp 1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{\eta} = 1 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow [\mathbf{e}_{\eta}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 3 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{\zeta} = -4 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow [\mathbf{e}_{\zeta}] = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{Bmatrix} \mp 3 \\ \pm 5 \\ \pm 1 \end{Bmatrix}$$

1.2 Esercizio 2

In un punto P di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono rappresentate dalla matrice:

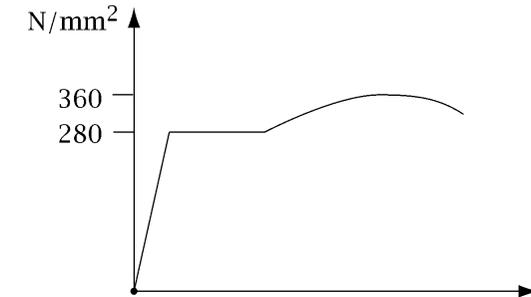
$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 50 \text{ N mm}^2.$$

1. Determinare le direzioni ξ, η, ζ e i valori $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
4. Determinare la parte sferica $\boldsymbol{\sigma}_s$ e la parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ di $\boldsymbol{\sigma}$;
5. Calcolare l'energia elastica *distorcenza* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

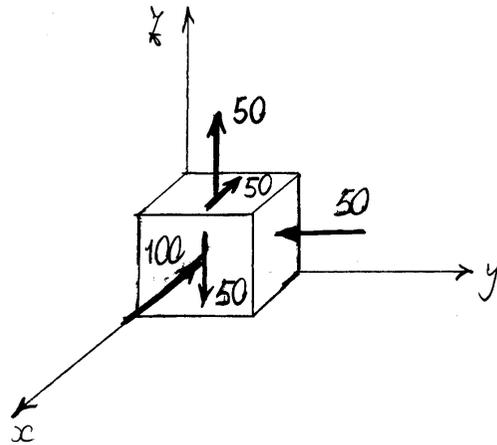
assumendo i valori $E = 20000 \text{ N mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

6. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il seguente diagramma rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale:



e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $s = 1.6$;

7. Calcolare la tensione t_r su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano zx , dando le componenti t_x, t_y, t_z della tensione nel sistema $Oxyz$, fornendo la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r ed infine individuandone la posizione nel piano di Mohr;
8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:
 - (a) Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico;
 - (b) Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica $\boldsymbol{\sigma}_s$ di $\boldsymbol{\sigma}$;
 - (c) Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ di $\boldsymbol{\sigma}$.



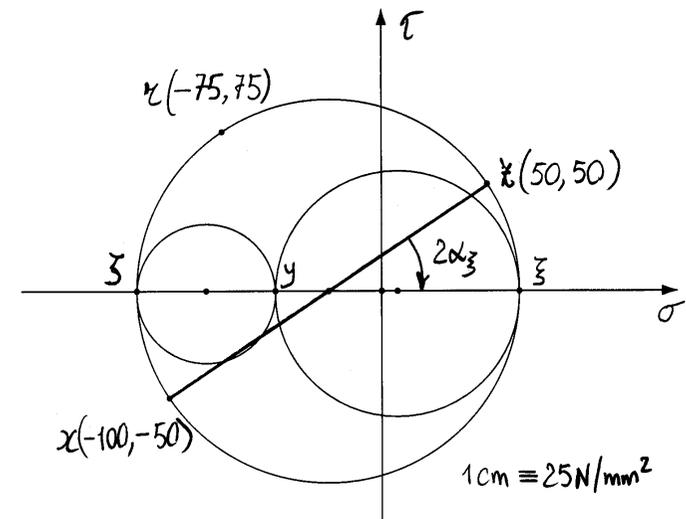
y è direzione principale di tensione

$\sigma_y = -50 \text{ N/mm}^2$ è un valore principale di tensione

Determinazione dei valori e delle direzioni principali nel piano $\xi\eta$ (ξ primo asse).

La faccia positiva del piano $\xi\eta$ è quella di normale uscente y positiva. Le tensioni tangenziali positive, nella convenzione di Mohr, sono quelle che provocano una rotazione oraria. Punti rappresentativi degli assi ξ e η :

$$\xi(50, 50), \quad \eta(-100, -50).$$

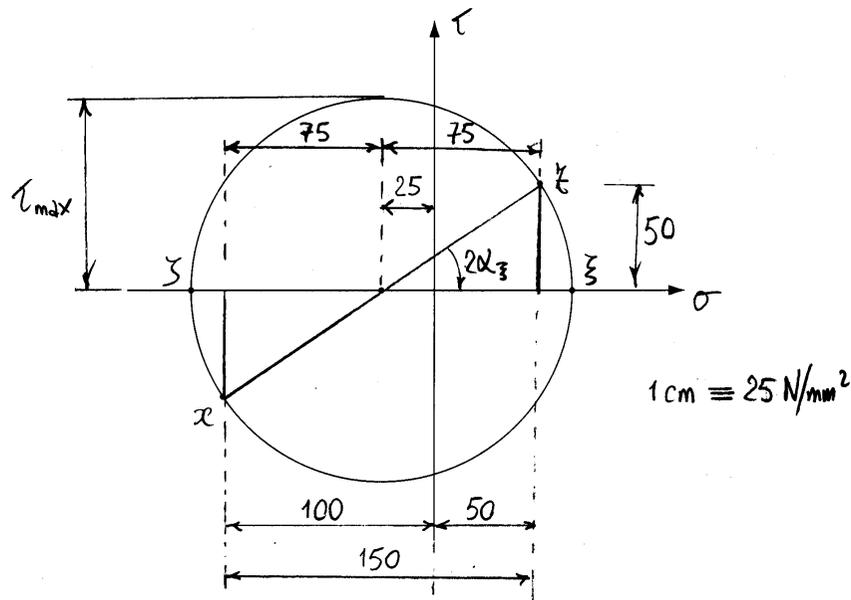


Equazione caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} -100 - \lambda & -50 \\ -50 & 50 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + 50\lambda - 7500 = 0,$$

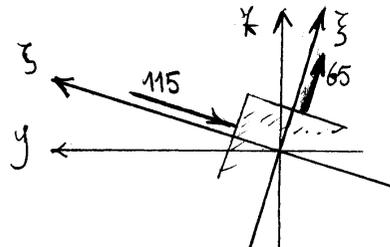
$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\eta} \end{matrix} \right\} = -25 \pm \sqrt{25^2 + 7500} = \begin{cases} 65.14 \text{ N/mm}^2 \\ -115.14 \text{ N/mm}^2 \end{cases}.$$



Dalla circonferenza di Mohr:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_3 \\ \sigma_1 \end{matrix} \right\} = -25 \pm \sqrt{50^2 + 75^2} = \begin{cases} 65.14 \text{ N/mm}^2 \\ -115.14 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_3 = \frac{50}{75} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{cases} 0.2940 \text{ rad} \\ 16.85^\circ \end{cases}$$



Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{65.14 + 115.14}{2} = 90.14 \text{ N/mm}^2$$

Parte sferica di σ

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3}(\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{I}$$

$$\text{tr} \underline{\sigma} = -100 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \underline{\sigma}_s = \begin{bmatrix} -33.33 & 0 & 0 \\ 0 & -33.33 & 0 \\ 0 & 0 & -33.33 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Parte deviatorica di σ

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s \Rightarrow \underline{\sigma}_d = \begin{bmatrix} -66.67 & 0 & -50 \\ 0 & -16.67 & 0 \\ -50 & 0 & 83.33 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Energia elastica distortante per unità di volume

$$\text{tr} \underline{\sigma}_d = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{d\xi} = \sigma_{\xi} - \sigma_{s\xi} = 65.14 + 33.33 = 98.47 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{dy} = \sigma_y - \sigma_{sy} = -50 + 33.33 = -16.67 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{d\zeta} = \sigma_{\zeta} - \sigma_{s\zeta} = -115.14 + 33.33 = -81.81 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{dII} = \sigma_{d\xi} \sigma_{dy} + \sigma_{d\zeta} \sigma_{d\xi} + \sigma_{dy} \sigma_{d\zeta} = -8333 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$\Psi_d = -\frac{1+0.3}{20000} \times (-8333) = 0.5417 \text{ N/mm}$$

Verifiche di resistenza

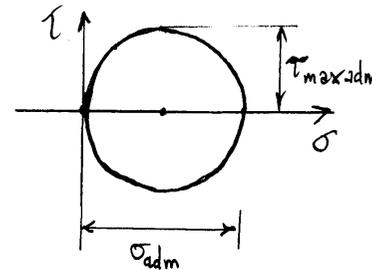
tensione di snervamento : $\sigma_s = 280 \text{ N/mm}^2$

tensione ammissibile : $\sigma_{adm} = \frac{280}{1.6} = 175 \text{ N/mm}^2$

stato di tensione monoassiale ammissibile:

$$\underline{\sigma}_{adm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

tensione tangenziale massima ammissibile:



$$\tau_{max adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2} = 87.5 \text{ N/mm}^2$$

Parte deviatorica dello stato di tensione monoassiale ammissibile:

$$\underline{\sigma}_{d adm} = \underline{\sigma}_{adm} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}_{adm}) \underline{I}$$

$$\text{tr } \underline{\sigma}_{adm} = 175 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \underline{\sigma}_{d adm} = \begin{bmatrix} -58.33 & 0 & 0 \\ 0 & -58.33 & 0 \\ 0 & 0 & 116.67 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{d adm II} = (-58.33)^2 + 2(116.67)(-58.33) = -10208 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

Energia elastica distortante ammissibile:

$$\Psi_{d adm} = -\frac{1+0.3}{20000} (-10208) = 0.6635$$

Criterio di Tresca :

$$\tau_{max} > \tau_{max adm} \Rightarrow \text{Verifica negativa}$$

Criterio di Huber-von Mises :

$$\psi_d < \psi_{d adm} \Rightarrow \text{Verifica positiva}$$

Tensione ideale di Tresca :

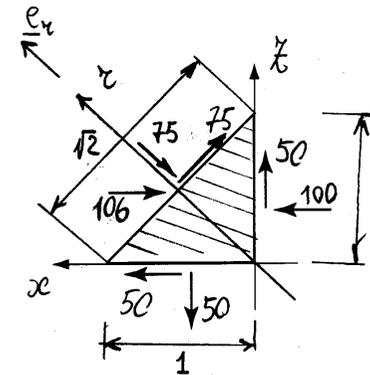
$$\sigma_{id} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{max adm}} \sigma_{adm} = 2 \tau_{max} = 180.28 \text{ N/mm}^2$$

Tensione ideale Huber-von Mises :

$$\psi_{d adm} = K \sigma_{adm}^2 \text{ e si vuole che } \psi_d = K \sigma_{id}^2, \text{ quindi:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{id} &= \sqrt{\psi_d / K} = \sqrt{\frac{\psi_d}{\psi_{d adm}} \sigma_{adm}^2} \\ &= \sqrt{\frac{0.5417}{0.6635} (175)^2} = 158.12 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Tensione \underline{t}_z



$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{150}{\sqrt{2}} = -106.06 \text{ N/mm}^2 \\ t_y &= t_z = 0 \\ \sigma_z &= -t_x / \sqrt{2} = -75 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_z &= |t_x| / \sqrt{2} = 75 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\underline{e}_z \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{t}_z \equiv \begin{bmatrix} -100 & 0 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \\ -50 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

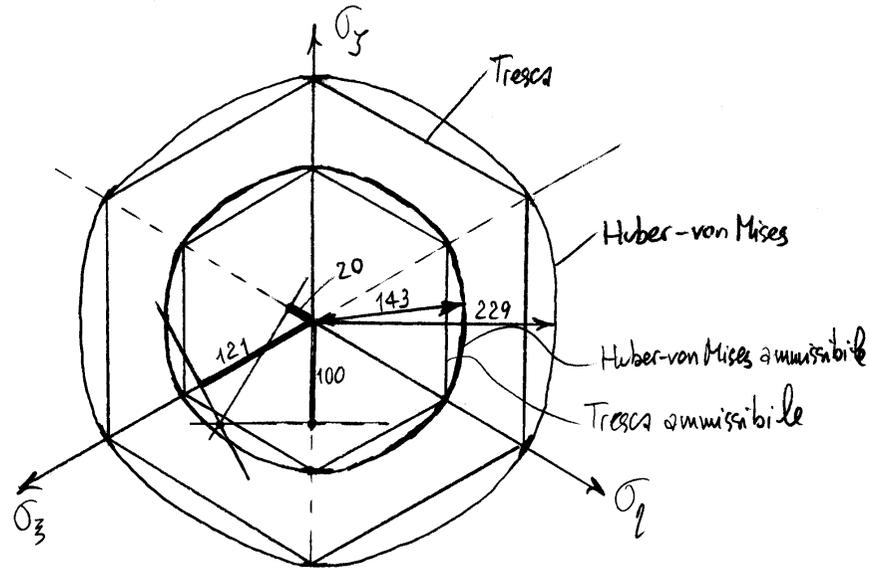
$$\text{Quindi } \underline{t}_z = \begin{Bmatrix} -106.06 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Componenti normali e tangenziali:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -106.06 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -75 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_z = \sqrt{(106.06)^2 - (75)^2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

Spazio delle tensioni principali



Raggio circonferenza di Huber-von Mises = $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s = 228.62 \text{ N/mm}^2$

Raggio circonferenza ammissibile = $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{adm} = 142.89 \text{ N/mm}^2$

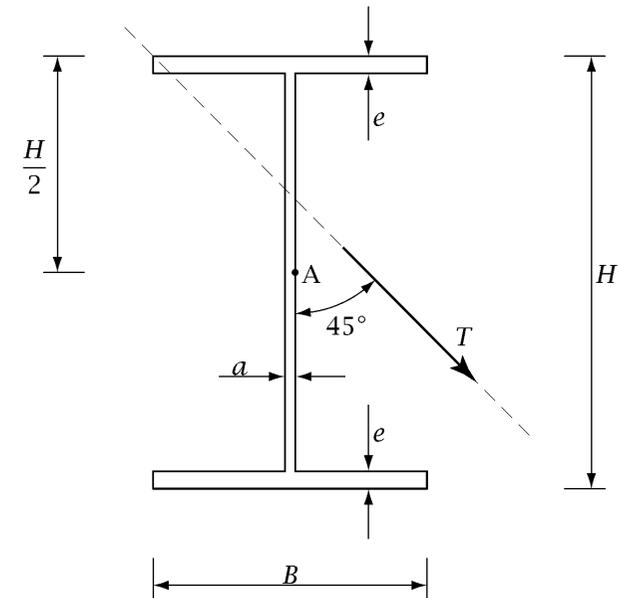
Distanza su asse idrostatico = $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \underline{\sigma} = -\frac{100}{\sqrt{3}} = -57.74 \text{ N/mm}^2$

Coordinata $\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_z - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = 120.60 \text{ N/mm}^2$

Coordinata $\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_y - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = -20.41 \text{ N/mm}^2$

Coordinata $\zeta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_x - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = -100.19 \text{ N/mm}^2$

1.3 Esercizio 3



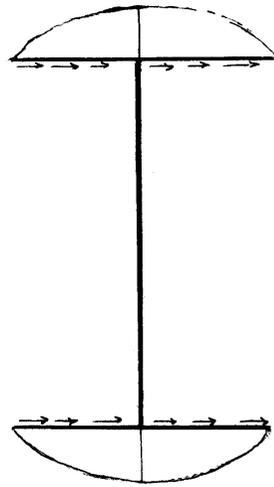
Data la sezione a I di figura, soggetta ad un taglio T:

1. Determinare, in corrispondenza del punto A, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi;
2. Rappresentare graficamente gli sforzi nel punto A tramite le circonferenze di Mohr e determinare le direzioni e le componenti principali di sforzo.

Dati del problema:

- T = 50 kN
- B = 100 mm
- H = 165 mm
- a = 8 mm
- e = 15 mm

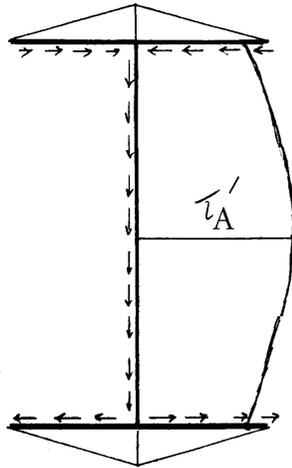
acciaio Fe430:
 $\sigma_{adm} = 190 \text{ N/mm}^2$



Taglio T_x

$$T_x = 35.36 \text{ kN}$$

$$\tau_A = 0$$



Taglio T_y

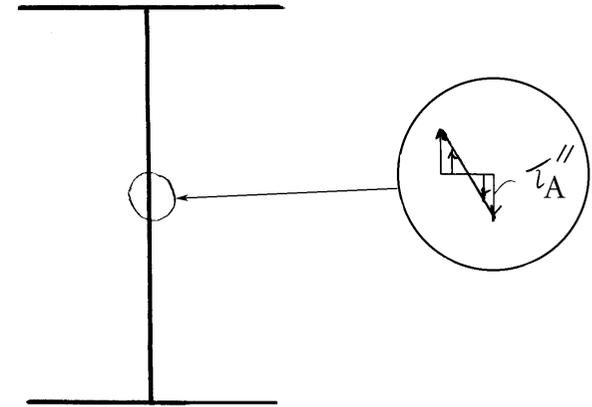
$$T_y = 28.28 \text{ kN}$$

τ'_A

$$S_x^* = e B \frac{H}{2} + a \frac{H}{2} \frac{H}{4} = 135 \text{ cm}^3$$

$$\tau'_A = \frac{T_y S_x^*}{a J_x} = 31.20 \text{ N/mm}^2$$

Momento torcente M_t



$$M_t = 1149 \text{ kN mm}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (2 B e^3 + H_1 a^3) = 25.06 \text{ cm}^4$$

$$\tau''_A = \frac{M_t}{J_t} a = 36.68 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_A = \tau'_A + \tau''_A = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

Sforzi nel punto A

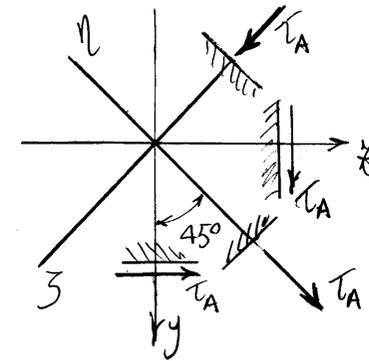
L'unica componente di tensione non nulla è la τ_{yz} .

