PUNTO MATERIALE VINCOLATO

- Punto vincolato a giacere sullo spazio $Q \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Q è detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI.

- Q è PARAMETRIZZATO da COORDINATE LIBERE $\{q_1, \dots, q_n\}$

$n = 1, 2, 3$ ← tutto $\mathbb{R}^3$; 1: curva; 2: superficie

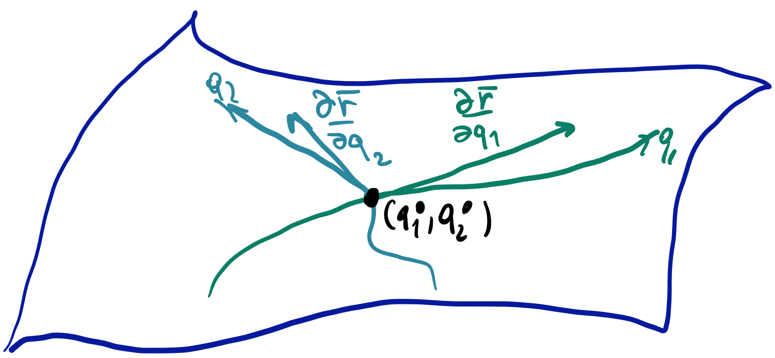
$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_n)$$

- n è detto "numero di gradi di libertà".

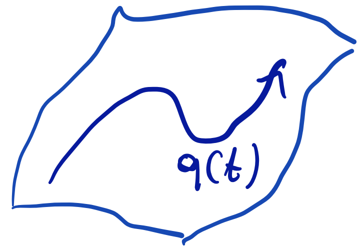
- Se vincolo varia nel tempo: $\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_n; t)$.

Es: Base dell'ascensore: $\bar{r}(q_1, q_2; t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ vt \end{pmatrix}$ v: velocità di ascesa di ascensore

- $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}(q_1^\circ, \dots, q_n^\circ), \dots, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_n}(q_1^\circ, \dots, q_n^\circ)$ sono vett. tg alle linee coordinate nel pto $(q_1^\circ, \dots, q_n^\circ)$, e formano una base per lo sp. tg $T_P Q$ con P individuato dalle coordinate $q_1^\circ, \dots, q_n^\circ$.



- Il moto è descritto da n funzioni $q_1(t), \dots, q_n(t)$ la cui immagine è una TRAIETTORIA che giace su Q.



Siccome $Q \subseteq \mathbb{R}^3$, la traiettoria è anche una curva di $\mathbb{R}^3$ parametrizz. da funz. $\bar{r}(t)$ (che è ciò che vogliamo sapere per determinare il moto del pto materiale).

Le funz. $\bar{r}(t)$ sono ottenute componendo le funz. $q_1(t), \dots, q_n(t)$ con le funz. $\bar{r}(q_1, \dots, q_n)$, ottenendo

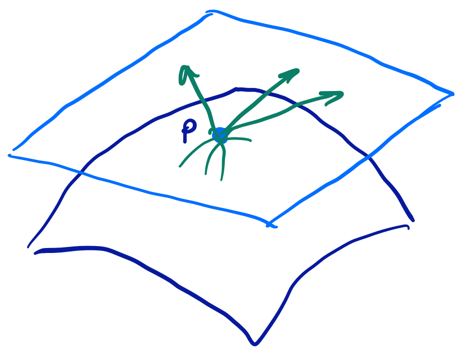
$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

$$t \xrightarrow{\quad \bar{r}(t) \quad} \mathbb{R}^3$$

$$t \xrightarrow{q_1(t), \dots, q_n(t)} Q \xrightarrow{\bar{r}(q_1, \dots, q_n)} \mathbb{R}^3$$

- La VELOCITÀ del pto materiale è un vettore $\bar{v}$ di $\mathbb{R}^3$; se il pto è vincolato su Q, tale vettore sarà TANGENTE a Q.

$\Rightarrow$ Data una qualsiasi traiettoria che passa per $P \in Q$, la velocità sarà uno dei vett. di $T_P Q$.

