Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Fisica

a.a. 2023/2024

1 Massimo limite, minimo limite

Il teorema di Bolzano-Weierstrass ci dice che ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente.

Attenzione: NON è vero che ogni successione limitata ha limite.

Si può dimostrare che

$$\boxed{\text{ogni successione di numeri reali ha una sottosuccessione che ha limite (in } \overline{\mathbb{R}}\text{).}}$$

Infatti, se la successione non è limitata superiormente, ha una sottosuccessione che ha limite $+\infty$, se non è limitata inferiormente, ha una sottosuccessione che ha limite $-\infty$, se invece è limitata, la conclusione è data dal teorema di Bolzano-Weierstrass.

Definizione. Diciamo che $\ell \in \overline{R}$ è un **punto limite** di una successione se questa ha una sottosuccessione che ha limite ℓ.
Una successione può avere diversi punti limite, però ha limite se e solo se ha un unico punto limite.
Si può dimostrare che per ogni successione $(a_n)_n$ esistono (in $\overline{\mathbb{R}}$) il minimo e il massimo punto limite, che vengono indicati con

$$\min \lim_n a_n \qquad \max \lim_n a_n \,.$$

Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali definiamo le seguenti successioni (in $\overline{\mathbb{R}}$):

$$a'_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \qquad a''_n = \sup\{a_k : k \geq n\} \,.$$

Esercizio. Dimostrare che a'_n è crescente (debolmente) e a''_n è decrescente (debolmente).

Essendo monotone, le due successioni a'_n e a''_n hanno limite e questi limiti vengono indicati con

$$\liminf_n a_n = \lim_n a'_n = \lim_n (\inf_{k \geq n} a_k)$$
$$\limsup_n a_n = \lim_n a''_n = \lim_n (\sup_{k \geq n} a_k) \,.$$

Si può dimostrare che

$$\liminf_n a_n = \min \lim_n a_n \qquad \limsup_n a_n = \max \lim_n a_n \,.$$

Esercizio. Se $a_n > 0$, allora

$$\max\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \to 0\,,$$
$$\min\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \to +\infty\,.$$

Se invece $L = \max\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ allora il comportamento della successione non è determinato da questo limite: sappiamo che esiste una sottosuccessione a_{n_k} che ha limite 1, però se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ possiamo costruire esempi in cui la successione a_n ha diversi comportamenti: non ha limite, ha limite 0, ha limite $+\infty$, o ha come limite un qualsiasi numero positivo.

Esercizio. Scrivere il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto usando $\limsup_n$ invece di $\lim_n$.

2 Serie di potenze

Possiamo introdurle in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$, iniziamo subito con il caso complesso. Diciamo che una serie a termini complessi $\sum_n a_n$ converge assolutamente se converge la serie a termini reali positivi $\sum_n |a_n|$. Come nel caso di serie a termini reali si può dimostrare che la convergenza assoluta di una serie implica la sua convergenza.

Dati una successione $(\alpha_n)_n$ in $\mathbb{C}$ e un $z_0 \in \mathbb{C}$, la serie

$$\boxed{\sum_n \alpha_n (z-z_0)^n = \alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \alpha_2(z-z_0)^2 + \alpha_3(z-z_0)^3 + \dots}$$

viene chiamata serie di potenze di centro z_0 e coefficienti α_n. Osserviamo che la sostituzione $w = z - z_0$ ci porta a serie di potenze centrate nell'origine.

2.1 Raggio di convergenza.

Ci proponiamo di determinare per quali valori del parametro z la serie converge. Per i valori del parametro per i quali la serie converge, vorremmo trovare la somma della serie, ossia il limite della successione delle somme parziali.
Osserviamo che c'è sempre almeno un valore per il quale una serie di potenze converge: $z = z_0$. In questo caso la somma è uguale ad α_0. Vale il seguente risultato.

