

## FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

Esercizi svolti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente:

(a)  $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$

(b)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$

(d)  $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

(e)  $f(x, y) = \log(xy^2 + x^2y)$

2. Determinare le curve di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = 2x - 5y$

(b)  $f(x, y) = x^2y$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

(d)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

3. Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2 + y^2)$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$

(e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin xy}{x^2 + y^2}$

4. Calcolare il gradiente  $\nabla f$  delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy - xy^2$

(b)  $f(x, y) = ye^{2x^2}$

(c)  $f(x, y) = y^2e^{-x}$

(d)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

(e)  $f(x, y) = e^{x/y}$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(a)  $f(x, y) = xy e^{\sqrt{|x+y|}}$  in  $(0, 0)$

(b)  $f(x, y) = |x + y| \frac{\sin(x^2 + y)}{\sqrt{|y - x^2|}}$  in  $(0, 0)$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$  in  $(0, 0)$

(d)  $f(x, y) = (x - y)\sqrt{|y - x^2|}$  in  $(1, 1)$

6. Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni, verificando la validità del teorema di Schwarz:

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{7x + 4y - 2}}$

(b)  $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$

$$(c) f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$$

7. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

$$(a) f(x, y) = x^2 + xy - 2 \text{ in } P(1, 0) \text{ nella direzione } \vec{v} = (2, 1)$$

$$(b) f(x, y) = e^x \cos y \text{ in } P(0, 0) \text{ nella direzione del vettore } \vec{v} = (1, 2)$$

$$(c) f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|} \text{ in } P(0, 0) \text{ nella direzione del vettore } \vec{v} = (1, 1)$$

8. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x, y) = x^3 - y^3 \text{ nel punto } (0, 1, -1)$$

$$(b) f(x, y) = x^y + y^x \text{ nel punto } (1, 1, 2)$$

$$(c) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ nel punto } (2, 0, 2)$$

9. Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine centrato nell'origine delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x, y) = \sin x \sin y$$

$$(b) f(x, y) = xe^{xy}$$

$$(c) f(x, y) = x^2 \sin(y^2)$$

10. Data la funzione  $f(x, y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$ , si verifichi che non è differenziabile in  $(1, 0)$  e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore  $v$  non nullo.

11. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y$$

$$(b) f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$$

$$(c) f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$$

$$(d) f(x, y) = x \cos y$$

$$(e) f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

$$(f) f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$(g) f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$$

$$(h) f(x, y, z) = z^2 - 18x^2 + 6xy - 4y^2 z$$

12. Calcolare il gradiente  $\nabla f$  e il laplaciano  $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)f$  delle seguenti funzioni (campi scalari) di 3 variabili:

$$(a) f(x, y, z) = xy^2 + yz^3 - z^2$$

$$(b) f(x, y, z) = y \sin z + x \sin y$$

$$(c) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

13. Calcolare la divergenza  $\nabla \cdot F$  e il rotore  $\nabla \wedge F$  dei seguenti campi vettoriali:

$$(a) F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

$$(b) F(x, y, z) = (x^2 + yz, xyz, x + zy^2)$$

$$(c) F(x, y, z) = (x \cos z, y \sin x, z \cos y).$$

**FUNZIONI DI PIU' VARIABILI**  
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente:

(a)  $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2) : D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

Essendo  $\log x$  definita per  $x > 0$  si ha che  $f(x, y)$  risulta definita per  $1 - x^2 - y^2 > 0$ , da cui il risultato.

(b)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) : D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Essendo  $\log x$  definita per  $x > 0$  si ha che  $f(x, y)$  risulta definita per  $x^2 + y^2 > 0$ , cosa verificata per tutti i punti di  $\mathbb{R}^2$  esclusa l'origine degli assi.

(c)  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4} : D = \{(x, y) : y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\}$

Essendo  $\sqrt{x}$  definita per  $x \geq 0$  si ha che  $f(x, y)$  risulta definita per  $y^2 - x^4 \geq 0 \leftrightarrow y^2 \geq x^4 \leftrightarrow y \geq x^2$  oppure  $y \leq -x^2$ .

(d)  $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} : D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}\}$

Essendo la funzione  $\sqrt{x}$  definita per  $x \geq 0$  si ha che la funzione  $f(x, y)$  risulta definita per  $(x, y)$  tali che  $\sin(x^2 + y^2) \geq 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ , per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ .

