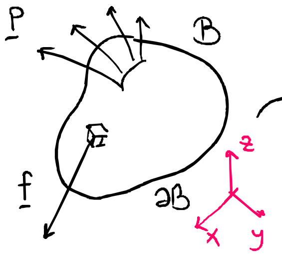
Elementi Finiti nella Meccanica Strutturale

Travi e strutture inflesse

Marco Rossi

TEORIA STRUTTURALE delle TRAVI

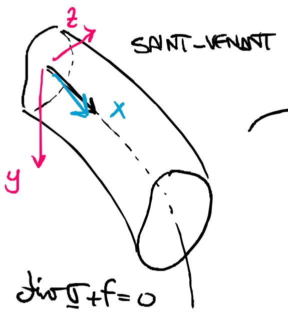


$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0$$

SOLIDO ELASTICO 3D GENERALE

↓

TEORIA GENERALE

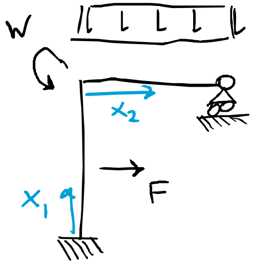


$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0$$

SOLIDO ELASTICO 3D MA CON GEOMETRIA "di TRAVE"

↓

RISULTATI CHIAVE PER LA "RIDUZIONE" DIMENSIONALE



$$EJ v^{IV} = q(x)$$

MODELLO STRUTTURALE MONODIMENSIONALE

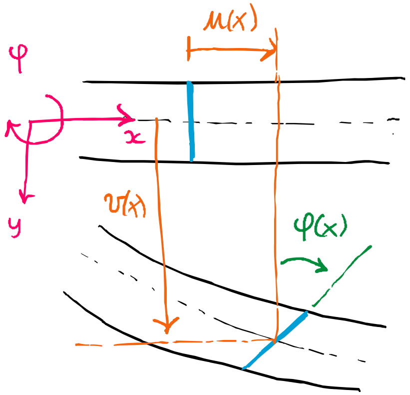
↓

MODELLO 1D STRUTTURE

DA SAINT VENANT SI RICAVANO LE CARATTERISTICHE del MODELLO 1D →

IPOTESI di NAVIER

SEZIONI RUOTANO, TRASLANO e RIMANGONO PIANE



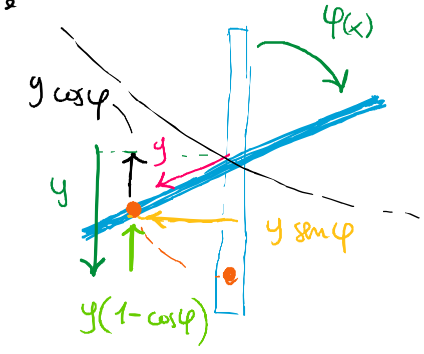
$u(x)$, $v(x)$: SPOSTAMENTO DELL'ASSE MEDIO

$\varphi(x)$: ROTAZIONE della SEZIONE

$u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ SPOSTAMENTI del GENERICO PUNTO (x,y) DELLA SEZIONE

LO SPOSTAMENTO del GENERICO PUNTO della SEZIONE è

$$\begin{cases} u_x = u_x(x,y) = u(x) - y \operatorname{sen} \varphi(x) \\ u_y = u_y(x,y) = v(x) - y\left(1 - \cos\varphi(x)\right) \end{cases}$$



LO SPOSTAMENTO GENERICO SI PUÒ SCRIVERE COME FUNZIONE DEGLI SPOSTAMENTI e ROTAZIONI dell'ASSE MEDIO (FUNZIONI di x)

IPOTESI di PICCOLI SPOSTAMENTI

$$\begin{cases} \cos\varphi(x) \approx 1 \\ \operatorname{sen}\varphi(x) \approx \varphi(x) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_x(x,y) &= u(x) - y\,\varphi(x) \\ u_y(x,y) &= v(x) \end{aligned}}$$

DEFORMAZIONI

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} - y\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, \quad \varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0$$

NON C'È DILATAZIONE IN DIREZIONE y

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\varphi(x) + \frac{\partial v}{\partial x}(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du(x)}{dx} - y\,\frac{d\varphi(x)}{dx} \\ \gamma_{xy} &= -\varphi(x) + \frac{dv}{dx}(x) \end{aligned}}$$