Poichè: $\tau_{yz} = \tau_A$, si ha:

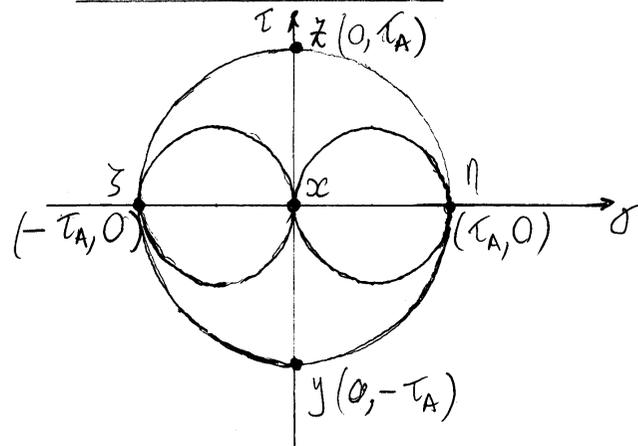
$$\underline{\sigma}_A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_A \\ 0 & \tau_A & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_1 = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = -67.88 \text{ N/mm}^2$$



Circonfereze di Mohr



1.4 Esercizio 4

Dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = kxy - kz^2 \\ v = k(y^2 + z^2) \\ w = -2kyz \end{cases},$$

1. Determinare le componenti dei tensori ϵ di deformazione e ω di rotazione;
2. Specializzare ϵ e ω nel punto (0, 1 m, 1 m), assumendo $k = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$;
3. Determinare l'asse e l'entità della rotazione rigida locale.

Inoltre, nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa, tenendo conto che:

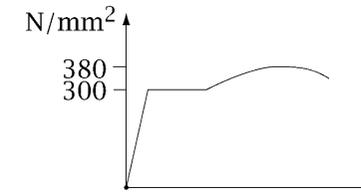
$$\sigma = 2G \left[\epsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr } \epsilon) \mathbf{I} \right], \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

ed assumendo :

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3,$$

1. Determinare le componenti del tensore degli sforzi;
2. Determinare le direzioni ξ , η , ζ e le tensioni σ_ξ , σ_η , σ_ζ principali;
3. Disegnare in scala le circonferenze di Mohr;
4. Indicare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;

5. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
6. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
7. Eseguire la verifica di resistenza con il criterio di Tresca, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il diagramma riportato rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $s = 1.6$.



Si consideri poi la giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano individuato dall'asse y e dall'asse principale di minima tensione normale, orientato concordemente all'asse z . Relativamente alla tensione t_r agente su tale giacitura:

1. Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di t_r ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;
2. Calcolare le componenti t_x^r , t_y^r , t_z^r di t_r nel sistema $Oxyz$.

Infine, relativamente allo spazio delle tensioni principali:

1. Disegnare e quotare l'intersezione della superficie di snervamento di Tresca con il piano deviatorico;
2. Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
3. Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .

Gradiente degli spostamenti

$$\text{grad } \underline{u} \equiv \begin{bmatrix} Ky & Kx & -2Kz \\ 0 & 2Ky & 2Kz \\ 0 & -2Kz & -2Ky \end{bmatrix} \cdot$$

Tensore di deformazione infinitesimo

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} + \text{grad } \underline{u}^T) \equiv \\ &= \begin{bmatrix} Ky & \frac{1}{2}Kx & -Kz \\ \frac{1}{2}Kx & 2Ky & 0 \\ -Kz & 0 & -2Ky \end{bmatrix} \cdot \end{aligned}$$

Tensore di rotazione infinitesimo

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} - \text{grad } \underline{u}^T) \equiv \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}Kx & -Kz \\ -\frac{1}{2}Kx & 0 & 2Kz \\ Kz & -2Kz & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Specializzazione di $\underline{\varepsilon}$ ed $\underline{\omega}$ per $K=0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$
nel punto di coordinate $x=0, y=1 \text{ m}, z=1 \text{ m}$

$$\underline{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.50 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$\underline{\omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.50 \\ 0.25 & -0.50 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot$$

Rotazione rigida locale

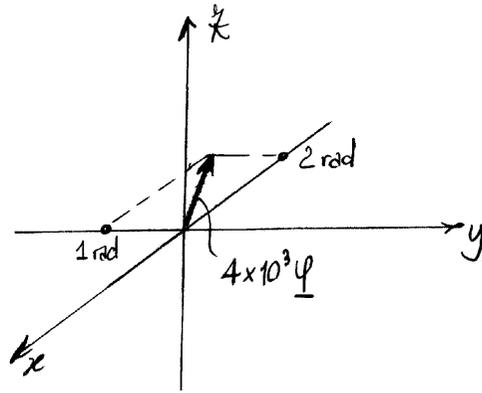
$$\underline{\varphi} \equiv -\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot$$

$$|\underline{\varphi}| = \frac{\sqrt{5}}{4} \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.559 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.032^\circ$$

L'asse di rotazione è parallelo al piano xy , la sua inclinazione α rispetto all'asse x vale:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 0.4636 \text{ rad} = 26.57^\circ,$$

e la sua parte positiva si trova nel III quadrante del piano xy .



Tensori degli sforzi

$$2G = \frac{210}{1+0.3} \text{ GPa} = 161.53 \text{ GPa} = 161.53 \times 10^3 \text{ N/mm}^2,$$

$$\frac{\nu}{1-2\nu} = 0.75,$$

$$\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = (0.25 + 0.50 - 0.50) \times 10^{-3} = 0.25 \times 10^{-3},$$

$$2G \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = 30.29 \text{ N/mm}^2,$$

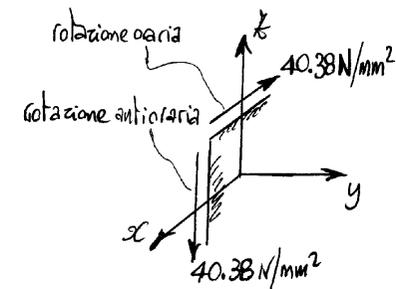
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 70.67 & 0 & -40.38 \\ 0 & 111.06 & 0 \\ -40.38 & 0 & -50.48 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Direzioni e valori principali di tensione

L'asse y è principale e il valore principale risulta:

$$\sigma_y = 111.06 \text{ N/mm}^2.$$

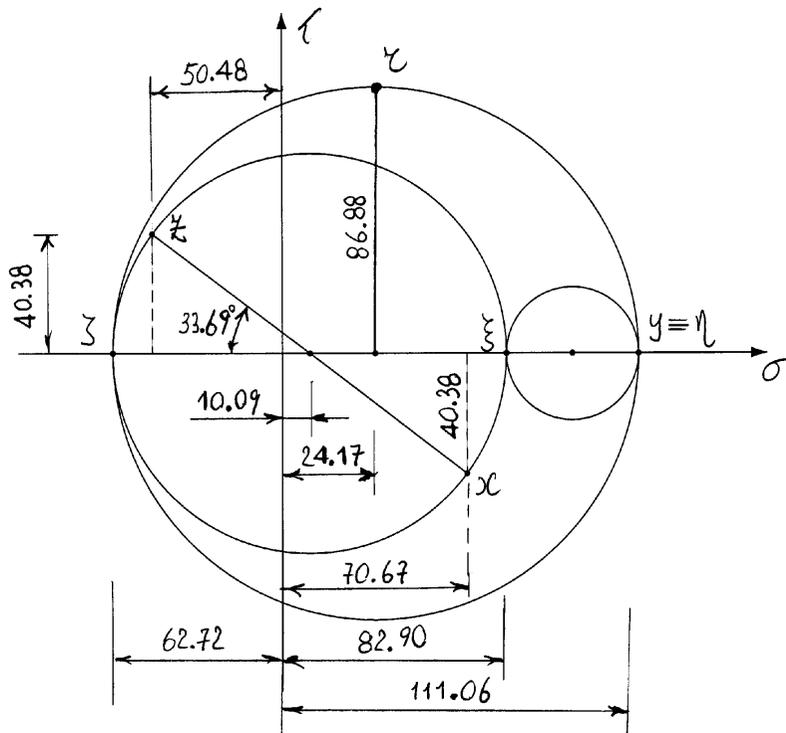
La circonferenza di Mohr relativa alla direzione principale y contiene i punti rappresentativi degli assi x e z . Considerando z quale primo asse tra i due assi x e z , la faccia positiva del piano zx



e' individuata dalla parte positiva di y . Con tale scelta il punto rappresentativo di ξ ha coordinate $(-50.48 \text{ N/mm}^2, 40.38 \text{ N/mm}^2)$ mentre quello rappresentativo di x ha coordinate $(70.67 \text{ N/mm}^2, -50.48 \text{ N/mm}^2)$.

Centro σ_c e raggio R della circonferenza:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{70.67 - 50.48}{2} \text{ N/mm}^2 = 10.10 \text{ N/mm}^2,$$



$$R = \sqrt{(70.67 - 10.09)^2 + (40.38)^2} \text{ N/mm}^2 = 72.80 \text{ N/mm}^2.$$

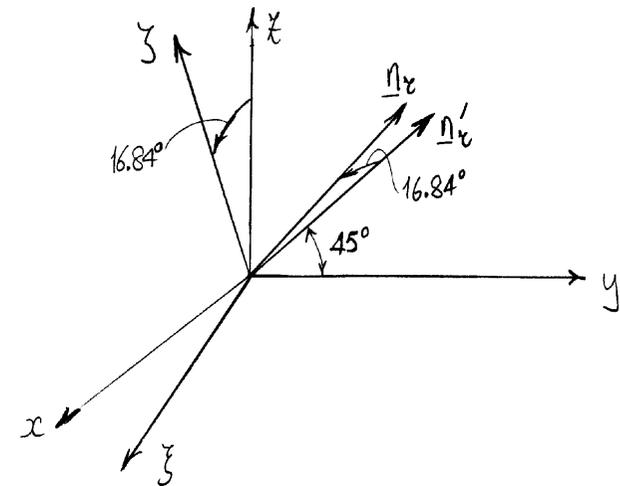
Valori principali di tensione:

$$\sigma_\xi = \sigma_c + R = 82.90 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_\zeta = \sigma_c - R = -62.71 \text{ N/mm}^2.$$

L'asse principale ζ e' individuato ruotando ξ in senso antiorario di un angolo α tale che:

$$\sin 2\alpha = \frac{|\tau_{xz}|}{R} = \frac{40.38}{72.80},$$



e quindi:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{40.38}{72.80} \right) = 16.84^\circ.$$

Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{111.06 + 62.72}{2} \text{ N/mm}^2 = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Parti sferica e deviatorica del tensore degli sforzi

$$\text{tr } \underline{\sigma} = (70.67 + 111.06 - 50.48) \text{ N/mm}^2 = 131.25 \text{ N/mm}^2,$$

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} \equiv \begin{bmatrix} 43.75 & 0 & 0 \\ 0 & 43.75 & 0 \\ 0 & 0 & 43.75 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2,$$

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s \equiv \begin{bmatrix} 26.92 & 0 & -40.38 \\ 0 & 67.31 & 0 \\ -40.38 & 0 & -94.23 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Verifica di resistenza al criterio di Tresca

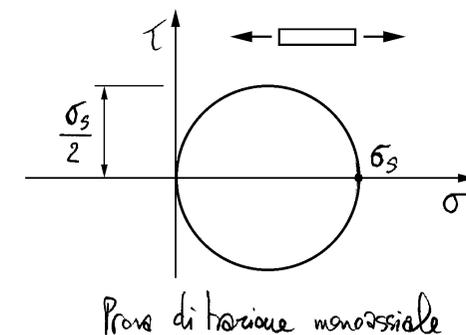
Tensioni di snervamento e ammissibile:

$$\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_a = \frac{300}{1.6} \text{ N/mm}^2 = 187.5 \text{ N/mm}^2.$$

Tensione tangenziale massima ammissibile:

$$\tau_a = \frac{187.5}{2} \text{ N/mm}^2 = 93.75 \text{ N/mm}^2.$$



Perché:

$$\tau_{\max} < \tau_a,$$

la verifica è soddisfatta.

Tensione nella giacitura di normale \underline{z}

Poiché la minima tensione principale è associata all'asse ζ , la retta \underline{z} appartiene al piano $y\zeta$ e il suo punto rappresentativo sta sulla circonferenza esterna individuata da una rotazione antioraria di 90° .

Quindi:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = 24.17 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_z = \tau_{\max} = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Il versore \underline{n}_z della direzione \underline{z} si ottiene ruotando di 16.84° attorno all'asse y il versore \underline{n}'_z della bisettrice del primo quadrante del piano $y\zeta$. Il tensore rotazionale vale:

$$\underline{R} \equiv \begin{bmatrix} \cos(16.84^\circ) & 0 & \sin(16.84^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(16.84^\circ) & 0 & \cos(16.84^\circ) \end{bmatrix},$$

ed inoltre:

$$\underline{n}'_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}.$$

Dunque:

$$\underline{n}_z = \underline{R} \underline{n}'_z = \begin{Bmatrix} 0.2049 \\ 0.7071 \\ 0.6768 \end{Bmatrix},$$

e quindi:

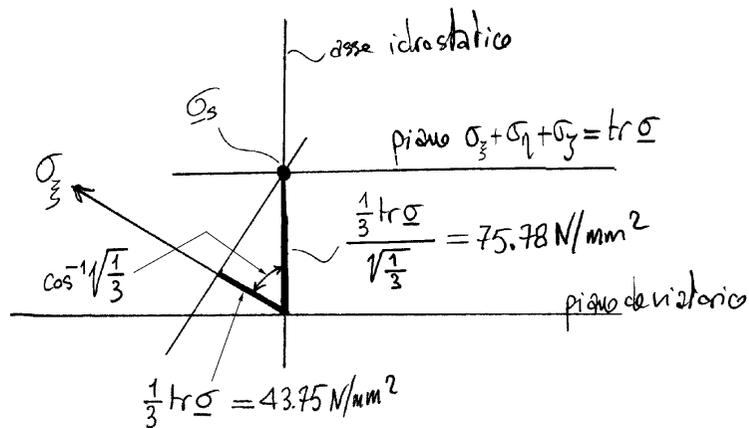
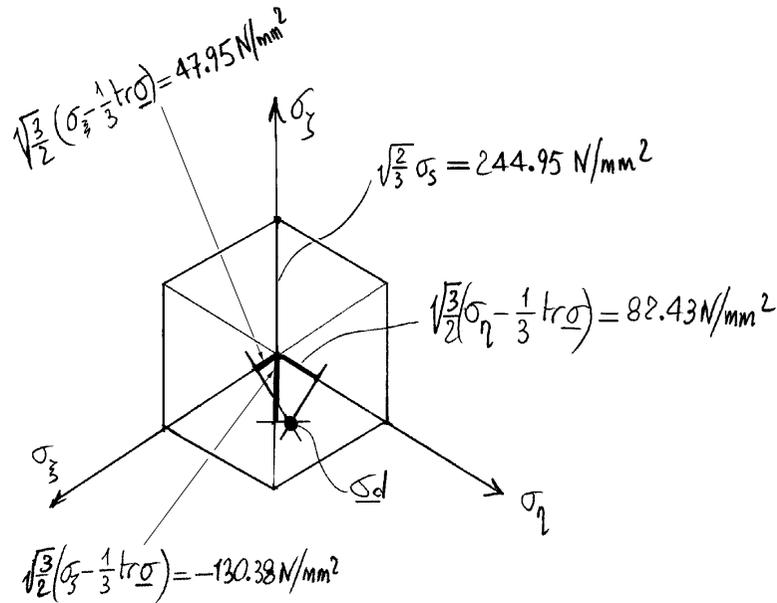
$$\underline{t}_z = \underline{\sigma} \underline{n}_z = \begin{Bmatrix} -12.85 \\ 78.53 \\ -42.44 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Verifichiamo i valori di σ_z e di τ_z :

$$\sigma_z = \underline{t}_z \cdot \underline{n}_z = 24.17 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_z = \sqrt{\underline{t}_z \cdot \underline{t}_z - \sigma_z^2} = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Spazio delle tensioni principali



1.5 Esercizi proposti

1.5.1 Esercizio 1

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema Oxyz cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = -1.5 xy \times 10^{-6} \\ v = 2.5 \{-z^2 + 0.3 \times (x^2 - y^2)\} \times 10^{-6} \\ w = 5 yz \times 10^{-6} \end{cases}$$

(coefficienti in mm^{-1}).

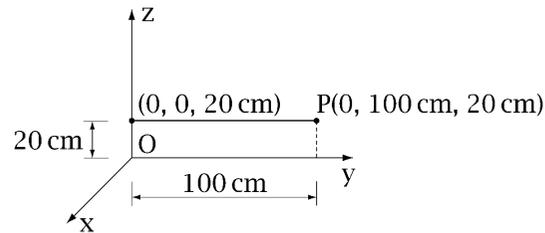
1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi e spiegarli nel punto P di coordinate $x=0, y=20 \text{ cm}, z=100 \text{ cm}$;
2. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
3. Determinare dilatazione e scorrimento massimi (in modulo), sempre nel punto P, e disegnare le circonferenze di Mohr.