Teorema 1 (di Cauchy-Hadamard sul raggio di convergenza) *Data la serie di potenze*

$$\sum_n \alpha_n (z-z_0)^n,$$

poniamo

$$L = \limsup_n \sqrt[n]{|\alpha_n|}\,.$$

Allora

1. *se $L = +\infty$ la serie converge solo per $z = z_0$;*
2. *se $L = 0$ la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$;*
3. *se $0 < L < +\infty$ la serie converge per ogni numero complesso z tale che $|z - z_0| < \dfrac{1}{L}$.*

Dimostrazione. 1. $L = +\infty$. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$. Dalla definizione di $\limsup$ segue che per infiniti indici n vale

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} \geq \frac{1}{|z-z_0|}\,,$$

ossia

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|\,|z-z_0|^n} \geq 1\,,$$

quindi $\alpha_n(z-z_0)^n$ non può avere limite zero. Di conseguenza la condizione necessaria per la convergenza della serie non è verificata, dunque la serie data non converge per alcun $z \in \mathbb{C}$ diverso da z_0.

2. $L = 0$. In questo caso, essendo $|\alpha_n| \geq 0$ per ogni n, $L = \lim_n \sqrt[n]{|\alpha_n|}$. Per qualsiasi $z \in \mathbb{C}$ si ha $\lim_n \sqrt[n]{|\alpha_n|\,|z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_n \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0 < 1$, quindi per il criterio della radice n-esima la serie $\sum_n |\alpha_n|\,|z-z_0|^n$ converge e la serie di potenze $\sum_n \alpha_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente, dunque converge.

3. $0 < L < +\infty$. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z-z_0| < \dfrac{1}{L}$. Procediamo in maniera simile ai due casi precedenti. Osserviamo che si ha $\limsup_n \sqrt[n]{|\alpha_n|\,|z-z_0|^n} = |z-z_0| \limsup_n \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0 < 1$. Per la formulazione generale del criterio della radice la serie $\sum_n |\alpha_n|\,|z-z_0|^n$ converge e la serie di potenze $\sum_n \alpha_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente, dunque converge e la dimostrazione del teorema è così conclusa.

Osserviamo che se $0 < L < +\infty$ e $z \in \mathbb{C}$ è tale che $|z-z_0| > \dfrac{1}{L}$ allora la serie

$$\sum_n \alpha_n(z-z_0)^n,$$

non converge (non è sodisfatta la condizione necessaria). Il numero reale R definito da

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{se } L \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{se } L = +\infty \end{cases}$$

viene chiamato raggio di convergenza della serie. All'interno della circonferenza di raggio R la serie di potenze converge (assolutamente), mentre all'esterno non converge. Per i numeri $z \in \mathbb{C}$ con $|z-z_0| = R$ la convergenza deve essere studiata diversamente. Se $L = 0$, siccome la serie converge per tutti $z \in \mathbb{C}$, si usa dire che il raggio di convergenza è uguale a $+\infty$.

2.2 Serie di Taylor.

Consideriamo solo il caso reale. Sia f una funzione derivabile infinite volte. Si dice **serie di Taylor** della funzione f con centro in $x_0 = 0$, la serie di potenze che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di f.

$$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

quindi $\alpha_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Sotto opportune ipotesi, per i valori del parametro x per i quali la serie converge, cioè quelli all'interno dell'intervallo di convergenza, ed eventuali estremi, **la somma della serie di Taylor di f è uguale a** $f(x)$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x) \quad \text{per ogni } x \text{ per cui la serie converge.}}$$

Alcuni sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \underset{\binom{\alpha}{1}}{\alpha} x + \underset{\binom{\alpha}{2}}{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}} x^2 + \underset{\binom{\alpha}{3}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}} x^3 + \underset{\binom{\alpha}{4}}{\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}} x^4 + \dots$$

Se α fosse un numero naturale, nella formula sopra si avrebbe il binomio di Newton. La formula vale per $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare, per $\alpha = -1$ si ha:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots .$$