IPOTESI di TRAVE SNELLA – MODELLO di EULERO – BERNOULLI

IN UNA TRAVE SNELLA, LE SEZIONI RIMANGONO ORTOGONALI ALL'ASSE della TRAVE

↓

ROTAZIONE della SEZIONE È UGUALE ALLA ROTAZIONE dell'ASSE NEUTRO

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{dv}{dx}(x)}$$

IPOTESI di EULERO-BERNOULLI $\rightarrow \varphi(x) = \dfrac{dv(x)}{dx} \rightarrow \gamma_{xy} = \varphi - \dfrac{dv}{dx} = 0$

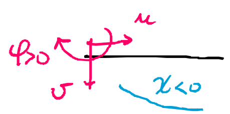
Lo scorrimento è nullo, ma dal SAINT-VENANT è noto la relazione

$$d\gamma_{xy} = \frac{dT}{GA_s} \rightarrow \underbrace{dT}_{\text{valore finito}} = \underbrace{GA_s}_{\text{deve essere infinito}} \underbrace{d\gamma_{xy}}_{\text{nullo}}$$

$$\infty \cdot 0 = k$$

Nella trave di EULERO-BERNOULLI la rigidezza al taglio è infinita

$GA_s \rightarrow \infty$, nelle travi snelle si trascura la deformabilità al taglio



In generale

$$\varepsilon_x(x) = \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\eta(x)} - y \underbrace{\frac{d\varphi}{dx}}_{-\chi(x)}, \quad \varepsilon_y(x) = 0, \quad \gamma_{xy}(x) = \underbrace{-\varphi(x) + \frac{dv(x)}{dx}}_{t(x)}$$

$\eta(x)$ deformazione longitudinale asse medio

$-\chi(x)$ curvatura

$t(x)$ scorrimento (nullo per modello EB)

Quindi

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x) = \eta(x) + y\,\chi(x) \\ \gamma_{xy}(x) = t(x) \end{cases} \rightarrow$$

Ora sfruttiamo il PLV per definire il legame tra quantità cinematiche e statiche

Lavoro interno:

$$\mathcal{L}_{VI} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \int_V \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy}\gamma_{xy} = \int_0^l \left[\int_A \sigma_x \left(\eta(x) + y\,\chi(x) \right) + \tau_{xy}\, t(x)\, dA \right] dx$$

$$= \int_0^l \left\{ \eta(x) \underbrace{\int_A \sigma_x}_{N(x)} + \chi(x) \underbrace{\int_A \sigma_x y}_{M(x)} + t(x) \underbrace{\int_A \tau_{xy}}_{T(x)} \right\} dx = \int_0^l \eta(x) N(x) + \chi(x) M(x) + t(x) T(x)$$

$N(x)$ sforzo assiale

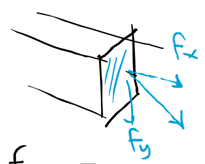
$M(x)$ momento flettente

$T(x)$ taglio

Da qui si capisce quali sono le quantità statiche connesse a quelle cinematiche

Lavoro esterno:

$\underline{f} = \{f_x, f_y\}$ è forza di volume $\quad [f] = \dfrac{F}{L^3}$



$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V u_x f_x + u_y f_y = \int_V \left(u(x) - y\,\varphi(x) \right) f_x + v(x) f_y =$$

$$= \int_0^l \left\{ u(x) \underbrace{\int_A f_x\, dA}_{p(x)} - \varphi(x) \underbrace{\int_A y f_x}_{-m(x)} + v(x) \underbrace{\int_A f_y}_{q(x)} \right\} = \int_0^l u(x) p(x) + \varphi(x) m(x) + v(x) q(x)$$

$p(x)$ carico assiale per unità di lunghezza

$-m(x)$ momento distribuito per unità di lungh.

$q(x)$ carico trasversale

Quindi il PLV per le travi è

$$\int_0^l \eta(x) N(x) + \chi(x) M(x) + t(x) T(x) = \int_0^l u(x)\, p(x) + v(x)\, q(x) + \varphi(x)\, m(x)$$

MODELLO CINEMATICO:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = u(x) - y\,\varphi(x) \\ u_y(x,y) = v(x) \end{cases}$$

CONGRUENZA:

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \eta(x) + y\,\chi(x) \\ \gamma(x) = t(x) \end{cases}$$

EQUILIBRIO INDEFINITO + EQUIVALENZA STATICA

RICAVIAMO L'EQUILIBRIO della TRAVE dal SOLIDO ELASTICO alla SAINT-VENANT

IPOTESI SAINT-VENANT

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{m} = 0 \end{cases} \longleftarrow$$

i) $\sigma_y = \sigma_z = 0$, TRASCURABILI

ii) SUP. LATERALE del SOLIDO SCARICO

PER FARE I CONTI CORRETTAMENTE SI CONSIDERA ANCHE τ_{xz}

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{m} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{=0}{m_1} \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

