

Università di Trieste
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di
Progettazione e riabilitazione
Sismica delle Strutture

Modulo 1: Progettazione strutturale in zona sismica

MODELLAZIONE NON LINEARE

Prof. Ing. Natalino Gattesco

ANALISI DELLA STRUTTURA

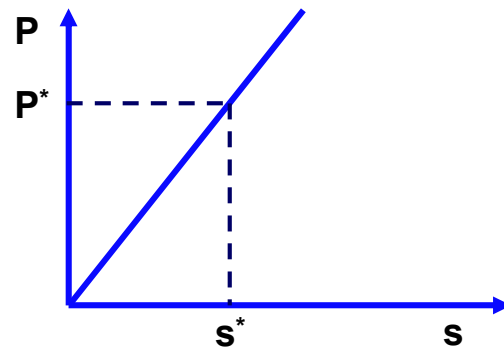
Il problema strutturale si può risolvere con un analisi lineare se:

- Il materiale di cui è composta la struttura è elastico lineare
- gli spostamenti sono piccoli: le equazioni di equilibrio si possono scrivere nella configurazione indeformata della struttura, trascurando il fatto che per la struttura l'equilibrio si instaura in una configurazione deformata
- I vincoli presenti nella struttura sono bilateri.

ANALISI LINEARE

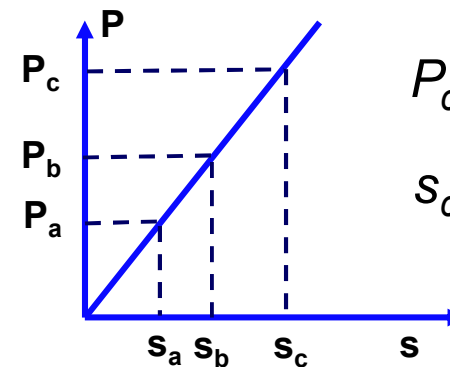
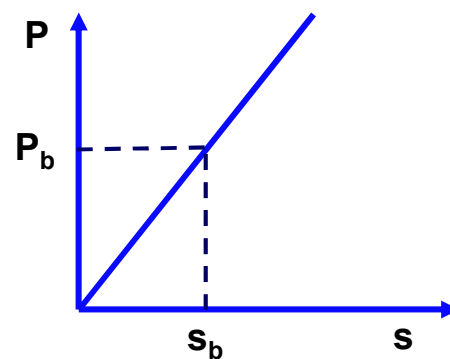
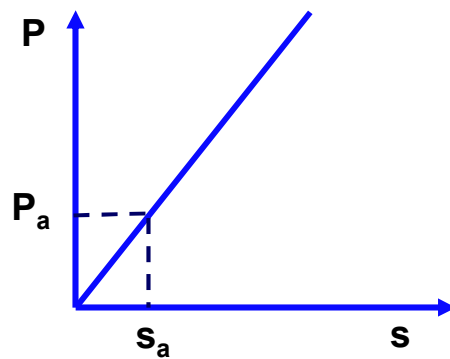
In queste condizioni si ha che:

- La soluzione del problema strutturale esiste ed è unica



$$P^* \Rightarrow s^*$$

- Vale il principio di sovrapposizione degli effetti



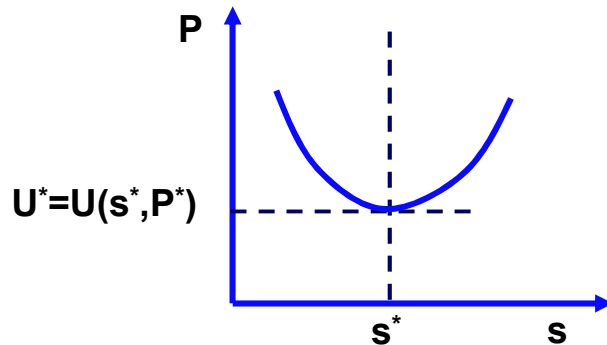
$$P_c = P_a + P_b$$

$$s_c = s_a + s_b$$

ANALISI LINEARE

In queste condizioni si ha che:

- **Il sistema strutturale**, inteso come struttura formata da materiale e insieme dei carichi agenti, **è conservativo** ed è definita l'energia potenziale totale U , che risulta essere minima nell'unico punto di stazionarietà, corrispondente all'equilibrio della struttura sotto il sistema di carichi assegnato



$$U^* = \min U(s, P)$$

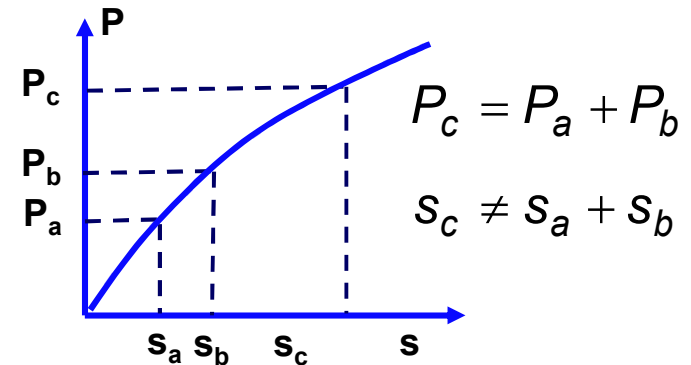
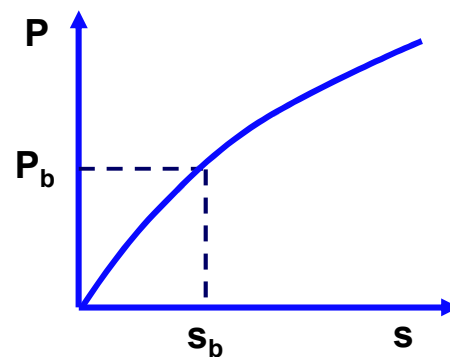
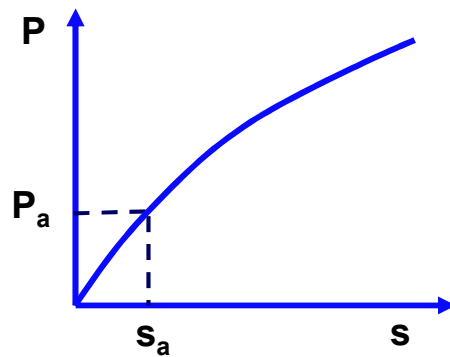
NON LINEARITA'

Le caratteristiche proprie della linearità possono essere alterate

- **Non linearità di materiale**, *il materiale di cui è composta la struttura risponde in modo differente al crescere della deformazione*
- **Non linearità geometrica**, *gli spostamenti che la struttura subisce non possono essere considerati piccoli e se ne deve tenere conto nella scrittura delle equazioni di equilibrio (effetti di second'ordine)*
- **Non linearità dei vincoli**, *le condizioni di vincolo della struttura si modificano al crescere del carico (es. vincoli unilateri)*

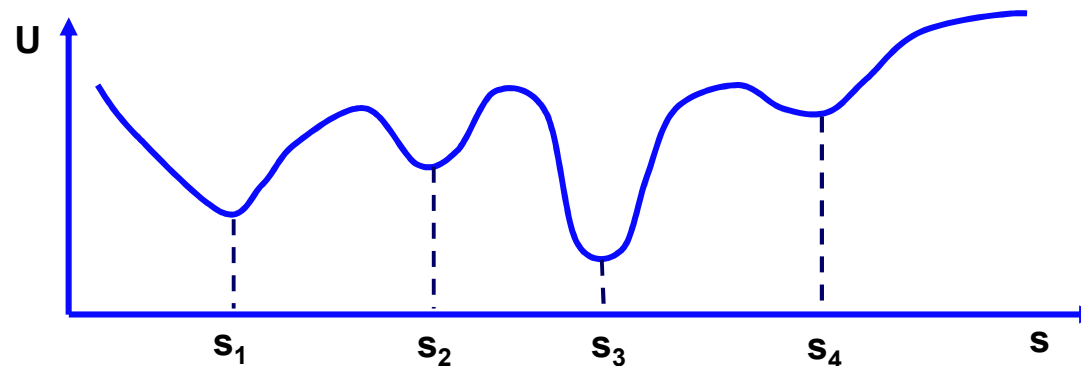
CONSEGUENZE NON LINEARITA'

- La soluzione del problema strutturale può non esistere
- Se la soluzione esiste può non essere unica
- Non vale il principio di sovrapposizione degli effetti



ENERGIA POTENZIALE TOTALE

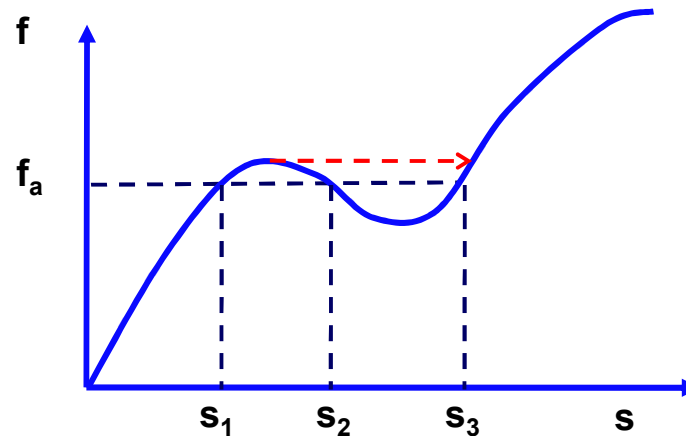
- In generale, **il sistema non è conservativo**, per cui non si può definire un'energia potenziale totale.
- **Se esiste la funzione energia potenziale totale, può presentare numerosi minimi**; questi minimi sono situazioni di equilibrio stabile, anche se solamente una s_3 è stabile in senso assoluto (minimo assoluto) mentre le altre sono metastabili, in quanto possono instabilizzarsi per effetto di una perturbazione più o meno intensa.