(e)  $f(x, y) = \log(xy^2 + x^2y) : D = \{(x, y) : (x > 0, y > 0) \vee (x < 0, 0 < y < -x) \vee (x > 0, y < -x)\}$

Essendo  $\log x$  definita per  $x > 0$  si ha che  $f(x, y)$  risulta definita per  $xy^2 + x^2y > 0 \leftrightarrow xy(y+x) > 0$ . Studiando il segno delle funzioni  $xy$  e  $x+y$  separatamente e utilizzando la regola dei segni si ottiene il risultato.

2. Determinare le curve di livello e l'immagine delle seguenti funzioni. Ricordiamo che l'immagine di una funzione  $f(x, y)$  si può definire come l'insieme dei valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che l'equazione  $f(x, y) = k$  ha soluzioni, cioè tali che la "curva di livello  $k$ " è non vuota.

(a)  $f(x, y) = 2x - 5y :$

Ponendo  $f(x, y) = k$  si ottiene  $2x - 5y = k \leftrightarrow 2x - k = 5y \leftrightarrow y = \frac{2x - k}{5}$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .  $Im(f) = \mathbb{R}$ .

(b)  $f(x, y) = x^2y$

Ponendo  $f(x, y) = k$  si ottiene  $x^2y = k \leftrightarrow y = \frac{k}{x^2}$ , se  $k \neq 0$  e  $xy = 0$  (insieme dei punti degli assi) se  $k = 0$ .  $Im(f) = \mathbb{R}$ .

(c)  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

Il dominio della funzione  $f(x, y)$  è  $D = \{(x, y) : x \neq 0, y > -1\} \cup \{(x, y) : x = 0, y \neq -1\}$ . Ponendo  $f(x, y) = k$  e  $k > 0$  si ottiene :

$$\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k \leftrightarrow \frac{x^2}{y+1} = k^2 \leftrightarrow x^2 = k^2(y+1) \leftrightarrow y = \frac{x^2}{k^2} - 1.$$

Le curve di livello per  $k > 0$  risultano quindi essere  $\{(x, y) : y = \frac{x^2}{k^2} - 1, x \neq 0\}$ . Si ottiene invece  $\emptyset$  per  $k < 0$  e  $\{(x, y) \in D : x = 0\}$  per  $k = 0$ .  $Im(f) = [0, +\infty)$ .

(d)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Ponendo  $f(x, y) = k$  si ottiene  $\frac{1}{x^2 + y^2} = k \leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$ , per  $k > 0$ , e  $\emptyset$  per  $k \leq 0$ .  $Im(f) = (0, +\infty)$ .

3. Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari  $(r, \theta)$  si ottiene :  $\left| \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2} \right| = |r \cos \theta \sin^2 \theta| \leq r \rightarrow 0$ .

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2 + y^2) = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari  $(r, \theta)$  si ottiene :  $|r \cos \theta r \sin \theta \log(r^2)| \leq r^2 |\log(r^2)| \rightarrow 0$ .

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$  non esiste

Pongo  $y = mx$  e calcolo il limite lungo le rette passanti per  $(0, 0)$ .

$$\frac{x^3 - 2x(mx) + (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{x^3 - 2mx^2 + m^2x^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{x - 2m + m^2}{(1 + m^2)} \rightarrow \frac{-2m + m^2}{(1 + m^2)} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Siccome il risultato varia al variare della direzione il limite non può esistere.

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$  non esiste

Eseguendo il limite lungo le rette  $y = mx$  si ottiene 0. Quindi il limite di  $f(x, y)$  è 0 oppure non esiste. Lungo la retta  $x = 0$  il limite risulta però essere 1. Il limite quindi non esiste.

