4. Massimi e minimi per funzioni reali di più variabili reali

`http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/SCAM/SCAM-tr04.pdf`

1. Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto interno a D. Diremo che P_0 è un punto di minimo (risp. di massimo) relativo se esiste iun intorno $B_r(P_0)$ tale che la restrizione di f all'intersezione $B_r(P_0) \cap D$ abbia un minimo (risp. un massimo) in P_0.

Evidentemente, se f ha un minimo relativo in P_0, le funzioni $x \mapsto f(x, y_0)$ e $y \mapsto f(x_0, y)$ hanno un minimo relativo in x_0 e y_0 relativamente, ma non vale necessariamente il viceversa, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 4.1. Si consideri la funzione $f(x, y) := x^2 + y^2 - 4xy$. Le restrizioni agli assi coordinati si scrivono $f(x, 0) = x^2$, $f(0, y) = y^2$, dunque entrambe presentano un punto di minimo nell'origine. Tuttavia la funzione assume valori negativi in un qualsivoglia intorno dell'origine stessa, come si riconosce esaminando, ad esempio, la restrizione alla retta $y = x$: $f(x, x) = -2x^2$. L'origine è un *punto di sella* per la funzione f.

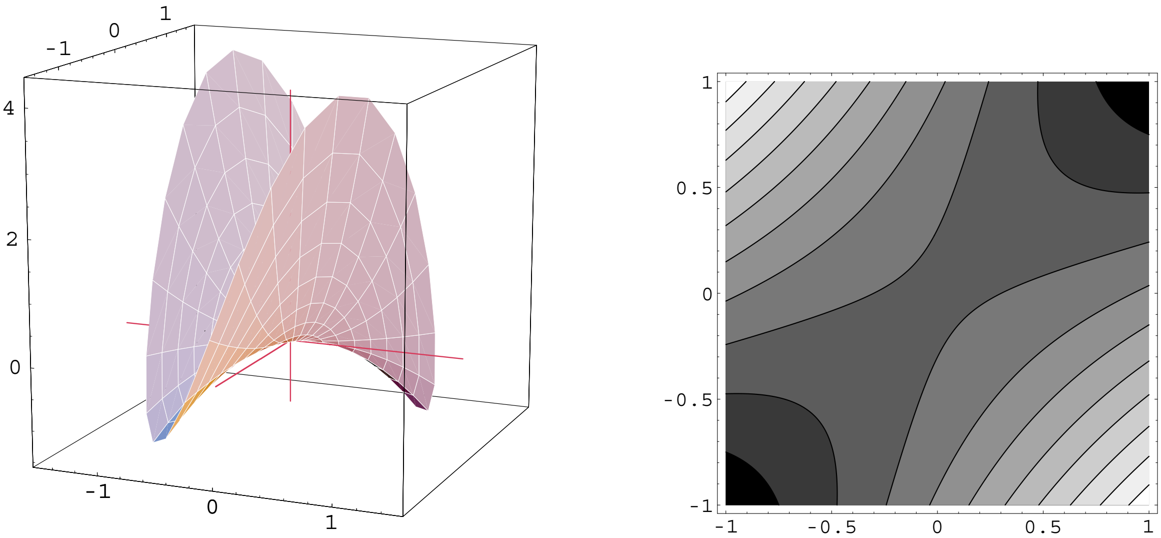

Figura 4.1. Grafico cartesiano della funzine dell'esempio 4.1 (a sinistra), curve di livello della stessa funzione (a destra).

Per le funzioni di una variabile è opportuno ricordare il polinomio di Taylor T_2. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione due volte derivabile nell'intervallo I, e $x_0 \in I$, allora il polinomio in questione si scrive

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

e risulta

$$f(x) = T_2(x) + o[(x - x_0)^2], \quad x \to x_0.$$

Un punto di massimo o di minimo relativo (si parla anche di punto *estremante*) interno ad I è necessariamente un *punto critico* (= *punto di stazionarietà*), cioè si ha $f'(x_0) = 0$. La formula di Taylor si scrive dunque

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o[(x - x_0)^2], \quad x \to x_0.$$

In altri termini, il grafico di f in prossimità di x_0 è approssimato "bene" da una parabola col vertice nel punto $(x_0, f(x_0))$ e la concavità rivolta verso l'alto se $f''(x_0) > 0$ (dunque siamo in presenza di un punto di minimo relativo), verso il basso se $f''(x_0) < 0$ (in tal caso avremo un punto di massimo relativo).