NON UNICITA'

La soluzione ottenuta per un problema non lineare, minimizzando l'energia potenziale totale o scrivendo direttamente le equazioni di equilibrio del metodo degli spostamenti, non essendo unica, non è detto che sia la soluzione cercata

Per individuare la soluzione cercata è quindi necessario utilizzare metodi di soluzione passo-passo



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Il problema strutturale affrontato utilizzando il metodo degli spostamenti, nel caso di sola non linearità meccanica dei materiali, è risolto con il sistema di equazioni di equilibrio

$$\Psi(s) = P(s) - f = 0$$

f è il vettore delle forze nodali equivalenti ai carichi

P è il vettore delle forze nodali interne (risposta della struttura)

Ψ è il vettore dello squilibrio ai nodi (out-of-balance vector)

Nel caso lineare il vettore *P* dipende linearmente dagli spostamenti ed il sistema ammette soluzione unica

$$K s = f$$

METODO DI NEWTON-RAPSON

Il metodo consiste nella soluzione di numerosi problemi lineari.
Si sviluppa l'espressione dello squilibrio in serie di Taylor fino al prim'ordine

$$\Psi_{n+1}^{i+1} \equiv \Psi(s_{n+1}^{i+1}) \approx \Psi(s_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right)_{n+1}^i \cdot \delta s_n^i = 0$$

n rappresenta lo step di carico

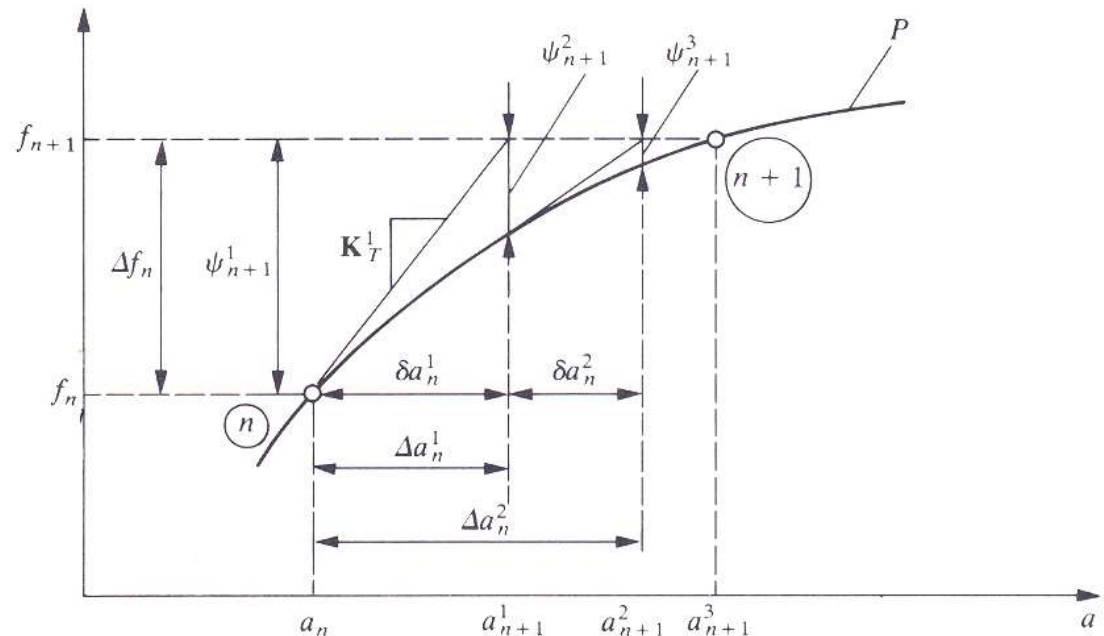
i rappresenta il contatore di iterazione

δs^i è la variazione di spostamento
nell'iterazione i

$$\Psi_{n+1}^1 = \Delta f_n$$

$$f_{n+1} = f_n + \Delta f_n$$

$$s_{n+1}^1 = s_n$$



Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

METODO DI NEWTON-RAPSON

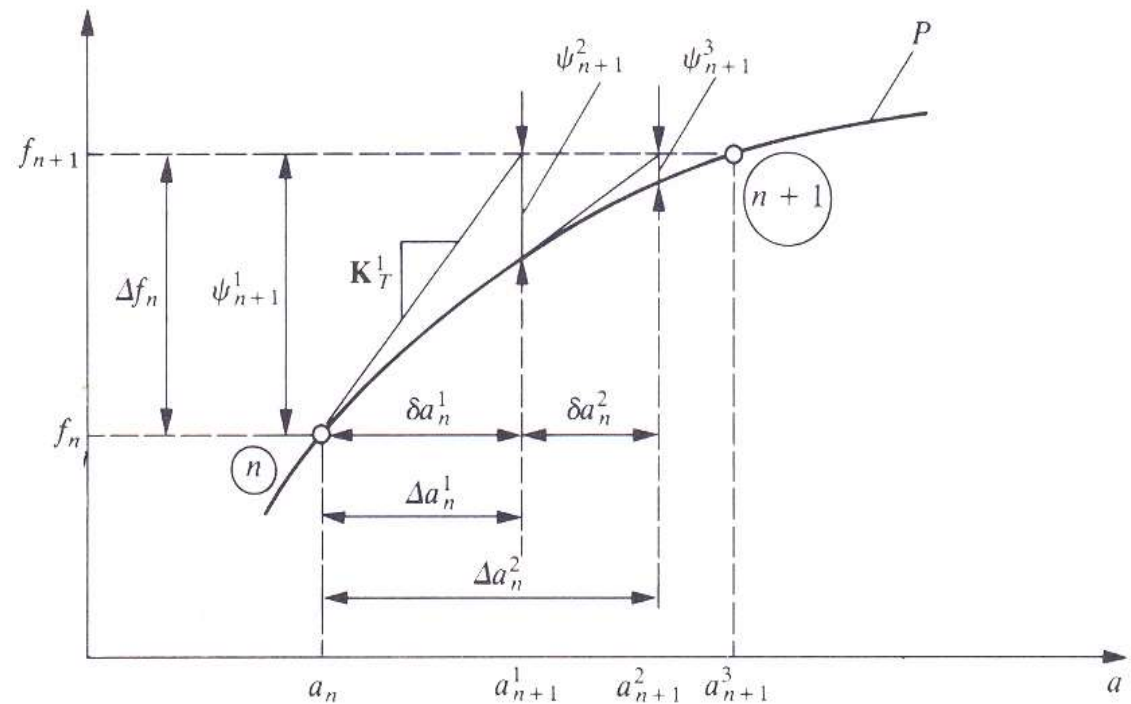
Sostituendo a Ψ la sua espressione si ottiene

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{n+1}^i \delta s_n^i = -P(s_{n+1}^i) + f_n \quad K_{T(n+1)}^i = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{n+1}^i$$

$$\delta s_n^i = -\left(K_{T(n+1)}^i\right)^{-1} \Psi_{n+1}^i$$

Stima dello spostamento totale all'iterazione (i+1)-esima

$$s_{n+1}^{i+1} = s_n + \Delta s_n^i = s_{n+1}^i + \delta s_n^i$$



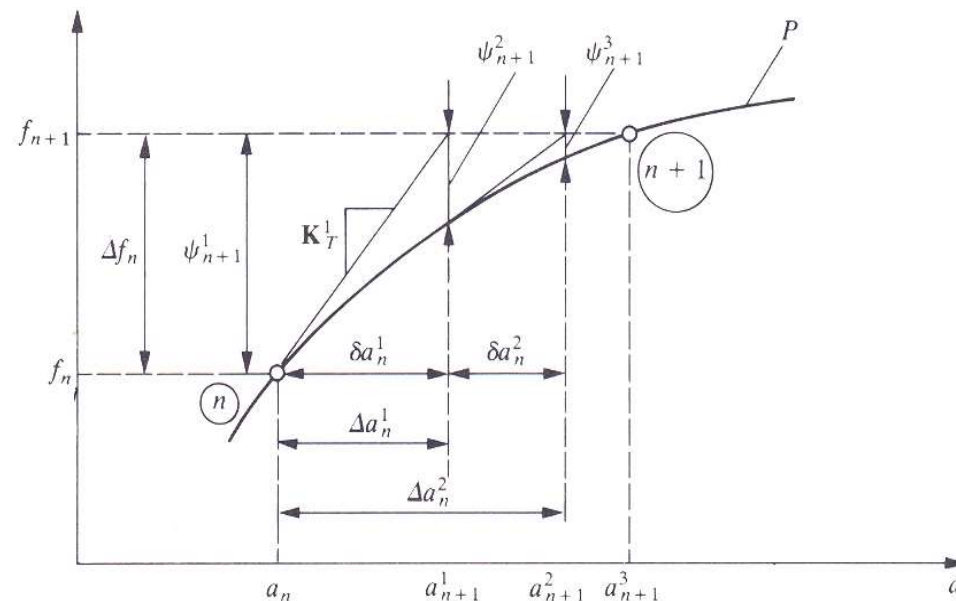
Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

METODO DI NEWTON-RAPSON

Pregi: *convergenza rapida*

Difetti: *onere computazionale molto elevato per la richiesta di fattorizzazione della matrice di rigidezza ad ogni iterazione*

Necessario ridurre il numero di volte che viene rifattorizzata la matrice del sistema risolvete



Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

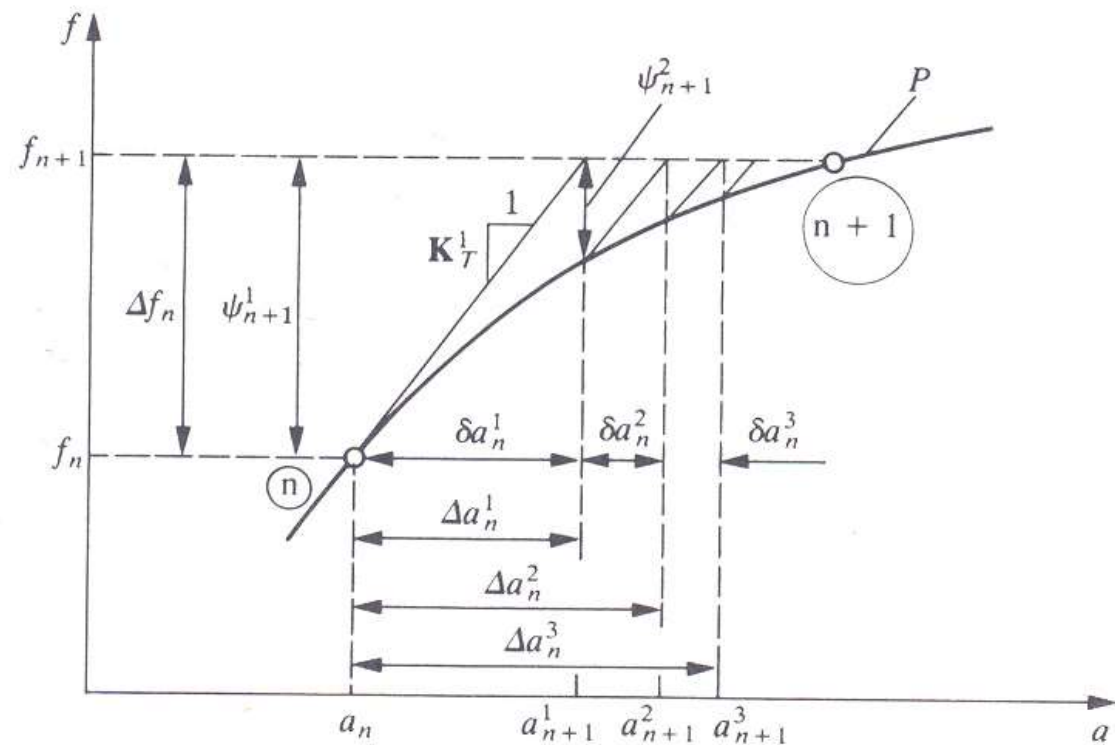
METODO DI NEWTON-RAPSON MODIFICATO

Matrice di rigidezza tangente mantenuta costante all'interno del passo di carico

$$K_{T(n+1)} = \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{n+1}^1$$

Convergenza più lenta ma l'onere per la fattorizzazione della matrice globale è molto inferiore

Molti programmi di calcolo automatico per l'analisi non lineare utilizzano questo metodo



Nota: nel diagramma sono indicati con a gli spostamenti s .

METODI “ARC-LENGTH”

I metodi visti non convergono se si hanno problemi con ramo decrescente “softening”. In questi casi è necessario che il problema iterativo sia condotto a controllo di spostamento, oppure bisogna ricorrere ai metodi “arc-length”.

Se si considerano carichi proporzionali tra loro il sistema di equazioni di equilibrio può scriversi

$$\Psi_n = P(s_n) - \lambda_n f_0 = 0$$

$$s_{n+1} = s_n + \Delta s_n$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda_n$$

Il moltiplicatore dei carichi $\Delta \lambda_n$ costituisce un'incognita in più e quindi è richiesta un'ulteriore equazione

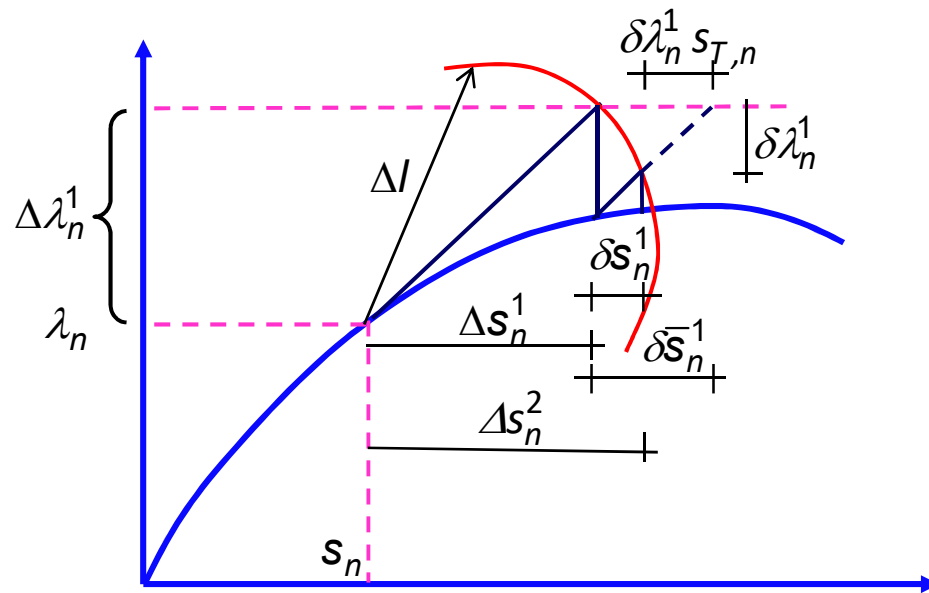
METODI “ARC-LENGTH”

Si assume che ogni incremento rispetti la relazione

$$\Delta \mathbf{s}_n^T \Delta \mathbf{s}_n + \Delta \lambda_n^2 \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0 = \Delta l^2$$

dove Δl è una prescritta “lunghezza” nello spazio a N+1 dimensioni

In questo modo però il sistema perde la simmetria e non è più a banda. Si preferisce quindi adottare un procedimento



$$\bar{\delta s}_n^i = -K_T^{-1} \Psi(s_n^i, \lambda_n^i)$$

$$s_{T,n} = K_{T,n}^{-1} \Delta \lambda_n^1 f_0$$

$$\delta s_n^i = \bar{\delta s}_n^i + \delta \lambda_n^i s_{T,n}$$

$$\Delta s_n^{i+1} = \Delta s_n^i + \bar{\delta s}_n^i + \delta \lambda_n^i s_{T,n}$$

$$\Delta \lambda_n^{i+1} = \Delta \lambda_n^i + \delta \lambda_n^i$$

CRITERI DI CONVERGENZA

E' necessario fissare adeguate tolleranze per arrestare il processo iterativo.

$$\left\| \Psi(s_{n+1}^{i+1}) \right\| \leq \varepsilon \left\| f_{n+1} \right\|$$

Norma sullo squilibrio

Non funziona bene per K molto piccola

$$\left\| s_{n+1}^{i+1} - s_{n+1}^i \right\| \leq \varepsilon \left\| s_{n+1}^{i+1} \right\|$$

Norma sugli spostamenti

Non funziona bene per K molto alta,
troppo restrittivo in altri casi

$$\left\| \Psi(s_{n+1}^{i+1}) s_{n+1}^{i+1} \right\| \leq \varepsilon \left\| f_{n+1} s_{n+1}^{i+1} \right\|$$

