ES.) PARTICELLA IN CAMPO MAGNETICO COSTANTE

Prendiamo particella di carica e in camo magnetico cost.

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \longleftarrow \quad \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \quad \text{con} \quad \bar{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

↑ in base $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$

Abbiamo visto che la Lagrangiana è data da

$$L = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 - e\,\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A} \qquad (\text{teniamo } \bar{E} = 0)$$

Qnd A è dato da $(*)$, abbiamo

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2}(\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z})\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Passiamo a coord CILINDRICHE $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\,\text{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$

$$\Rightarrow x\dot{y} - y\dot{x} = r\underline{\cos\varphi}\,(\cancel{\dot{r}\,\text{sen}\,\varphi} + r\dot{\varphi}\underline{\cos\varphi}) - r\,\underline{\text{sen}\,\varphi}\,(\cancel{\dot{r}\cos\varphi} - r\dot{\varphi}\,\underline{\text{sen}\,\varphi})$$

$$= r^2\dot{\varphi}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2}r^2\dot{\varphi}$$

→ In queste coordinate ci accorgiamo che c'è una COORDINATA CICLICA $\underline{\underline{\varphi}}$

Possiamo usare la coord. ciclica φ per ridurre il problema:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} - \frac{eB}{2}r^2 \quad \text{chiamiamo qta costante } \ell$$

$$\longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} + \frac{eB}{2m} \qquad (\star)$$

$$L^* = L(r,\varphi,z)\Big|_{(*)} - \dot\varphi\, p_\varphi\Big|_{(*)}$$

$$= \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}\dot z^2 + \frac{m r^2}{2}\left(\frac{\ell}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)^2 - \frac{eBr^2}{2}\left(\frac{\ell}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)$$

$$- \ell\left(\frac{\ell}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot r^2 + \dot z^2) + \left(\frac{\ell}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)\Big[\underbrace{\frac{\ell}{2} + \frac{eBr^2}{4} - \frac{eBr^2}{2} - \ell}_{-\frac{\ell}{2} - \frac{eBr^2}{4}}\Big]$$

$$= \frac{m}{2}(\dot r^2 + \dot z^2) - \frac{1}{2mr^2}\left(\ell + \frac{eBr^2}{2}\right)^2$$

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2mr^2}\left(\ell + \frac{eBr^2}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{eB\ell}{2m} + \frac{(eB)^2 r^2}{8m}$$

Possiamo studiare questo potenziale.

- $V_{eff}'(r) = -\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{e^2B^2 r}{4m}$

  $V_{eff}'(r) = 0$ quando $r^4 = \frac{4\ell^2}{(eB)^2} \rightsquigarrow r_* = \sqrt{\frac{2\ell}{eB}}$

- $V_{eff}''(r) = \frac{3\ell^2}{mr^4} + \frac{e^2B^2}{4m} \to V_{eff}''(r_*) = \frac{(eB)^2}{m}$

- Esiste traiettoria con $z(t) = z_0$ $\quad r(t) = r_*$

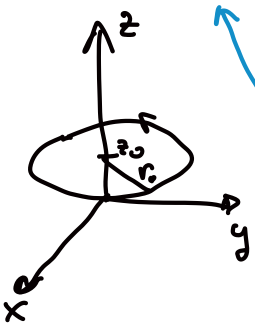
  vediamo cos'è $\varphi(t)$, usando $\dot\varphi(t) = \frac{\ell}{mr(t)^2} + \frac{eB}{2m}$ e $r(t) = r_*$

  $\rightsquigarrow \dot\varphi(t) = \frac{eB}{m} \longrightarrow \varphi(t) = \left(\frac{eB}{m}\right)t + \varphi_0$

FREQUENZA ANGOLARE DI CICLOTRONE

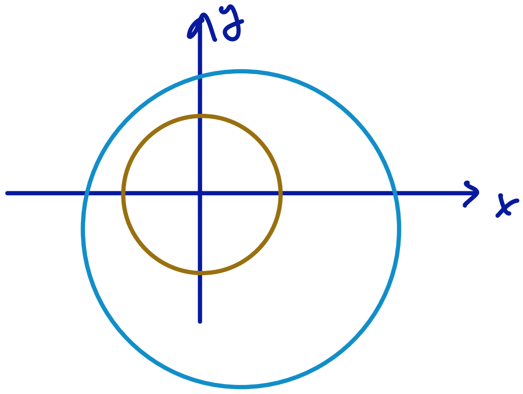
PERIODO (tempo φ va da 0 a 2π): $\frac{2\pi m}{eB}$

$\to$ TRAIETTORIA CIRCOLARE



Noi sappiamo che una carica in campo magnetico cost., se $\vec{v}_0 \perp B$, compie sempre una traiettoria circolare.

Il fatto è che in qte coord. polari, le altre traiettorie circolari sono difficili da vedere, perché $r(t)$ e $\varphi(t)$ sono funzioni non banali di t:



Solo quando scegliamo l'origine del sist. di rif. come il centro della traiettoria circolare, abbiamo

$r(t) = r_0 \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$

Osservazione: Quanto visto finora (cioè la relazione tra coordinate cicliche e cost. del moto) può essere formulato nel seguente modo. Prendiamo q_l coord. ciclica:

- L invariante sotto la seguente trasf.

$$\bar{q} \mapsto \bar{q}' = \bar{\varphi}(\alpha, \bar{q})$$
$$\dot{\bar{q}} \mapsto \dot{\bar{q}}' = \bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

dove (nel caso sopra)

$$\varphi_h(\alpha, \bar{q}) = q_h + \alpha\, \delta_{hl} \qquad (*)$$
$$\psi_h(\alpha, \bar{q}) = \dot{q}_h$$