1.5.2 Esercizio 2

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema Oxyz cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = 0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} xy \\ v = 2.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \{z^2 - 0.1 \times y^2\} \\ w = 1 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} yz \end{cases} .$$

1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi e specializzarli nel punto P di coordinate $x=0$, $y=100 \text{ cm}$, $z=20 \text{ cm}$;



2. Determinare, nel punto P, le dilatazioni principali e disegnare le circonferenze di Mohr;
3. Determinare, sempre nel punto P, la dilatazione e lo scorrimento massimi in modulo e dello scorrimento massimo darne il valore in gradi;
4. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
5. Determinare le direzioni principali nel punto P;
6. Calcolare l'allungamento del segmento, illustrato in figura, che unisce i punti di coordinate $(0, 0, 20 \text{ cm})$ e $(0, 100 \text{ cm}, 20 \text{ cm})$;

1.5.3 Esercizio 3

In due punti P_1 e P_2 di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi σ , scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, siano rappresentate dalla matrice:

$$[\sigma]_1 = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -80 \\ 0 & -80 & 160 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

e, rispettivamente, dalla matrice:

$$[\sigma]_2 = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -80 \\ 0 & -80 & 160 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

In entrambi i casi:

1. Determinare le direzioni ξ, η, ζ e i valori $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
4. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
5. Relativamente alla tensione t_r agente su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano yz :
 - (a) Calcolare le componenti t_x^r, t_y^r, t_z^r di t_r nel sistema $Oxyz$;

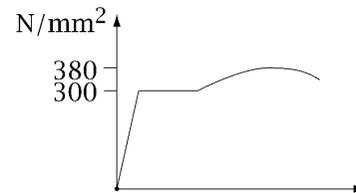
(b) Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di \mathbf{t}_r ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;

6. Calcolare l'energia elastica *distorcenza* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

assumendo i valori $E=21000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

7. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il diagramma riportato a fianco rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $s = 1.6$;



8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:

(a) Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico:

(b) Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica $\boldsymbol{\sigma}_s$ di $\boldsymbol{\sigma}$;

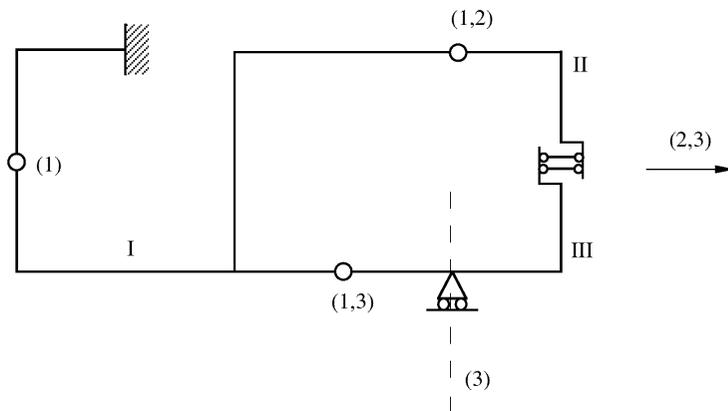
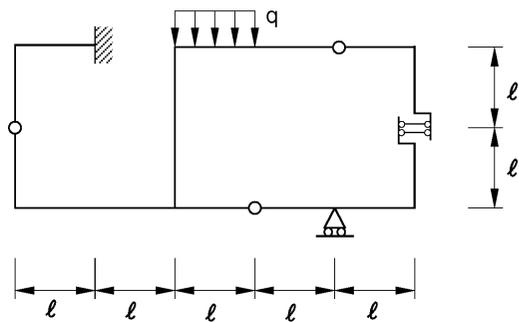
(c) Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ di $\boldsymbol{\sigma}$.

Capitolo 2

Esercizi sui centri assoluti e relativi

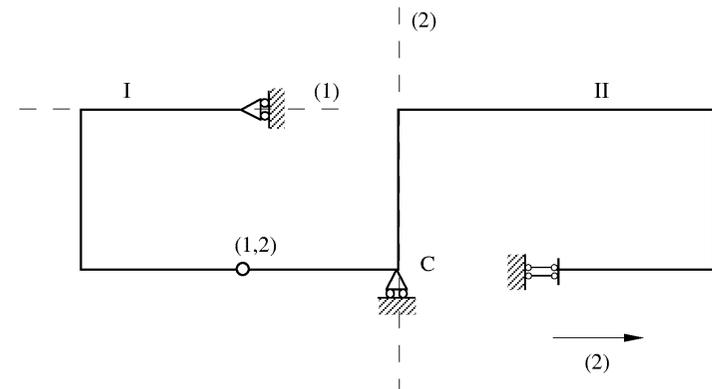
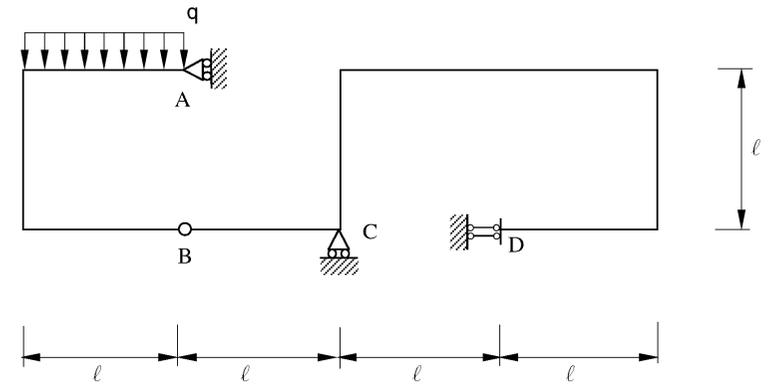
2.1 Esercizio 5

Verificare l'isostaticità della struttura



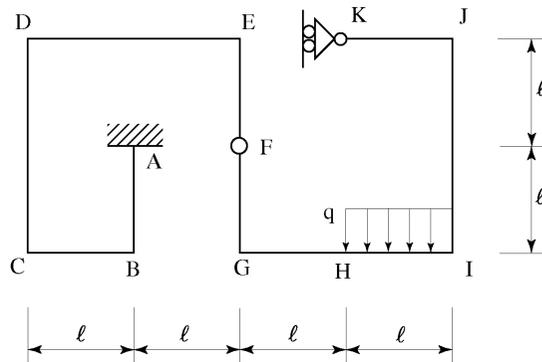
2.2 Esercizio 6

Verificare l'isostaticità della struttura

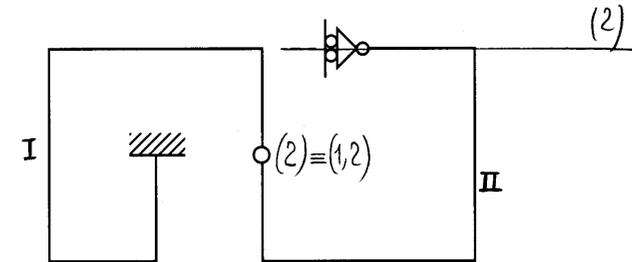


2.3 Esercizio 7

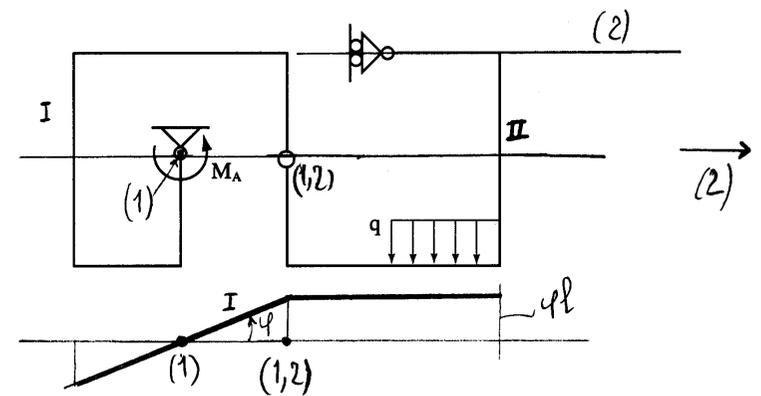
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare il momento in corrispondenza dell'incastro utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



Verifica dell'isostaticità della struttura



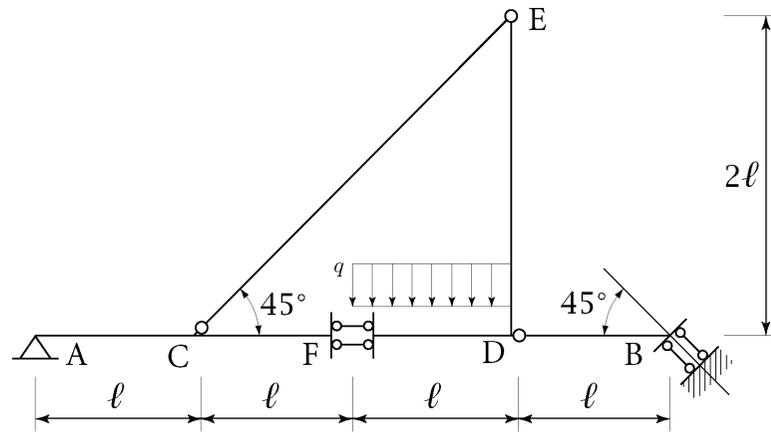
Calcolo del momento in corrispondenza dell'incastro



$$L_e = 0 \Rightarrow M_A \varphi - (q l)(\varphi l) = 0 \Rightarrow M_A = q l^2$$

2.4 Esercizio 8

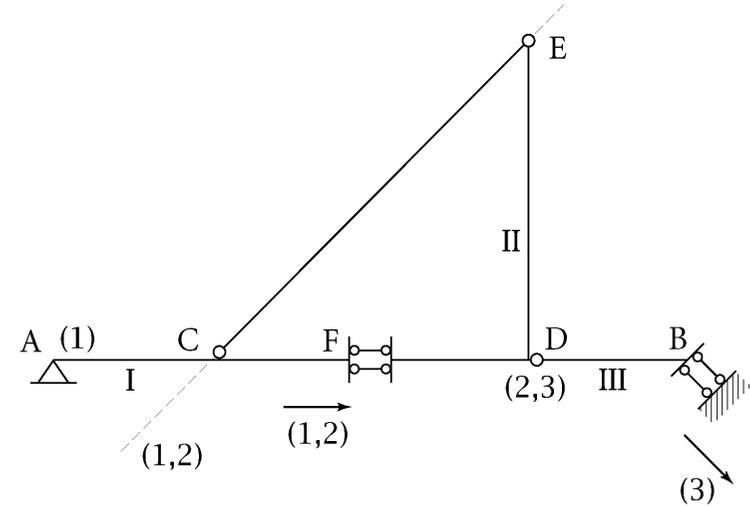
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare lo sforzo normale in F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



$$\left. \begin{aligned} \text{gradi di libertà} &= 3 \times 3 = 9 \\ \text{gradi di vincolo} &= \underbrace{(2 + 2)}_{\text{vincoli esterni}} + \underbrace{(1 + 2 + 2)}_{\text{vincoli interni}} = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow gradi di iperstaticità = 0

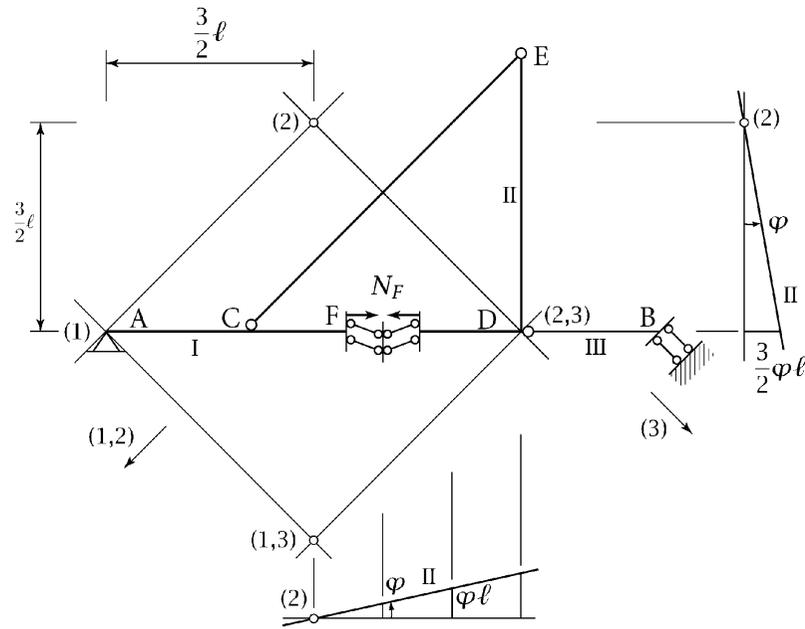
Verifica dell'isostaticità della struttura



$(1,2)$ appartiene alla retta CE
 $(1,2)$ coincide con il punto improprio della retta AB

- \Rightarrow I e II non subiscono moti relativi
- $\Rightarrow (1,3) \equiv (2,3)$ e $(1) \equiv (2)$
- $\Rightarrow (1), (1,3), (3)$ non sono allineati
- \Rightarrow gradi di labilità = 0

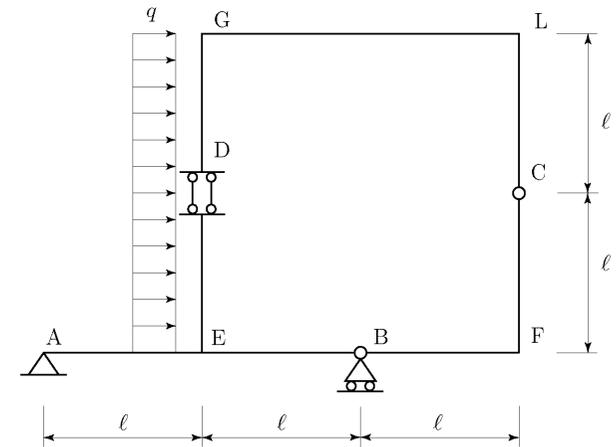
Calcolo dello sforzo normale in F



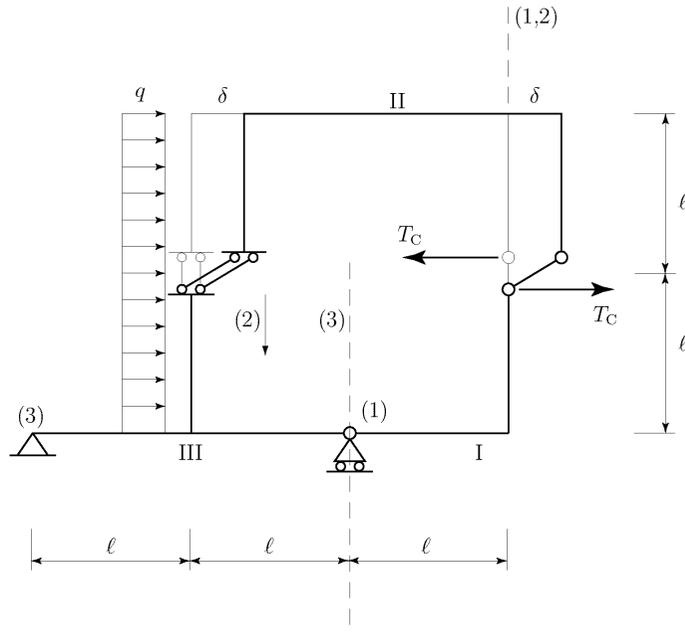
$$-(N_F)\left(\frac{3}{2}\varphi l\right) - (ql)(\varphi l) = 0 \Rightarrow N_F = -\frac{2}{3}ql$$

2.5 Esercizio 9

Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico ripartito costante sul montante di sinistra, determinare il taglio in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



Schema per il calcolo del taglio in C



$\left. \begin{array}{l} (3) \text{ deve coincidere con A} \\ (3) \text{ deve appartenere alla verticale per B} \end{array} \right\} \Rightarrow (3) \text{ non esiste}$

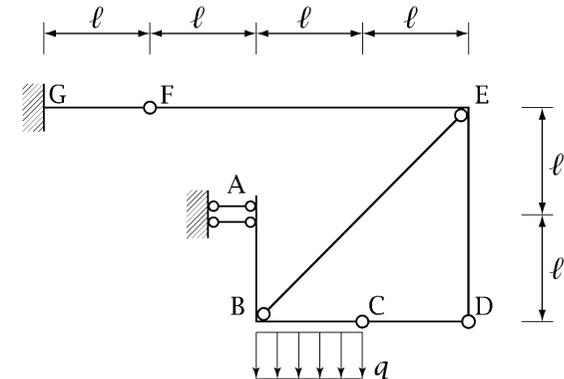
$(2) \equiv (1,2) \Rightarrow (1) \text{ non esiste}$

$$-T_C \delta + q \ell \delta = 0 \Rightarrow T_C = q \ell$$

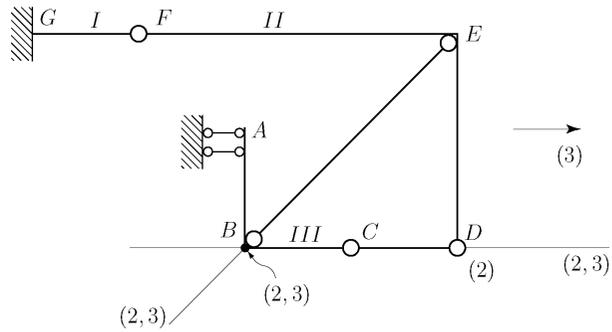
2.6 Esercizio 10

Data la struttura di figura, soggetta ad un carico ripartito uniformemente lungo il tratto BC:

1. Verificare l'isostaticità della struttura
2. Determinare lo sforzo normale nel pendolo BE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.



