

# POTENZIALI DIPENDENTI DA VELOCITA'

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad (\neq) \quad L = T - V$$

$\nearrow$   $Q_n = -\frac{\partial V}{\partial q_n}$   
 $\nwarrow$   $\nearrow$   $\nearrow$   $\nearrow$   
 valutate in  $q(t)$

Ci si può ridurre alla forma ( $\neq$ ) anche nel caso più generico in cui  $Q_n$  valutate sul moto abbiano la forma

$$Q_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial V}{\partial q_n} \quad \text{con } V = V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Qui considereremo  $V$  che dip. linearmente da  $\dot{q}$   $\rightarrow$  in questo caso le forme di  $Q_n(q, \dot{q}, t)$  sono:

$$Q_n = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial \dot{q}_n} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_n}$$

## ES] FORZA DI CORIOLIS

$\leftarrow$  Forze apparenti in sist. di rif. rotante con velocità angolare  $\vec{\omega}$ , che può prendersi cost.)

$$\vec{F} = 2m \dot{\vec{q}} \times \vec{\omega}$$

(Forza centrifuga è invece  
 posizionata da  
 $V_c(q) = -\frac{1}{2} m \omega^2 d^2(q)$   
 distanza da asse di rotazione.)

C'è anche la FORZA CENTRIFUGA, che è una forza puram. posizionale ricavabile da pt

$$V_c(q) = -\frac{1}{2} m \omega^2 d^2(q)$$

dist. da asse di rotazione.

Prodotto vett. in  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{e}_1 (v_2 u_3 - v_3 u_2) + \vec{e}_2 (v_3 u_1 - v_1 u_3) + \vec{e}_3 (v_1 u_2 - v_2 u_1) =$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & v_1 & u_1 \\ \vec{e}_2 & v_2 & u_2 \\ \vec{e}_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i v_j u_k$$

tensori totalm. antisimmetr.

$$(\Rightarrow \epsilon_{iij} = 0) \quad \epsilon_{123} = 1$$

$$(\epsilon_{123} = 1 \rightarrow \epsilon_{213} = -1 \rightarrow \epsilon_{231} = 1 \rightarrow \epsilon_{321} = -1)$$

Prop. La forza di Coriolis con  $\bar{\omega}$  costante si ricava attraverso la formule

$$F_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \quad \text{con } V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q}$$

Dim.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \left( \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \bar{e}_i a_j b_k \right) \cdot \left( \sum_l c_l \bar{e}_l \right) =$$

$$= \sum_i \left( \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k \right) c_i =$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \sum_{ijk} \epsilon_{kij} b_k c_i a_j =$$

$$= \sum_j \left( \sum_{ki} \epsilon_{jki} b_k c_i \right) a_j = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} =$$

$$= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

$$V_1 = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q} = -m \dot{\bar{q}} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{q})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_h} = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \bar{q})_h \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{q})_h = m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$F_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} = 2m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h //$$

$$L = T - V_c - V_1$$

↑  
forza centrifuga
↑  
forza di Coriolis

Energia cinetica in coordinate  $\bar{q}$  solidali:  
al sistema di riferimento rotante

In un sistema di riferimento inerziale con coordinate  $x, y, z$ :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \leftarrow V(x, y, z) = 0$$

Trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} x &= q_1 \cos \omega t - q_2 \sin \omega t & \leftarrow x = x(\bar{q}, t) \\ y &= q_1 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t & \vdots \\ z &= q_3 \end{aligned}$$

$$\tilde{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(x(\bar{q}, t), y(\bar{q}, t), z(\bar{q}, t), \dot{x}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), \dot{y}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), \dot{z}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{q}_1 \cos \omega t - \dot{q}_2 \sin \omega t - q_1 \omega \sin \omega t - q_2 \omega \cos \omega t \\ \dot{y} &= \dot{q}_1 \sin \omega t + \dot{q}_2 \cos \omega t + q_1 \omega \cos \omega t - q_2 \omega \sin \omega t \\ \dot{z} &= \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T(\dot{\bar{q}}) \text{ en. cin. nel sist. rotante} - V_c(\bar{q})$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \text{dist. dall'asse } z$$

$$+ m\omega (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1)$$

$$\underbrace{(q \times \dot{q})_3}_{\omega} \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m\bar{\omega} \cdot (q \times \dot{q}) &= -m\bar{\omega} \cdot (\dot{q} \times q) = \\ &= -m(\bar{\omega} \times \dot{q}) \cdot q = -V_1(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

# FORZE ELETTROMAGNETICHE

$$\bar{F} = e \left( \bar{E} + \dot{\bar{q}} \times \bar{B} \right) \rightarrow \bar{F}_m \text{ forza di Lorentz } \rightarrow \text{analoga a Forza di Coriolis}$$

$\bar{E}$  e  $\bar{B}$  sono deducibili da potenziale scalare  $\phi(\bar{q}, t)$  e potenziale vettore  $\bar{A}(\bar{q}, t)$ :

$$\bar{E} = - \left( \bar{\nabla} \phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) \quad \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Si può dimostrare che  $\bar{F}$  si deriva da un potenziale dato da:

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = e \phi - e \dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}$$

corrente generata da moto di carica e

$$\text{Dim. } \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} (-e A_h(\bar{q}, t)) - e \frac{\partial \phi}{\partial q_h} + e \dot{q}_e \frac{\partial \bar{A}}{\partial q_h} =$$

$$= -e \frac{\partial A_h}{\partial t} - e \sum_k \frac{\partial A_h}{\partial q_k} \dot{q}_k - e \frac{\partial \phi}{\partial q_h} + e \sum_e \dot{q}_e \frac{\partial A_e}{\partial q_h}$$

$$= e \left[ - \left( \frac{\partial \phi}{\partial q_h} + \frac{\partial A_h}{\partial t} \right) - \left( (\bar{\nabla} \times \bar{A}) \times \dot{\bar{q}} \right)_h \right]$$

$$(\bar{\nabla} \times \bar{A})_i = \sum_{m,l} \epsilon_{iml} \partial_m A_l = \sum_{ij} \epsilon_{hij} \sum_{m,l} \epsilon_{ime} \partial_m A_l \dot{q}_j$$

$$= \sum_{j,m,r,l} (\delta_{he} \delta_{jm} - \delta_{hm} \delta_{je}) \partial_m A_l \dot{q}_j =$$

$$= \sum_m \partial_m A_h \dot{q}_m - \sum_j \partial_h A_j \dot{q}_j \quad //$$

⇒ La Lagrangiana di una particella carica in un campo elettromagnetico è

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + e\phi - e \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}$$

⇒ Le equazioni di Lagrange corrispondenti sono  $m\ddot{\vec{q}} = \vec{F}$ .

Prendiamo un caso particolare, cioè  $\vec{B} = 0$ .

$$\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{\nabla} \chi \quad (\text{almeno localmente})$$

$$\text{cioè } A_i = \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \Rightarrow -e \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vec{q}_i} = \frac{d}{dt} (-e\chi)$$

⇒ Se  $\vec{B} = 0$  il termine di accoppiamento col potenziale vettore è una "derivata totale" e quindi non influisce sulle eq. di Lagrange che rimangono quelle della particella libera.

Se  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi$  cost., cioè anch'esso è "derivata totale".

Abbiamo ritrovato punto già scoperto, cioè che la dinamica (classica) è determinata dai campi elettrico  $\vec{E}$  e magnetico  $\vec{B}$ . Se tali campi sono nulli, non vi è nessuna forza e quindi  $m\ddot{\vec{q}} = 0$ .

(L dipende da  $\phi$  e  $\vec{A}$ .)