Considerazioni analoghe si possono fare per le funzioni di due o più variabili; il polinomio di Taylor T_2 di una tale funzione sarà di secondo grado rispetto al complesso delle variabili indipendenti. Diamo dunque uno sguardo preliminare ai polinomi in due o più variabili.

2. Utilizziamo una notazione uniforme del tipo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ per indicare un elemento di $\mathbb{R}^2$; tale notazione si presta meglio per l'estensione al caso di tre o più variabili. Un polinomio di secondo grado nelle componenti di $\boldsymbol{x}$, ordinato secondo le potenze crescenti, si può scrivere

$$p_2(\boldsymbol{x}) = p_2(x_1, x_2) = a + b_1x_1 + b_2x_2 + c_{11}\, x_1^2 + c_{12}\, x_1x_2 + c_{21}\, x_2x_1 + c_{22}\, x_2^2.$$

Evidentemente $c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 = (c_{12} + c_{21})\, x_2x_1$ e ciò che conta è la somma dei due coefficienti; possiamo dunque supporli uguali: $c_{12} = c_{21}$.

La notazione che abbiamo introdotto ha qualche vantaggio: possiamo scrivere

$$p_2(\boldsymbol{x}) = a + \sum_{h=1}^{2} b_h x_h + \sum_{h,k=1}^{2} c_{hk} x_h x_k,$$

formula che si estende in modo ovvio al caso $n > 2$.

Possiamo usare notazioni matriciali. Consideriamo il vettore $\boldsymbol{b} := (b_1, b_2)$ e la matrice simmetrica

$$\boldsymbol{C} := \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Allora $\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{x} = b_1x_1 + b_2x_2$ e ancora

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

quindi la somma dei termini di secondo grado del polinomio p_2 si scrive $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}$. In definitiva

$$p_2(\boldsymbol{x}) = a + \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}.$$

Si calcolano senza difficoltà le derivate parziali di ordine ≤ 2 del polinomio p_2; a noi interessano i valori nell'origine: si trova

$$p_2(\boldsymbol{0}) = a, \quad D_h\, p_2(\boldsymbol{0}) = b_h,\ h = 1, 2, \qquad D_{hk}\, p_2(\boldsymbol{0}) = 2c_{hk},\ h, k = 1, 2. \tag{$*$}$$

Abbiamo scritto, per brevità, D_h in luogo di D_{x_h}, D_{hk} in luogo di $D_{x_hx_k}$. Si osservi che $\boldsymbol{b} = \nabla p_2(\boldsymbol{0})$.

In vista del seguito, ci interessa studiare il segno della funzione che si ottiene scegliendo soltanto i termini di secondo grado del polinomio p_2, cioè la funzione

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} = \sum_{h,k=1}^{2} c_{hk}\, x_h x_k.$$

Si tratta di una *forma quadratica*, cioè di un polinomio *omogeneo* di secondo grado, dove l'aggettivo omogeneo significa che tutti i monomi che lo compongono hanno lo stesso grado.

Osservazione. Se il vettore $\boldsymbol{x}$ viene considerato come colonna, cioè come matrice $n \times 1$, allora la forma quadratica in esame si può anche scrivere $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$. Si tratta del prodotto tra tre matrici, didimensioni nell'ordine $1 \times n$, $n \times n$,$n \times 1$, dunque una matrice 1×1, vale a dire uno scalare.

Definizione 4.1. La forma quadratica $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}$ (e la matrice $\boldsymbol{C}$ che la individua) si dice

- *definita positiva* se $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} > 0$,
- *semidefinita positiva* se $\forall \boldsymbol{x} : \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} \geq 0$,
- *definita negativa* se $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} < 0$,
- *semidefinita negativa* se $\forall \boldsymbol{x} : \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} \leq 0$,
- *indefinita* se essa assume tanto valori > 0, quanto valori < 0.