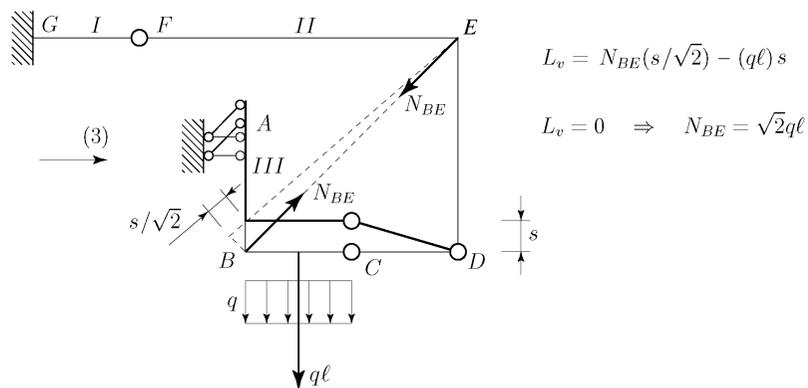
Verifica dell'isostaticità della struttura



(2), (3) e (2,3) non sono allineati \Rightarrow gradi di labilità = 0

$$\left. \begin{aligned} \text{gradi di libertà} &= 3 \times 3 = 9 \\ \text{gradi di vincolo} &= \underbrace{(3+2)}_{\text{vincoli esterni}} + \underbrace{(2+1+1)}_{\text{vincoli interni}} = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{gradi di iperstaticità} = 0$$

Calcolo dello sforzo normale nel pendolo BE



$$L_v = N_{BE}(s/\sqrt{2}) - (q\ell) s$$

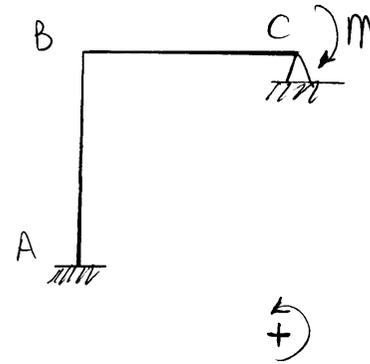
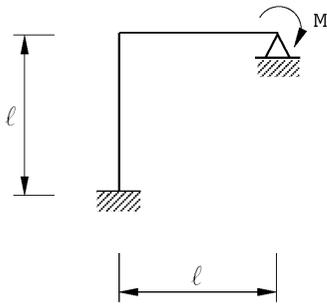
$$L_v = 0 \Rightarrow N_{BE} = \sqrt{2}q\ell$$

Capitolo 3

Esercizi sul metodo degli spostamenti

3.1 Esercizio 11

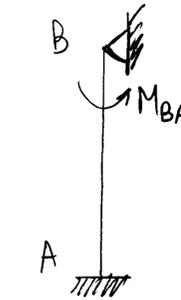
Risolvere la struttura iperstatica con il metodo delle deformazioni



Metodo delle deformazioni

Inconosciuta la rotazione

φ_B del nodo B



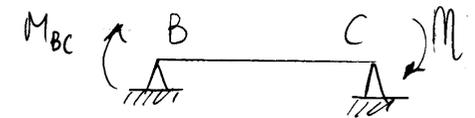
$$\varphi_B = \frac{M_{BA} l}{4EJ}$$



$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi_B$$

Equilibrio nodo B

$$M_{BA} = M_{BC} \Rightarrow \varphi_B = \frac{M l}{14EJ} \Rightarrow M_{BA} = \frac{2}{7} M$$



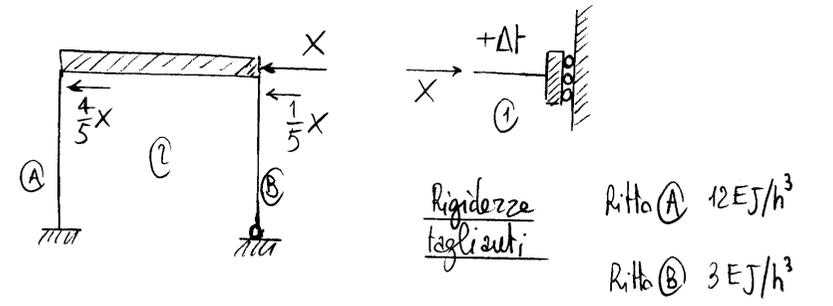
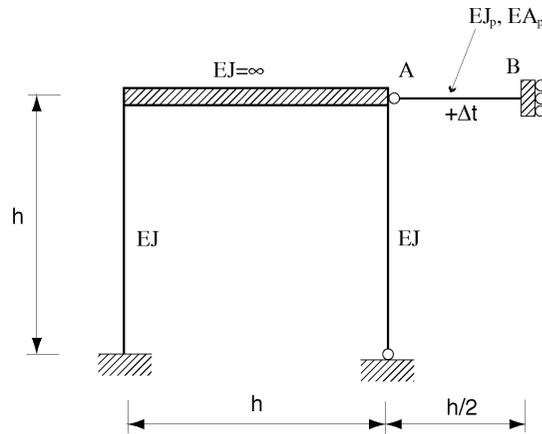
$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{M_{BC} l}{3EJ} + \frac{M l}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{M_{BC} l}{6EJ} - \frac{M l}{3EJ} \end{cases}$$



$$M_{BC} = -\frac{3EJ}{l} \varphi_B + \frac{M}{2}$$

3.2 Esercizio 12

1. Risolvere la struttura iperstatica considerando l'asta AB deformabile assialmente;
2. Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
3. Determinare la variazione termica critica che provoca l'instabilità laterale dell'asta AB.

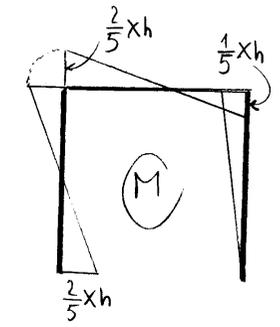
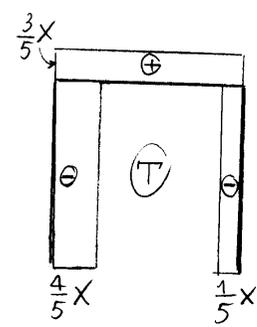
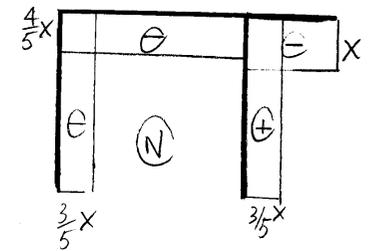
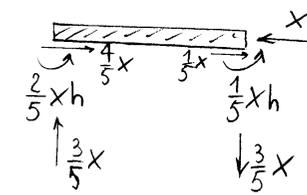


$$\delta_{\theta} = \alpha \Delta T \frac{h}{2} - \frac{Xh}{2EA_p}$$

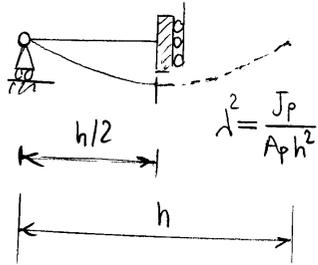
$$EA_p = \infty \Rightarrow X = \frac{15}{2} EJ \alpha \Delta T / h^2$$

$$EA_p \neq \infty \Rightarrow X = \frac{EA_p \alpha \Delta T}{\frac{2Ah^2}{15J} + 1}$$

$$\delta_e = \frac{Xh^3}{15EJ}$$



Luce libera di inflessione dell'asta $AB \equiv 2(h/2) = h$



$$X_{cr} = \frac{\pi^2 E J_P}{h^2} \Rightarrow$$

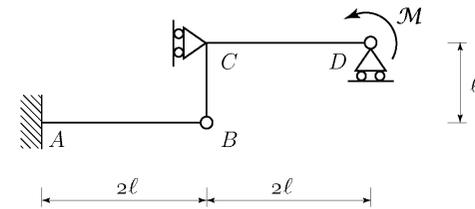
$$\Rightarrow \frac{E A_p \alpha \Delta t_{cr}}{\frac{2}{15} \frac{A_p h^2}{J} + 1} = \frac{\pi^2 E J_P}{h^2}$$

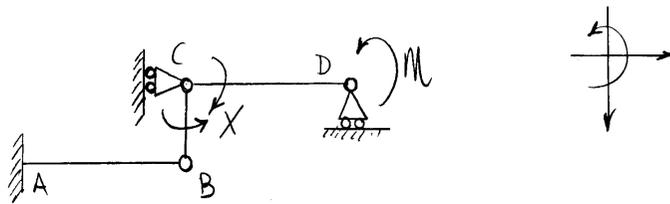
$$\Delta t_{cr} = \left(1 + \frac{2}{15} \frac{A_p h^2}{J} \right) \frac{\pi^2 J_P}{\alpha A_p h^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{15} \frac{A_p h^2}{J} \right) \frac{\pi^2 \lambda^2}{\alpha}$$

3.3 Esercizio 13

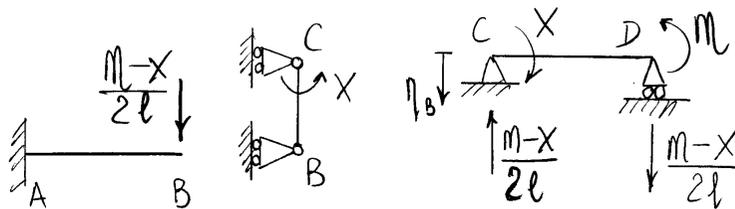
Calcolare la rigidezza alla rotazione del nodo D.





Struttura principale isostatica

Congruenza: $\varphi_{CD} = \varphi_{CB}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_B = \frac{\frac{M-X}{2l} (2l)^3}{3EJ} \\ \varphi_{CB} = \frac{Xl}{3EJ} \\ \varphi_{CD} = -\frac{X(2l)}{3EJ} - \frac{M(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_B}{2l} \end{array} \right.$$

Equazione risolvente:

$$-\frac{2Xl}{3EJ} - \frac{1Ml}{3EJ} + \frac{2Ml}{3EJ} - \frac{2Xl}{3EJ} = \frac{1Xl}{3EJ}$$

$$\frac{5}{3}X = \frac{1}{3}M \Rightarrow X = \frac{1}{5}M$$

La rigidezza alla rotazione K_D rappresenta la coppia che occorre applicare in D per ottenere la rotazione unitaria:

$$\varphi_D = \frac{M(2l)}{3EJ} + \frac{(M/5)(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_C}{2l} = \frac{19Ml}{15EJ}$$

$$K_D = \frac{15EJ}{19l}$$

3.4 Esercizio 14

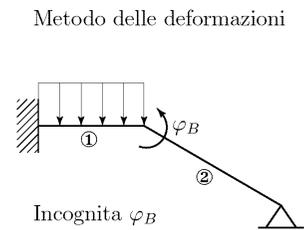
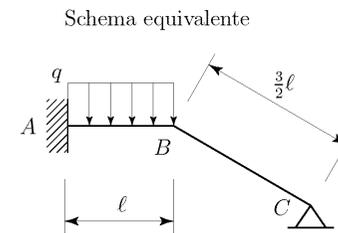
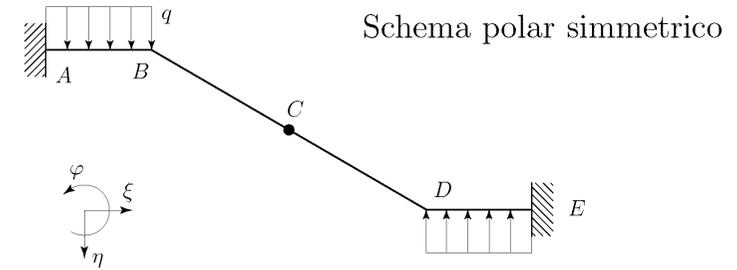
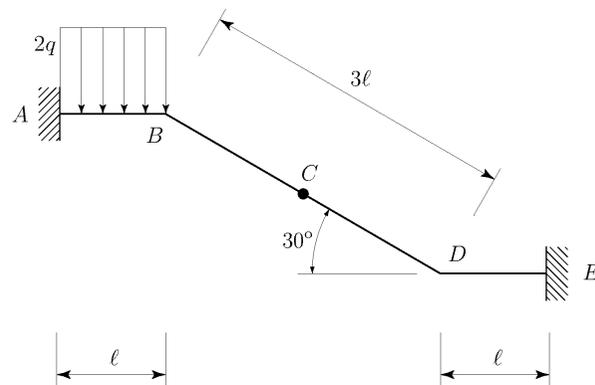
Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C, e in particolare:

1. Risolvere lo schema polar simmetrico con il metodo delle deformazioni;
2. Risolvere lo schema polar emisimmetrico con il metodo delle forze.

Per i due schemi polar simmetrico e polar emisimmetrico:

1. Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
2. Calcolare rotazione e spostamento verticale del nodo B e disegnare la deformata elastica;
3. Disegnare la curva delle pressioni.

Per lo schema complessivo, tracciare infine i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale.



Rigidzze alla rotazione nodo B:

$$\begin{cases} K_B^{(1)} = \frac{4EJ}{l} \\ K_B^{(2)} = \frac{3EJ}{\frac{3}{2}l} = \frac{2EJ}{l} \end{cases}$$

$$K_B^{tot} = \frac{6EJ}{l}$$

Spostamento verticale nodo B:

$$\eta_B = 0$$

Rotazione nodo B:

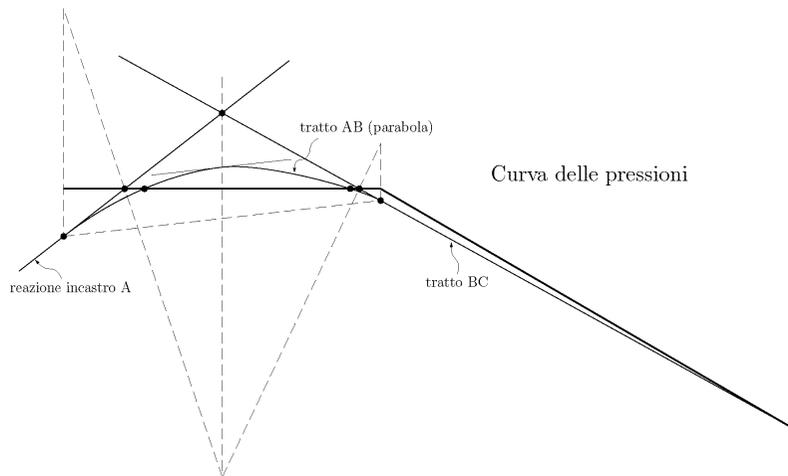
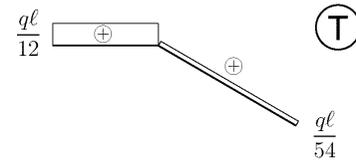
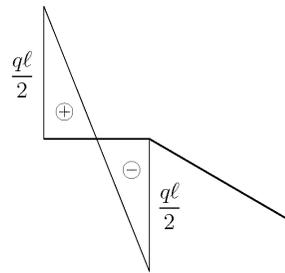
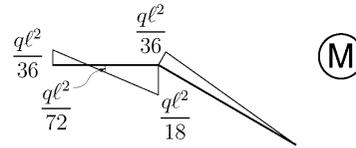
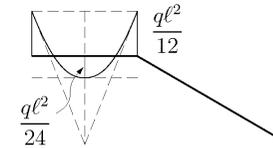
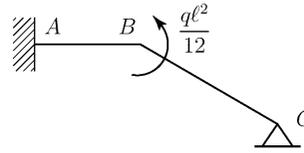
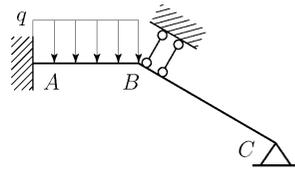
$$\frac{6EJ}{l} \varphi_B = \frac{q\ell^2}{12} \Rightarrow \varphi_B = \frac{q\ell^3}{72EJ}$$

Coefficienti di ripartizione:

$$\begin{cases} \rho^{(1)} = \frac{2}{3} \\ \rho^{(2)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

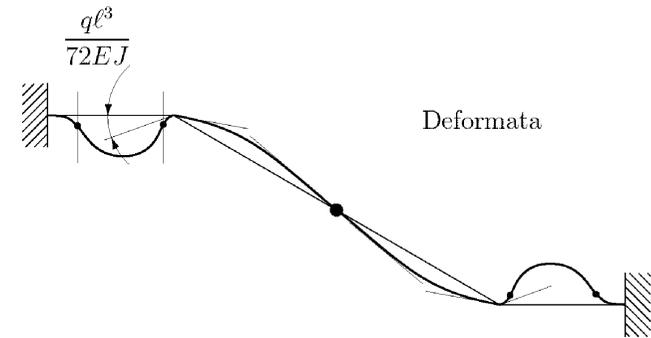
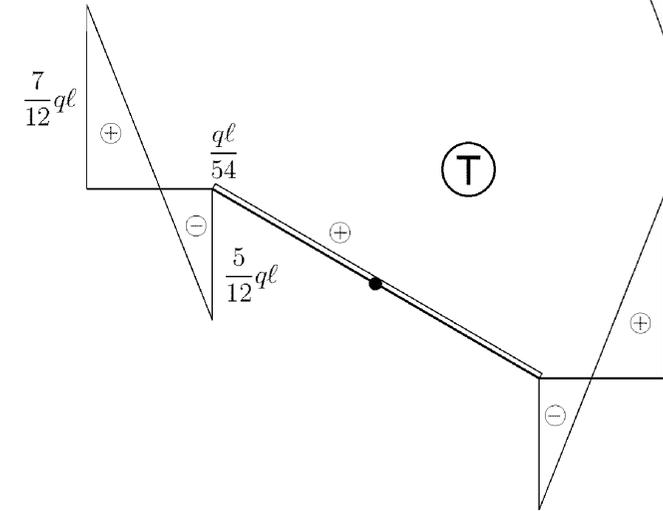
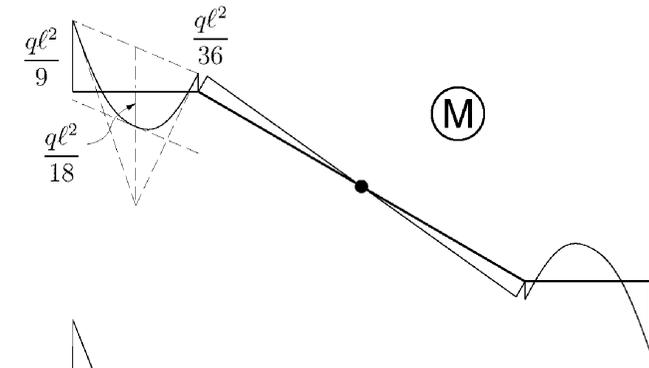
Incastro perfetto in B