Esempi.
1. Consideriamo la serie

$$1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \dots$$

È il caso particolare $x = 3$ della serie di potenze

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_n \frac{1}{n!} x^n ,$$

quindi $\alpha_n = \frac{1}{n!}$.
(i) Per quali x converge? Proviamo ad usare il risultato visto prima:
$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}} \to 0 = L$, quindi $R = +\infty$ cioè la serie $\sum_n \frac{1}{n!} x^n$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare converge per $x = 3$.
(Si poteva anche dimostrare direttamente la convergenza con il criterio del rapporto: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$ quindi la serie converge per ogni x.)
(ii) A cosa converge? Per capirlo basta osservare che la serie di potenze è la serie di Taylor della funzione esponenziale e^x. Quindi per i valori di x per cui converge, in questo caso per tutti gli x, la serie converge a e^x, in particolare,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = e^3 .$$

2. Consideriamo la serie

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

quindi la serie di potenze con $\alpha_n = \frac{1}{n}$.
(i) Per quali x converge? $\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{n} \to 1 = L$, quindi $R = 1$. La serie dunque converge per $-1 < x < 1$ mentre non converge per $x > 1$ e $x < -1$.
Vediamo cosa succede per $x = 1$: si ritrova la serie armonica, che diverge, e
per $x = -1$: in questo caso la serie converge per il criterio di Leibniz.
(ii) A cosa converge? Per capirlo dobbiamo confrontarla con una serie di Taylor. Guardando la tabellina degli sviluppi di Taylor, osserviamo l'assomiglianza con lo sviluppo della funzione $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$.
Se nello sviluppo sopra sostituiamo x con $-x$ otteniamo:
$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$, quindi la serie di partenza è la serie di Taylor di $-\log(1-x)$ ossia di $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
Quindi per gli x per cui converge, cioè per $-1 \le x < 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \log(\frac{1}{1-x}).$$

3. Consideriamo la serie

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Essa converge per il criterio di Leibniz (è una serie di termini a segni alterni e la successione $\frac{1}{2n+1}$ è decrescente a zero). Però il criterio di Leibniz non ci da informazioni sulla somma della serie.
Osserviamo che la serie data è il caso particolare $x = 1$ della serie di potenze

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

che è lo sviluppo di $f(x) = \arctan x$. Quindi se converge per un certo x, la sua somma è $\arctan x$, e per $x = 1$ la somma è $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
Calcoliamo dunque il raggio di convergenza della serie

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Si ha $\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$ Quindi $\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$ non ha limite e il teorema sul calcolo del raggio di convergenza si applica nella formulazione più generale con $L = \limsup_n \sqrt[n]{|\alpha_n|}$.
Soluzione alternativa. Riscrivere la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^n}{2n+1} =_{[x^2=y]} x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza della nuova serie in y: $\beta_n = (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, $\lim_n \sqrt[n]{|\beta_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} = 1$, quindi la serie converge per $-1 < y < 1$, e la serie di partenza converge per $x^2 < 1$, ossia per $-1 < x < 1$. Per $x = 1$ abbiamo già verificato la convergenza con il criterio di Leibniz, per $x = -1$ otteniamo $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots = -\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$ quindi converge.

2.3 La funzione esponenziale.

La serie di potenze

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_n \frac{1}{n!} x^n,$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la somma della serie definisce una funzione della variabile reale x. Uno dei modi in cui si può definire la funzione esponenziale è precisamente come somma di questa serie. Il procedimento quindi è il seguente:

- osservare che la serie converge e converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$, usando il criterio del rapporto o il criterio della radice per $\displaystyle\sum_n \frac{|x|^n}{n!}$
- sia $S(x)$ la somma della serie: $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- dimostrare che $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa le proprietà dell'esponenziale:
  - $S(0) = 1$, $S(1) = e$
  - $S(x)S(y) = S(x + y)$
  - $S(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  - regolarità: S è una funzione continua, derivabile infinite volte, ...