Norma sul lavoro

Verificare che la norma a destra non
sia troppo piccola

$$\varepsilon = 1\% \div 0.1\%$$

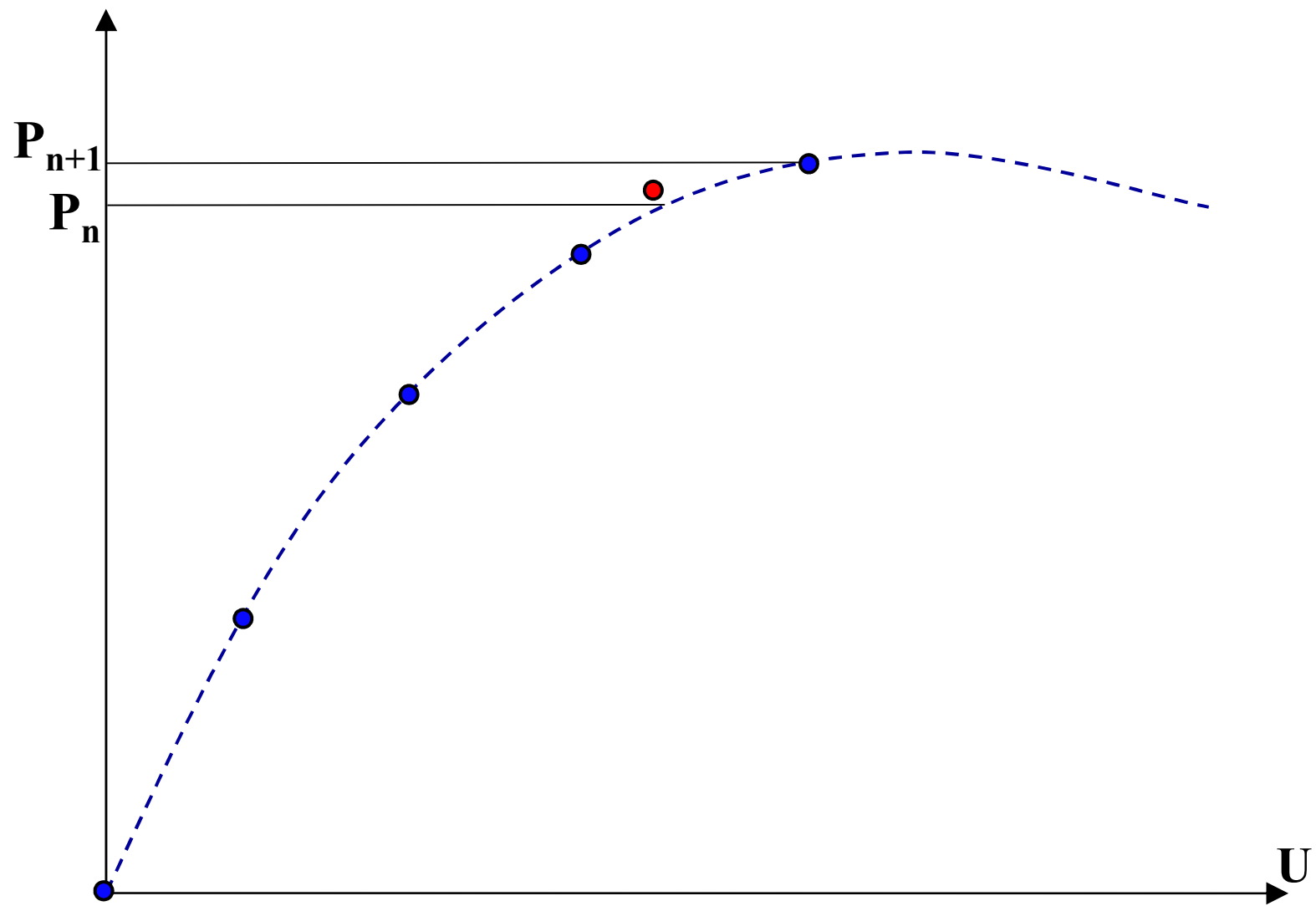
CONVERGENZA

- **Quante iterazioni all'interno di un passo di carico?**
 - I programmi fissano un limite di default e/o chiedono all'utente di fissarlo (per esempio $i \leq 10$)
 - Se il criterio di convergenza è soddisfatto con $i \leq 10$ il passo di carico è concluso e si incrementa il carico passando al passo successivo
 - Se il criterio di convergenza non è soddisfatto a $i=10$, o il programma si ferma, o avanza segnalando però il problema, o avanza e non dice niente (!)

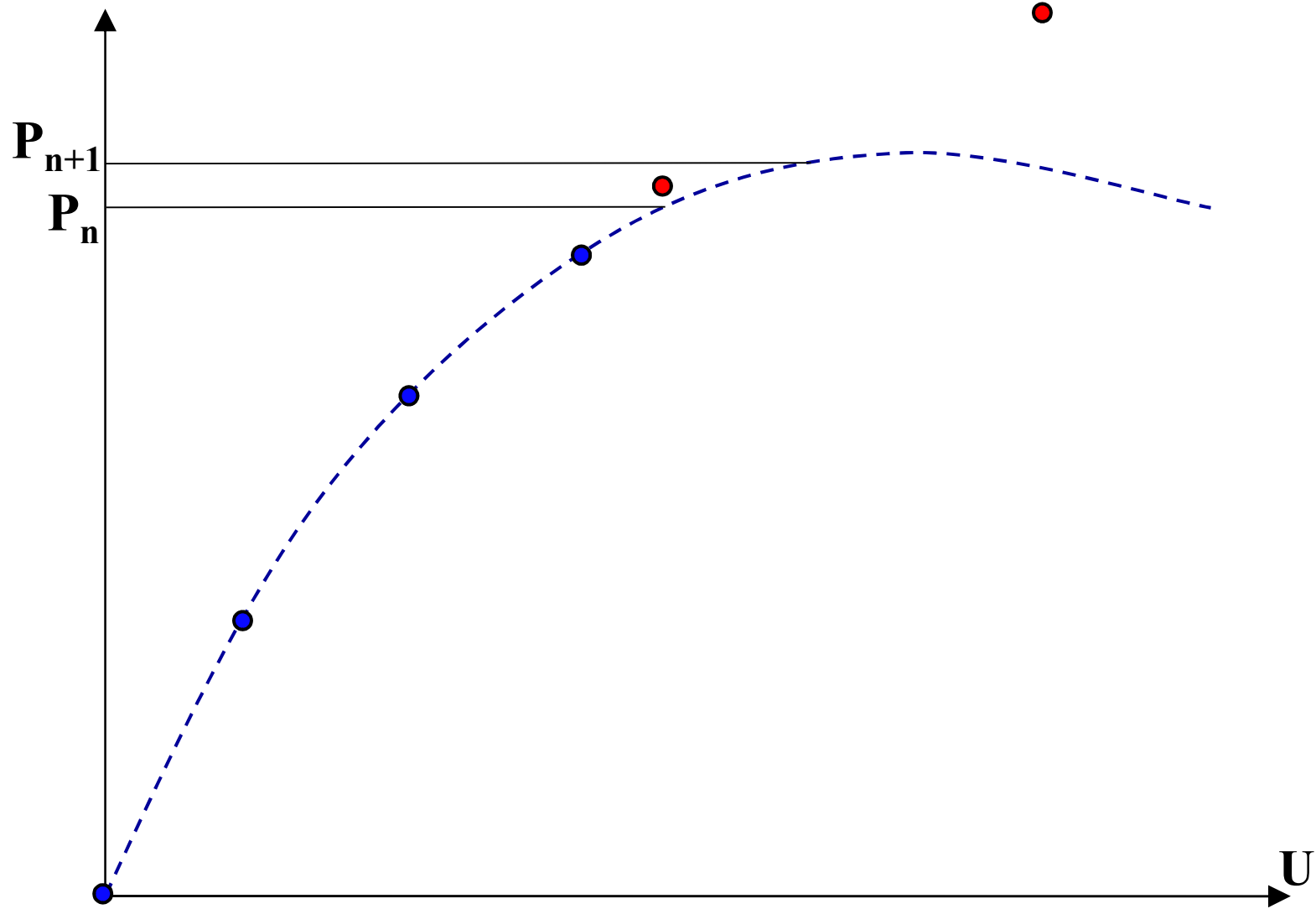
CONVERGENZA

- CONVEGENZA? **SI** → Avanza al passo di carico successivo
 $n=n+1$
- CONVERGENZA? **NO**
 - Il programma si ferma. Si ripete l'analisi rinfittendo il passo di carico
 - Alcuni programmi hanno il comando RESTART che permette di ripartire dall'ultimo punto di convergenza
 - Il programma continua segnalando o no il problema
 - Divergenza
 - Convergenza ritardata al passo successivo (controllare se convergenza su un altro ramo di equilibrio)

CONVERGENZA RITARDATA AL PASSO SUCCESSIVO



DIVERGENZA



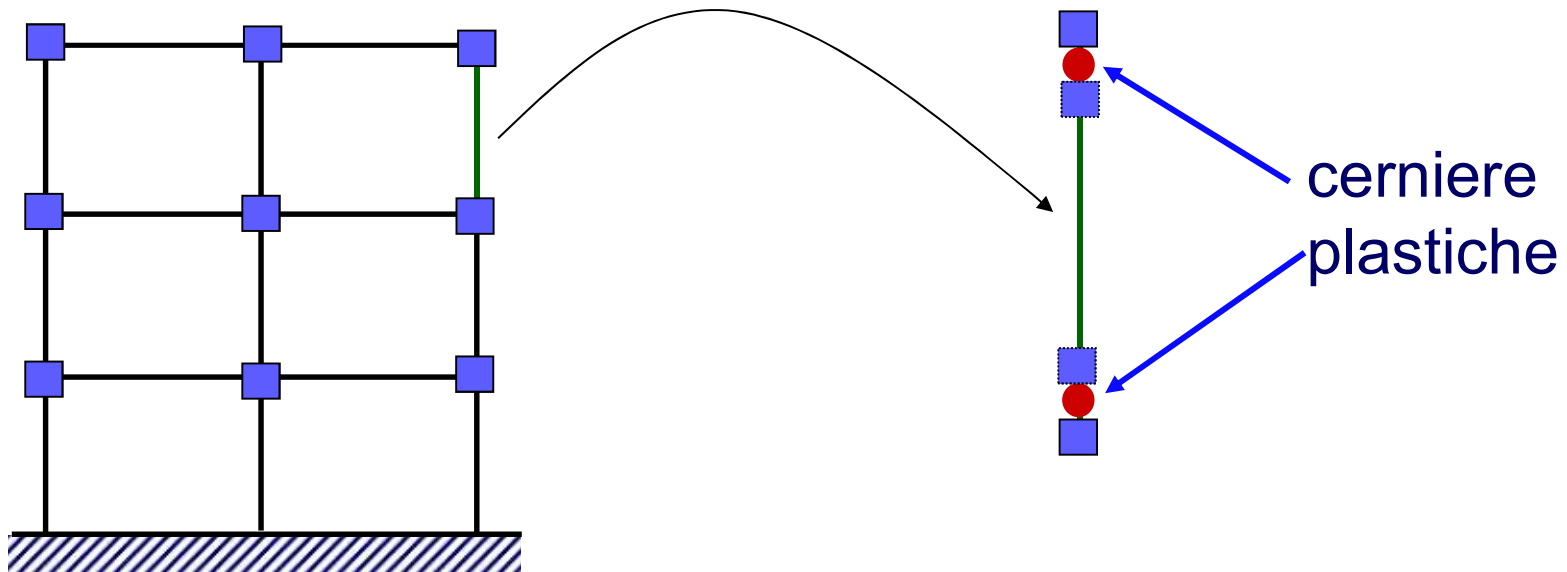
ANALISI NON LINEARE

Per la determinazione di un legame forza-spostamento generalizzato tra la risultante delle forze applicate (*taglio alla base*) e lo spostamento di un “*punto di controllo*” dell’edificio tenendo conto dell’effettivo comportamento della struttura si possono utilizzare diversi modelli non lineari.

