1.7 Fasci di rette e fasci di piani

Si considerino le rette di $\mathbb{A}^2$ date da

$$r: \quad ax + by + c = 0, \qquad r': \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Si osservi che, se $r \cap r' = \{P\}$, allora per ogni $\lambda, \mu \in K$ (purché non entrambi nulli) l'espressione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

è l'equazione cartesiana di una retta per P.
Infatti, tale equazione rappresenta una retta in quanto è un sistema lineare di rango 1 poiché $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \neq (0,0)$ per ogni scelta di $\lambda, \mu \in K$ non entrambi nulli. Se così non fosse, il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' &= 0 \\ \lambda b + \mu b' &= 0 \end{cases}$$

avrebbe una soluzione (λ, μ) non nulla e dunque

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

contro il Teorema 1.6.1. Tale retta, chiaramente, passa per $P = (x_0, y_0)$: infatti $P \in r$ e $P \in r'$ e quindi $ax_0 + by_0 + c = 0$ e anche $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$. Pertanto si ha l'identità $\lambda(ax_0 + by_0 + c) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c') \equiv 0$.

Definizione 1.7.1. Se P è un punto di $\mathbb{A}^2$, diciamo *fascio (proprio) di rette di sostegno (o centro) P* l'insieme di tutte e sole le rette passanti per P e verrà indicato anche con Φ_P.
Se r è una retta di $\mathbb{A}^2$, diciamo *fascio (improprio) di rette parallele a r* l'insieme di tutte e sole le rette aventi la stessa giacitura di r.

Teorema 1.7.1. *Si considerino due rette incidenti di $\mathbb{A}^2$*

$$r: \quad ax + by + c = 0, \qquad r': \quad a'x + b'y + c' = 0$$

e sia $P = r \cap r'$. Allora, per ogni $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'equazione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \tag{1.1}$$

rappresenta una retta del fascio di rette Φ_P. Viceversa, comunque scelta una retta $s \in \Phi_P$, esistono $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in K$ tali che

$$\overline{\lambda}(ax + by + c) + \overline{\mu}(a'x + b'y + c') = 0$$

è un'equazione cartesiana di s.

Dimostrazione. Abbiamo appena provato la prima affermazione. Viceversa sia $s:\ \overline{a}x+\overline{b}y+\overline{c}=0$ una retta per P. Se $s=r$ allora basta prendere $(\overline{\lambda},\overline{\mu})=(1,0)$, mentre se $s=r'$ basta prendere $(\overline{\lambda},\overline{\mu})=(0,1)$.
Sia allora $s\neq r$ e $s\neq r'$. In tal caso, si può scegliere un punto $Q=(q_1,q_2)\in s$ con $Q\neq P$; di conseguenza $Q\notin r$ e $Q\notin r'$. Quindi

$$aq_1+bq_2+c\neq 0, \qquad a'q_1+b'q_2+c'\neq 0.$$

Pertanto l'equazione in λ e μ

$$\lambda(aq_1+bq_2+c)+\mu(a'q_1+b'q_2+c')=0$$

ammette infinite soluzioni (tra l'altro tutte proporzionali). Sia $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ una di queste. Dunque

$$\overline{\lambda}(aq_1+bq_2+c)+\overline{\mu}(a'q_1+b'q_2+c')=0$$

è un'identità e dunque Q appartiene alla retta $\overline{\lambda}(ax+by+c)+\overline{\mu}(a'x+b'y+c')=0$. Ma tale retta contiene anche P, dunque è esattamente la retta s. $\square$

L'equazione (1.1) del precedente enunciato definisce il fascio di rette Φ_P. Scriveremo dunque

$$\Phi_P:\ \lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0, \quad (\lambda,\mu)\in K^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Si osservi, inoltre, che coppie (λ,μ) proporzionali individuano la stessa retta del fascio.

Definizione 1.7.2. Le rette r e r' sono dette *generatori* per il fascio Φ_P scritto nella forma (1.1).

È chiaro che ogni coppia di rette di Φ_P può essere considerata come coppia di generatori del fascio stesso.