C.CONTORNO $\tau_{xy} m_2 + \tau_{xz} m_3 = 0$

EQ. INDEFINITE EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases}$$

DERIVANO dall'EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

SI POSSONO TROVARE ANCHE QUELLE ALLA ROTAZIONE RISP. ASSE z

↓

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\cdot y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\cdot y + f_x\cdot y = 0$$

SCRIVO LE EQUAZIONI in FORMA SEMI-INDEFINITA

TRASLAZIONE

$$\begin{cases} \displaystyle\int_A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x\right) = 0 \quad (1) \\ \displaystyle\int_A \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y\right) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

ROTAZIONE

$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} y + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} y + f_x \cdot y\right) = 0 \quad (3)$$

EQUAZ. (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{\int_A \sigma_x}^{N(x)} + \int_A \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + \overbrace{\int_A f_x}^{P(x)} = 0$$

↓

$$\boxed{\frac{dN(x)}{dx} = -p(x)}$$

EQ. EQUILIBRIO IN DIREZIONE ASSIALE!!

USO IL TEOREMA di GAUSS

$$\int_A \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \int_A \mathrm{div}\begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{\partial A} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_{\partial A} \tau_{xy} m_2 + \tau_{xz} m_3 = 0$$

PER LE C.CONTORNO

EQUAZ. (2)

$$\int_A \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \int_A f_y = \frac{\partial}{\partial x}\overbrace{\int_A \tau_{xy}}^{T(x)} + \overbrace{\int_A f_y}^{q(x)} = 0$$

$$\boxed{\frac{dT(x)}{dx} = -q(x)}$$

EQ. EQUILIBRIO di TRAVE IN DIREZIONE TRASVERSALE

EQUAZ. (3)

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x y) - \int_A \sigma_x \overbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}^{0} + \int_A \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}\cdot y) - \overbrace{\int_A \tau_{xy}\cdot \overbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}^{1}}^{T(x)} + \int_A \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz} y) - \int_A \tau_{xz}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}^{0} + \overbrace{\int_A f_x\, y}^{m(x)} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{\int_A \sigma_x y}^{M(x)} + \int_{\partial A} y\,\overbrace{(\tau_{xy} m_2 + \tau_{zx} m_3)}^{0} - T(x) + m(x) = 0$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = T(x) - m(x)}$$

EQUILIBRIO alla ROTAZIONE

ABBIAMO RICAVATO le EQUAZIONI DI EQUILIBRIO del CONCIO DI TRAVE A PARTIRE dal SOLIDO di SAINT-VENANT !!

MANCA IL LEGAME COSTITUTIVO

CON LE IPOTESI STATICHE E CINEMATICHE SI HA

$$\sigma_{xy} = \sigma(x) = E\left(\eta(x) + y\,\chi(x)\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x) = G\,t(x)$$

ORA SI POSSONO UNIRE EQ. del LEGAME COSTITUTIVO con EQUIVALENZA STATICA

$$N(x) = \int_A \sigma(x)\,dA = \int_A E\eta(x) + \int_A y\,E\chi(x) =$$

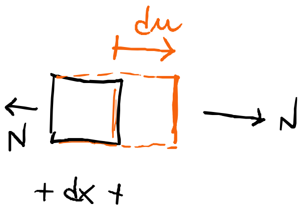
$$= E\eta(x)\int_A dA + E\chi(x)\underbrace{\int_A y\,dA}_{S_z=0} = EA\,\eta(x)$$

$S_z = 0$ MOMENTO STATICO NULLO

$$\boxed{N(x) = EA\,\eta(x)}$$

INOLTRE $\eta(x) = \dfrac{du}{dx} \rightarrow \boxed{du = \dfrac{N}{EA}\,dx}$

SPOSTAMENTO INFINITESIMO della SEZIONE



$$M(x) = \int_A \sigma_x \cdot y\,dA = \int_A E\eta(x)\cdot y + \int_A E y^2 \chi(x) = E\eta(x)\underbrace{\int_A y\,dA}_{S_z=0} + E\chi(x)\underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_z} = EJ\chi(x)$$

$S_z = 0$ MOMENTO STATICO NULLO

$$\boxed{M(x) = EJ\chi(x)}$$

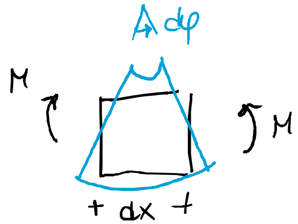
LEGAME MOMENTO CURVATURA (LINEA ELASTICA)