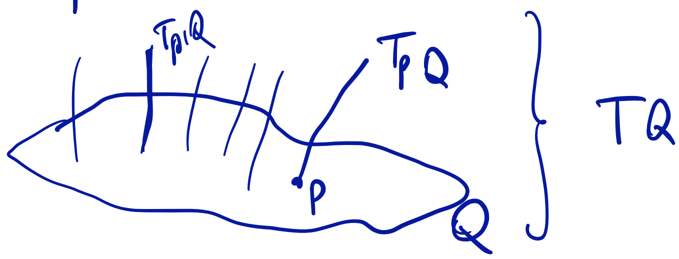


$\to$ $T_P Q = \{$ spazio delle possibili velocità che un pto vincolato a Q può avere in $P \in Q \}$

- Lo STATO di una particella è determinato dalla sua POSIZIONE e dalla sua VELOCITÀ.

- Possiamo considerare l'insieme TQ dato dall'unione di tutti i T_pQ con $P \in Q$. Esso è detto FIBRATO TANGENTE di Q.

Ha la forma a fibre: sopra ogni pto di Q ho un'intero sp. vettoriale



(Vedi libro di Arnold per una definizione)

Un pto di TQ è parametrizzato da $2n$ coord:

$$(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\substack{\text{individuano} \\ \text{pto } P \in Q}} ; \underbrace{u_1, \dots, u_n}_{\text{coeff. di } \bar{u} \in T_pQ})$$

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$$

Tali coordinate mi danno quindi una possibile POSIZIONE e una possibile VELOCITÀ della particella vincolata a Q
$\Rightarrow$ mi danno un possibile STATO della particella.

$\rightarrow$ TQ è chiamato SPAZIO DEGLI STATI.

NOTAZIONE : decidiamo di usare il simbolo $\dot{q}_k$ invece di u_k per indicare il secondo gruppo di coordinate di un pto in TQ.

[Qui "$\cdot$" è un simbolo che ci permette di distinguere tra q_h e $\dot{q}_k$.]

↳ Le coord. su TQ saranno quindi

$$(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

Dati questi $2n$ numeri dobbiamo essere in grado di dire lo STATO della particella, cioè la sua posizione $\bar{r}$ e la sua velocità $\bar{v}$ in $\mathbb{R}^3$.

- Per la POSIZIONE sappiamo come:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_n)$$

- Per la VELOCITÀ ?

Prendiamola larga; consideriamo il moto $\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_n(t))$.
La velocità al tempo t è data da

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h}(q_1(t), \dots, q_n(t))\, \dot{q}_h(t)$$

vett. base di T_PQ

qui "$\cdot$" vuol dire derivata rispetto a t

→ $\bar{v}(t)$ è un vettore di T_PQ dove P è il pto di Q toccato dal moto al tempo t.

Abbiamo quindi la funt. che a un pto in TQ associa $\bar{v}$:

$$\bar{v}(\underbrace{q_1,\dots,q_n}_{\text{coord su } Q};\underbrace{\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n}_{\text{coord su } T_pQ}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}(q_1,\dots,q_n)\,\dot{q}_k$$

- Il moto $\bar{r}(t)$ in Q determina un moto su TQ dato dalle funzioni

$$(q_1(t),\dots,q_n(t)\;;\;\dot{q}_1(t),\dots,\dot{q}_n(t))$$

Queste sono proprio le derivate di $q_k(t)$ rispetto a t e mi dicono come variano le coord. su T_pQ al variare di t (notazione è consistente).

- Se il vincolo è mobile

$$\bar{v}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(q_1(t),\dots,q_n(t),t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}(q_1(t),\dots,q_n(t),t)\,\dot{q}_k(t) + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(q_1(t),\dots,q_n(t),t)$$

Quindi lo stato della particella è dato da

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1,\dots,q_n;t)$$

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}(q_1,\dots,q_n,t)\,\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(q_1,\dots,q_n,t)$$

SISTEMI VINCOLATI DI N PTI MATERIALI

N pti materiali sono individuati da $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$

$\rightarrow$ ho bisogno di 3N coord. Cartesiane

Notazione: $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$

$w_j \quad j = 1, \dots, 3N$

$\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N} \rightarrow$ un pto di $\mathbb{R}^{3N}$ mi da una configurazione di N pti

<u>Def.</u> Si dice che un sist. di N pti $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ è soggetto a r VINCOLI OLONOMI $(0 < r < 3N)$, se l'insieme delle configurazioni accessibili soddisfa r equazioni della forma

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, r \qquad (\neq)$$

dove $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ sono funct. regolari e indip., cioè

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f^{(s)}}{\partial w_j}\right) = r \qquad \forall \text{ config. accessibile, cioè che soddisfa } (\neq)$$

"rango"

$\Updownarrow$

$\bar{\nabla} f^{(1)}, \dots, \bar{\nabla} f^{(r)}$ sono lin. indip.