Esempio 1.7.1. Consideriamo il punto $A=(1,3)\in\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Per trovare l'equazione del fascio di centro A è sufficiente determinare due rette del fascio. Le più semplici sono le rette di equazioni $x=1$ e $y=3$. Quindi

$$\Phi_A:\ \lambda(x-1)+\mu(y-3)=0.$$

Esempio 1.7.2. Consideriamo le rette di $A^2_{\mathbb{R}}$

$$r:\ 2x+y+1=0, \qquad r':x-y-2=0.$$

La generica retta del fascio proprio generato da r e r' ha equazione

$$(2\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+\lambda-2\mu=0, \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Il centro del fascio è il punto $r \cap r' = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)\right\}$.
Per trovare la retta del fascio passante per $(1, 0)$ si consideri una soluzione non banale dell'equazione

$$2\lambda + \mu + \lambda - 2\mu = 0.$$

Scegliamo $(\lambda, \mu) = (1, 3)$, e la retta cercata ha equazione

$$5x - 2y - 5 = 0.$$

Proposizione 1.7.2. *Data la retta $r: \; ax + by + c = 0$ di $\mathbb{A}^2$, il fascio improprio di rette parallele a r è costituito da tutte e sole le rette del tipo*

$$ax + by + k = 0, \quad k \in K. \tag{1.2}$$

<u>Dimostrazione</u>. Per definizione, una retta è parallela a r se e solo se ha la sua stessa giacitura. In questo caso quest'ultima ha equazione cartesiana $ax + by = 0$. Si ha dunque immediatamente la tesi. □

Esempio 1.7.3. Consideriamo il fascio improprio di rette di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ parallele alla retta r di equazione

$$r: \; ix + y = 0.$$

La retta del fascio passante per il punto $(1, i)$ ha equazione

$$ix + y - 2i = 0.$$

Esercizio A6. Provare che l'equazione (1.2) può anche essere vista come

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(ax + by + c') = 0, \tag{1.3}$$

determinando esplicitamente il legame tra i parametri λ, μ e k delle due equazioni.

Dal Teorema 1.7.1, dalla Proposizione 1.7.2 e dall'esercizio precedente, confrontando le equazioni (1.1) e (1.3) segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1.7.3. *Si considerino tre rette di di $\mathbb{A}^2$ di equazioni*

$$\begin{aligned} r: &\quad ax + by + c &= 0, \\ r': &\quad a'x + b'y + c' &= 0. \\ r'': &\quad a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

Esse appartengono a uno stesso fascio se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

□

La semplice dimostrazione del seguente risultato è lasciata per esercizio.

Proposizione 1.7.4. *Dato il fascio proprio di rette Φ_P, per ogni $Q \in \mathbb{A}^2$, $Q \neq P$, esiste un'unica retta $r_Q \in \Phi_P$ passante per Q.*
Analogamente, dato il fascio improprio di rette Φ_r, per ogni $Q \in \mathbb{A}^2$, esiste un'unica retta $s_Q \in \Phi_r$ passante per Q.

Possiamo procedere in modo analogo per i piani nello spazio affine.

Definizione 1.7.3. Se r è una retta di $\mathbb{A}^3$, diciamo *fascio (proprio) di piani di sostegno* r l'insieme $\mathcal{F}_r$ di tutti e soli i piani contenenti r.
Se π è un piano di $\mathbb{A}^3$, diciamo *fascio (improprio) di piani paralleli a* π l'insieme di tutti e soli i piani aventi la stessa giacitura di π.

Valgono i seguenti risultati (analoghi al Teorema 1.7.1 e alla Proposizione 1.7.2) dei quali omettiamo la dimostrazione.

Teorema 1.7.5. *Si considerino due piani incidenti di $\mathbb{A}^3$*

$$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0, \qquad \pi': \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

e sia $r = \pi \cap \pi'$. Allora, per ogni $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'equazione

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{1.4}$$

rappresenta un piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di sostegno r. Viceversa, per ogni piano $\sigma \in \mathcal{F}_r$, esistono $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in K$ tali che

$$\overline{\lambda}(ax + by + cz + d) + \overline{\mu}(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

è un'equazione cartesiana di σ.