Reazione di incastro perfetto cambiata di segno



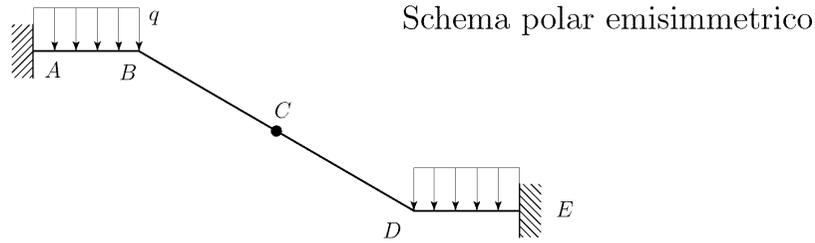
Curva delle pressioni

diagrammi totali

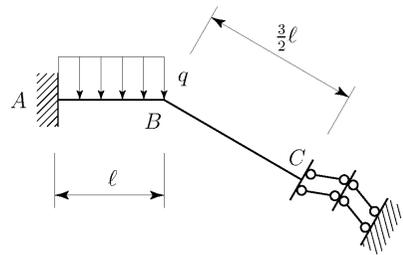


$$\frac{q\ell^3}{72EJ}$$

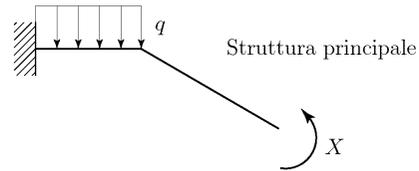
Deformata



Schema equivalente



Metodo delle forze



Congruenza: $\varphi_C = 0$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{Xl}{EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{X(\frac{3}{2}l)}{EJ} + \varphi_B = \frac{5Xl}{2EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \end{cases}$$

$$\varphi_C = 0 \Rightarrow X = \frac{ql^2}{15}$$

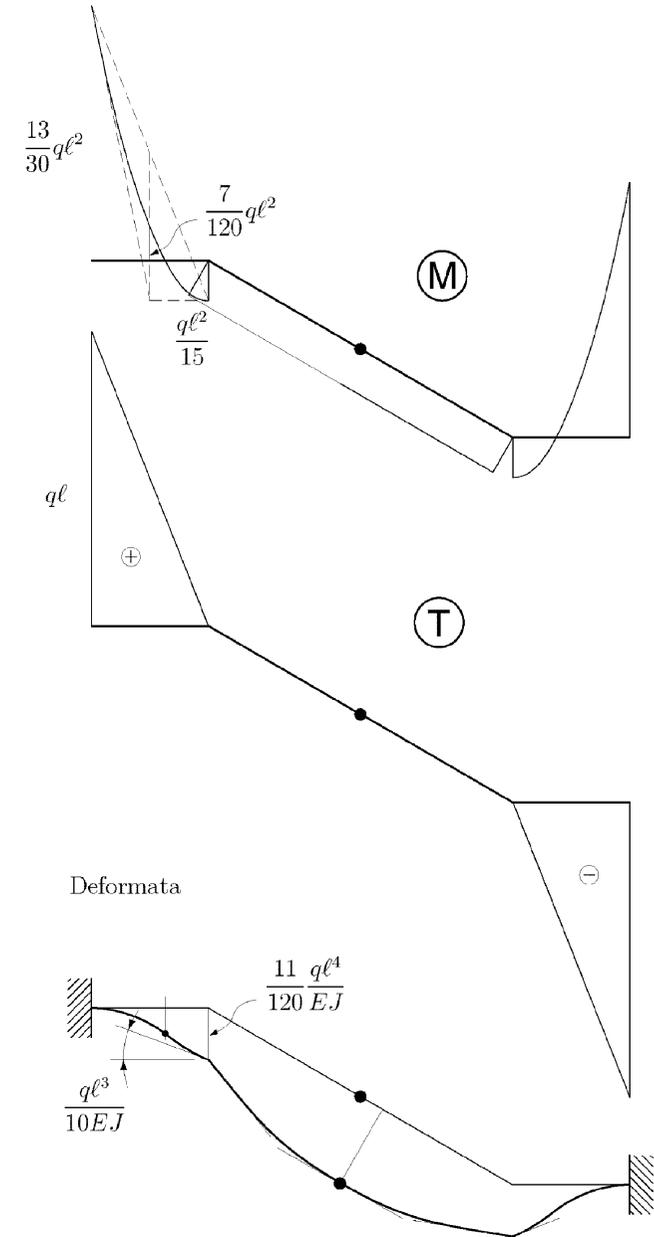
Rotazione nodo B:

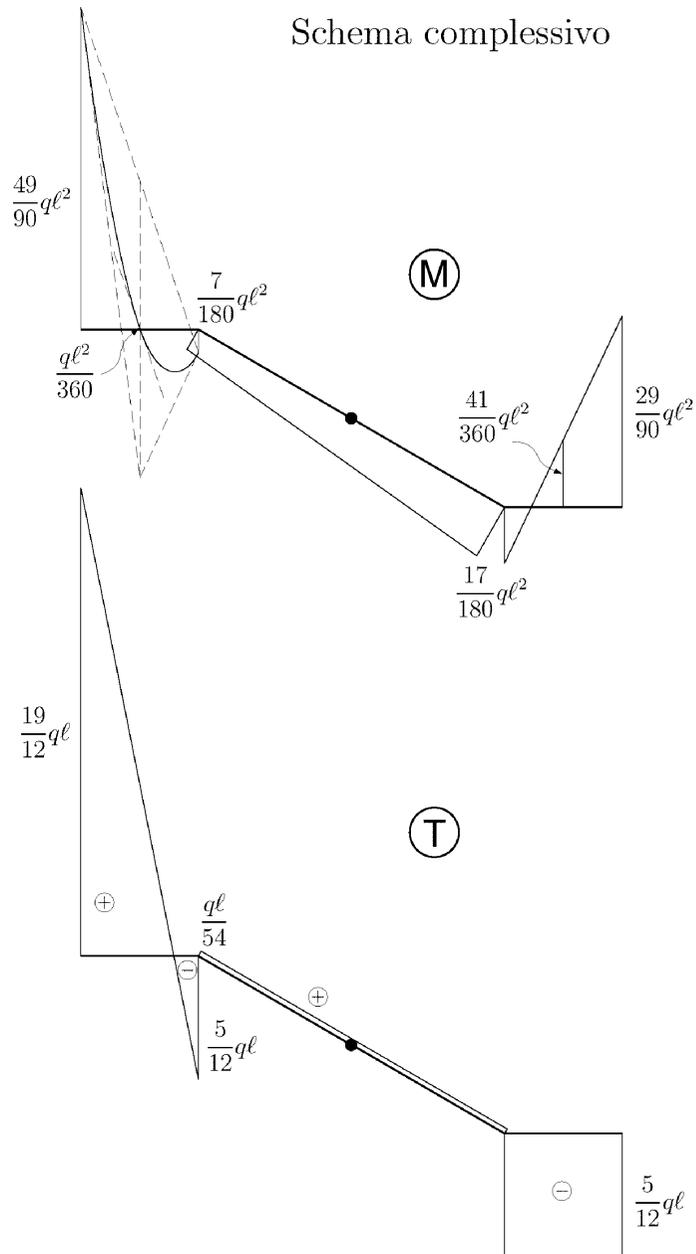
$$\varphi_B = \frac{ql^3}{15EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} = -\frac{ql^3}{10EJ}$$

Spostamento verticale nodo B:

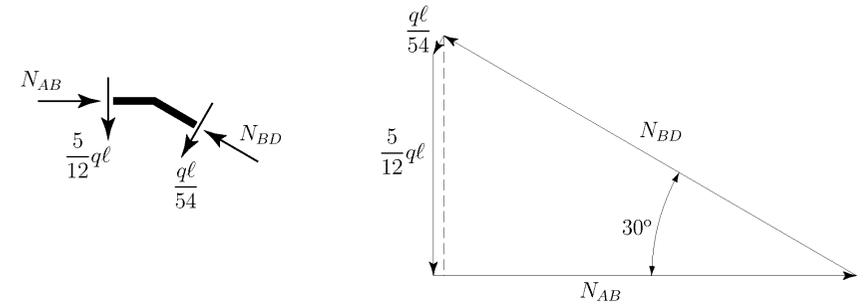
$$\eta_B = -\frac{Xl^2}{2EJ} + \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{11}{120} \frac{ql^4}{EJ}$$

La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette parallele nel tratto AB e non esiste nel tratto BC

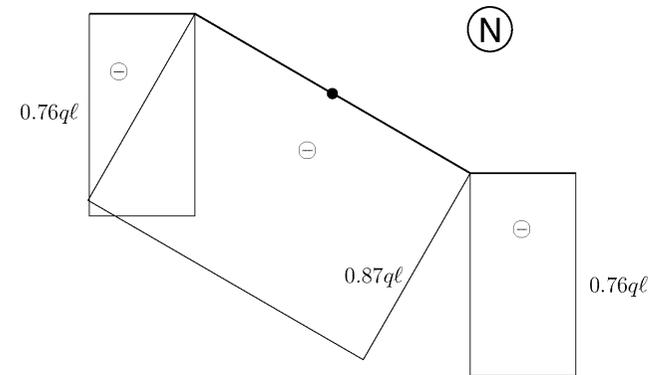




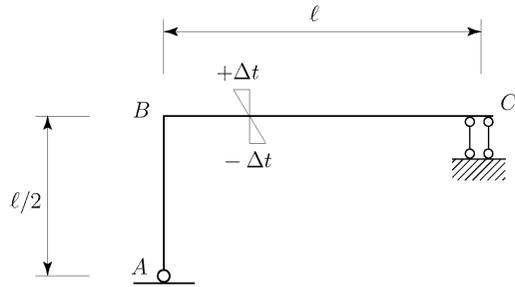
Equilibrio del nodo B per il calcolo dello sforzo normale



$$\begin{cases} N_{BD} = \frac{q\ell}{\sin 30^\circ} \left(\frac{5}{12} + \frac{\cos 30^\circ}{54} \right) = \frac{45 + \sqrt{3}}{54} q\ell = 0.87q\ell \\ N_{AB} = N_{BD} \cos 30^\circ + \frac{q\ell}{54} \sin 30^\circ = \frac{4 + 45\sqrt{3}}{108} q\ell = 0.76q\ell \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

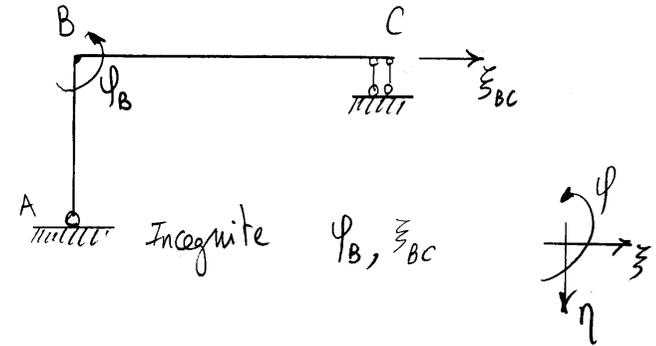


3.5 Esercizio 15

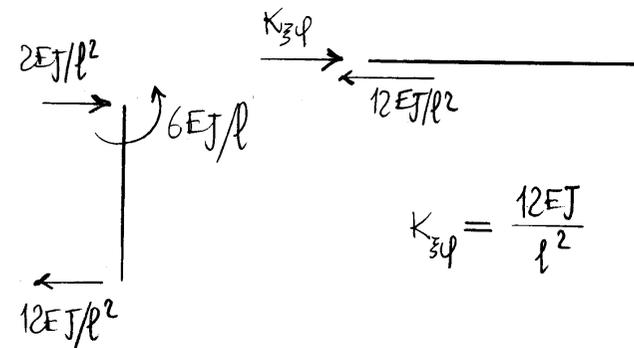
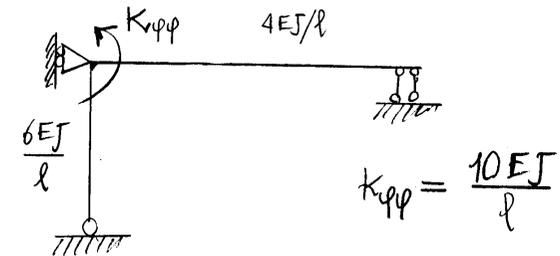


- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) Calcolare l'energia elastica di deformazione.

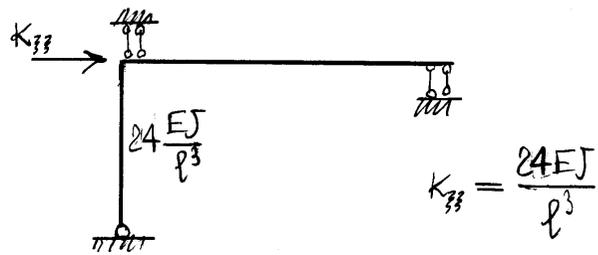
Matrice delle rigidezze



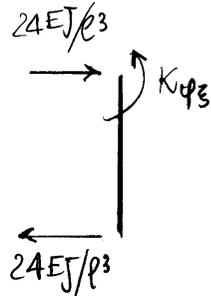
Prima colonna



Seconda colonna



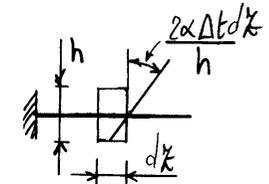
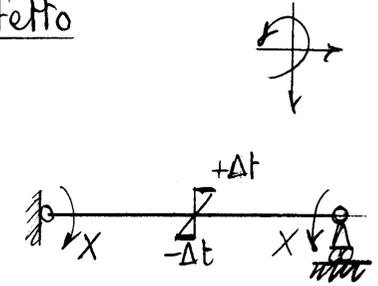
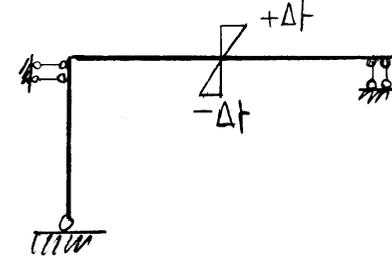
$$K_{33} = \frac{24EJ}{l^3}$$



$$K_{\phi 3} = \frac{12EJ}{l^2}$$

$$\underline{K} = 2 \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 5l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix}$$

Reazioni di incastro perfetto

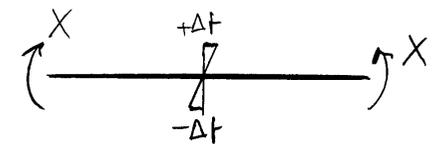


$$\frac{Xl}{2EJ} - \frac{\alpha \Delta t l}{h} = 0$$

$$X = \frac{2EJ \alpha \Delta t}{h}$$

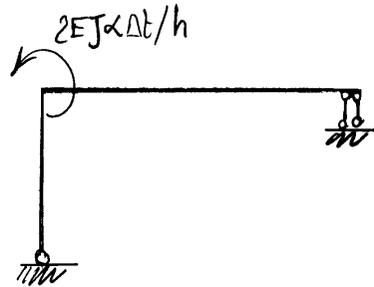
$$d\varphi = -2\alpha \Delta t dz / h$$

$$\varphi = \int_0^{l/2} d\varphi = -\frac{\alpha \Delta t l}{h}$$



$$\left. \begin{array}{l} R_{\phi} = -\frac{2EJ \alpha \Delta t}{h} \\ R_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Reazioni di incastro perfetto cambiate di segno



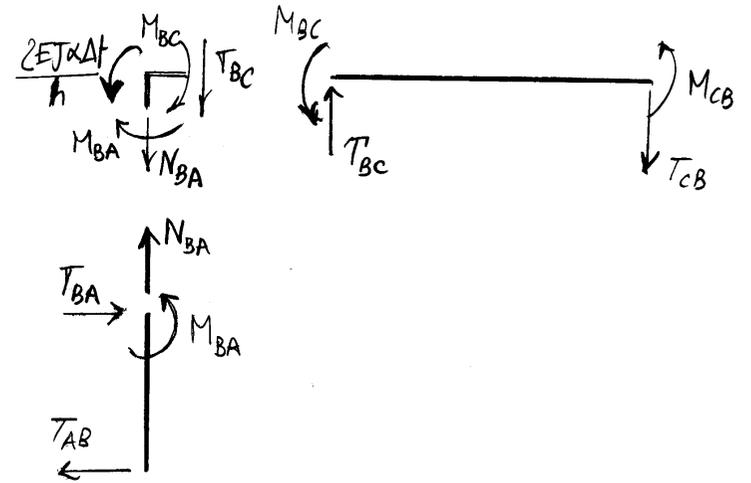
$$2 \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 5l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \xi_{BC} \end{Bmatrix} = 2 \frac{EJ}{l^3} \frac{\alpha \Delta t}{h} \begin{Bmatrix} l^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5l \varphi_B + 6 \xi_{BC} = \frac{\alpha \Delta t}{h} l^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 6l \varphi_B + 12 \xi_{BC} = 0 \end{cases}$$

$$2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 4l \varphi_B = 2 \frac{\alpha \Delta t}{h} l^2 \Rightarrow \varphi_B = \frac{\alpha \Delta t}{2h} l$$

$$5 \times \textcircled{2} - 6 \times \textcircled{1} \Rightarrow 24 \xi_{BC} = -6 \frac{\alpha \Delta t}{h} l^2 \Rightarrow \xi_{BC} = -\frac{\alpha \Delta t}{4h} l^2$$



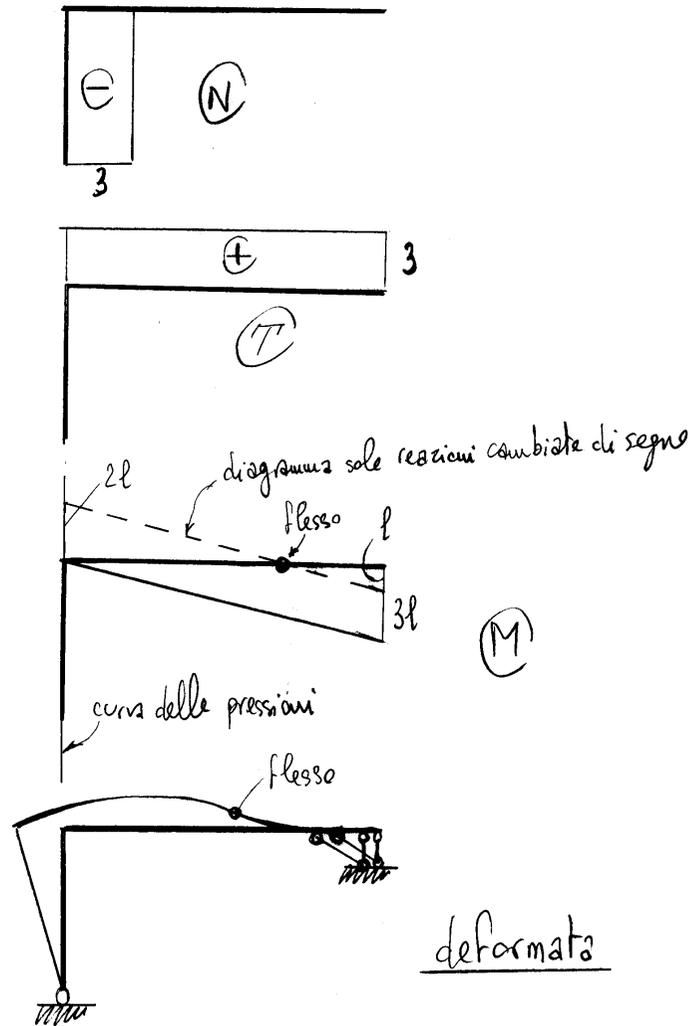
$$\begin{cases} M_{BA} = \frac{6EJ}{l} \varphi_B + \frac{12EJ}{l^2} \xi_{BC} = 0 \\ T_{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi_B = \frac{2EJ \alpha \Delta t}{h} \\ M_{CB} = M_{BC} / 2 = \frac{EJ \alpha \Delta t}{h} \end{cases}$$