Una forma quadratica definita positiva è chiaramente $\boldsymbol{x} \mapsto x_1^2 + x_2^2$; basta cambiare segno a quest'ultima per avere una forma definita negativa. La funzione dell'esempio precedente è una forma indefinita, che corrisponde alla matrice

$$\boldsymbol{C} := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lo stesso vale per la forma $\boldsymbol{x} \mapsto x_1^2 - x_2^2$.

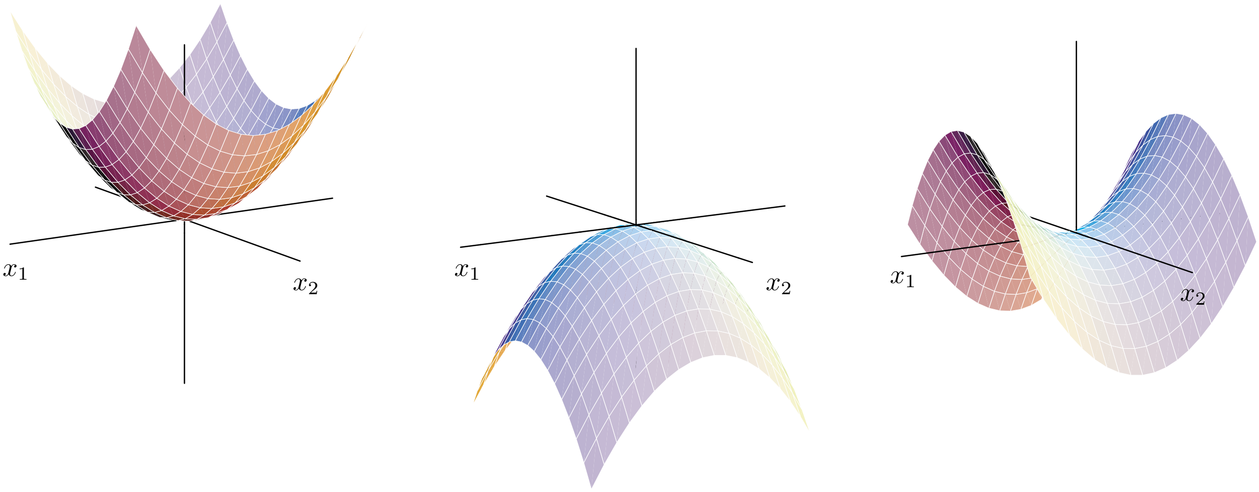

Figura 4.2. Grafici delle forme quadratiche $\boldsymbol{x} \mapsto x_1^2 + x_2^2$, $\boldsymbol{x} \mapsto -x_1^2 - x_2^2$, $\boldsymbol{x} \mapsto x_1^2 - x_2^2$ (da sinistra a destra).

Teorema 4.2. La forma quadratica $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}$ è
- definita positiva, se $(c_{11} > 0) \wedge (\det(\boldsymbol{C}) > 0)$,
- definita negativa, se $(c_{11} < 0) \wedge (\det(\boldsymbol{C}) > 0)$,
- indefinita, se $\det(\boldsymbol{C}) > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo innanzitutto $x_2 = 0$; la forma quadratica si scrive $c_{11}x_1^2$, che ha lo stesso segno di c_{11} per $x_1 \neq 0$.

Se $x_2 \neq 0$ si può scrivere la forma quadratica nel modo seguente

$$x_2^2\,(c_{11}t^2 + 2c_{12}t + c_{22}),$$

avendo posto $t := x_1/x_2$. Il segno del trinomio entro parentesi tonde è governato del suo discriminante

$$\Delta = c_{12}^2 - c_{11}c_{22} = -\det(\boldsymbol{C});$$

se esso è negativo (dunque $\det(\boldsymbol{C}) > 0$) il trinomio ha il segno del suo primo coefficiente c_{11} per ogni t, in caso contrario lo stesso trinomio assume tanto valori positivi quanto negativi. ✎ □

3. Torniamo allo studio delle funzioni di due o più variabili reali. Sia, come in precedenza, $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, una funzione due volte derivabile. Supponiamo che l'origine sia interna a D; ci chiediamo sotto quali condizioni f presenta un minimo relativo oppure un massimo relativo in tale punto.