Proposizione 1.7.6. *Dato il piano $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$ di $\mathbb{A}^3$, il fascio improprio di piani paralleli a π è costituito da tutti e soli i piani del tipo*

$$ax + by + cz + k = 0, \quad k \in K. \tag{1.5}$$

Si ha dunque immediatamente la seguente caratterizzazione.

Corollario 1.7.7. *Si considerino tre piani di di $\mathbb{A}^3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi: &\quad ax + by + cz + d &= 0, \\ \pi': &\quad a'x + b'y + c'z + d' &= 0. \\ \pi'': &\quad a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned}$$

Essi appartengono a uno stesso fascio se e solo se

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2.$$

La nozione di *generatori* di un fascio di piani è analoga a quella data per i fasci di rette.

Vale anche l'analogo della Proposizione 1.7.4, lasciato per esercizio.

Esempio 1.7.4. Consideriamo i piani di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni

$$a\colon\ x - 2y - 3z = 0, \qquad b\colon\ 2x + y + 1 = 0.$$

È facile vedere che a e b si intersecano lungo una retta e quindi generano un fascio proprio di piani. I piani del fascio hanno un'equazione del tipo

$$(\lambda + 2\mu)x - (2\lambda - \mu)y - 3\lambda z + \mu = 0, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Concludiamo con una nozione diversa da quella di fascio: in entrambi i casi dei fasci di rette e dei fasci di piani si tratta di famiglie costituite da ∞^1 sottospazi affini.

Definizione 1.7.4. Se P è un punto di $\mathbb{A}^3$, diciamo *stella di piani di sostegno* P l'insieme di tutti e soli i piani passanti per P e verrà indicata anche con Σ_P.

Si prova facilmente che, se

$$\begin{aligned} \pi\colon &\quad ax + by + cz + d &= 0,\\ \pi'\colon &\quad a'x + b'y + c'z + d' &= 0\\ \pi''\colon &\quad a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned}$$

sono tre piani passanti per un punto P e *non appartenenti a uno stesso fascio*, allora la stella di piani di sostegno P ha equazione

$$\Sigma_P\colon\ \lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')+\nu(a''x+b''y+c''z+d'') = 0$$

ed è dunque costituita da ∞^2 piani.

1.8 Applicazioni affini e affinità

Avendo introdotto la struttura geometrica di spazio affine, definiamo la corrispondente nozione di morfismo.

Definizione 1.8.1. Siano V e V' due K-spazi vettoriali e siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ due spazi affini, rispettivamente su V e V'. Diciamo che una applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è una *applicazione affine* se esiste un'applicazione K-lineare $\varphi : V \to V'$ (detta *parte lineare* di f) tale che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$, vale

$$f(Q) - f(P) = \varphi(Q - P).$$

In particolare, se f è biunivoca e φ è un isomorfismo di spazi vettoriali, diremo che f è un *isomorfismo affine*. In tal caso, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ si dicono *isomorfi* e scriveremo $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$.

Osservazione 1.8.1. Lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^n_K$ si può riguardare come un sottospazio affine di $\mathbb{A}^m_K$ per ogni $m > n$, mediante l'applicazione affine iniettiva *(inclusione canonica)*

$$j : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$$

definita come

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Nel caso reale, prendendo $n = 1$ e $m = 2$, si ottiene l'inclusione della retta affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ nel piano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ mediante $x \mapsto (x, 0)\ \forall\, x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, cioè si ottiene la retta rappresentata dall'asse x.

Esempio 1.8.1. Un sistema di equazioni parametriche per un sottospazio affine $L \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione k è equivalente a un'applicazione affine iniettiva *(immersione affine)* $f : \mathbb{A}^k \to \mathbb{A}^n$, con $f(\mathbb{A}^k) = L$ (cfr. Esempio 1.5.5).

Osservazione 1.8.2. La parte lineare φ è univocamente determinata dall'applicazione affine f. Infatti, per ogni $v \in V$ esistono $P, Q \in \mathbb{A}$ tali che $v = Q - P$ (vedi Proposizione 1.1.1). Poiché, per la definizione precedente,

$$\varphi(v) = \varphi(Q - P) = f(Q) - f(P) \in V'$$

l'immagine di v è determinata.