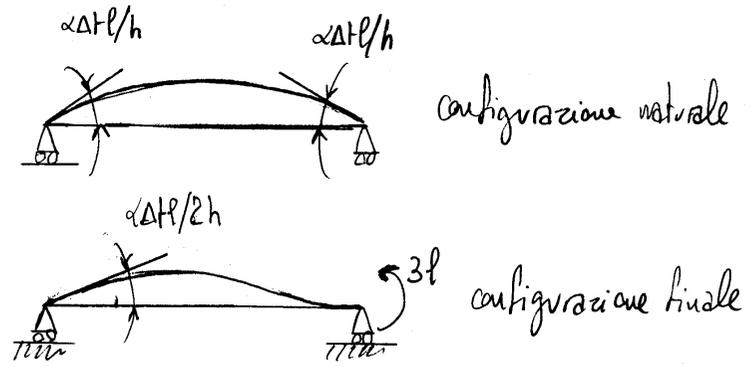
$$T_{BC} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{l} = \frac{3EJ \alpha \Delta t}{lh}$$

$$N_{BA} = -\frac{3EJ \alpha \Delta t}{lh}$$

Diagrammi (a meno di $EJ\alpha\Delta t/hl$)



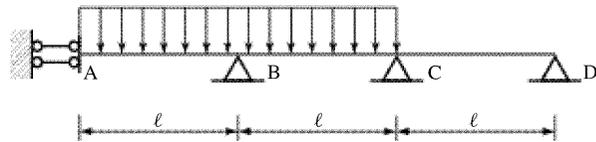
Energia elastica di deformazione



$$L_d = \frac{1}{2} \frac{EJ\alpha\Delta t}{hl} (3l) \frac{\alpha\Delta t l}{h}$$

$$= \frac{3}{2} EJ(\alpha\Delta t)^2 \frac{l}{h^2}$$

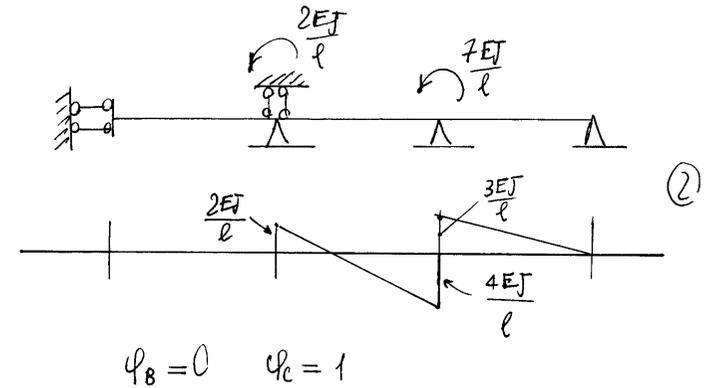
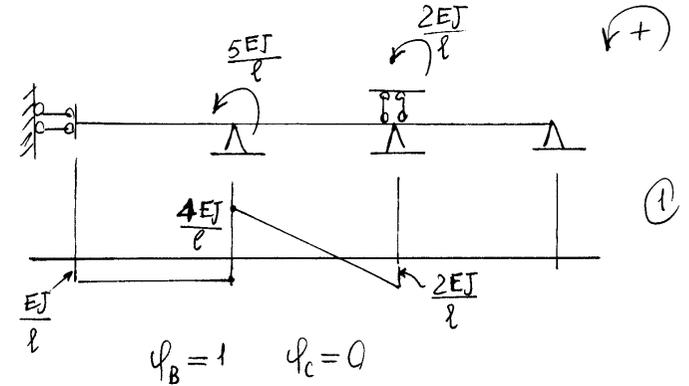
3.6 Esercizio 16



Data la trave continua di figura:

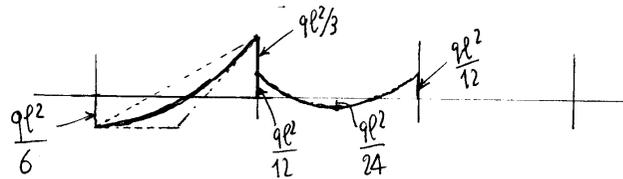
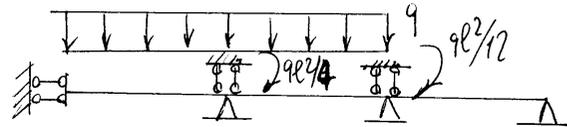
1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Calcolare le rotazioni delle sezioni B e C utilizzando la matrice delle rigidezze.

Rigidezze



$$K = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l}$$

Momenti di incastro perfetta



$$\begin{cases} M_A = -\frac{ql^2}{4} \\ M_B = -\frac{ql^2}{12} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{ql^3}{12EJ} \Rightarrow \begin{cases} 5\varphi_B + 2\varphi_C = 3 \\ 2\varphi_B + 7\varphi_C = 1 \end{cases}$$

A meno di $ql^3/12EJ$

$$\Rightarrow \begin{cases} 31\varphi_C = -1 \\ 31\varphi_B = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = \frac{19}{372} \frac{ql^3}{EJ} \\ \varphi_C = -\frac{1}{372} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$

$$M_A = \left(\frac{1}{6} + \frac{19}{372} \right) ql^2 = \frac{81}{372} ql^2 = \frac{27}{124} ql^2$$

$$M_{BA} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{19}{372} \right) ql^2 = -\frac{105}{372} ql^2 = \frac{35}{124} ql^2$$

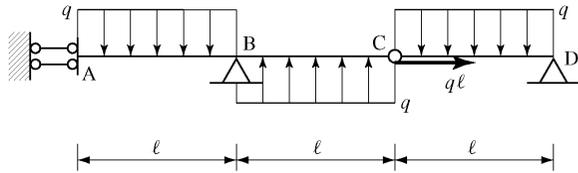
$$M_{BC} = \left(-\frac{1}{12} - \frac{4 \times 19}{372} + \frac{2}{372} \right) ql^2 = -\frac{105}{372} ql^2 = \frac{35}{124} ql^2$$

$$M_{CB} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{2 \times 19}{372} - \frac{4}{372} \right) ql^2 = \frac{3}{372} ql^2 = \frac{1}{124} ql^2$$

$$M_{CD} = +\frac{3}{372} ql^2 = +\frac{1}{124} ql^2$$

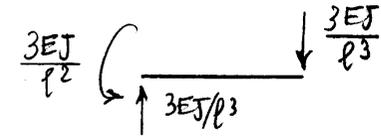
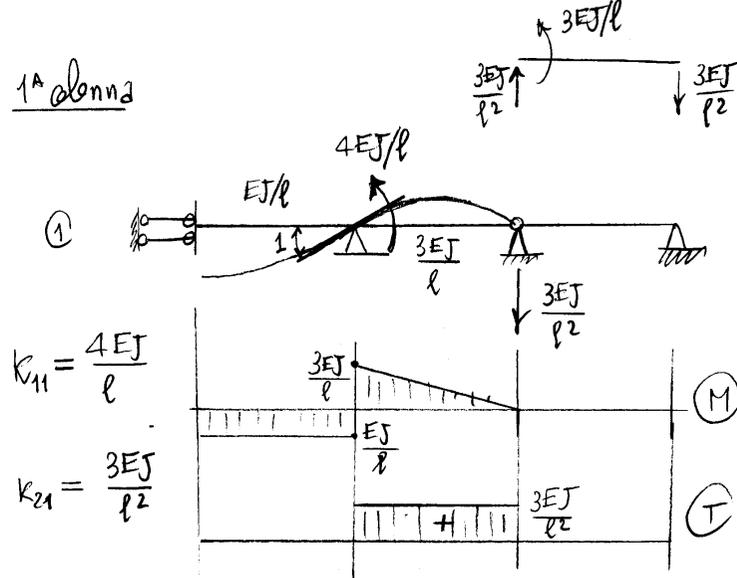
3.7 Esercizio 17

Risolvere la struttura col metodo delle rigidzze.

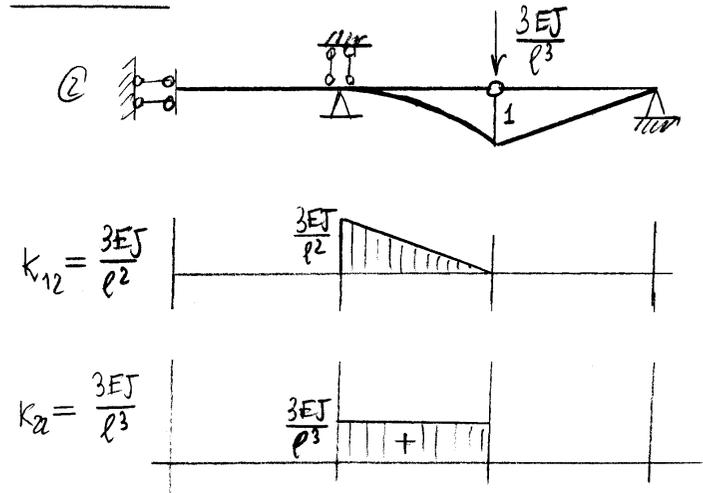


Spostamenti:
$$\underline{s} \equiv \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_C \end{Bmatrix}$$

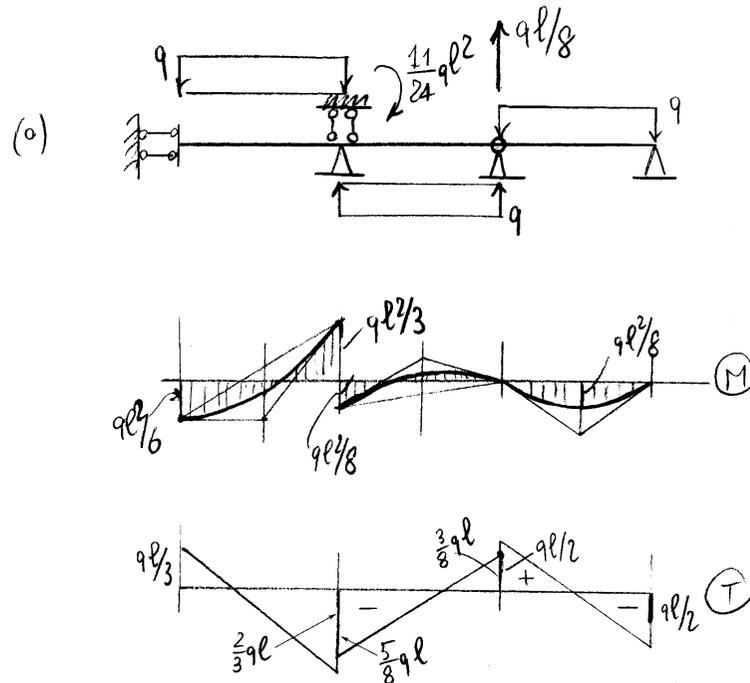
1^a colonna



2^a colonna



$$\underline{K} \equiv \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix}$$

Momenti di incastro perfettaSpostamenti di nodo

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_C \end{Bmatrix} = \frac{q l}{24} \begin{Bmatrix} 11l \\ 3 \end{Bmatrix}$$

A meno di $\frac{q l^4}{24 E J}$:

$$\begin{cases} 4l \varphi_B + 3 \eta_C = 11 \\ 3l \varphi_B + 3 \eta_C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = 8/l \\ \eta_C = -7 \end{cases}$$

e quindi:

$$\varphi_B = \frac{q l^3}{3 E J}, \quad \eta_C = -\frac{7 q l^4}{24 E J}$$

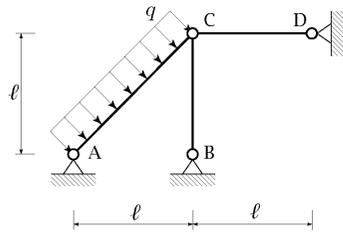
$$M_A = \frac{q l^2}{6} + \left(\frac{EJ}{l}\right) \frac{q l^3}{3 E J} = \frac{q l^2}{2}$$

$$M_{BA} = -\frac{q l^2}{3} + \left(\frac{EJ}{l}\right) \frac{q l^3}{3 E J} = 0$$

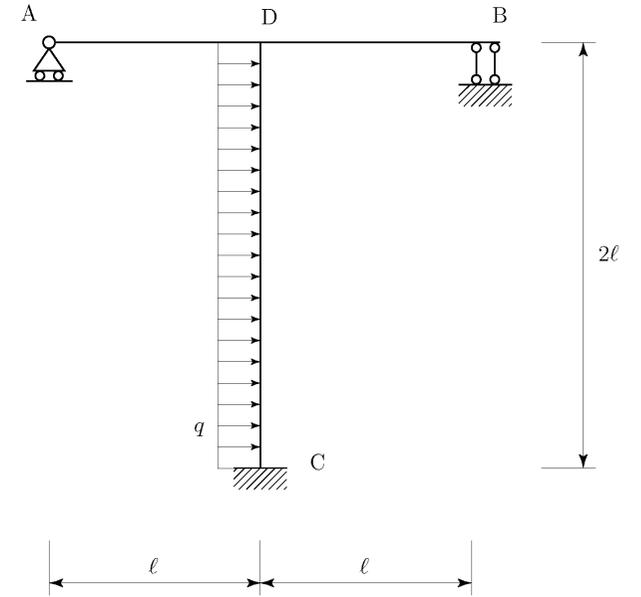
$$M_{CA} = \frac{q l^2}{8} - \left(\frac{3 E J}{l}\right) \frac{q l^3}{3 E J} - \left(\frac{3 E J}{l^2}\right) \left(-\frac{7 q l^4}{24 E J}\right) = 0$$

$$M_C = 0$$

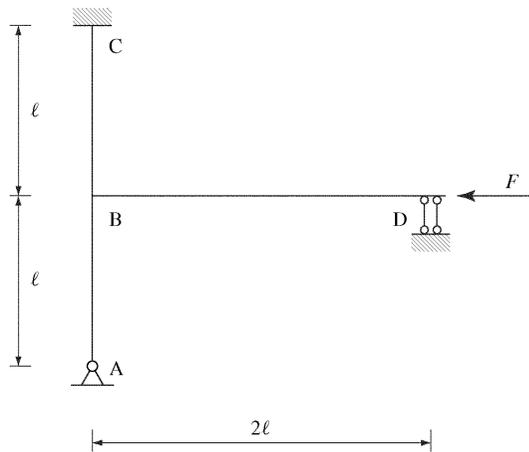
3.8 Esercizi proposti



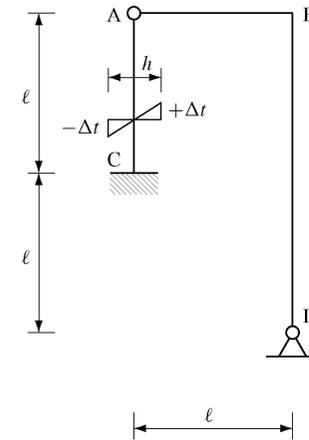
- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze del sistema di pendoli sopra illustrato;
- 1) Risolvere la struttura utilizzando il metodo degli spostamenti;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Calcolare la rotazione dell'estremità C dell'asta AC;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) Determinare l'entità minima del carico distribuito q che provoca l'inflessione laterale per carico di punta in almeno uno dei pendoli del sistema.



Risolvere la struttura utilizzando il metodo degli spostamenti;

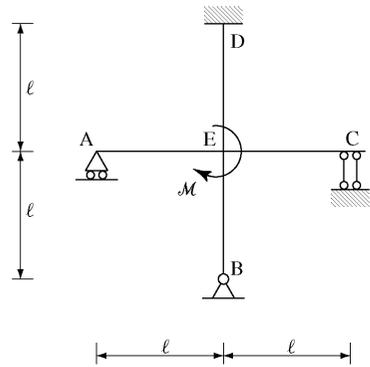


1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ai due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
3. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
5. Disegnare il diagramma quotato dello sforzo normale;
6. Disegnare la deformata elastica della struttura;
7. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

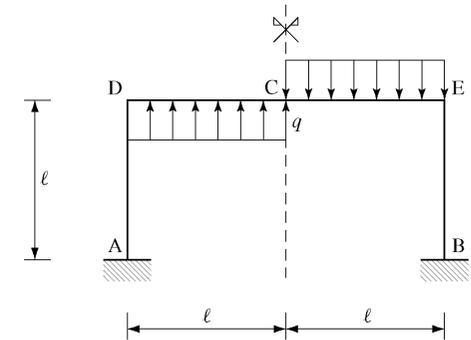


Dato il telaio ad un nodo spostabile di figura:

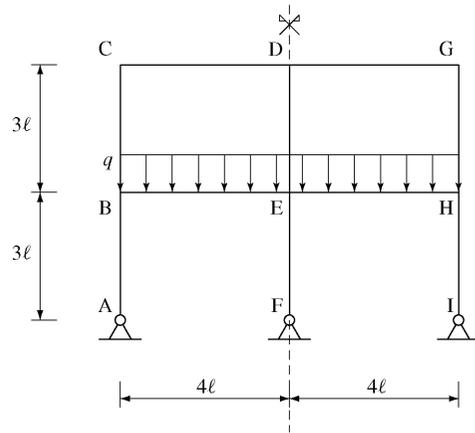
1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Risolvere la struttura col metodo delle rigidezze;
3. Calcolare l'energia elastica di deformazione.



1. Calcolare la matrice delle rigidzze;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ai due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidzze;
3. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
5. Disegnare il diagramma quotato dello sforzo normale;
6. Calcolare l'energia elastica di deformazione;
7. Impostare la soluzione con il metodo delle forze.

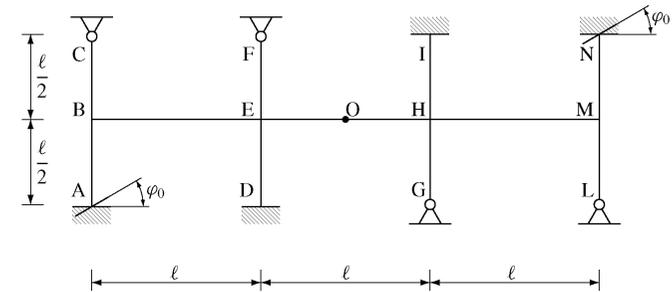


1. Impostare la soluzione con il metodo degli spostamenti;
2. Risolvere lo schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto, disegnare i relativi diagrammi quotati del momento flettente e del taglio e calcolare le reazioni di incastro perfetto;
3. Calcolare una colonna della matrice delle rigidzze, disegnando i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;
4. Completare il calcolo della matrice delle rigidzze e risolvere la struttura con il metodo degli spostamenti;
5. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
6. Impostare la soluzione con il metodo delle forze.



Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sul tratto BEH:

1. Impostare la soluzione con il metodo degli spostamenti;
2. Risolvere lo schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto, disegnare i relativi diagrammi quotati del momento flettente e del taglio e calcolare le reazioni di incastro perfetto;
3. Calcolare una colonna della matrice delle rigidezze, disegnando i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;
4. Completare il calcolo della matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo degli spostamenti;
5. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
6. Disegnare la deformata elastica della struttura.



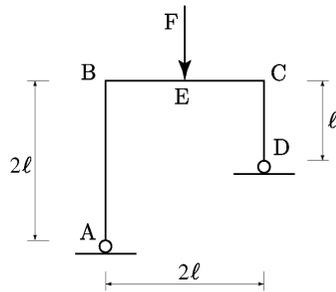
Sia data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un cedimento angolare nei due incastri A e N. Tenendo conto della sua polarsimmetria geometrica e materiale:

1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare il diagramma quotato del momento flettente e del taglio relativo ad uno dei due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
3. Calcolare le reazioni di incastro perfetto;
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
5. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
6. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
7. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

Capitolo 4

Esercizi sul lavoro di deformazione

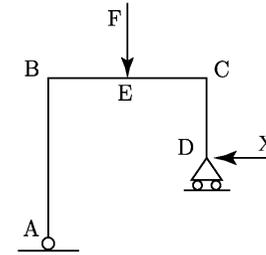
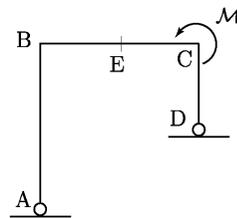
4.1 Esercizio 18



1) Calcolare il lavoro di deformazione in funzione della forza concentrata F;

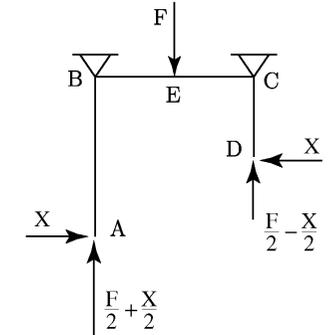
2) Assumendo quale zero dell'energia dei carichi esterni quella che si ha nella configurazione indeformata, calcolare il minimo dell'energia potenziale totale;

3) Utilizzando il teorema di Betti, calcolare lo spostamento verticale del punto E di mezzeria della travata nel caso la struttura sia soggetta ad una coppia concentrata nel punto C, come illustrato qui di fianco.



Struttura principale isostatica

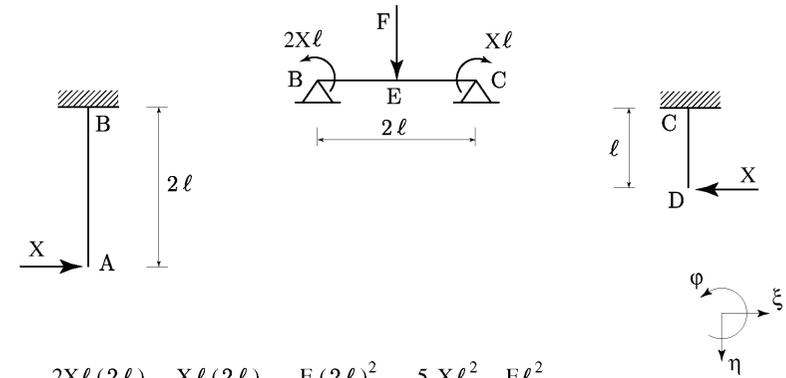
Congruenza: $\xi_D = 0$



Struttura equivalente

(a meno di una traslazione orizzontale)

Congruenza: $\xi_D = \xi_A$



$$\varphi_B = \frac{2Xl(2l)}{3EJ} + \frac{Xl(2l)}{6EJ} - \frac{F(2l)^2}{16EJ} = \frac{5}{3} \frac{Xl^2}{EJ} - \frac{Fl^2}{4EJ}$$

$$\varphi_C = -\frac{2Xl(2l)}{6EJ} - \frac{Xl(2l)}{3EJ} + \frac{F(2l)^2}{16EJ} = -\frac{4}{3} \frac{Xl^2}{EJ} + \frac{Fl^2}{4EJ}$$

$$\xi_A = \frac{X(2l)^3}{3EJ} + \varphi_B(2l) = 6 \frac{Xl^3}{EJ} - \frac{Fl^3}{2EJ}$$

$$\xi_D = -\frac{Xl^3}{3EJ} + \varphi_C l = -\frac{5}{3} \frac{Xl^3}{EJ} + \frac{Fl^3}{4EJ}$$

$$\xi_A = \xi_D \implies 6 \frac{Xl^3}{EJ} - \frac{Fl^3}{2EJ} = -\frac{5}{3} \frac{Xl^3}{EJ} + \frac{Fl^3}{4EJ} \implies \frac{23}{3} \frac{Xl^3}{EJ} = \frac{3}{4} \frac{Fl^3}{EJ}$$

$$X = \frac{9}{92} F$$

$$\varphi_C = \frac{11 F \ell^2}{92 EJ}$$

$$\eta_E = -\frac{2X\ell(2\ell)^2}{16EJ} - \frac{X\ell(2\ell)^2}{16EJ} + \frac{F(2\ell)^3}{48EJ} = \frac{103 F \ell^3}{1104 EJ} = .093 \frac{F \ell^3}{EJ}$$

Lavoro di deformazione (teorema di Clapeyron):

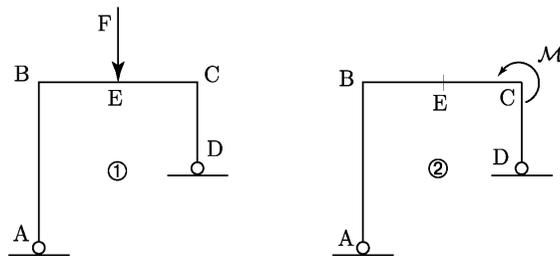
$$L_d = \frac{1}{2} F \eta_E = \frac{103 F^2 \ell^3}{2208 EJ} = .047 \frac{F^2 \ell^3}{EJ}$$

Minimo dell'energia potenziale totale:

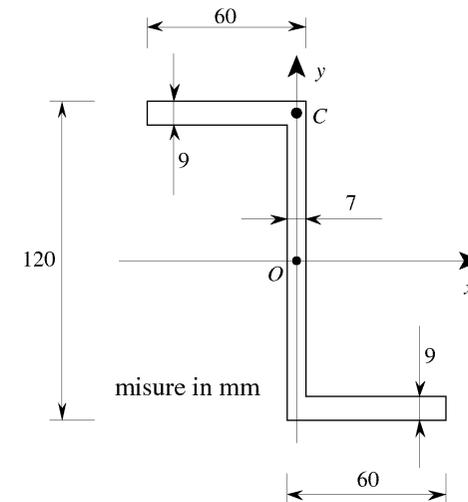
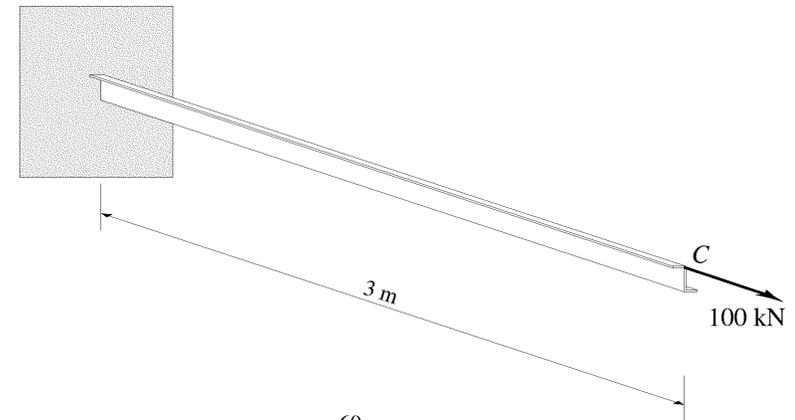
$$\Pi_{min} = -F \eta_E + L_d = -\frac{1}{2} F \eta_E = -\frac{103 F^2 \ell^3}{2208 EJ} = -.047 \frac{F^2 \ell^3}{EJ}$$

Spostamento verticale del punto E dovuto alla coppia M applicata in C (teorema di Betti):

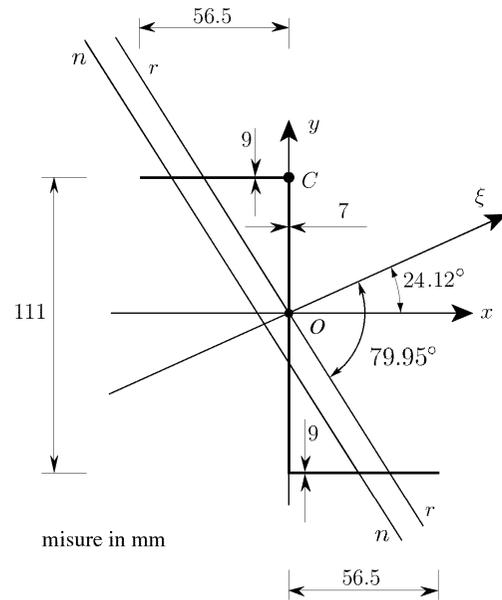
$$F \eta_E^{\circledast} = M \varphi_C^{\circledast} \implies \eta_E^{\circledast} = \frac{11 M \ell^2}{92 EJ}$$



4.2 Esercizio 19



Data una mensola avente la sezione di figura e caricata all'estremità da una forza normale di trazione di 100 kN ed applicata nel punto C calcolare, mettendo in conto la deformabilità assiale della mensola, l'energia elastica di deformazione, lo spostamento orizzontale del punto C e la rotazione della sezione di estremità della mensola, assumendo il valore $E=210\,000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young.



$$A = 17.94 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_\xi = 48.23^\circ \\ \alpha_\xi = 24.12^\circ \end{cases}$$

Energia elastica di deformazione:

$$\begin{aligned} L_d &= \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{|\mathbf{M}|^2}{EJ_n} \right) \ell = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_\xi^2}{EJ_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EJ_\eta} \right) \ell \\ &= \frac{1}{2} (26.54 + 26.31 + 66.47) \text{ N} \times 3.00 \text{ m} = 178.98 \text{ J} \end{aligned}$$

Spostamento orizzontale w_C del punto C (teorema di Clapeyron):

$$L_d = \frac{1}{2} N w_C \Rightarrow w_C = 0.0036 \text{ m} = 3.6 \text{ mm}$$

Rotazione φ della sezione di estremità (attorno all'asse neutro):

$$\begin{aligned} |\varphi| &= \frac{|\mathbf{M}| \ell}{EJ_n \cos \widehat{x\hat{n}}} = \sqrt{\left(\frac{M_\xi \ell}{EJ_\xi} \right)^2 + \left(\frac{M_\eta \ell}{EJ_\eta} \right)^2} \\ &= \sqrt{(0.0156)^2 + (0.0879)^2} \text{ rad} = 0.089 \text{ rad} = 5.12^\circ \end{aligned}$$

Inclinazione dell'asse neutro (angolo minore di 90°):

$$\widehat{\xi\hat{n}} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_\xi}{J_\eta \tan 65.88^\circ} \right\} = 79.95^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x\hat{n}} = 55.84^\circ \\ \widehat{y\hat{n}} = 34.16^\circ \end{cases}$$

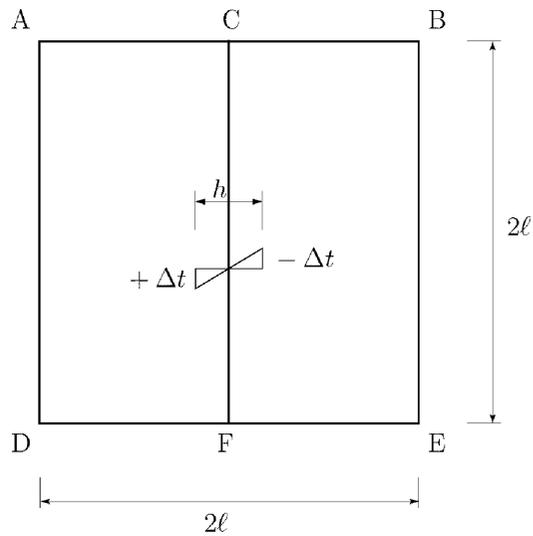
Momento di inerzia rispetto all'asse r baricentrico e parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione y):

$$J_r = \frac{J_\xi \cos^2 \widehat{\xi\hat{n}} + J_\eta \sin^2 \widehat{\xi\hat{n}}}{\sin^2 \widehat{y\hat{n}}} = 158.094 \text{ cm}^4$$

Momento flettente:

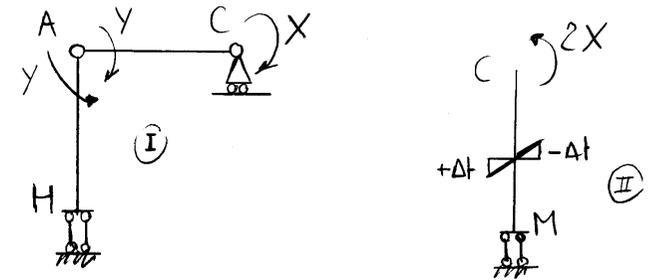
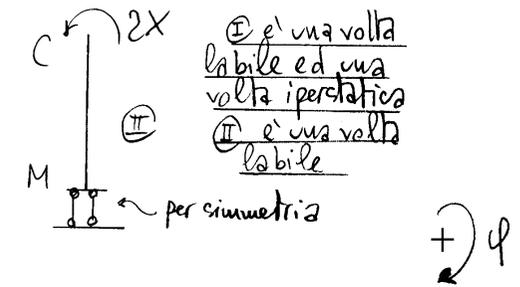
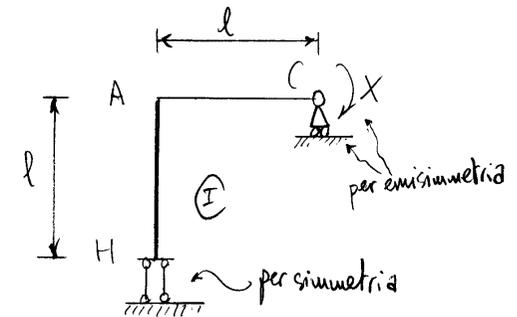
$$\mathbf{M} = N y_C \mathbf{e}_x = (5550.0 \text{ Nm}) \mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} M_\xi = N \cos \alpha_\xi = 5065.6 \text{ Nm} \\ M_\eta = -N \sin \alpha_\xi = -2267.6 \text{ Nm} \end{cases}$$

4.3 Esercizio 20



La struttura inflessa di figura è soggetta ad una distorsione termica a farfalla nel montante centrale:

- Calcolare l'energia elastica di deformazione della struttura complessiva.

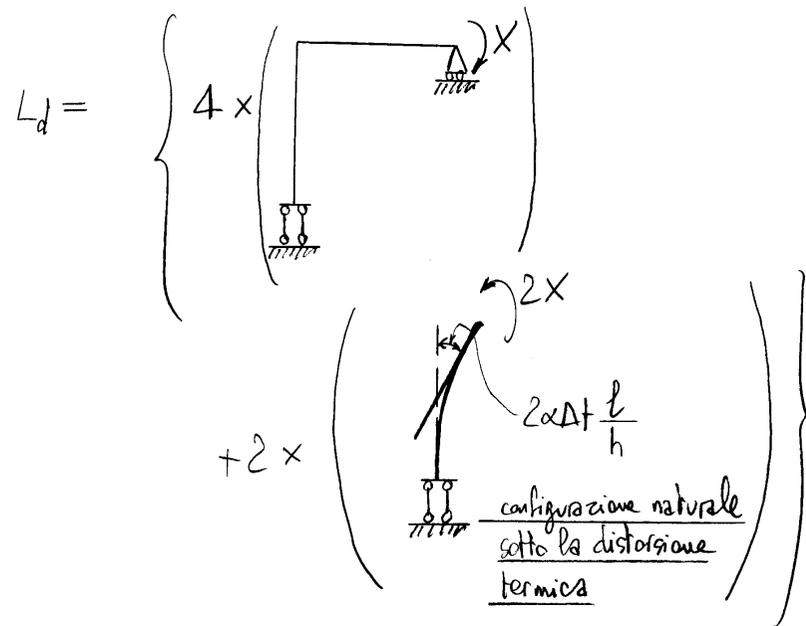


$$X = \frac{32}{37} EJ \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

$$Y = \frac{4}{37} EJ \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = -\frac{\gamma l}{EJ} = -\frac{4}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \\ \varphi_C = 2\alpha \Delta t \frac{l}{h} - \frac{2 \times l}{EJ} = \frac{10}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \end{cases}$$

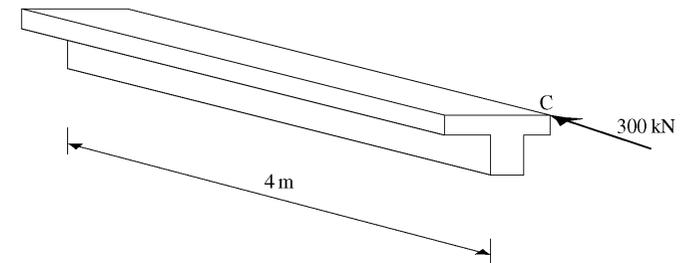
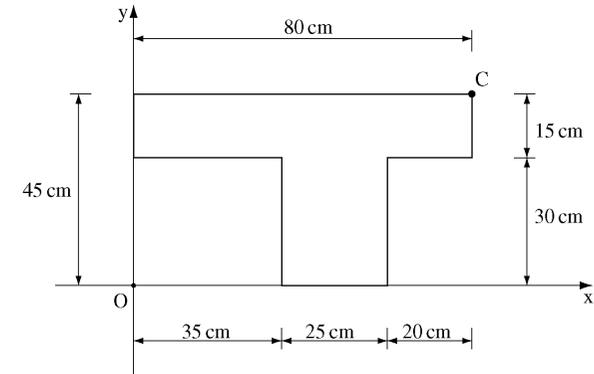
Energia elastica di deformazione



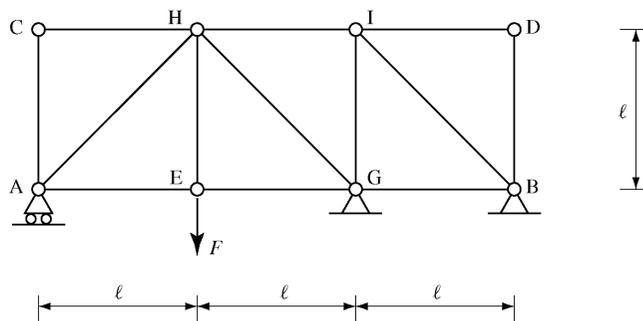
$$L_d = 4 \left(\frac{1}{2} \times \varphi_C \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \times 2X \frac{2 \times l}{EJ} \right) =$$

$$= \left(2 \frac{32}{37} \frac{10}{37} + 4 \frac{32}{37} \frac{32}{37} \right) EJ l \left(\frac{\alpha \Delta t}{h} \right)^2 = \frac{128}{37} EJ l \left(\frac{\alpha \Delta t}{h} \right)^2$$

4.4 Esercizi proposti



Data la mensola di figura, avente la sezione riportata più sopra e caricata da una forza normale di compressione di 300 kN ed applicata nel punto C calcolare, mettendo in conto la deformabilità assiale della trave, l'energia elastica di deformazione, lo spostamento orizzontale del punto C e la rotazione della sezione di estremità della mensola, assumendo il valore $E=20000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young.