- **Elementi a Plasticità Concentrata**
- **Elementi a Plasticità Distribuita**

ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

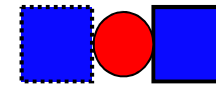
- Si concentrano le deformazioni plastiche della struttura in opportune zone caratterizzate da un legame rigido-plastico (cerniere plastiche)
- Si impiegano quindi elementi elastici ai quali sono collegati alle estremità elementi rigido-plastici che raccolgono tutte le non linearità dell'asta.



ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

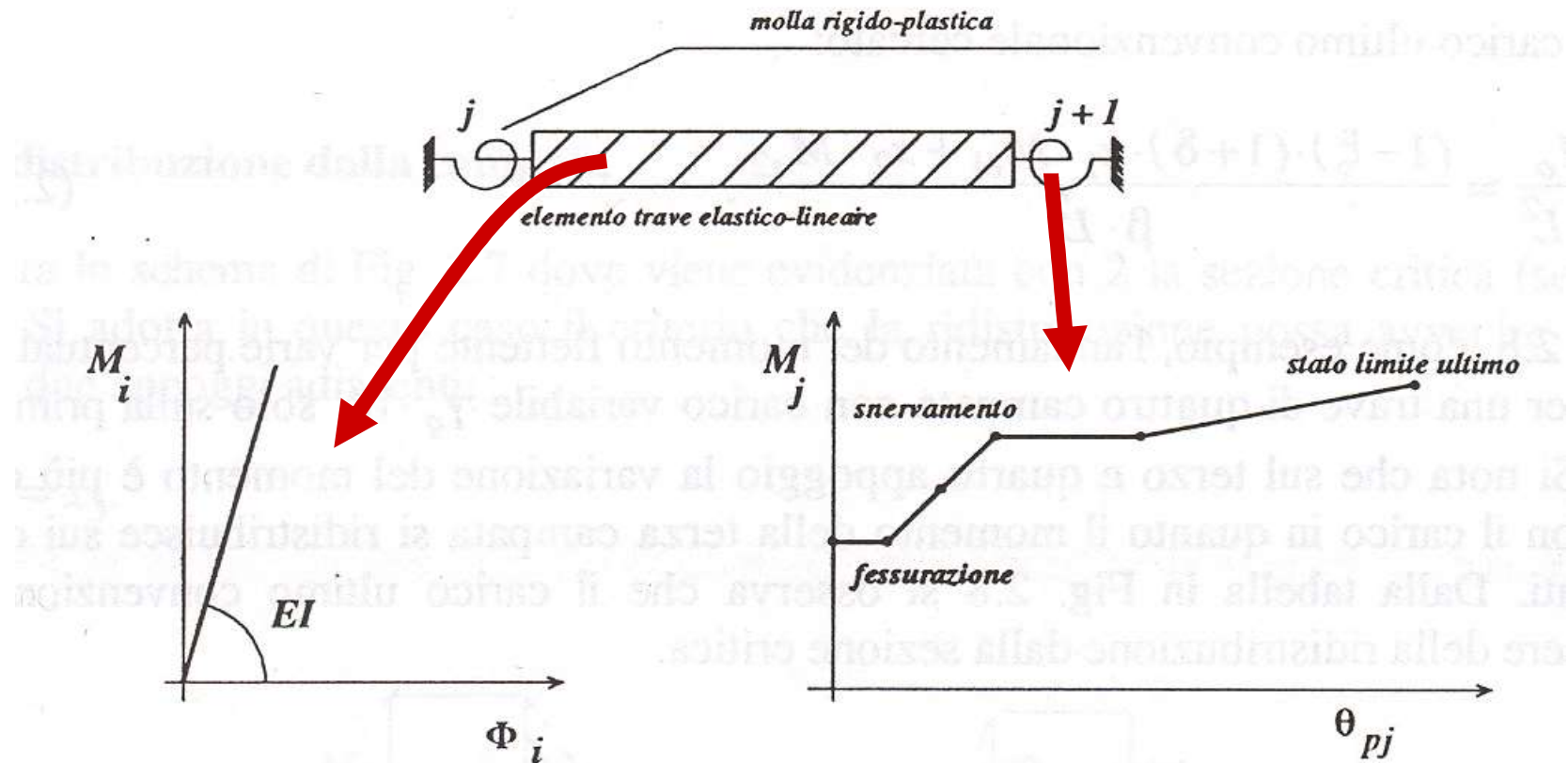


**elemento
lineare elastico**



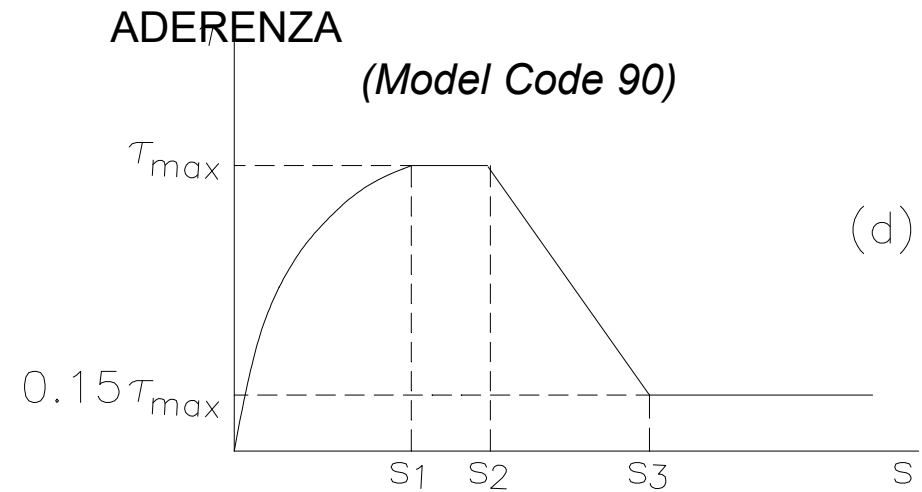
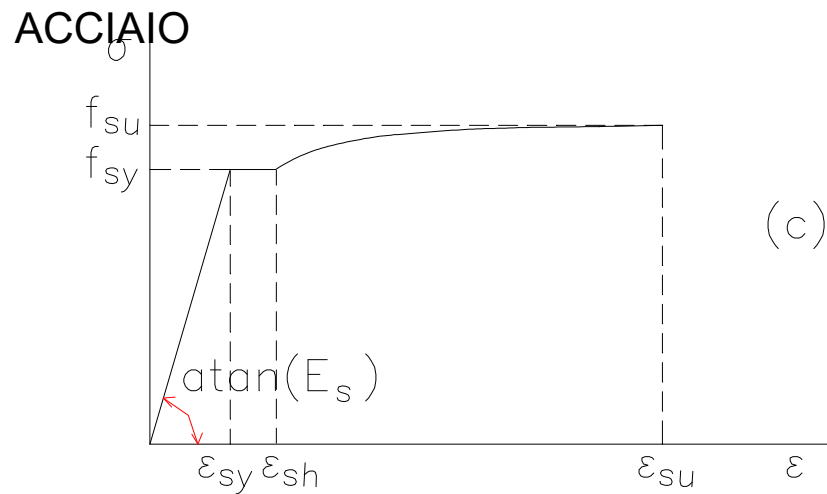
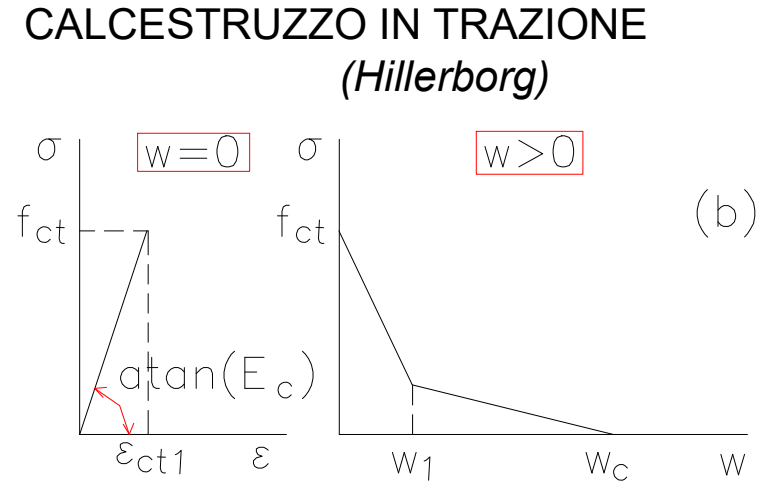
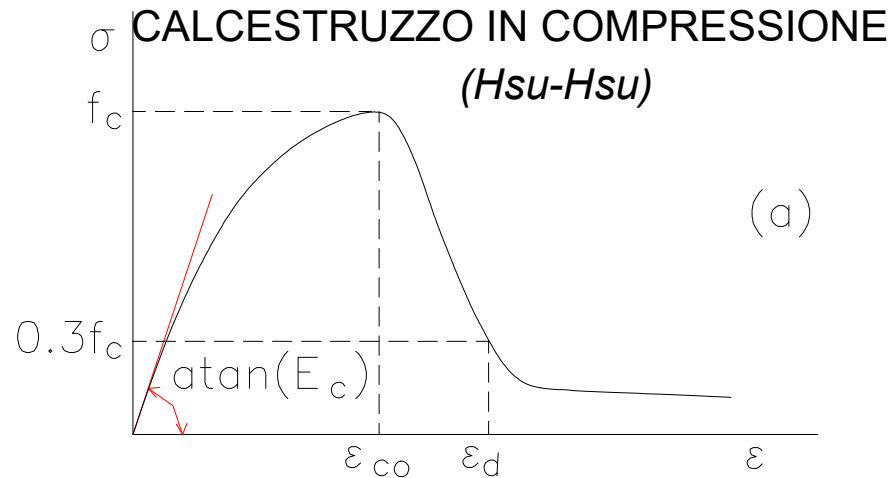
**cerniere
plastiche**

ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

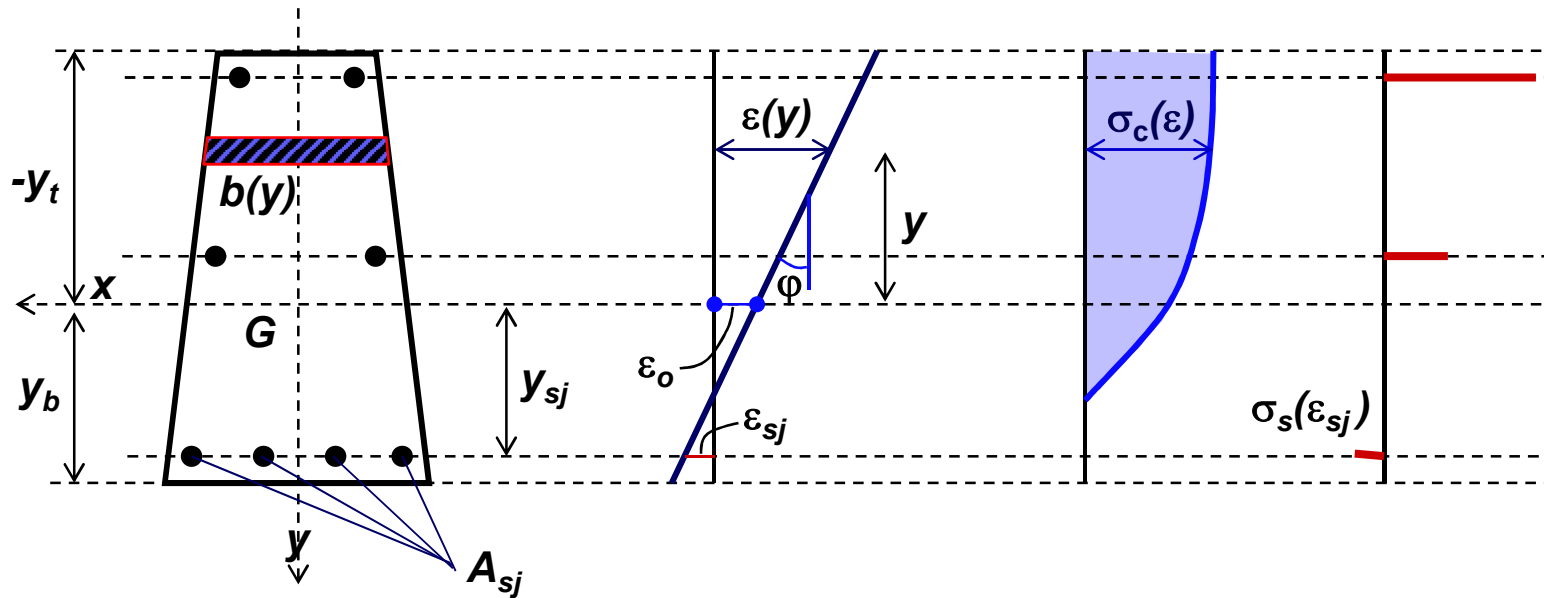


- Per le cerniere plastiche è necessario definire un legame momento-rotazione di tipo rigido-plastico. Tale legame si deve determinare mediante il diagramma momento-curvatura della sezione.

LEGAMI COSTITUTIVI DEI MATERIALI



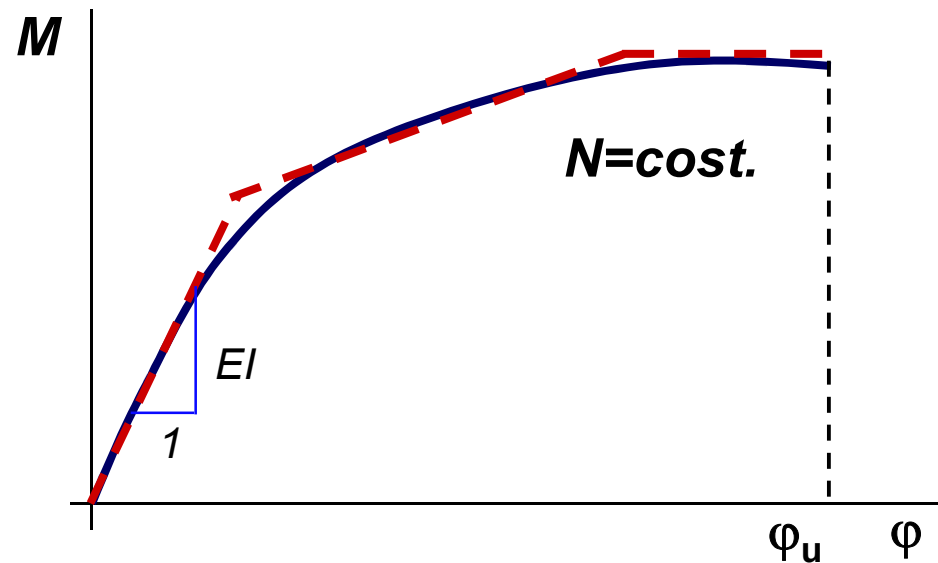
CALCOLO DIAGRAMMI $M-\phi-N$



$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_0 - \phi \cdot y \\ N = \int_{-y_t}^{y_b} b(y) \cdot \sigma_c(\epsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m A_{sj} \cdot \sigma_s(\epsilon_{sj}) \\ M = \int_{-y_t}^{y_b} y \cdot b(y) \cdot \sigma_c(\epsilon) \cdot dy + \sum_{j=1}^m y_{sj} \cdot A_{sj} \cdot \sigma_s(\epsilon_{sj}) \end{array} \right.$$

DIAGRAMMA $M-\phi-N$

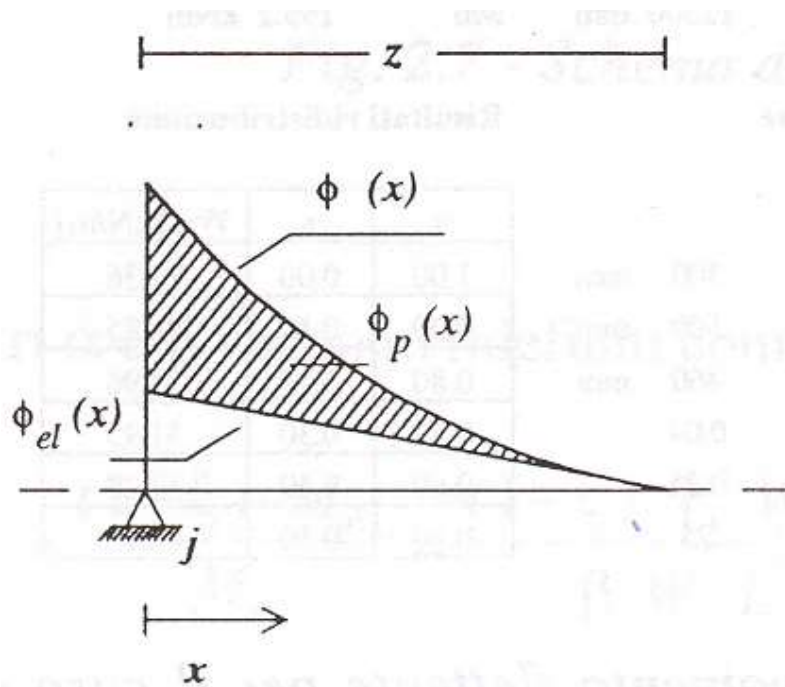
I diagrammi momento-curvatura sono ricavati per punti dalle equazioni di equilibrio sulla sezione. *Per semplicità può anche essere approssimato con una trilineare.*



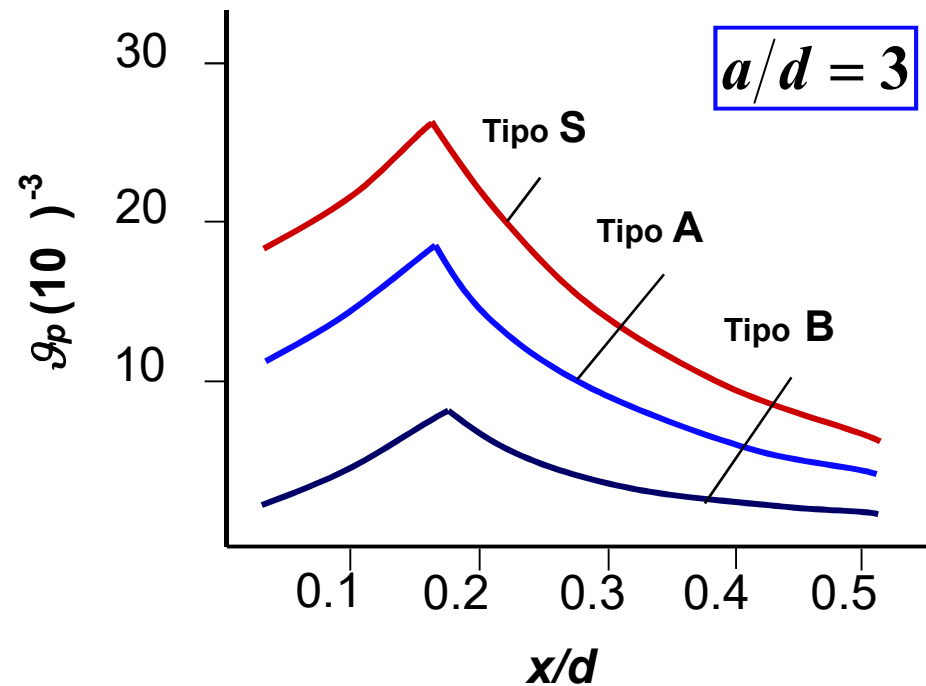
ROTAZIONE PLASTICA

Per definire il legame momento-rotazione relativo agli elementi a plasticità concentrata è necessario integrare le curvature non lineari sul tratto compreso tra la sezione critica e quella di momento nullo

$$\mathcal{G}_{pj} = \int_0^z [\varphi(x) - \varphi_{el}(x)] \cdot dx$$



Relazione MC 90



ROTAZIONE PLASTICA

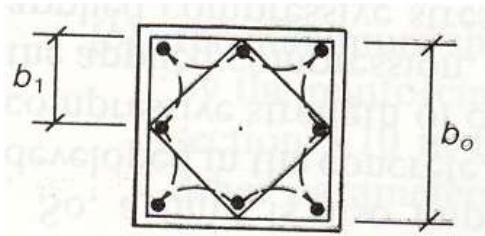
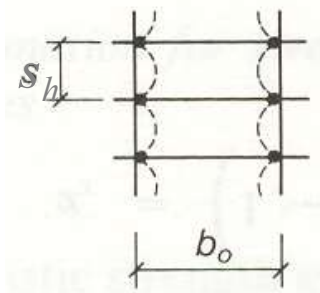
Nella Circolare 2019 la rotazione ultima è data dalla relazione