Proposizione 1.8.1. *Se $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \mathbb{A}''$ sono spazi affini, allora valgono:*

i) l'applicazione identica $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ (la cui parte lineare è $\varphi = id_V$) è un isomorfismo affine;

ii) se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ è un isomorfismo;

iii) se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ sono applicazioni affini, allora anche l'applicazione $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}''$ è affine. In particolare, la composizione di isomorfismi affini è anch'essa un isomorfismo.

Dimostrazione. $i)$ Ovvio.
$ii)$ Sia $\varphi : V \to V'$ la parte lineare di f. Dall'ipotesi segue immediatamente che anche f^{-1} è biunivoca e che φ^{-1} è un isomorfismo di K-spazi vettoriali. Basta quindi provare che φ^{-1} è la parte lineare di f^{-1}, cioè che, comunque scelti $P', Q' \in \mathbb{A}'$, vale

$$f^{-1}(Q') - f^{-1}(P') = \varphi^{-1}(Q' - P').$$

Consideriamo i punti $f^{-1}(Q'), f^{-1}(P') \in \mathbb{A}$. Per ipotesi f è una applicazione affine, dunque vale

$$f(f^{-1}(Q')) - f(f^{-1}(P')) = \varphi(f^{-1}(Q') - f^{-1}(P'))$$

da cui

$$Q' - P' = \varphi(f^{-1}(Q') - f^{-1}(P')).$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri, si ottiene

$$\varphi^{-1}(Q' - P') = f^{-1}(Q') - f^{-1}(P')$$

come volevamo.
$iii)$ Lasciata al lettore. □

La precedente proposizione implica che l'isomorfismo affine è una relazione di equivalenza tra gli spazi affini su un campo fissato.

Esempio 1.8.2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ una base di V. Scelto $O \in \mathbb{A}$, si consideri il riferimento affine $\Sigma = (O; e_1, \dots, e_n)$. Definiamo l'applicazione

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n_K \quad \text{data da} \quad P = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

ovvero quella che ad ogni punto associa la n-upla delle coordinate (rispetto a Σ). Si definisca anche l'applicazione lineare

$$\varphi : V \to K^n \quad \text{data da} \quad v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

ovvero quella che ad ogni vettore associa la sua n-upla di componenti (rispetto a $\mathcal{B}$).
Proviamo ora che f è un isomorfismo e che φ è la sua parte lineare.
Comunque scelti $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{A}$, dalla Definizione 1.1.5, si ha che

$$P - O = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad \text{e} \quad Q - O = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$$

e dunque (per la Definizione 1.1.1)

$$Q - P = (Q - O) - (P - O) = (y_1 - x_1)e_1 + \cdots + (y_n - x_n)e_n.$$

Pertanto, $\varphi(Q-P) = (y_1 - x_1, \dots y_n - x_n) \in K^n$. D'altro canto, $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(Q) = (y_1, \dots, y_n)$. In conclusione

$$f(Q)-f(P) = (y_1, \dots, y_n)-(x_1, \dots, x_n) = (y_1-x_1, \dots y_n-x_n) = \varphi(Q-P)$$

e questo significa che f è una applicazione affine e φ è la sua parte lineare. Si prova facilmente che f è biunivoca; inoltre φ è ovviamente un isomorfismo di spazi vettoriali. Dunque f è un isomorfismo affine (non canonico, in quanto dipende dalla scelta del riferimento Σ).

Osservazione 1.8.3. Dall'esempio precedente segue che ogni spazio affine di dimensione n su K è isomorfo (non canonicamente) ad $\mathbb{A}^n_K$.

Definizione 1.8.2. Un isomorfismo affine di uno spazio affine $\mathbb{A}$ in sé si dice *affinità* di $\mathbb{A}$.

È chiaro che se f è una affinità di $\mathbb{A}$, spazio affine su V, allora la parte lineare di f è un automorfismo φ di V, cioè $\varphi \in GL(V)$.

Il seguente risultato mostra che un'affinità è individuata dalla sua parte lineare e dall'immagine di un punto fissato.

