Esercizio 1 : Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali, la continuità delle derivate parziali e la differenziabilità per le funzioni seguenti:

1) $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-2xy^2}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Determinare inoltre (se esiste) la derivata direzionale di f_1 nella direzione della bisettrice del primo e terzo quadrante. Vale la formula del gradiente?

2) $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3) $f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4) $f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Determinare inoltre (se esistono) le derivate direzionali di f_4 nella direzione della retta $y = \sqrt[3]{3}x$ e della retta $y = -\sqrt[3]{3}x$;

5) $f_5(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{x} & x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Esercizio 2 : Si consideri la funzione $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}y^3$. Si stabilisca se f è differenziabile nel punto $P = (1,0)$. In caso di risposta affermativa, si determini l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, f(1,0))$.

Esercizio 3 : Calcolare la derivata della funzione $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ nel punto $P = (3,4)$ nella direzione del gradiente di f.