

# LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione  $I: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$   $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$   
è chiamata **COSTANTE DEL MOTO** (o integrale primo),  
per un sistema Lagr. a  $n$  gradi di lib. con Lagrangiana  $L$ ,  
se la funzione composta  $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$  è cost. in  
 $t$  per  $\bar{q}(t)$  che soddisfa le eq. di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt} (I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)) = 0 \quad \text{in } \bar{q}(t) \text{ che risolve eq. Lagr.}$$

$$\sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial I}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

$\leadsto$  Se conosco la funzione  $I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  e so che è  
una cost. del moto, allora posso scrivere

l'eq.

$$I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = I_0$$

← famiglia (al variare  
di  $I_0$ ) di eq.  
diff. del 1° ordine

che il moto reale sicuramente soddisfa

↳ posso utilizzarla per risolvere il problema  
di integrare le eq. di Lagrange

## Conservazione dell'ENERGIA in sistemi Lagrangiani

Def. Per sistemi Lagrangiani a  $n$  gradi di lib. e Lagrangiana  $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

definiamo

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \equiv \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo la derivata  $\frac{d}{dt}$  di  $E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$

$$\frac{d}{dt} E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \sum_{h=1}^m \left( \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + q_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) -$$

$$- \sum_{h=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial q_h} q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{h=1}^m \dot{q}_h \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

è valutata in  $\bar{q}(t)$   
 se  $\bar{q}(t)$  risolve eq. di Lagr.

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Invariante delle  
 Lagrangiane sotto  
 traslazioni temporali.

⇒ Se  $L$  NON DIP. ESPlicitATI. dal TEMPO ( $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ )

allora  $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  è una cost. del moto

Per un sistema meccanico conservativo

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k - V(\bar{q})$$

↑  
 è una funzione  
 OMOGENEA di grado 2  
 nelle  $\dot{q}_h$

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{h=1}^m \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L$$

Def. Funzione  $f(x_1, \dots, x_N)$  si dice **OMOGENEA** di grado  $\alpha$  se  $\forall \lambda > 0$  e ogni scelta di  $x_1, \dots, x_N$  si ha

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N)$$

ES.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_1 \quad \alpha = 2$   
 $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}} \quad \alpha = 1/2$

Lemma  $f$  omogenea di grado  $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$

Dim.  $0 = \frac{d}{d\lambda} \left[ f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) - \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N) \right] \Big|_{\lambda=1} =$   
 $= \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N)}{\partial x_i} x_i - \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_N) \right) \Big|_{\lambda=1} //$

$$E = \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{T \text{ omog. di grado } 2} - \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - T + V =$$

$$= 2T - T + V = T + V$$

- Nel caso in cui abbiamo forze puramente posizionali  
 $E$  è l'energia totale del sist. meccanico

- Se  $V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$  ↙ lineare omog. in  $\dot{q} \leftarrow \alpha = 1$

$$\Rightarrow - \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = -V_1$$

$$E = 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$

↳  $V_1$  non contribuisce all'energia totale del sistema:

$$V_1(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \Omega_k(q)$$

$$\hookrightarrow Q_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial V_1}{\partial q_n} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \Omega_l}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_l - \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_n}$$

Tale forza è ORTOGONALE alla vet. velocità  $\dot{q}$ :

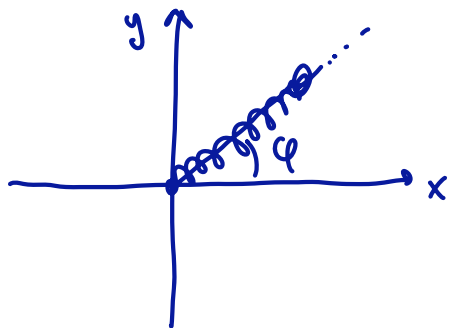
$$\sum_n \dot{q}_n Q_n = \sum_{l,n} \frac{\partial \Omega_l}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_l \dot{q}_n - \sum_{k,n} \dot{q}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_n} \dot{q}_n = 0$$

entrambi sono modi diversi  
di scrivere

$$\sum_{a,b} \frac{\partial \Omega_a}{\partial \dot{q}_b} \dot{q}_a \dot{q}_b$$

Siccome  $\vec{Q} \cdot \dot{\vec{q}} = 0$ , la forza  $\vec{Q}$  non compie lavoro sul pt materiale e quindi non contribuisce al bilancio energetico del pt materiale stesso.