Teorema 1.8.2 (Determinazione di un'affinità)**.** *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e siano dati due punti $O, O' \in \mathbb{A}$ e $\varphi \in GL(V)$. Allora esiste un'unica affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(O) = O'$ e φ sia la parte lineare di f.*

Dimostrazione. Si definisca, per ogni $P \in \mathbb{A}$,

$$f(P) := O' + \varphi(P-O).$$

Di conseguenza si ha $f(O) = O' + \varphi(O-O) = O' + \varphi(0_V) = O' + 0_V = O'$. Resta dunque solo da provare che φ è la parte lineare di f, cioè che, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$, si ha $f(Q) - f(P) = \varphi(Q-P)$.
A tale scopo calcoliamo

$$f(Q) - f(P) = (f(Q) - O') - (f(P) - O') = \varphi(Q-O) - \varphi(P-O),$$

dove la prima uguaglianza segue dalla Relazione di Chasles (vedi Definizione 1.1.1) e la seconda dalla definizione di f. Essendo φ una applicazione lineare si ha inoltre che

$$\varphi(Q-O) - \varphi(P-O) = \varphi[(Q-O) - (P-O)] = \varphi(Q-P),$$

dove la seconda uguaglianza segue ancora dalla Relazione di Chasles. Questo prova l'esistenza della f richiesta.
Per provarne l'unicità, supponiamo che esista un'affinità g tale che $g(O) = O'$ e che abbia φ come parte lineare.
Dunque deve essere $g(P) = g(O) + \varphi(P-O) = O' + \varphi(P-O)$, per ogni $P \in \mathbb{A}$. Pertanto $g(P) = f(P)$ per ogni $P \in \mathbb{A}$, cioè f e g coincidono. $\square$

1.9 Gruppi di trasformazioni affini

Dalla Proposizione 1.8.1 segue facimente il seguente fatto fondamentale.

Teorema 1.9.1. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine. Allora l'insieme*

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) := \{\textit{affinità di } \mathbb{A}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Definizione 1.9.1. I sottogruppi di $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ si dicono *gruppi di trasformazioni affini.*

Vediamo ora alcuni gruppi di trasformazioni affini e come un'affinità qualunque si può fattorizzare come composizione di due affinità più semplici.

Teorema 1.9.2. *Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V allora le traslazioni di $\mathbb{A}$ sono tutte e sole le affinità aventi come parte lineare id_V.*

Dimostrazione. Si consideri la traslazione lungo v, dove $v \in V$ (vedi Definizione 1.1.4), cioè

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := P + v.$$

Calcoliamo (la seconda uguaglianza:)

$$t_v(Q) - t_v(P) = (Q + v) - (P + v) = Q - P = id_V(Q - P).$$

Pertanto t_v è una applicazione affine di parte lineare $\varphi = id_V$. Abbiamo visto in precedenza che t_v è biunivoca e quindi, essendo φ un isomorfismo di spazi vettoriali, è un isomorfismo affine. Quindi t_v è un'affinità.
Viceversa, se $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ è un'affinità e la sua parte lineare è id_V, allora per definizione, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$:

$$f(Q) - f(P) = Q - P.$$

Pertanto, posto

$$v := f(Q) - Q = f(P) - P$$

si ha $f = t_v$, come volevamo. $\square$

È chiaro dal Teorema precedente e dall'Esercizio A1 che l'insieme di tutte le traslazioni di uno spazio affine $\mathbb{A}$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque un gruppo di trasformazioni affini, detto *sottogruppo delle traslazioni* e denotato con $T(\mathbb{A})$.

Esercizio A7. Provare, se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine sullo spazio vettoriale V, allora i gruppi $T(\mathbb{A})$ e $(V, +)$ sono isomorfi.

Se si fissa un punto $O \in \mathbb{A}$, si verifica facilmente che l'insieme delle affinità che lo fissano

$$\mathrm{Aff}_O(\mathbb{A}) := \{f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \mid f(O) = O\}$$

è un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque è un altro gruppo di trasformazioni affini.

Si osservi poi che ogni $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A})$ è individuata solo dalla sua parte lineare φ per il Teorema 1.8.2. Si vede anche direttamente: infatti, nota φ, per ogni $P \in \mathbb{A}$ è determinata

$$f(P) = O + \varphi(P - O).$$

La facile dimostrazione del seguente risultato è lasciata al lettore.