Scriviamo innanzitutto il polinomio di Taylor T_2 relativo alla funzione f e al punto iniziale $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. Per quanto sappiamo dal punto precedente, le derivate di T_2 devono coincidere con le corrispondenti derivate della funzione f fino al secondo ordine: con riferimento alla scrittura

$$p_2(\boldsymbol{x}) = a + \sum_{h=1}^{2} b_h x_h + \sum_{h,k=1}^{2} c_{hk} x_h x_k,$$

dovremo scegliere (si rivedano le formule (*))

$$a = f(\boldsymbol{0}), \quad b_h = D_h f(\boldsymbol{0}), \quad c_{hk} = \frac{1}{2} D_{hk} f(\boldsymbol{0}).$$

Se si introduce la cosiddetta matrice *hessiana* (dal nome del matematico tedesco L.O. Hesse, 1811-1874)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} D_{11}f(\boldsymbol{x}) & D_{12}f(\boldsymbol{x}) \\ D_{21}f(\boldsymbol{x}) & D_{22}f(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix},$$

allora il polinomio T_2 si può scrivere

$$T_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0}) + \nabla f(\boldsymbol{0}) \bullet \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}.$$

Se il punto iniziale è un generico $\boldsymbol{x}_0$ interno a D, basterà sostituire $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ al posto di $\boldsymbol{x}$, ottenendo il polinomio di Taylor nella forma

$$T_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \bullet (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \bullet (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Se un punto $\boldsymbol{x}_0$ interno a D è un punto di minimo o di massimo relativo, esso è necessariamente un *punto critico*, cioè $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$. In tal caso la formula di Taylor diventa

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\bullet(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2),$$

cioè la differenza $\Delta f = f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$ è approssimata "bene" dalla forma quadratica

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\bullet(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0).$$

Dunque avremo un punto di minimo relativo se tale forma quadratica è definita positiva, un punto di massimo relativo se esso è definita negativa, ed infine un punto di sella se essa è indefinita.

Possiamo allora sfruttare il Teorema 4.2: i segni delle quantità $D_{11}f(\boldsymbol{x}_0)$ e $\det\big(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)\big)$ (si parla di *determinante hessiano*, o *hessiano* semplicemente) ci consentono di decidere la natura del punto $\boldsymbol{x}_0$.

Teorema 4.3. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una funzione due volte derivabile in D, $\boldsymbol{x}_0$ un punto critico della stessa funzione. Esso è

- punto di minimo relativo, se $\big(D_{11}f(\boldsymbol{x}_0) > 0\big) \wedge \big(\det\big(H(\boldsymbol{x}_0)\big) > 0\big)$,
- punto di massimo relativo, se $\big(D_{11}f(\boldsymbol{x}_0) < 0) \wedge \big(\det\big(H(\boldsymbol{x}_0)\big) > 0\big)$,
- punto di sella, se $\det\big(H(\boldsymbol{x}_0)\big) < 0)$.

In effetti, la coppia di condizioni

$$\big(D_{11}f(\boldsymbol{x}_0) > 0\big) \wedge \big(\det\big(H(\boldsymbol{x}_0)\big) > 0\big)$$

implica che la forma quadratica

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\bullet(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

è definita positiva, mentre la coppia di condizioni

$$\big(D_{11}f(\boldsymbol{x}_0) < 0\big) \wedge \big(\det\big(H(\boldsymbol{x}_0)\big) > 0\big)$$

implica che la forma stessa è definita negativa.

Si osservi, inversamente, che se il punto critico $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo, possiamo soltanto dire che la forma quadratica più volte esaminata è semidefinita positiva, se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di massimo relativo, la forma stessa è semidefinita negativa.

Ad esempio per le funzioni $f_1(x, y) := x^4 + y^4$ e $f_2(x, y) := x^4 + y^2$, che hanno entrambe un punto ri minimo nell'origine, le matrici hessine sono: la matrice identicamente nulla nel caso della f_1, la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

per la matrice f_2.

Osservazione. Il teorema precedente sembra privilegiare la variabile x_1 rispetto a x_2. In realtà, poiché il determinante hessiano si scrive $D_{11}f \cdot D_{22}f - D_{12}f^2$, se esso è positivo allora le derivate $D_{11}f$ e $D_{22}f$ sono concordi.