(e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari  $(r, \theta)$  si ottiene :

$$\left| \frac{r \cos \theta \sin(r \cos \theta r \sin \theta)}{r^2} \right| \leq \frac{|\sin(r^2 \cos \theta \sin \theta)|}{r} \leq \frac{r^2 |\cos \theta \sin \theta|}{r} \leq r \rightarrow 0.$$

4. Calcolare il gradiente  $\nabla f$  delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy - xy^2$  :  $\nabla f(x, y) = (2x + 2y - y^2, 2x - 2xy)$

(b)  $f(x, y) = ye^{2x^2}$  :  $\nabla f(x, y) = (4xye^{2x^2}, e^{2x^2})$

(c)  $f(x, y) = y^2e^{-x}$  :  $\nabla f(x, y) = (-y^2e^{-x}, 2ye^{-x})$

(d)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  :  $\nabla f(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$

(e)  $f(x, y) = e^{x/y}$  :  $\nabla f(x, y) = \left( \frac{e^{x/y}}{y}, -\frac{xe^{x/y}}{y^2} \right)$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(a)  $f(x, y) = xy e^{\sqrt{|x+y|}}$  in  $(0, 0)$  :

Essendo  $f(x, y)$  nulla lungo gli assi il gradiente esiste ed è  $(0, 0)$ .

(b)  $f(x, y) = |x + y| \sin(x^2 + y)$  in  $(0, 0)$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin(h^2)}{h} = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin(h)}{h} = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

da cui segue  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

(c)  $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$  in  $(0, 0)$  :

Essendo  $f(x, y)$  nulla lungo l'asse  $y$  si ha immediatamente che  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{h^2}}{h} \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1,$$

da cui segue che  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  non esiste, e di conseguenza non esiste  $\nabla f(0, 0)$ .

(d)  $f(x, y) = (x - y)\sqrt{|y - x^2|}$  in  $(1, 1)$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h-1)\sqrt{|1-(1+h)^2|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{|h||2+h|}}{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 1+h) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h-1)\sqrt{|1+h-1|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h\sqrt{|h|}}{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0,$$

da cui segue  $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$ .

6. Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni, verificando la validità del teorema di Schwarz:

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{7}{2}(7x+4y-2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2(7x+4y-2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{147}{4}(7x+4y-2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12(7x+4y-2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 21(7x+4y-2)^{-5/2}$$

(b)  $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2y}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

(c)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{2y\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\sqrt{1-x}}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-1}{4y}(1-x)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$$

7. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

(a)  $f(x, y) = x^2 + xy - 2$  in  $P(1, 0)$  nella direzione  $\vec{v} = (2, 1)$

Per definizione  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+2t, t) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+2t)^2 + (1+2t)t - 2 + 1}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t^2 + 5t}{t} = 5$

Siccome  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(1, 0)$  si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in  $(1, 0)$  e il vettore  $\vec{v}$  :

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x) \text{ e quindi } \nabla f(1, 0) = (2, 1), \text{ da cui segue } \frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (2, 1) = 5$$

(b)  $f(x, y) = e^x \cos y$  in  $P(0, 0)$  nella direzione del vettore  $\vec{v} = (1, 2)$

Per definizione  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 2t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t \cos(2t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (e^t \cos(2t) - 2e^t \sin(2t)) = 1$

Siccome  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(0, 0)$  si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in  $(0, 0)$  e il vettore  $\vec{v}$  :

$\nabla f(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$  e quindi  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ , da cui segue :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (1, 2) = 1$$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$  in  $P(0, 0)$  nella direzione del vettore  $\vec{v} = (1, 1)$

Come visto nel punto (c) esercizio 5 la funzione  $f(x, y)$  non ammette gradiente. Non rimane quindi che utilizzare la definizione :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t^2 - t^2|}}{t} = 0$$

8. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = x^3 - y^3$  nel punto  $(0, 1, -1)$  :

$f(0, 1) = -1$ ,  $\nabla f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$  e quindi  $\nabla f(0, 1) = (0, -3)$ . Il piano tangente al grafico della funzione nel punto  $(0, 1, -1)$  è quindi :  $z = f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \cdot (x, y - 1) = 2 - 3y$ .

(b)  $f(x, y) = x^y + y^x$  nel punto  $(1, 1, 2)$  :

$f(1, 1) = 2$ ,  $\nabla f(x, y) = (yx^{y-1} + y^x \log y, xy^{x-1} + x^y \log x)$  e quindi  $\nabla f(1, 1) = (1, 1)$ . Il piano tangente al grafico della funzione nel punto  $(1, 1, 2)$  è quindi :  $z = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = x + y$ .

(c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  nel punto  $(2, 0, 2)$  :

$f(2, 0) = 2$ ,  $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$  e quindi  $\nabla f(2, 0) = (1, 0)$ . Il piano tangente al grafico della funzione nel punto  $(2, 0, 2)$  è quindi :  $z = f(2, 0) + \nabla f(2, 0) \cdot (x - 2, y) = x$ .

9. Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine centrato nell'origine delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = \sin x \sin y$  :

$\nabla f(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$  e quindi  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

Le derivate di ordine due sono :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sin x \sin y \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \cos x \cos y \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$$

Otengo quindi lo sviluppo :  $f(x, y) = xy + o(x^2 + y^2)$ .

(b)  $f(x, y) = xe^{xy}$  :

$\nabla f(x, y) = (e^{xy} + xy e^{xy}, x^2 e^{xy})$  e quindi  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ .

Le derivate di ordine due sono :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y e^{xy} + xy^2 e^{xy} \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^3 e^{xy} \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} \quad \text{da cui segue} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$$

Otengo quindi lo sviluppo :  $f(x, y) = x + o(x^2 + y^2)$ .

(c)  $f(x, y) = x^2 \sin(y^2)$  :

$\nabla f(x, y) = (2x \sin y^2, 2yx^2 \cos y^2)$  e quindi  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

Le derivate di ordine due sono :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \sin y^2$  da cui segue  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4y^2 x^2 \sin y^2 + 2x^2 \cos y^2$  da cui segue  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy \cos y^2$  da cui segue  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$

Ottengo quindi lo sviluppo :  $f(x, y) = o(x^2 + y^2)$ .

10. Data la funzione  $f(x, y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$ , si verifichi che non è differenziabile in  $(1, 0)$  e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore  $v$  non nullo.

Pongo  $\vec{v} = (a, b)$ . Per definizione si ha che :  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+at, bt) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt[3]{(at)^2 bt} - 1}{t} =$   
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt[3]{a^2 b}}{t} = \sqrt[3]{a^2 b}$ , da cui segue  $\nabla f(1, 0) = (0, 0)$ . Non essendo verificata la formula  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{v}$ , concludo quindi che  $f(x, y)$  non è differenziabile in  $(1, 0)$ .

11. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y$  :

Calcolo il gradiente di  $f(x, y)$  :  $\nabla f(x, y) = (2x + 2xy, x^2 - 2)$ . Ponendo  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  si ottengono i due punti stazionari  $(\sqrt{2}, -1)$  e  $(-\sqrt{2}, -1)$ . Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservo che  $H(\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$  e  $H(-\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$  sono entrambe indefinite.

I due punti stazionari sono quindi due punti di sella.

(b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$  :

Calcolo il gradiente di  $f(x, y)$  :  $\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$ . Ponendo  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  si ottengono i due punti stazionari  $(0, 0)$  e  $(-1/3, -1/3)$ . Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ , e osservo che  $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ( matrice indefinita ) e  $H(-1/3, -1/3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  ( matrice definita negativa ). Il punto  $(0, 0)$  risulta quindi essere una sella e il punto  $(-1/3, -1/3)$  un massimo relativo.

(c)  $f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$  :

Essendo la funzione logaritmo una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione  $g(x, y) = 1 + x^2 y^2$ . Calcolo il gradiente di  $g(x, y)$  :  $\nabla g(x, y) = (2xy^2, 2yx^2)$ . Ponendo  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  si ottiene che tutti i punti dei due assi coordinati sono punti stazionari. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Purtroppo la matrice Hessiana risulta nulla su  $(0, 0)$  e solo semidefinita sugli altri punti dei due assi. In ogni caso quindi non posso concludere nulla sulla natura dei punti stazionari. Posso però concludere con la seguente argomentazione :  $x^2 y^2 \geq 0 \rightarrow 1 + x^2 y^2 \geq 1 \rightarrow f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2) \geq 0$ . Essendo  $f(x, y)$  nulla sugli assi, tutti i punti stazionari risultano essere punti di minimo assoluto e quindi di minimo relativo.

(d)  $f(x, y) = x \cos y$  :

Calcolo il gradiente di  $f(x, y)$  :  $\nabla f(x, y) = (\cos y, -x \sin y)$ . Ponendo  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  si ottengono gli infiniti punti stazionari  $P_k = (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , per  $k \in \mathbb{Z}$ . Per determinare la natura dei punti stazionari  $P_k$  calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x \cos y \end{pmatrix},$$

e osservo che  $H(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ , matrice indefinita. Gli infiniti punti stazionari  $P_k$  sono quindi tutti punti di sella.