Lemma 1.9.3. *L'applicazione*

$$\Phi_O : \ \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un isomorfismo di gruppi (le operazioni sono entrambe la composizione di applicazioni).

Più in generale, possiamo definire l'analoga applicazione riguardo ad una qualunque affinità; in altri termini, estendiamo Φ_O a tutto $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$.

Teorema 1.9.4. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V. Allora l'applicazione*

$$\Phi : \ \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un omomorfismo di gruppi. Inoltre $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$*, che è dunque un sottogruppo normale di* $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$*.*

Dimostrazione. Bisogna provare che, comunque scelte $f, g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, poste $\varphi = \Phi(f)$ e $\psi = \Phi(g)$ le rispettive parti lineari allora si ha

$$\Phi(f \circ g) = \varphi \circ \psi.$$

Per la Definizione 1.8.1, questo equivale a provare che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ si verifica

$$(f \circ g)(Q) - (f \circ g)(P) = (\varphi \circ \psi)(Q - P).$$

Poiché f ha come parte lineare φ e g ha come parte lineare ψ, si ottengono le uguaglianze

$$f(g(Q)) - f(g(P)) = \varphi(g(Q) - g(P)) = \varphi(\psi(Q - P)),$$

come si voleva. Inoltre $\ker(\Phi)$ è costituito da tutte e sole le affinità con parte lineare identica e tale insieme è esattamente $T(\mathbb{A})$ per il Teorema 1.9.2. $\square$

Ricordiamo la seguente nozione di Algebra Lineare.

Definizione 1.9.2. Se V è un K-spazio vettoriale e $c \in K$, si dice *omotetia di rapporto c* l'applicazione lineare

$$\omega_c : V \to V \quad \text{definita da} \quad \omega_c(v) = cv, \ \forall v \in V.$$

Chiaramente ω_c è un isomorfismo di K-spazi vettoriali se e solo se $c \neq 0$ (altrimenti è l'omomorfismo nullo) e la sua matrice associata (su qualunque base) è $c\mathbb{I}_n$, ove $n = \dim(V)$.

Esercizio A8. Provare che l'insieme $\{\omega_c \mid c \neq 0\}$ è un sottogruppo di $GL(V)$ e inoltre è isomorfo al gruppo moltiplicativo $(K^*, \cdot)$.

La nozione di omotetia può essere riletta nell'ambito della Geometria Affine attraverso l'isomorfismo Φ_O come segue.

Definizione 1.9.3. Con le notazioni precedenti, se $c \in K^*$ e $O \in \mathbb{A}$, diciamo *omotetia di rapporto c e centro O* l'affinità

$$\omega_{c,O} := \Phi_O^{-1}(\omega_c)$$

cioè

$$\omega_{c,O} : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \omega_{c,O}(P) = O + c(P - O).$$

In particolare, se $c = -1$, l'affinità $\omega_{-1,O}$ si dice *simmetria di centro O* e si denota anche con σ_O.

Teorema 1.9.5 (Fattorizzazione di un'affinità)**.** *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora per ogni $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$*

i) esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = g \circ t_v$;

ii) esistono e sono unici $w \in V$ e $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = t_w \circ h$.

Dimostrazione. i) Definiamo il vettore $v := O - f^{-1}(O)$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_v. Questa è biunivoca e ha per inversa $t_v^{-1} = t_{-v}$. Poiché $\text{Aff}(\mathbb{A})$ è un gruppo, la composizione di affinità è ancora un'affinità; pertanto definiamo l'affinità

$$g := f \circ t_v^{-1}.$$

Resta solo da provare che $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $g(O) = O$. Dalla definizione

$$g(O) = f(t_v^{-1}(O)) = f(t_{-v}(O)) = f(O - v) = f(f^{-1}(O)) = O,$$

come volevamo.
ii) Definiamo il vettore $w := f(O) - O$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_w. Come prima, possiamo definire l'affinità

$$h := t_w^{-1} \circ f.$$

Resta solo da provare che $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $h(O) = O$. Dalla definizione

$$h(O) = t_w^{-1}(f(O)) = t_w^{-1}(O + w) = t_w^{-1}(t_w(O)) = O,$$

come volevamo. □