Esempio 4.2. Torniamo alle usuali variabili x e y. Studiamo al funzione $f(x, y) := x^4 + y^4 - 4xy$. Si trova $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$, quindi ∇f si annulla nei punti $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Si trova poi

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x, y) = -4, \quad f_{yy}(x, y) = 12y^2,$$

quindi il determinante hessiano si scrive

$$\begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}.$$

Esso vale -16 nell'origine, vale 128 nei due restanti punti critici. Questi ultimi sono dunque due punti di minimo, mentre l'origine non è un estremante.

La parità della funzione f, espressa dall'identità $f(x, y) = f(-x, -y)$, rende ragione del fatto che essa ha lo stesso comportamento nei punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Quanto al fatto che l'origine sia un punto di sella, si osservi che f è positiva sugli assi coordinati, mentre $f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$, e la quantità entro parentesi tonde assume tanto valori positivi quanto negativi.

Esempio 4.3. Consideriamo nel piano n punti di coordinate (x_k, y_k), $k = 1, 2, \dots n$. Vogliamo determinare il punto (x, y) che rende minima la somma delle distanze dei punti considerati. Si tratta di minimizzare la funzione

$$f(x,y) := \sum_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2].$$

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x &= 2\sum_{k=1}^{n}(x-x_k) = 2\big(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k\big) = 0, \\ \\ f_y &= 2\sum_{k=1}^{n}(y-y_k) = 2\big(ny - \sum_{k=1}^{n} y_k\big) = 0, \end{cases}$$

da cui

$$x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

L'unico punto critico è dunque il *baricentro* del sistema di punti. Che si tratti di un punto di minimo segue dal fatto che la matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.4. Consideriamo nello spazio $\mathbb{R}^3$ due rette sghembe, tra loro non parallele. Siano date dalle equazioni parametriche

$$t \mapsto \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{v}_1, \quad s \mapsto \boldsymbol{x}_2 + s\boldsymbol{v}_2, \quad t,s \in \mathbb{R},$$

dove $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ sono due punti assegnati e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ sono due versori ($\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = 1$) che individuano le rette in questione. Supporremo che le due rette non siano parallele: se α è l'angolo formato dai due versori, supporremo che $\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2 = \cos\alpha \neq \pm 1$ (cioè $\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2 < 1$).

Vogliamo determinare la distanza tra le due rette, intesa come minima distanza tra due punti appartenenti alle rette stesse. Il quadrato della distanza in questione è funzione di t ed s, e precisamente

$$f(t,s) = \|\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{x}_2 + s\boldsymbol{v}_2)\|^2 = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{v}_1 - s\boldsymbol{v}_2) \bullet (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{v}_1 - s\boldsymbol{v}_2).$$

La ricerca di un punto critico conduce al sistema

$$\begin{cases} f_t &= 2(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{v}_1 - s\boldsymbol{v}_2) \bullet \boldsymbol{v}_1 = 0 \\ f_s &= -2(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{v}_1 - s\boldsymbol{v}_2) \bullet \boldsymbol{v}_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

che può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} t & -s(\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2) & = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \bullet \boldsymbol{v}_1 \\ -t(\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2) & +s & = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \bullet \boldsymbol{v}_2. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema dotato di un'unica soluzione, in quanto il determinante della matrice dei coefficienti vale $1 - (\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2)^2$.

Se $(\bar{t}, \bar{s})$ è la soluzione di tale sistema, le formule (*), ove si ponga $t = \bar{t}$ ed $s = \bar{s}$, ci dicono che il vettore $\boldsymbol{x}_1 + \bar{t}\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{x}_2 + \bar{s}\boldsymbol{v}_2)$ è ortogonale tanto a $\boldsymbol{v}_1$ quanto a $\boldsymbol{v}_2$.

La coppia $(\bar{t}, \bar{s})$ individua effettivamente un punto di minimo (come è chiaro dal significato geometrico del problema che stiamo trattando); a conferma di ciò basta calcolare la matrice hessiana:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2(\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2) \\ -2(\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2) & 2 \end{bmatrix},$$

in cui determinante vale $4\big(1 - (\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2)^2\big) > 0$.

