Geometria 2

Anno accademico 2023-2024

Foglio di esercizi n.3

20 marzo 2024

1) Trovare una equazione in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ del fascio di rette di centro $(-4, 2+i)$.

2) Sia $r \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la retta passante per il punto $A = (1, -2, 0)$ e con vettore direzionale $v = e_1 + 3e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare l'equazione del fascio proprio di piani di sostegno r. Determinare inoltre il piano del fascio che passa per il punto $(1, 1, 1)$.

3) Provare che i tre piani di di $\mathbb{A}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned} \pi: \quad & x + y - z + 2 &= 0, \\ \pi': \quad & 2x + 3y + z - 1 &= 0. \\ \pi'': \quad & 4x + 5y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

appartengono a uno stesso fascio di piani e determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica della retta r, sostegno di tale fascio.

4) Sia $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine tra due spazi affini sul campo $\mathbb{K}$. Siano $L \subset \mathbb{A}$ e $L' \subset \mathbb{A}'$ sottospazi affini. Dimostrare che $f(L) \subset \mathbb{A}'$ e $f^{-1}(L') \subset \mathbb{A}$ sono sottospazi affini e che valgono le disuguaglianze $\dim L \geq \dim f(L)$ e $\dim L' \leq \dim f^{-1}(L')$.

5) Ricordiamo il Teorema 1.9.4:
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V. Allora l'applicazione

$$\Phi: \ \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa a un'affinità la parte lineare è un omomorf. di gruppi e $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$.

Utilizzando tale risultato, provare (come accennato a lezione) il Lemma 1.9.3, cioè che l'applicazione

$$\Phi_O: \ \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

è un isomorfismo di gruppi (per dimostrare questo, si provi che Φ_O è un omomorfismo di gruppi, è iniettivo, è suriettivo...).

6) Siano $Q_1, \ldots, Q_m$ punti di uno spazio affine reale $\mathbb{A}$. Si scelga un punto $O \in \mathbb{A}$. Si consideri il punto

$$B := O + \frac{1}{m}((Q_1 - O) + \cdots + (Q_m - O)).$$

(a) Dimostrare che B non dipende dalla scelta di O, e quindi è associato univocamente ai punti $Q_1, \ldots, Q_m$ (B si chiama *baricentro* dei punti $Q_1, \ldots, Q_m$).

(b) Si dimostri che le affinità preservano il baricentro, cioè che ogni $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ manda il baricentro di $Q_1, \ldots, Q_m$ nel baricentro di $f(Q_1), \ldots, f(Q_m)$.

(c) Infine si dimostri che nello spazio affine numerico reale $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, il baricentro si può esprimere con la formula

$$B = \frac{1}{m}(Q_1 + \cdots + Q_m).$$