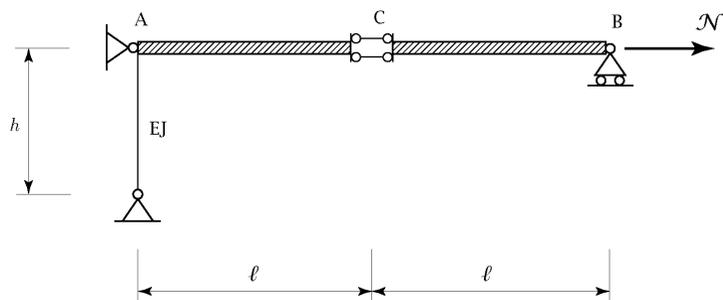
Con riferimento alla figura, supponendo che le aste abbiano area A uguale e posto che le aste siano realizzate in acciaio Fe360, di modulo di Young $E = 200 \text{ GPa}$ e tensione ammissibile $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ N/mm}^2$, e che inoltre sia $F = 150 \text{ kN}$, $\ell = 2 \text{ m}$, $A = 20 \text{ cm}^2$ e che infine i momenti di inerzia massimo e minimo delle aste siano $J_{\text{max}} = 140 \text{ cm}^4$ e $J_{\text{min}} = 100 \text{ cm}^4$:

- Calcolare l'energia elastica di deformazione (in joule), lo spostamento orizzontale del nodo E (in millimetri) e l'energia potenziale totale corrispondente alla soluzione (in joule).

Capitolo 5

Esercizi sui carichi critici

5.1 Esercizi proposti



Determinare il carico critico sia con il metodo statico che con il metodo energetico e disegnare la deformata critica.

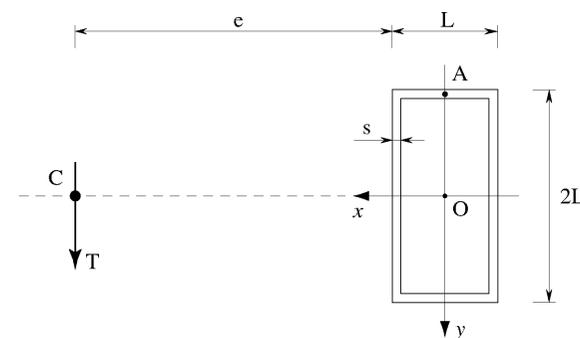
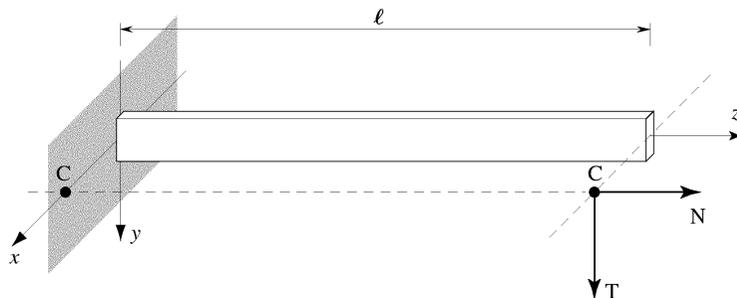
Capitolo 6

Esercizi di riepilogo

6.1 Esercizio 21

Una mensola di sezione rettangolare sottile chiusa è soggetta, nella sezione di estremità, ad un taglio T verticale e ad uno sforzo normale N di trazione applicati in corrispondenza del punto C :

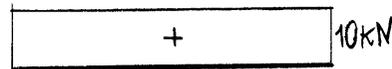
1. Disegnare i diagrammi quotati delle caratteristiche della sollecitazione;
2. Disegnare i diagrammi quotati delle tensioni normali e tangenziali relativi alla sezione di incastro della mensola;
3. Eseguire la verifica di resistenza utilizzando il criterio di Huber-von Mises;
4. Determinare, nel punto A della sezione di incastro, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi, la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr e le direzioni e componenti principali di sforzo;



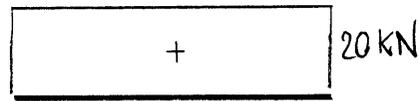
$L = 120 \text{ mm}$	$N = 10 \text{ kN}$
$s = 10 \text{ mm}$	$T = 20 \text{ kN}$
$e = 1 \text{ m}$	$E = 200 \text{ kN/mm}^2$
$\ell = 1.5 \text{ m}$	$\nu = 0.3$
	$\sigma_{adm} = 160 \text{ N/mm}^2$

5. Calcolare, trascurando la deformabilità assiale e tagliante della mensola, lo spostamento del baricentro e la rotazione della sezione di estremità della mensola;
6. Calcolare l'energia elastica di deformazione, sempre trascurando la deformabilità assiale e tagliante della mensola.

Caratteristiche della sollecitazione



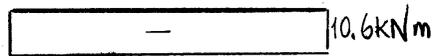
N



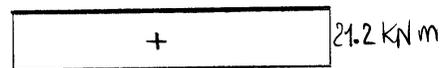
$T_y = T$



$M_x = -T(l-z)$



$M_y = -N(e + \frac{L}{2})$



$M_t = T(e + \frac{L}{2})$

Caratteristiche inerziali della sezione

$s = 10 \text{ mm}$

$L - s = 110 \text{ mm}$

$2L - s = 230 \text{ mm}$

$A = 2 \left\{ (L-s) + (2L-s) \right\} s = 6800 \text{ mm}^2$

$$J_x = 2 \left\{ \frac{s}{12} (2L-s)^3 + s(L-s) \left(\frac{2L-s}{2} \right)^2 \right\}$$

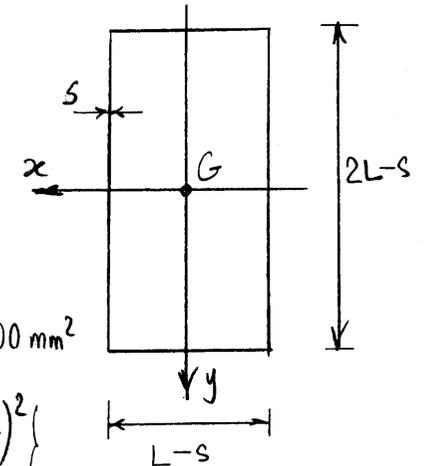
$$= 4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 2 \left\{ \frac{s}{12} (L-s)^3 + s(2L-s) \left(\frac{L-s}{2} \right)^2 \right\} = 1.6133 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

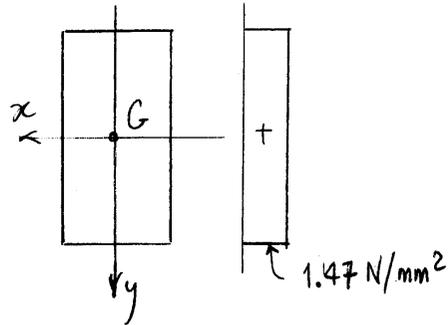
$\Omega = (L-s)(2L-s) = 25300 \text{ mm}^2$

$$\oint \frac{ds}{b} = \frac{1}{s} \oint ds = \frac{2}{s} \left\{ (L-s) + (2L-s) \right\} = 68$$

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b}} = 3.7652 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

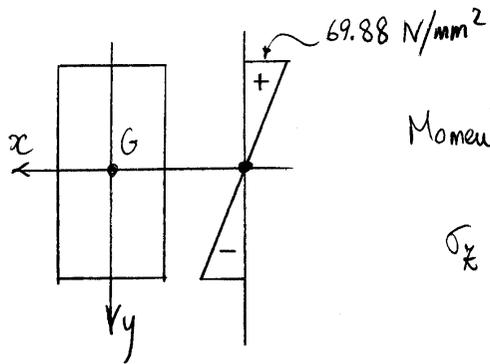


Diagrammi delle tensioni



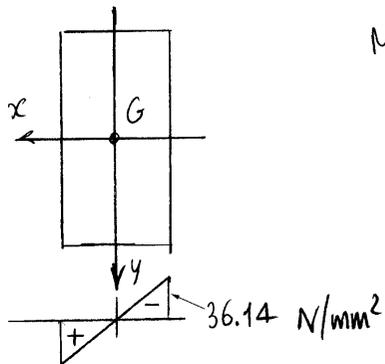
Sforzo normale:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$



Momento flettente secondo x:

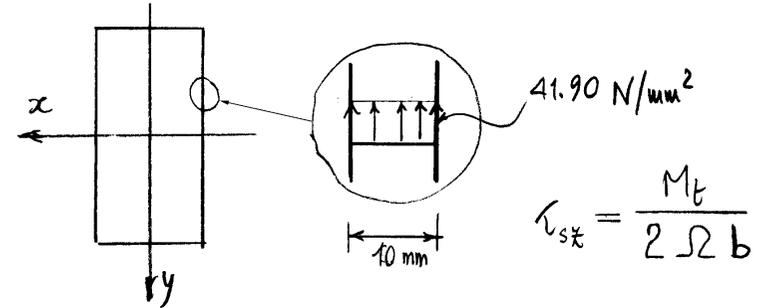
$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} y$$



Momento flettente secondo y

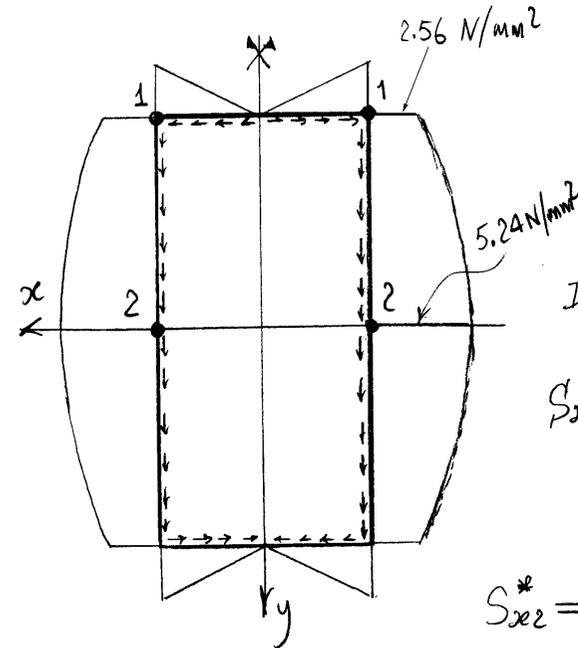
$$\sigma_x = - \frac{M_y}{J_y} x$$

Momento torcente



$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{2 \Omega b}$$

Taglio secondo y



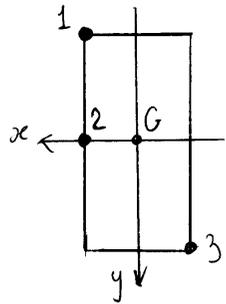
$$\tau_{xy} = \frac{T S_x^*}{(2b) J_x}$$

In valore assoluto:

$$S_{x1}^* = s(L-s) \frac{2L-s}{2} = 126500 \text{ mm}^3$$

$$S_{x2}^* = s(L-s) \frac{2L-s}{2} + 2s \frac{2L-s}{2} \frac{2L-s}{4} = 258750 \text{ mm}^3$$

Verifica di resistenza



Il punto più sollecitato è il punto 1 di coordinate $(\frac{L-s}{2}, -\frac{2L-s}{2})$. Infatti

in corrispondenza di tale punto si ha la massima tensione normale di trazione, maggiore, in modulo, a quella massima di compressione che si ha nel punto 3. Inoltre, nel punto 1 le tensioni tangenziali dovute a taglio e momento torcente si sommano mentre nel punto 3 si sottraggono. Nel punto 2, dove si ha la massima tensione tangenziale (concorde con la tensione dovuta al momento torcente) è nulla la tensione normale dovuta a M_x , tensione nettamente prevalente rispetto a quella dovuta al taglio.

Tensioni nel punto 1 :

$$\sigma = 1.47 + 69.88 + 36.14 = 107.49 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = 41.90 + 2.56 = 44.46 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 132.23 \text{ N/mm}^2$$

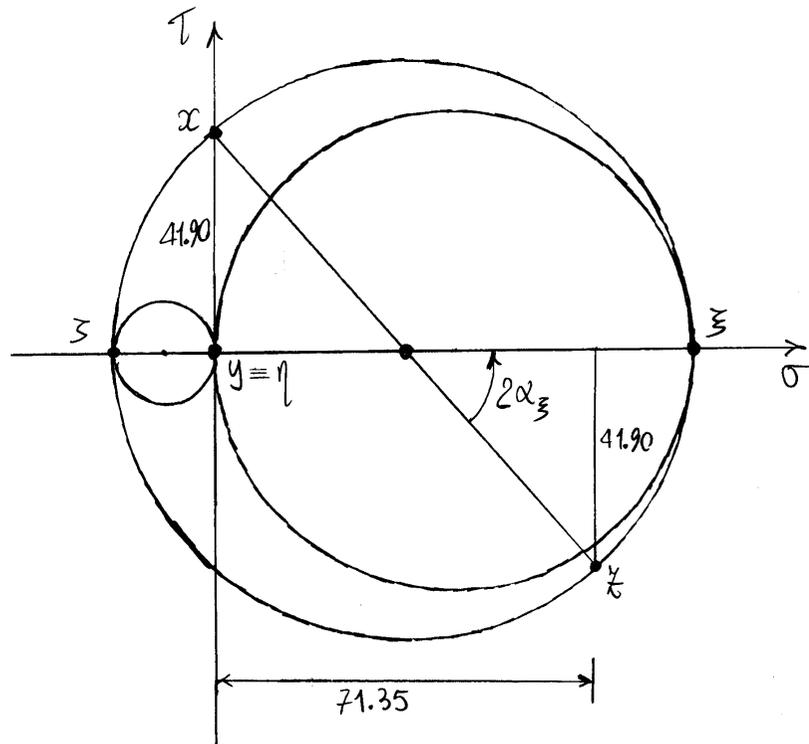
La verifica è soddisfatta

Tensore degli sforzi nel punto A

$$\begin{cases} \sigma_x = 1.47 + 69.88 = 71.35 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xz} = 41.90 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 41.90 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41.90 & 0 & 71.35 \end{bmatrix}$$

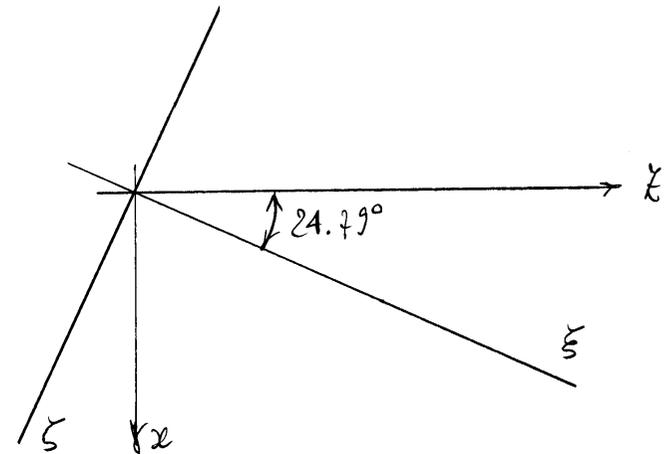
Circonferenze di Mohr



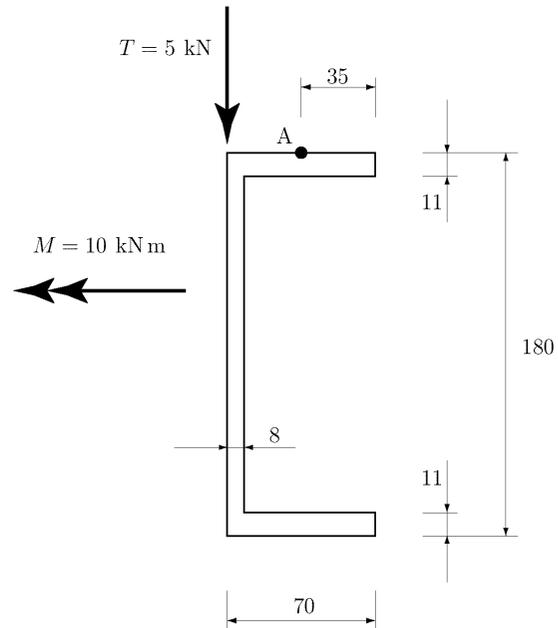
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\zeta} \end{array} \right\} = \frac{71.35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{71.35}{2}\right)^2 + (41.90)^2} = \begin{cases} 90.70 \text{ N/mm}^2 \\ -19.35 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\xi} = \frac{41.90}{71.35/2} = 1.1745 \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_{\xi} &= 0.4327 \\ &= 24.79^\circ \end{aligned}$$

L'asse ξ si ottiene ruotando l'asse x nel piano xz attorno all'asse y in senso antiorario nella pagina positiva del piano xz (oppure in senso positivo rispetto all'asse y) di un angolo di 24.79° .



6.2 Esercizi proposti



La sezione in figura, le cui misure sono riportate in mm, è soggetta ad un momento flettente di 10 kNm, di asse momento orizzontale, e ad uno sforzo di taglio verticale di 5 kN, agente secondo l'estradosso dell'anima.

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, compresi i moduli di resistenza;
- 2) Determinare la posizione del centro di taglio;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati delle tensioni normali e tangenziali;
- 3) Determinare, in corrispondenza del punto A, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi, la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr, le direzioni e componenti principali di sforzo, ed infine il valore della tensione ideale.