La prima uguaglianza, $S(0) = 1$, si verifica subito. La seconda segue dalla definizione del numero e.
Per la seconda proprietà dobbiamo definire una buona nozione di prodotto di serie.
La positività è una conseguenza immediata delle prime due proprietà: sia $x > 0$; allora $S(x)$, essendo la somma di una serie a termini positivi, deve essere un numero positivo. Siccome $S(x)S(-x) = S(0) = 1 > 0$ anche $S(-x) > 0$.
La regolarità della funzione così definita seguirà da risultati generali che verranno studiati nella prossima sezione.
Vediamo quindi il **prodotto alla Cauchy** o **prodotto di Cauchy** di due serie.[1]
Date due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ si definisce il loro prodotto di Cauchy come la serie

$$\sum_n \underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big)}_{c_n}.$$

Vale il seguente risultato

Teorema 2 (di Cauchy) *Se $\sum_n a_n$ converge assolutamente e ha somma A e $\sum_n b_n$ converge assolutamente e ha somma B allora la loro serie prodotto di Cauchy converge assolutamente e ha somma AB.*

Valgono anche le seguenti generalizzazioni:

Teorema 3 (di Mertens) *Se $\sum_n a_n$ converge e ha somma A e $\sum_n b_n$ converge e ha somma B e almeno una delle due converge assolutamente, allora la loro serie prodotto di Cauchy converge e ha somma AB.*

Teorema 4 (di Hardy) *Se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergono e le successioni $(na_n)_n$ e $(nb_n)_n$ sono limitate, allora la serie prodotto di Cauchy $\sum_n c_n$ converge.*

Teorema 5 *Se le tre serie $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ convergono allora $C = AB$, dove $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ e $C = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.*

[1] non fatto a lezione

Verifichiamo ora la seconda proprietà dell'esponenziale: $S(x)S(y) = S(x+y)$:

il termine generale della serie prodotto di Cauchy ha la forma: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ dove per $h, m \in \mathbb{N}$ si ha $a_h = \frac{x^h}{h!}$ e $b_m = \frac{y^m}{m!}$. Sostituendo si trova:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!}\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \cdots + \frac{x^n}{1!}1$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Le serie di potenze sono lo strumento che permetterà di estendere la funzione esponenziale al campo dei numeri complessi, a certi spazi di matrici, ecc. Possono essere usate anche per risolvere diversi tipi di equazioni differenziali.

3 Convergenza uniforme e passaggio al limite sotto il segno d'integrale e di derivata

Ricordiamo la definizione di convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni. Sia $C([a,b];\mathbb{R}) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ è continua in } [a,b]\}$. Per $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ poniamo $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ e osserviamo che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $C([a,b];\mathbb{R})$. La distanza associata a questa norma è data da $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

Definizione 1 *Diciamo che una successione $(f_n)_n$ converge a f uniformemente in $[a,b]$ se $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. In altri termini, $f_n \to f$ uniformemente se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} \ : \big(n \geq \overline{n} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]\big)\,.$$

Diciamo che una successione $(f_n)_n$ converge a f puntualmente in $[a,b]$ se per tutti $x \in [a,b]$ si ha $f_n(x) \to f(x)$, ossia se

$$\forall x \in [a,b] \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} \ : \big(n \geq \overline{n} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big)\,.$$

Si osservi che nel caso della convergenza uniforme l'indice $\overline{n}$ non dipende da $x \in [a,b]$, mentre nel caso della convergenza puntuale $\overline{n}$ può dipendere dal punto x considerato. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale mentre il viceversa non è vero, come si può vedere dal seguente esempio.