$\rightarrow$ $\forall$ tempo t, resta definita una varietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ di dim. $n = 3N - r$

Q è chiamato SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI
n è detto NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ

Possiamo introdurre (almeno localm.) una parametrizzazione di Q, cioè esprimere le w_i in funzione di n parametri q_h detti COORDINATE LIBERE

(Teorema delle funz. implicite ci assicura che possiamo esplicitare r variabili in funz. delle rimanenti $3N-r$
$\longrightarrow$ es. di una parametrizzazione)

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n; t) \qquad j = 1, \dots, 3N$$

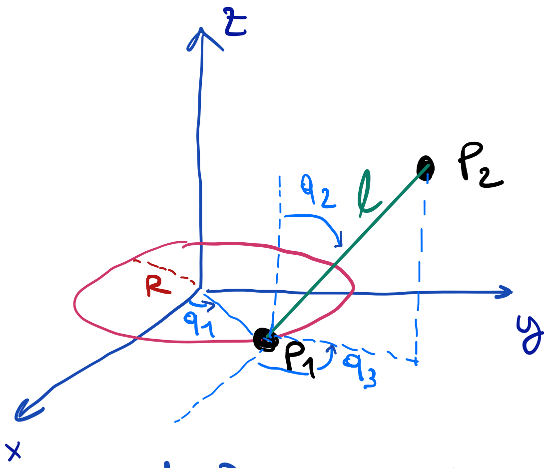
t.c.

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h}\right)_{\substack{j=1,\dots,3N \\ h=1,\dots,n}} = n \iff \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_n} \text{ sono lin. indip.}$$

vett. tg alle linee coordinate relative a $q_1, \dots, q_n$

(Ci sono infinite parametrizzaz. possibili; data una param. con $q_1, \dots, q_n$, possiamo fare una trasformaz. di coord. e passare a $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$)

ESEMPIO



Reazioni vincolari:

$$x_1^2+y_1^2-R^2=0 \qquad f^{(1)}$$

$$z_1=0 \qquad f^{(2)}$$

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-\ell^2=0 \qquad f^{(3)}$$

$$N=2 \qquad r=3 \quad \rightarrow \quad n=3N-r=3$$

$$\nabla f^{(1)}=\begin{pmatrix}2x_1\\2y_1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \nabla f^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \nabla f^{(3)}=\begin{pmatrix}2(x_1-x_2)\\2(y_1-y_2)\\2(z_1-z_2)\\2(x_2-x_1)\\2(y_2-y_1)\\2(z_2-z_1)\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ LINEARM. INDIPENDENTI

Descrizione parametrica:

$$x_1 = R\cos q_1$$
$$y_1 = R\,\mathrm{sen}\, q_1$$
$$z_1 = 0 \qquad \leftarrow \quad \bar{w}=\bar{w}(q_1,q_2,q_3)$$
$$x_3 = R\cos q_1 + \ell\,\mathrm{sen}\, q_2\cos q_3$$
$$y_3 = R\,\mathrm{sen}\, q_1 + \ell\,\mathrm{sen}\, q_2\,\mathrm{sen}\, q_3$$
$$z_3 = \ell\cos q_2$$

Base coord. di T_PQ:

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial q_1}=\begin{pmatrix}-R\,\mathrm{sen}\,q_1\\R\cos q_1\\0\\-R\,\mathrm{sen}\,q_1\\R\cos q_1\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial q_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\ell\cos q_2\cos q_3\\\ell\cos q_2\,\mathrm{sen}\,q_3\\-\ell\,\mathrm{sen}\,q_2\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial q_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\ell\,\mathrm{sen}\,q_2\,\mathrm{sen}\,q_3\\\ell\,\mathrm{sen}\,q_2\cos q_3\\0\end{pmatrix}$$

SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI VINCOLATI

Configurazioni date da

$$\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$$

$\hookrightarrow w_j \quad j = 1, \dots, 3N$

Vincoli dati da

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, r \longrightarrow$$

I gradi di libertà sono $n = 3N - r$

La forma parametrica dei vincoli è descritta da

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n ; t) \qquad j = 1, \dots, 3N \qquad (\star)$$

I parametri $q_1, \dots, q_n$ sono chiamati coordinate libere.