ESEMPIO: oscillatore armonico bidimensionale



$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

$\omega^2 = k/m$

Eq. di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \leadsto \quad x(t) = A_x \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \quad \leadsto \quad y(t) = A_y \cos(\omega t + \phi_y)$$

Passiamo a coord. polari:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \quad \leftarrow \quad L \text{ non dep. esplicitam. dalle coord. } \phi$$

→ eq. Lagr.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \ddot{r} = -\omega^2 r + r \dot{\phi}^2$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\phi} \text{ è una COST. DEL MOT}$$

$\uparrow = 0$

Sapendo che  $m r^2 \dot{\phi} = l \xleftarrow{\text{cost.}} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{m r^2}$  che posso sostituire

in prima eq.  $\ddot{r} = -\omega^2 r + \frac{l^2}{m^2 r^3}$

↪ Equazione in incognita  $r(t)$ .

Viene da Lagrangiana

$$L_{\text{eff.}} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 - \frac{l^2}{2mr^2}$$

← come si arriva a pta Lagrangiana?

## COORDINATE CICLICHE O IGNORABILI

Consideriamo un sist. Lagr. a  $n$  gradi di lib. e supponiamo che  $L$  non dip. esplicitam. da alcune coordinate (dette **COORDINATE CICLICHE**),  $q_{m+1}, \dots, q_n$

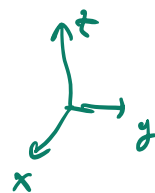
$$L = L(q_1, \dots, q_m, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{\text{velocità}}, t)$$

Se  $L$  non dipendesse da una  $q_i$ , la matrice cinetica avrebbe una riga e una colonna di zeri e non sarebbe strettamente definita positiva

ES. Pt. materiale soggetto a forza di gravità.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad V = mgz$$

$q_{1,2,3}$



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$\rightarrow x \text{ e } y \text{ sono COORD. CICLICHE}$

OSSERVAZIONE: quando  $q_{\hat{i}}$  è coordinata ciclica, la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$\begin{aligned} q_h &\mapsto q_h & h \neq \hat{i} & & \dot{q}_h &\mapsto \dot{q}_h & \forall h \\ q_{\hat{i}} &\mapsto q_{\hat{i}} + c & & & & & c \text{ cost.} \end{aligned}$$

[ Possiamo definire delle funzioni (VARIABILI DINAMICHE)

$$p_{\hat{i}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\hat{i}}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

dette **MOMENTI CONIUGATI**. ]

Se  $q_{m+1}, \dots, q_n$  sono coordinate cicliche, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_l(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) &= & l = m+1, \dots, n \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial q_l} = 0 \end{aligned}$$

$\uparrow$  se il moto  $\bar{q}(t)$  soddisfa le eq. di Lagr.       $\uparrow$   $q_l$  è ciclica

$\Rightarrow$  i momenti coniugati  $p_l$  ( $l = m+1, \dots, n$ ), relativi alle coord. cicliche, sono **COSTANTI DEL MOTO**

[  $p_l$  è detto momento coniugato di  $q_l$  ]

ES)  $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgyz$

$x$  è ciclica  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$   
 $y$  " "  $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

$\rightarrow$  quantità di moto lungo  $x$  e  $y$  è conservate

Usiamo ora queste cost. del moto per "ridurre i gradi di libertà"

- Prendiamo  $p_l(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

- Insieme di livello (def. dal valore della cost. del moto) su cui il moto si muove è dato dal luogo dei pt. f.c.

(\*)  $\vec{P}_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \underbrace{\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n}_{\text{prendiamo queste come le } n-m \text{ incognite delle } n-m \text{ equazioni}})$   $l = m+1, \dots, n$   
 $\rightarrow$  è una cost.