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0.016 \cdot 0.3^{\nu} \left[\frac{\max(0.01; \omega')}{\max(0.01; \omega)} f_c \right]^{0.225} \left(\frac{L_V}{h} \right)^{0.35} 25^{\left(\alpha \rho_{sx} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} \cdot 1.25^{100 \rho_d}$$

$$\nu = \frac{N}{f_c A_c} \quad \omega = \frac{f_y A_s}{f_c A_c} \quad \omega' = \frac{f_y A'_s}{f_c A_c} \quad \rho_{sx} = \frac{A_{sx}}{b_w s_h} \quad \text{Armature trasversali (staffe)}$$

$$\alpha = \left(1 - \frac{s_h}{2b_0} \right) \left(1 - \frac{s_h}{2h_0} \right) \left(1 - \frac{\sum b_i^2}{6h_0 b_0} \right) \quad \text{Fattore di efficienza del confinamento}$$

ρ_d è la percentuale di eventuali armature diagonali



$$L_V = M/V = \text{luce di taglio}$$

ROTAZIONE PLASTICA

Nell'OPCM 3431 viene fornita una seconda relazione per \mathcal{G}_u

$$\mathcal{G}_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \left(\mathcal{G}_y + (\varphi_u - \varphi_y) L_{pl} \left(1 - \frac{0.5 L_{pl}}{L_V} \right) \right)$$

$$\mathcal{G}_y = \varphi_y \frac{L_V}{3} + 0.0013 \left(1 + 1.5 \frac{h}{L_V} \right) + 0.13 \varphi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{Per travi e pilastri}$$

$$\mathcal{G}_y = \varphi_y \frac{L_V}{3} + 0.002 \left(1 - 0.125 \frac{L_V}{h} \right) + 0.13 \varphi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{Per pareti}$$

d_b = diametro medio barre longitudinali

φ_y = curvatura di snervamento sezione terminale

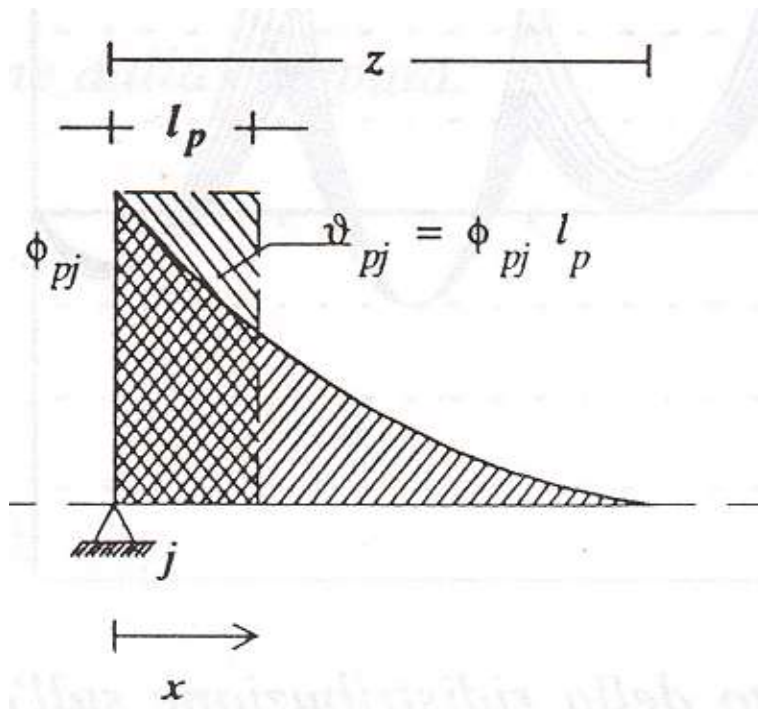
LUNGHEZZA CERNIERA PLASTICA

Anziché integrare le curvatures si può calcolare la rotazione plastica ipotizzando una zona di trave di lunghezza l_p a curvatura plastica costante definita lunghezza cerniera plastica

$$l_{pj} = \frac{1}{\varphi_j - \varphi_{el}} \cdot \int_0^z [\varphi(x) - \varphi_{el}(x)] \cdot dx$$

$$\vartheta_{pj} = \varphi_{pj} \cdot l_p$$

$$l_p = \left[\frac{E \cdot \varphi_{py}}{\varphi_p} \cdot (1.25 \omega)^F + G \left(\frac{M_u}{M_y} - 1 \right) \right] \cdot z$$



schema di trave	E	F	G
	0.92	0.16	1.89
	0.60	0.19	0.54
	0.37	0.23	0.28

(Riva, Cohn)

LUNGHEZZA CERNIERA PLASTICA

(Circolare 2019)

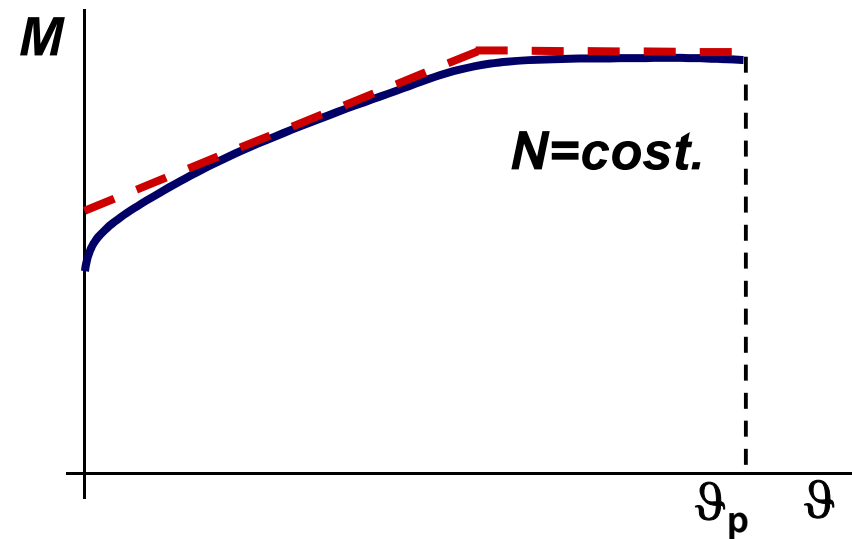
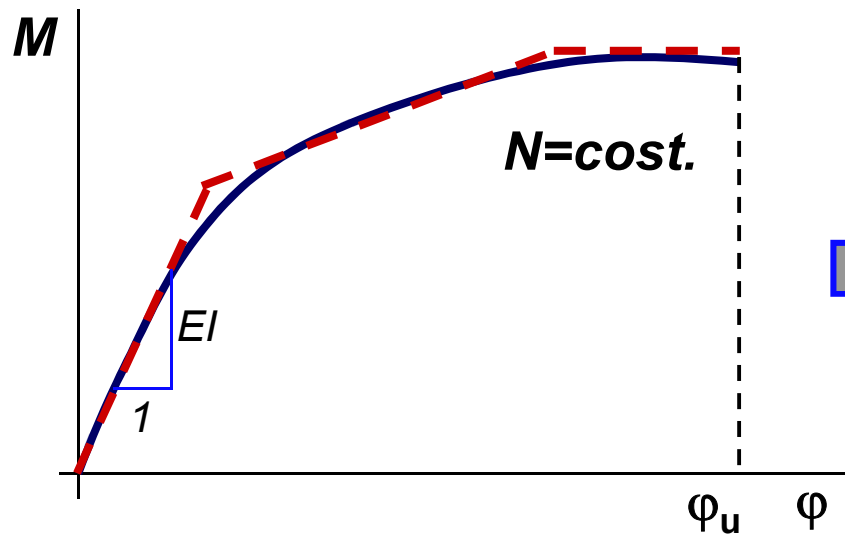
$$L_{pl} = 0,1L_V + 0,17h + 0,24 \frac{d_{bL} f_y}{\sqrt{f_c}}$$