L indip. q_l $\Longleftrightarrow$ L è INVARIANTE sotto la trasf $(*)$

$\Downarrow$

$\exists$ cost. del moto (suo mom. con.)

$$L(\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Legge di conservazione ($\exists$ cost. del moto) $\longleftrightarrow$ proprietà di INVARIANZA di L (SIMMETRIA)

Prop. TEOREMA DI NÖTHER

Sia $\bar{q} \mapsto \bar{\varphi}(\alpha, \bar{q})$ una trasformazione di simmetria CONTINUA*

(una famiglia di diffeomorfismi locali dipendenti da un parametro α)

che sia definita e differenziabile in α in un intorno di $\alpha = 0$, e soddisfacente

$$\bar{\varphi}(0, \bar{q}) = \bar{q}$$

Inoltre sia $\dot{\bar{q}} \mapsto \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_k \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial q_k} \dot{q}_k$

*[ES) trasf. continua $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in [0, 2\pi]$

trasf. discreta $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha q_1 \\ \alpha q_2 \end{pmatrix}$ $\alpha = 1, -1$]

Se per ogni scelta di $\bar{q}$, $\dot{\bar{q}}$ e α risulta che

$$L(\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad **$$

allora la funzione (variabile dinamica)

$$P(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha}(0, \bar{q})\, p_m(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$$

è una COSTANTE DEL MOTO per le eq. di Lagr. associate a L.

[** ES) L invariante sotto rotazioni

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

$$\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \bar{q} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, q_1 + \sin\alpha\, q_2 \\ -\sin\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \dot{\bar{q}}$$

$$L(\bar{\varphi}(\alpha,\bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}})) = \frac{m}{2}\left((\cos\alpha\, \dot{q}_1 + \operatorname{sen}\alpha\, \dot{q}_2)^2 + (-\operatorname{sen}\alpha\, \dot{q}_1 + \cos\alpha\, \dot{q}_2)^2 \right)$$

$$- \frac{m\omega^2}{2}\left((\cos\alpha\, q_1 + \operatorname{sen}\alpha\, q_2)^2 + (-\operatorname{sen}\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2)^2 \right)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) =$$

$$= L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad]$$

Dim del teorema di Nöther.

indip da α

$$L(\bar{\varphi}(\alpha,\bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Derivo entrambi i membri per $\frac{d}{d\alpha}$ e alla fine pongo $\alpha=0$

$$0 = \frac{d}{d\alpha} L(\bar{\varphi}(\alpha,\bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}}), t) \Big|_{\alpha=0} = \qquad \Psi_h = \sum_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, t) \cdot \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(\alpha,\bar{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, t) \cdot \frac{\partial \Psi_h}{\partial \alpha}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}}) \right] \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \cdot \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0,\bar{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \cdot \frac{\partial \Psi_h}{\partial \alpha}(0,\bar{q},\dot{\bar{q}}) \right]$$

Valutiamo il termine a destra dell'uguale (che è una funzione nelle $2m+1$ variabili $q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t$) lungo un MOTO CHE SODDISFA le EQ. di LAGR. di L

$$0 = \sum_{h=1}^{n}\left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0,\bar q(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)\underbrace{\frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha}(0,\bar q(t),\dot{\bar q}(t))}_{=\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}\right)\cdot \dot q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}}\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\right)\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}\right)\right] =$$

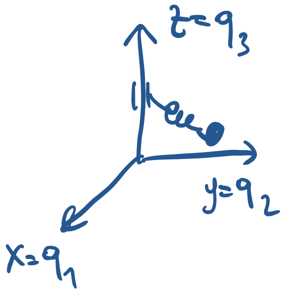
$$= \frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n} p_h(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)\,\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0,\bar q(t))$$

soddisfano eq. di Lagr.

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}P(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) = 0 \quad \Rightarrow \quad P \text{ è cost. del moto. } //$$

ES. : INVARIANZA PER ROTAZIONI

$$L = \frac{m}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \dot q_3^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2+q_2^2) - mg\,q_3$$



L è invariante sotto ROTAZIONI nel piano xy

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\end{pmatrix}$$

$$\varphi_3 = q_3 \qquad \qquad \psi_3 = \dot q_3$$

$$P = \sum_{h=1}^{3}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0,\bar q)\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}$$

$$\varphi_1 = \cos\alpha\, q_1 + \operatorname{sen}\alpha\, q_2 \qquad \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = -\operatorname{sen}\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2\Big|_{\alpha=0} = q_2$$

$$\varphi_2 = -\operatorname{sen}\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 \qquad \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = -\cos\alpha\, q_1 - \operatorname{sen}\alpha\, q_2\Big|_{\alpha=0} = -q_1$$

$\varphi_3 = q_3$ $\qquad \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = m\dot q_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_2} = m\dot q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_3} = m\dot q_3$$

$$P = q_2 \cdot m\dot q_1 + (-q_1)\cdot m\dot q_2 + (0)\cdot m\dot q_3 =$$

$$= m(\dot q_1 q_2 - \dot q_2 q_1) = -m\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ij3}\, q_i \dot q_j =$$

$$= -(\bar q \times m\dot{\bar q})_3 = -M_z$$

$$\bar r \times m\bar v = M$$

COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE LUNGO L'ASSE DI ROTAZIONE

→ Se un sistema (L) è invariante per ROTAZIONI attorno a un asse, la componente lungo tale asse del MOMENTO ANGOLARE è CONSERVATA lungo il moto

Invariante per ROTAZIONI ⟷ Conservaz. del MOMENTO ANGOLARE

Invariante per TRASLAZIONI SPAZIALI ⟷ Conservaz. della QUANTITÀ DI MOTO

Invariante per TRASLAZIONI TEMPORALI ⟷ Conservaz. dell'ENERGIA