

Vincoli ideali (dinamico)

Vincoli sono reattivi da FORZE (reazioni vincolari)

$$m\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \quad i=1, \dots, N$$

Il nostro scopo è ottenere n equazioni (indip. delle reatt. vincolari)

nelle n incognite $q_h(x)$ $h=1, \dots, n$ (funzioni)

Def. Si dice che un sist. olonoma di N pt. materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reatt. vincolari $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_N$ è caratterizzato dalle cond.:

$$\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \quad \forall \delta \bar{r}_i \quad \leftarrow \text{reatt. vincolari devono compiere lavoro (virtuale) nullo}$$

Si come $\delta \bar{r}_i = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$, la cond. diventa

$$\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{h=1}^m \delta q_h \left(\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) = 0 \quad \forall \delta q_h$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad h=1, \dots, m \quad (*)$$

$\rightarrow n$ eq. indipendenti.

$$\left[a\alpha + b\beta = 0 \quad \forall \text{ scelte di } a \text{ e } b \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \right]$$

ENERGIA CINETICA

Stato del sistema: $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ $\dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

Le VARIABILI DINAMICHE sono grandezze fisiche che sono funzioni dello STATO del sistema \rightarrow a livello matematico esse sono funzioni $I: \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) \mapsto I(q, \dot{q}, t)$$

Un esempio di tali grandezze è l'ENERGIA CINETICA del sistema:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \|\bar{v}_i\|^2 \quad (*)$$

La dipendenza delle velocità dallo stato del sistema è data da

$$\bar{v}_i(q, \dot{q}, t) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(q, t) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(q, t) \quad i=1, \dots, N \quad (**)$$

Se inseriamo (**) in (*) otteniamo $T(q, \dot{q}, t)$:

Prop. Dato un sist. olonoma di N pt. materiali e m pred. d'lib. e sia l'en. cinetica data da

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\bar{v}_i(q, \dot{q}, t)\|^2 \quad T: \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Allora si ha che

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad , \text{ dove}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m a_{hk}(q, t) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

$$a_{hk}(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T_1 = \sum_{h=1}^m b_h(q, t) \dot{q}_h$$

$$b_h(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} c(q, t)$$

$$c(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

dove $a = (a_{hk})$ è una matrice SIMMETRICA
e strettam. DEFINITA POSITIVA

Dim. $T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \| \bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \|^2$ $\bar{v}_i = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, t)$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{h,k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + 2 \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right]$$

$$a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad \leftarrow \text{manifestamente simmetrica, cioè } a_{kh} = a_{hk}$$

Una matrice A è strettam. def. positiva se \forall vettore $\bar{u} \neq 0$ vale
 $(A\bar{u}) \cdot \bar{u} > 0 \xrightarrow{\text{in componenti}} \sum_m \left(\sum_l a_{ml} u_l \right) u_m = \sum_{m,l} a_{ml} u_m u_l > 0$

Verifichiamolo per la nostra A :

$$\sum_{m=1}^m \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \right) u_m u_l = \sum_{i=1}^N m_i \| \bar{\mu}_i \|^2 > 0$$

def. $\bar{\mu}_i \equiv \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} u_h \quad \left(\begin{matrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_N \end{matrix} \right) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ se $\bar{u} \neq 0$.

La matrice A è detta **MATRICE CINETICA**

- Siccome A è strettamente def. positiva $\leadsto \det A > 0$
 $\Rightarrow A$ è INVERTIBILE

• Se \vec{r}_i è una funt. delle sole q_n (INDIP. da t) \vec{r}_i
 allora $T_1 = 0$ e $T_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T$ è una FORMA QUADRATICA OMOGENEA (def. 1a.)
 nelle \dot{q}_n .

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{n,k=1}^m a_{nk}(\vec{q}, t) \dot{q}_n \dot{q}_k$$

ES) Pto materiali in coord. cilindriche

$$F(\vec{q}): \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = \zeta \end{cases} \quad q_1 \ q_2 \ q_3 \leftrightarrow r \ \varphi \ \zeta$$

$$\vec{v}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}): \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} = \dot{\zeta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \left[(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \right. \\ \left. + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \dot{\zeta}^2 \right] =$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \underline{\cos^2 \varphi} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underline{\sin^2 \varphi} - 2 r \dot{r} \dot{\varphi} \cancel{\cos \varphi \sin \varphi} \right. \\ \left. + r^2 \underline{\sin^2 \varphi} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underline{\cos^2 \varphi} + 2 r \dot{r} \dot{\varphi} \cancel{\sin \varphi \cos \varphi} + \dot{\zeta}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (r \ \varphi \ \dot{\zeta}) \begin{pmatrix} m & & \\ & m r^2 & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\varphi} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}$$

ES) coordinate POLARI.

FORZE GENERALIZZATE

Prop. Sia \vec{F}_i la forza (attiva) sull' i -esimo pto materiale.
Allora il "lavoro virtuale" dato da $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$,
corrispondente agli spostam. virtuali $\delta \vec{r}_i = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$,
è espresso in termini di coord. libere come

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{h=1}^m Q_h \delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h}$$

$h=1, \dots, m$

Q_1, \dots, Q_m sono dette FORZE GENERALIZZATE

In particolare, la forza \vec{F}_i puramente potenziale
in cui $\exists \hat{V} = \hat{V}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ d.c. $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i \hat{V}$
si ha

$$Q_h(\vec{q}, t) = - \frac{\partial V(\vec{q}, t)}{\partial q_h} \quad h=1, \dots, m \quad (\#)$$

dove $V(\vec{q}, t) \equiv \hat{V}(\vec{r}_1(\vec{q}, t), \dots, \vec{r}_N(\vec{q}, t), t)$

Dim (#) : $Q_h = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i \hat{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} =$

$$\vec{\nabla}_i \hat{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_h}$$

$$= - \frac{\partial V(\vec{q}, t)}{\partial q_h} //$$