Esempio. La successione di funzioni continue in $[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{se } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

converge puntualmente a 0 ma non uniformemente visto che

$$d(f_n, 0) = \max\{f_n(x) : 0 \leq x \leq 1\} = 1\,.$$

Vediamo ora come si comportano le operazioni di integrazione e derivazione rispetto alla convergenza puntuale e uniforme. Siano dunque $f_n, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Consideriamo i seguenti quesiti:

Se $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ è vero che

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt \ ?$$

Nel caso in cui f_n e f siano anche derivabili con continuità è vero che $f_n' \to f'$ (almeno) puntualmente?
La risposta è negativa, come si vede dai seguenti esempi.
Esempio. La successione di funzioni continue in $[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 4n(1-nx) & \text{se } \dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

converge puntualmente a $f = 0$ ma non uniformemente visto che

$$d(f_n, 0) = \max\{f_n(x) : 0 \le x \le 1\} = n\,.$$

Gli integrali non convergono:

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx\,.$$

Esempio. La successione $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ di funzioni in $C^1([0,1];\mathbb{R})$ converge uniformemente alla funzione f identicamente nulla ma la successione delle derivate $f_n'(x) = \cos(nx)$ non converge alla derivata $f'(x) = 0$ in alcun punto.

Se la convergenza di f_n a f è uniforme allora la risposta alla prima domanda diventa affermativa, mentre la risposta alla seconda continua ad essere negativa.

Data $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ e fissato $x_0 \in [a,b]$ definiamo la funzione integrale $I(f)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$I(f)(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt\,.$$

Osserviamo che se $f_n \to f$ uniformemente allora $I(f_n) \to I(f)$ uniformemente. Infatti, si ha

$$\|I(f_n) - I(f)\|_\infty = \max\left\{\left|\int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t))dt\right| : x \in [a,b]\right\} \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty\,.$$

(In altre parole $I\colon C([a,b];\mathbb{R}) \to C([a,b];\mathbb{R})$ è lipschitziana di constante di Lipschitz $b-a$.)

In particolare,

$$I(f_n)(a) \to I(f)(a) \quad \text{e} \quad I(f_n)(b) \to I(f)(b)\,,$$

quindi

$$\int_a^b f_n(t)dt = I(f_n)(a) + I(f_n)(b) \to I(f)(a) + I(f)(b) = \int_a^b f(t)dt\,.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente risultato.

Teorema 6 (passaggio al limite sotto il segno d'integrale) *Sia data una successione $(f_n)_n$ di funzioni continue in $[a,b]$ a valori reali, uniformemente convergente a una funzione f. Allora*

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt\,,$$

cioè

$$\boxed{\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt\,.}$$

Per avere la convergenza delle derivate bisogna imporre delle condizioni più restrittive. Vale il seguente risultato.

Teorema 7 (passaggio al limite sotto il segno di derivata) *Sia data una successione* $(f_n)_n$ *di funzioni in* $C^1([a,b];\mathbb{R})$ *tale che*

- *la successione* $(f'_n)_n$ *delle derivate converge uniformemente a una funzione* g
- *la successione* $(f_n)_n$ *converge almeno in un punto* $x_0 \in [a,b]$.

Allora la successione $(f_n)_n$ *converge uniformemente a una funzione* $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ *e* $f'(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$*, per cui*

$$f'_n \to f' \text{ uniformemente.}$$

Si ha quindi

$$\boxed{\lim_n \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_n f_n(x)\,.}$$

Dimostrazione. Sia $y_0 = \lim_n f_n(x_0)$. Essendo limite uniforme di una successione di funzioni continue, la funzione g è continua. Possiamo applicare il risultato precedente alla successione $(f'_n)_n$ ottenendo

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt \to y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\,,$$

con $y_0 = \lim_n f_n(x_0)$ e la convergenza è uniforme. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Allora $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$, $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ e $f_n \to f$ uniformemente.