(e)  $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$  :

Essendo la funzione radice una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione  $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ . Calcolo il gradiente di  $g(x, y)$  :  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ . Ponendo  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  si ottiene l'unico punto stazionario  $(0, 0)$ . Per determinare la natura del punto stazionario calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

matrice definita positiva. Il punto  $(0, 0)$  risulta quindi essere punto di minimo locale per la funzione  $g(x, y)$ , e di conseguenza anche per la funzione  $f(x, y)$ . Si osservi che  $(0, 0)$  è anche punto di minimo assoluto per  $g(x, y)$  e quindi per  $f(x, y)$ , essendo  $g(0, 0) = 1$  e  $g(x, y) \geq 1$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(f)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  :

Essendo la funzione  $e^{-x}$  una funzione strettamente decrescente su  $\mathbb{R}$  posso ridurmi a studiare la funzione  $g(x, y) = x^2 + y^2$ . In modo perfettamente analogo all'esercizio precedente ottengo che la funzione  $g(x, y)$  ha il solo punto stazionario  $(0, 0)$ , che risulta essere punto di minimo locale e assoluto. Posso quindi concludere che la funzione  $f(x, y)$  ha il solo punto stazionario  $(0, 0)$ , che risulta essere punto di massimo locale e assoluto.

(g)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$  :

Calcolo il gradiente di  $f(x, y)$  :  $\nabla f(x, y) = (\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2})$ . Si ha quindi che  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  non è mai verificata sul dominio  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Non esistono quindi punti stazionari.

(h)  $f(x, y, z) = z^2 - 18x^2 + 6xy - 4y^2z$  :

Il gradiente di  $f(x, y, z)$  è  $\nabla f(x, y, z) = (6y - 36x, 6x - 8yz, 2z - 4y^2)$ . Ponendo  $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$  si ottengono i tre punti critici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1/24, 1/4, 1/8)$  e  $(-1/24, -1/4, 1/8)$ . Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} -36 & 6 & 0 \\ 6 & -8z & -8y \\ 0 & -8y & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$H(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -36 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico  $(2 - \lambda)(\lambda^2 + 36\lambda - 36)$  e autovalori  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 > 0$ . Dunque  $H(0, 0, 0)$  è una matrice indefinita e  $(0, 0, 0)$  è un punto di sella. La matrice

$$H(1/24, 1/4, 1/8) = \begin{pmatrix} -36 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico  $-\lambda^3 - 35\lambda^2 + 78\lambda + 144$ ; per la regola dei segni di Cartesio ci sono 2 autovalori negativi e uno positivo, dunque  $H(1/24, 1/4, 1/8)$  è una matrice indefinita; un discorso analogo vale per la matrice

$$H(-1/24, -1/4, 1/8) = \begin{pmatrix} -36 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha lo stesso polinomio caratteristico quindi è anch'essa indefinita. Concludiamo che anche i due punti critici  $(1/24, 1/4, 1/8)$  e  $(-1/24, -1/4, 1/8)$  sono punti di sella.

12. Calcolare  $\nabla f$  e  $\Delta f$  (Laplaciano di  $f$ ) delle seguenti funzioni (campi scalari):

$$(a) f(x, y, z) = xy^2 + yz^3 - z^2 : \quad \nabla f(x, y, z) = (y^2, 2xy + z^3, 3yz^2 - 2z) \quad \Delta f(x, y, z) = 2x + 6yz - 2$$

$$(b) f(x, y, z) = y \sin z + x \sin y : \quad \nabla f(x, y, z) = (\sin y, \sin z + x \cos y, y \cos z) \quad \Delta f(x, y, z) = -x \sin y - y \sin z$$

$$(c) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : \quad \nabla f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) \quad \Delta f(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

13. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali:

$$(a) F(x, y, z) = (xy, yz, zx) :$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (-y, -z, -x)$$

$$(b) F(x, y, z) = (x^2 + yz, xyz, x + zy^2) :$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 2x + xz + y^2$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = (2yz - yx, y - 1, yz - z)$$

$$(c) F(x, y, z) = (x \cos z, y \sin x, z \cos y) :$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \cos z + \sin x + \cos y$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = (-z \sin y, -x \sin z, y \cos x)$$