$\chi(x) = -\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \rightsquigarrow \boxed{d\varphi = -\dfrac{M(x)}{EJ}\,dx}$ ROTAZIONE INFINITESIMA DELLA SEZIONE

NEL MODELLO di EULERO-BERNOULLI

$\varphi(x) = \dfrac{dv(x)}{dx}$ ROTAZ. della SEZIONE PARI ALLA ROTAZIONE dell'ASSE MEDIO

$\chi(x) = -v''(x)$

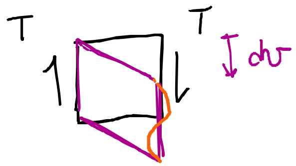


EQ. LINEA ELASTICA SECONDO EULERO-BERNOULLI

$$\boxed{v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}}$$

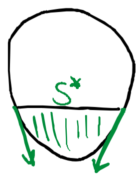
$\leftarrow$ $\chi(x)$ è LA CURVATURA della TRAVE

LA DEFORMAZIONE a TAGLIO è PIÙ DELICATA $\longrightarrow$ ENTRA IN GIOCO IL FATTORE di TAGLIO



SI ASSUME la VALGA JOURAWSKI

$$\tau = \frac{T S^*}{J b} \rightarrow \text{PROBLEMI AL BORDO}$$



$\rightsquigarrow$ τ_{xz} e τ_{yz} NON SONO PIÙ INDIPENDENTI ed ENTRANO NEL LAVORO DI DEFORMAZIONE

CLAPEYRON (LAVORO CONCIO INFINITESIMO)

$$\frac{1}{2}T\,dv = \frac{1}{2}\int_V \underline{\sigma}\cdot\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\int_V \underline{\sigma}\cdot \underline{C}^{-1}\underline{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2G}\int_V \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \frac{dz}{2G}\int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)\,dz$$

$$T\frac{dv}{dz} = \frac{1}{G}\int_A \tau_{xy}^2\,(1+\alpha(y)) = \frac{T^2}{G}\frac{\chi}{\underbrace{A}_{A_s}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{T}{GA_s}}$$

DEFORMABILITÀ AL TAGLIO

MODELLO EB
$\gamma = 0$, T FINITO
$GA_s \to \infty$

TRAVE DI EULERO - BERNOULLI (TRAVE SNELLA)

- $v'(x) = \varphi(x) \longrightarrow$ SCORRIMENTO NULLO $\longrightarrow$ NO DEFORMABILITÀ AL TAGLIO
- ROTAZIONE della SEZIONE IDENTICA alla ROTAZIONE dell'ASSE ($\chi(x)$ è CURVATURA dell'ASSE)
- SUPPONGO di TRASCURARE $m(x)$ PER SEMPLICITÀ
- SUPPONGO di CONSIDERARE SOLO PARTE FLESSIONALE ($\eta(x)$ PRODUCE DEF. ASSIALI, DISACCOPPIATO)

MODELLO CINEMATICO

$$\begin{cases} u_x(x,y) = -y\,v'(x) \\ u_y(x,y) = v(x) \end{cases}$$

CONGRUENZA:

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = -y\,v''(x) \\ \gamma(x) \equiv 0 \end{cases}$$

LEGAME COSTITUTIVO + EQUIVALENZA STATICA

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$$

EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -q(x) \\ \dfrac{dM}{dx} = T(x) \end{cases} \longrightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} \;\Big\downarrow\; \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

EQUAZIONE della LINEA ELASTICA del 4° ORDINE

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[-EJ\,\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right] = -q(x) \longrightarrow \left[EJ\,v''(x)\right]'' = q(x), \quad x \in [0,\ell]$$

EQUAZIONE DIFF. 4° ORDINE

Se $EJ = \text{cost}$

$$\boxed{EJ\,v^{IV}(x) = q(x)}$$

EQUAZIONE di EQUILIBRIO PER TRAVE ELASTICA e OMOGENEA SECONDO IL MODELLO DI EULERO - BERNOULLI

BISOGNA CONSIDERARE ANCHE LE CONDIZIONI al CONTORNO

- $v(x)$, $\varphi(x) = v'(x) \longrightarrow$ C. CONTORNO ESSENZIALI (QUANTITÀ CINEMATICHE)
- $M(x) = -EJv''(x)$, $T(x) = -EJv'''(x) \longrightarrow$ C. CONTORNO NATURALI (QUANTITÀ STATICHE)

$$\begin{cases} v(0) = v_0 \\ v'(0) = v_0' \\ v''(0) = v_0'' \\ v'''(0) = v_0''' \end{cases} \qquad \begin{cases} v(L) = v_L \\ v'(L) = v_L' \\ v''(L) = v_L'' \\ v'''(L) = v_L''' \end{cases}$$