- Risolviamo  $\uparrow$  nelle  $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$

$$\Rightarrow \dot{q}_e = u_e (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

- Definiamo una **Lagrangiana efficace** (o Lagrangiana RIDOTTA)

$$L^* (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t; \underbrace{\tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n}_{\text{PARAMETRI}}) \equiv$$

$$\equiv L (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, u_{m+1} (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t))$$

$$\dots u_n (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

$$- \sum_{e=m+1}^m \tilde{p}_e u_e (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$



$$L^* = \left( L - \sum_{k=m+1}^m \tilde{p}_k \dot{q}_k \right) \Big|_{\dot{q}_{e=m+1, \dots, m} = u_e}$$

Prendiamo  $L^*$  e lo trattiamo come la Lagrangiana di un sistema (ausiliario) a  $m$  gradi di libertà ( $m < n$ ).

Eq. di Lagrange per  $L^*$   $h = 1, \dots, \underline{m}$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_{l=m+1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_h} - \sum_{l=m+1}^m \tilde{p}_l \frac{\partial u_l}{\partial q_h}$$

$\underset{\substack{= \\ p_l}}{\partial \dot{q}_l}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{l=m+1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial u_l}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{l=m+1}^m \tilde{p}_l \frac{\partial u_l}{\partial \dot{q}_h} \right]$$

$\underset{\substack{= \\ p_l}}{\partial \dot{q}_l}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad \Big| \text{valutata in } q_h(t)$$

$h = 1, \dots, \underline{m}$



⇒ Le equazioni di Lagr. di  $L^*$  coincidono con le prime m eq. di Lagr. di  $L$  (usando le  $(*)$ )

↪ le funz.  $q_k(t)$  ( $k=1, \dots, m$ ) che risolvono le equazioni di Lagrange di  $L^*$ , risolvono anche le eq. di Lagr. di  $L$ .

Come determiniamo le  $q_k(t)$   $k=m+1, \dots, n$ ?

Le rispettive eq. di Lagrange sono state utilizzate per ricavare  $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$  in funz. delle  $q_k, \dot{q}_k$   $k=1, \dots, m$  ( $u_k$ )

$$\rightarrow \dot{q}_k(t) = u_k \left( \underbrace{q_1(t), \dots, q_m(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_m(t), \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t}_{\text{Funzione di } t \text{ nota una volta risolte le } m \text{ eq. di Lagr. di } L^* \text{ e inventato } p_{k+1}, \dots, p_n = \tilde{p}_k} \right)$$

↓  
 eq. diff. del 1° ordine in le  $q_k(t)$ ,  
 del tipo  $\dot{x} = f(t)$ , cioè sono risolvibili  
 per integrazione (quadratura).

ES)  $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgyz$   $m=3 \quad n=1$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_x &= m\dot{x} \rightsquigarrow \dot{x} = \tilde{p}_x/m & \tilde{p}_y &= m\dot{y} \rightsquigarrow \dot{y} = \tilde{p}_y/m \\ L^* &= L - \tilde{p}_x \dot{x} - \tilde{p}_y \dot{y} \Big|_{\dot{x}=\frac{\tilde{p}_x}{m}, \dot{y}=\frac{\tilde{p}_y}{m}} = \frac{m}{2} \left[ \left(\frac{\tilde{p}_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{p}_y}{m}\right)^2 + \dot{z}^2 \right] - mgyz - \frac{\tilde{p}_x \tilde{p}_y}{m} - \tilde{p}_y \frac{\tilde{p}_x}{m} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgyz - \frac{\tilde{p}_x^2}{2m} - \frac{\tilde{p}_y^2}{2m} = L^*(z, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}} = m \ddot{z} \quad \frac{\partial L^*}{\partial z} = -mgy \Rightarrow \ddot{z} = -g \rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 z t + z_0$$

$x(t), y(t)$ ? usiamo  $\begin{cases} \dot{x} = \tilde{p}_x/m \\ \dot{y} = \tilde{p}_y/m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{\tilde{p}_x}{m} t + x_0 \\ y(t) = \frac{\tilde{p}_y}{m} t + y_0 \end{cases}$