Le funzioni soddisfano (per una buona parametrizzazione)

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_k}\right) = n \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 3N \\ k = 1, \dots, n \end{matrix} \longleftrightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_n} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

$$\downarrow$$

$\frac{\partial \bar{w}(q_1, \dots, q_n, t)}{\partial q_l}$ $\quad l = 1, \dots, n$ formano una base per lo spazio tangente $T_p Q$ con $p \in Q$ individuato dalle coordinate $(q_1, \dots, q_n)$ al tempo t.

Un moto in Q è descritto dalle funzioni $q_h(t)$ $h = 1, \dots, n$

Il cambiamento di stato all'avanzare del tempo è dato dalle funzioni

$$(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t))$$

Le velocità delle singole particelle, lungo un moto, sono

$$\bar{v}_i(t) = \dot{\bar{r}}_i(t) = \frac{d}{dt} \bar{r}_i(q_1(t), \dots, q_m(t)) = \sum_h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h(t)$$

vincolo fisso

Cioè la funz. $\bar{v}_i(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_m)\, \dot{q}_k$ valutata sul moto.

Il vettore $\sum_h \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}(q_1, \dots, q_m)$ è un vett. 3N-dim dato dalle velocità delle N particelle $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_N \end{pmatrix}$.

→ Lo stato del sistema è dato da

$$(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N) = \left(\bar{w}(q), \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}(q)\, \dot{q}_h \right)$$

cioè lo stato è determinato da un pto $(q, \dot{q}) \in TQ$

Se il vincolo è MOBILE, allora è dato in forma parametrica da

$$\bar{w} = \bar{w}(q_1, \dots, q_m, t)$$

← funz. di m+1 variabili

Le velocità sono ora lungo un moto

$$\bar{v}_i(t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q_1(t), \dots, q_m(t), t)\, \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(q_1(t), \dots, q_m(t), t)$$

cioè è la funzione

$$\bar{v}_i(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q_1, \dots, q_m, t)\, \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(q_1, \dots, q_m, t)$$

valutata sul moto $q(t)$.

pezzo extra dovuto al moto del vincolo

Vincoli ideali (dinamico)

Vincoli sono realizzati da FORZE (reazioni vincolari)

$$m\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \qquad i=1,\dots,N$$

Il nostro scopo è ottenere n equazioni (indip. dalle reaz. vincolari)

nelle n incognite $q_h(t)$ $h=1,\dots,n$ (funzioni)

Def. Si dice che un sist. olonomo di N pti materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reaz. vincolari $\bar{\Phi}_1,\dots,\bar{\Phi}_N$ è caratterizzato dalla cond.:

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \qquad \forall\, \delta\bar{r}_i$$

← reaz. vincolari devono compiere lavoro (virtuale) nullo

Siccome $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h}\delta q_h$, la cond. diventa

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h} \right) = 0 \qquad \forall\, \delta q_h$$

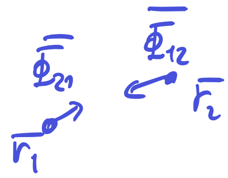
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad h=1,\dots,n \qquad (*)$$

$\longrightarrow$ n eq. indipendenti

[$a\alpha + b\beta = 0$ $\forall$ scelta di a e b $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$.]

Esempio tipico di vincoli ideali: pti vincolati a una superficie liscia → qui la condizione (*) è banalm. soddisfatta perchè $\bar{\Phi}_i \cdot \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall i$

ES.) Vincolo di rigidità: realizzato da forze interne che soddisfano la 3ª legge di Newton



$N=2 \qquad \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^2 = \text{cost.} \quad (\bullet)$

reaz. vinc.: $\bar{\Phi}_{12}\,,\ \bar{\Phi}_{21}$ t.c. $\bar{\Phi}_{12} = -\bar{\Phi}_{21}$

Deriviamo $(\bullet)$ rispetto a $\dfrac{\partial}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\Big((\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\cdot(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \Big) = 0$$

$$2(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) = 0$$

Verifichiamo che il vincolo è ideale:

$$\bar{\Phi}_{21}\cdot\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} + \bar{\Phi}_{12}\cdot\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} = \bar{\Phi}_{21}\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) \propto$$

$$\propto (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) = 0 \;//$$