4 Convergenza uniforme delle serie di potenze, derivazione e integrazione termine a termine

Vogliamo applicare i risultati sul passaggio al limite sotto il segno di integrale e sotto il segno di derivata alle serie di potenze. In questo caso la successione $(S_n)_n$ delle somme parziali è costituita da polinomi, quindi da funzioni derivabili (infinite volte). Vogliamo stabilire se anche la somma di una serie di potenze è derivabile (in caso affermativo anch'essa risulterà derivabile infinite volte) e se la derivata delle somma della serie data è uguale alla somma della serie delle derivate.

Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $R > 0$. La serie delle derivate è data da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n (x-x_0)^{n-1}$ e definendo i coefficienti β_n come $\beta_n = (n+1)\alpha_{n+1}$, questa serie si scrive come $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x-x_0)^n$. Osserviamo che

$$\limsup_n \sqrt[n]{|\beta_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{(n+1)|\alpha_{n+1}|} = \limsup_n (\sqrt[n+1]{|\alpha_{n+1}|})^{(n+1)/n} = \limsup_n \sqrt[n+1]{|\alpha_{n+1}|}\,,$$

quindi la serie data e la serie delle sue derivate hanno lo stesso raggio di convergenza $R > 0$. Per applicare i risultati sul passaggio al limite sotto il segno di integrale e sotto il segno di derivata abbiamo bisogno di convergenza uniforme. Vale il seguente risultato.

Teorema 8 (convergenza uniforme di una serie di potenze) *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-x_0)^n$ *una serie di potenze di raggio di convergenza* $R > 0$*. Allora per ogni* $r < R$ *la serie converge uniformemente in* $[x_0 - r, x_0 + r]$*.*

Dimostrazione. Sia $r < R$. Dobbiamo far vedere che

$$\max\{|S(x) - S_n(x)| : x \in [x_0 - r, x_0 + r]\} \to 0 \,.$$

Osserviamo che per ogni $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ si ha

$$|S(x) - S_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| \, |x - x_0|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| r^k \,,$$

quindi

$$\max\{|S(x) - S_n(x)| : x \in [x_0 - r, x_0 + r]\} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| r^k \,.$$

Siccome la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| r^n$ converge (per il criterio della radice n-esima), otteniamo che $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| r^k$ converge a zero quando n tende a $+\infty$. Di conseguenza la serie di potenze data converge uniformemente in $[x_0 - r, x_0 + r]$.

A questo punto possiamo applicare alla successione delle somme parziali i risultati menzionati. Si ottiene che la somma di una serie di potenze è una funzione derivabile; la sua derivata è la somma della serie ottenuta derivando termine a termine la serie data. Analogamente per quanto riguarda l'integrazione termine a termine.

Esempio. Si ha

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Sostituendo x con x^2 si ottiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando termine a termine e usando il teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale otteniamo:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \,.$$

Non è facile verificare la convergenza uniforme di una serie di funzioni. Pertanto si introduce una nozione di convergenza più forte:

Definizione 2 *Data la successione* $(f_n)_n$ *di funzioni definite per esempio su un intervallo* I *a valori reali, diciamo che la serie* $\sum_n f_n$ *converge totalmente se converge la serie numerica* $\sum_n \|f_n\|_\infty$*, dove* $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(t)| : t \in I\}$*.*

Nello studio degli integrali si è visto che esistono delle funzioni elementari le cui primitive non possono essere espresse in termini di funzioni elementari. Certe funzioni di questo tipo compaiono ad esempio in elettronica, in ottica o nel calcolo delle probabilità; esse vengono definite come funzioni integrali, senza che sia possibile esprimerle in termini di funzioni note. Gli sviluppi in serie di potenze ci consentono di calcolarle con una buona precisione. Alcune funzioni di questo tipo sono

- la funzione seno integrale di x, $\mathrm{Si}(x)$ definita da

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\,,$$

- la funzione degli errori, $\mathrm{Erf}(x)$, definita da

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt\,,$$

- la funzione integrale di Fresnel, $S(x)$, definita da

$$S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi t^2}{2}) dt\,.$$

Esercizio
Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+3}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4} e^{nx}\,.$