Esempio 4.5. La retta dei minimi quadrati [→ Barozzi, p.256, → Minnaja p.175]

Esempio 4.6. Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, ci chiediamo per quale valore della costante c la funzione

$$F(c) := \int_a^b [f(x) - c]^2\, dx$$

è minima. Cerchiamo un punto critico:

$$F'(c) = -2\int_a^b [f(x) - c]\, dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx = c(b-a),$$

quindi

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Abbiamo ritrovato la media integrale della funzione f; trattandosi dell'unico punto critico, esso è certamente un punto di minimo.

Ganeralizziamo il caso precedente: ci chiediamo quale tra le funzioni affini $x \mapsto mx+q$ minimizzi la funzione

$$F(a,b) := \int_a^b [(mx+q)-f(x)]^2\,dx.$$

La ricerca di un punto critico ci conduce alle equazioni

$$F_m = 2\int_a^b [f(x)-(mx+q)]\,x\,dx, \qquad F_q = 2\int_a^b [f(x)-(mx+q)]\,dx.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite m e q con matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} (b^3-a^3)/3 & (b^2-a^2)/2 \\ (b^2-a^2)/2 & b-a \end{bmatrix},$$

e di conseguenza con determinante uguale a

$$\frac{a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4}{12} = \frac{(a-b)^4}{12}.$$

Si tratta dunque di un sistema di Cramer, e pertanto esso fornisce una e una sola soluzione del problema posto.

4. I risultati delle sezioni precedenti si estendono alle funzioni di tre o più variabili. Per quanto riguarda il polinomio di Taylor, esso si scrive ancora

$$T_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\bullet(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\bullet(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0).$$

dove $\boldsymbol{H}$ è la matrice $[D_{hk}f(\boldsymbol{x}_0)]$, $h,k=1,\dots,n$. Introduciamo, per $k=1,2,\dots,n$, i determinanti

$$H_k := \begin{vmatrix} D_{11}f(\boldsymbol{x}_0) & D_{12}f(\boldsymbol{x}_0) & \dots & D_{1k}f(\boldsymbol{x}_0) \\ D_{21}f(\boldsymbol{x}_0) & D_{22}f(\boldsymbol{x}_0) & \dots & D_{2k}f(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{k1}f(\boldsymbol{x}_0) & D_{k2}f(\boldsymbol{x}_0) & \dots & D_{kk}f(\boldsymbol{x}_0) \end{vmatrix}.$$

H_k è il determinante formato dagli elementi comuni alle prime k righe e alle prime k colonne della matrice hessiana; H_n è semplicemente il determinante hessiano.

Teorema 4.4. $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ una funzione due volte derivabile in D, $\boldsymbol{x}_0$ un punto critico della stessa funzione. Esso è

- punto di minimo relativo se $\forall k, H_k > 0$,
- punto di massimo relativo se $\forall k, (-1)^k H_k > 0$.

Esercizi

1. Utilizzando un calcolatore, si risolva il problema della determinazione del polinomio di secondo grado $p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ che minimizza la distanza dalla funzione $f(x) := \sin(\pi x)$ sull'intervallo [0,1], vale a dire minimizza la funzione

$$F(c_0,c_1,c_2) := \int_0^1 \left(c_0+c_1x+c_2x^2-\sin(\pi x)\right)^2 dx.$$

Soluzione. Si trova che la terna (c_0,c_1,c_2) è soluzione del sistema avente come matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

e vettore dei termini noti $(2/\pi, 1/\pi, (\pi^2-4)/\pi^3)$. La terna dei coefficienti vale approssimativamente

$$(-0.05, 4.122, -4.122).$$

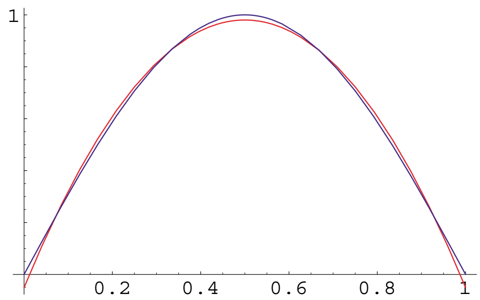

Figura 4.3. La funzione $x \mapsto \sin(\pi x)$ (in blu) e il polinomio di secondo grado che l'approssima sull'intervallo $[0, 1]$ nel senso dei minimi quadrati (in rosso).