f_y, f_c in MPa

$L_V = M/V =$ luce di taglio

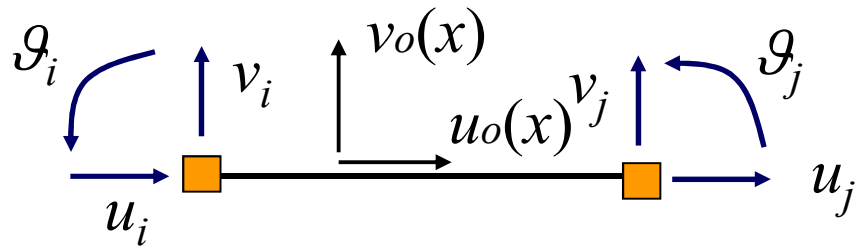
d_{bL} = diametro barre longitudinali

$$\vartheta_{pj} = \varphi_{pj} \cdot L_{pl}$$

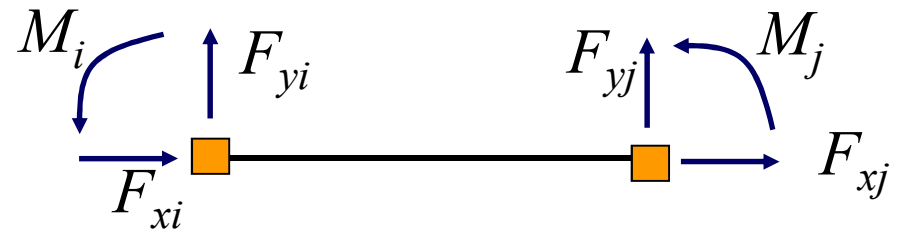


ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

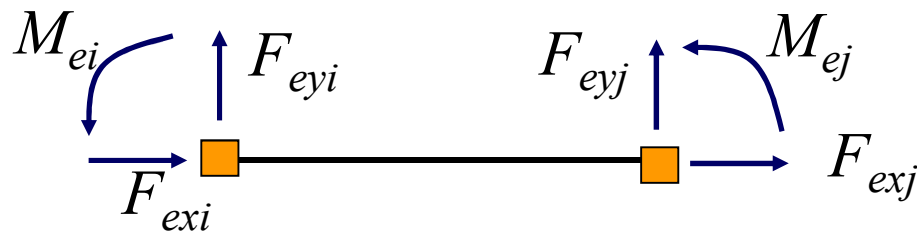
Spostamenti, forze nodali e forze nodali equivalenti ai carichi



$$S^T = [u_i \quad u_j \quad v_i \quad G_i \quad v_j \quad G_j]$$



$$F^T = [F_{xi} \quad F_{xj} \quad F_{yi} \quad M_i \quad F_{yj} \quad M_j]$$



$$F_e^T = [F_{exi} \quad F_{exj} \quad F_{eyi} \quad M_{ei} \quad F_{eyj} \quad M_{ej}]$$

Elemento di tipo Eulero-Bernoulli.

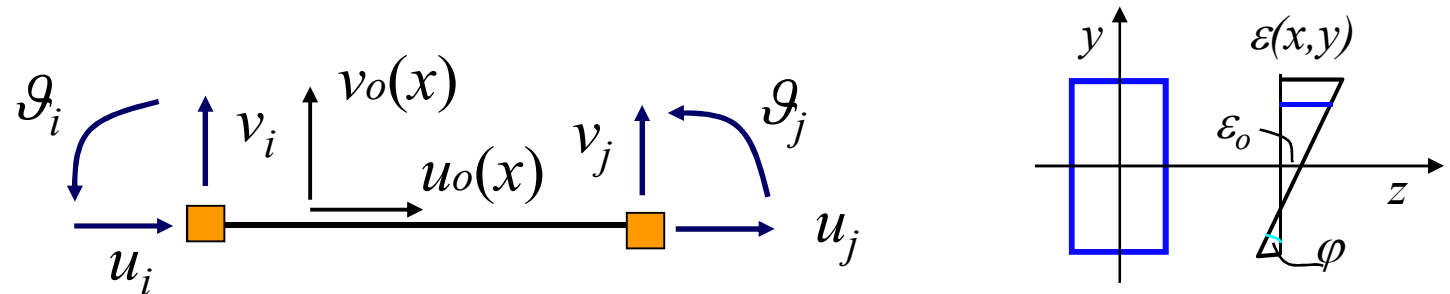
$$u(x) = \begin{bmatrix} u_o(x) \\ v_o(x) \end{bmatrix} \quad \varepsilon(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_o(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix}$$

$$u(x, y) = [1 \quad -y] \begin{bmatrix} u_o(x) \\ \frac{\partial v_o(x)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(x, y) = \underbrace{[1 \quad -y]}_{L(y)} \begin{bmatrix} \varepsilon_o(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix}$$

CAMPI DI SPOSTAMENTO

Operando con la formulazione in spostamenti si ha



Nell'elemento classico a due nodi, si fanno le seguenti ipotesi sui campi di spostamento

$$u_o(x) = \textit{lineare}$$

$$v_o(x) = \textit{cubico}$$

$$u(x) = N(x) S$$

Per cui le deformazioni sulla sezione risultano

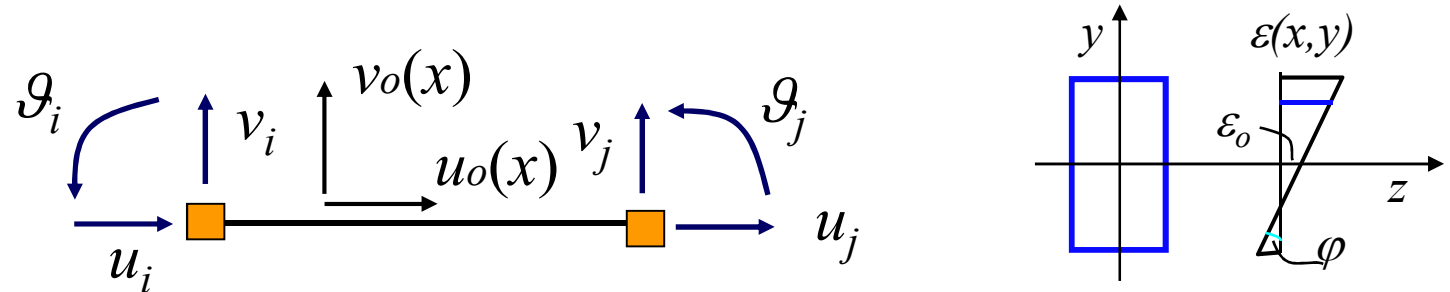
$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \textit{costante} \\ \textit{lineare} \end{array}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = B(x) S$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = L(y) B(x) S$$

FORMA APPROSSIMATA PER A.N.L.

Operando con la formulazione in spostamenti si ha



La **formulazione è approssimata** perché le equazioni differenziali della trave:

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \qquad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = 0$$

ammettono soluzione

$$u(x) = \textit{lineare} \qquad v(x) = \textit{cubico}$$

solo nel caso di comportamento elastico lineare e sezione costante ($EA = \text{cost}$, $EI = \text{cost}$).

Nel caso di comportamento nonlineare, la soluzione è tanto più approx quanto maggiore è la non linearità

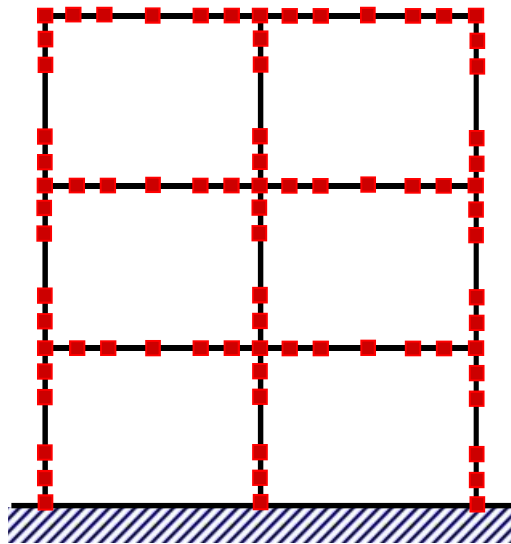
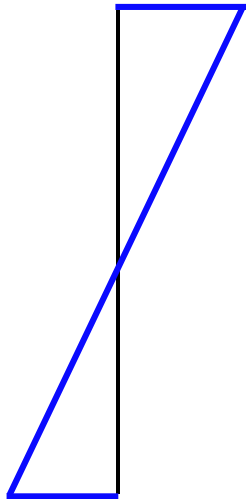
ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

- **Formulazione in spostamenti**
 - Gli elementi sono approssimati nel caso di comportamento materiale non lineare
 - Non esistono elementi più sofisticati che funzionino veramente bene
 - Bisogna infittire la mesh, cioè usare più di un elemento per ogni trave o colonna
 - Quanti elementi?

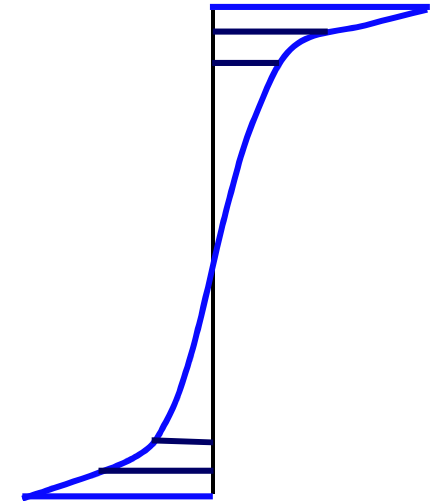
ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

- **Formulazione in spostamenti**

Curvature lineari



Curvature non lineari



- **Si cerca di infittire la mesh nei punti di maggiore non linearità**
- **Alcuni programmi seguono procedure di re-mesh adattativa**
- **Possibili problemi di localizzazione delle deformazioni**

ANALISI NON LINEARE - OSSERVAZIONI

Per l'analisi non lineare delle strutture a telaio si possono usare metodi a plasticità concentrata e metodi a plasticità distribuita

I metodi a plasticità concentrata sono più semplici ma richiedono la definizione a priori dei legami momento-rotazione per le zone plastiche (cerniere plastiche)

I metodi a plasticità distribuita basati sulla formulazione in spostamenti richiedono un maggiore onere computazionale. Per migliorare la soluzione è necessario infittire la mesh nelle zone di maggiore non linearità.