BISOGNA FISSARE ALCUNE DI QUESTE

FORMA DEBOLE

$$\begin{cases} EJv^{IV}(x) - q(x) = 0, \; x \in [0,\ell] \\ v(x), v'(x), v''(x), v'''(x), \; x = 0 \vee x = \ell \end{cases}$$

$\longrightarrow$ RICAVO LA FORMA DEBOLE CON IL METODO del RESIDUO PESATO

$$\int_0^\ell w(x)\left\{EJv^{IV}(x) - q(x)\right\}dx = 0, \quad \forall w(x) \in H_2^0([0,\ell])$$

$\longrightarrow$ LA FUNZIONE TEST DEVE ESSERE BUONA, IN MODO CHE LE DERIVATE ESISTANO

$\downarrow$

SI PUÒ CERCARE DI "SCARICARE" LE DERIVATE SULLA FUNZIONE TEST $\longrightarrow$ SI OTTIENE UNA FORMA SIMMETRICA

$$\int_0^\ell w\left[EJv^{IV}-q\right]dx = EJ\int_0^\ell wv^{IV} - \int_0^\ell wq =$$

$$= EJ\int_0^\ell \left[(wv''')' - w'v'''\right] - \int_0^\ell wq =$$

$$= EJ\int_0^\ell \left[(wv''')' - (w'v'')' + w''v''\right] - \int_0^\ell wq =$$

$$= \int_0^\ell EJv''w'' + \Big[\overbrace{EJv'''}^{-T(x)}w\Big]_0^\ell - \Big[\overbrace{EJv''}^{-M(x)}w'\Big]_0^\ell - \int_0^\ell wq =$$

$$= \underbrace{\int_0^\ell EJv''w''}_{a[v,w]} \underbrace{- \int_0^\ell wq + \left[M(x)w'(x)\right]_0^\ell - \left[T(x)w(x)\right]_0^\ell}_{-\ell[w]} = 0, \forall w$$

FORMA BILINEARE

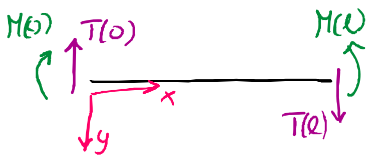
FORMA LINEARE, CON CARICHI DISTRIBUITI E CONTRIBUTI AL BORDO

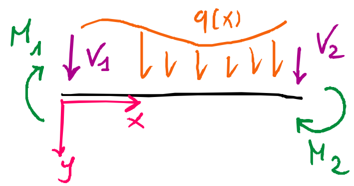
$$\left[Tw\right]_0^\ell = T(\ell)w(\ell) - T(0)w(0)$$

$$\left[Mw'\right]_0^\ell = M(\ell)w(\ell) - M(0)w(0)$$

→ GRAZIE ALLE CONDIZIONI AL CONTORNO SI POSSONO FISSARE I VALORI

SE SI ASSOCIA A w L'IDEA di SPOSTAMENTO VIRTUALE, QUESTI TERMINI SONO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE CONCENTRATE AL BORDO





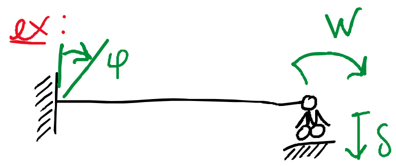
$$\begin{cases} T(0) = -V_1 \\ T(\ell) = V_2 \\ M(0) = M_1 \\ M(\ell) = -M_2 \end{cases}$$

EQUILIBRIO TRAVE EULERO BERNOULLI $\iff \boxed{a[v,w] = \ell[w]}$, $\forall w \in H_0^2$

$$w \in H_0^2 = \left\{ g:[0,\ell]\to\mathbb{R},\ g\in L_2,\ g'\in L_2,\ g''\in L_2,\ g(\bar{x})=0 \text{ se } v(\bar{x})=v_0,\ \bar{x}=0 \vee \bar{x}=\ell \right\}$$

$$L_2 = \left\{ f:[0,\ell]\to\mathbb{R},\ \int_0^\ell |f|^2 < +\infty \right\}$$

ex:



C. CONTORNO

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = \varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} v(\ell) = \delta \\ -EJv''(\ell) = W \end{cases}$$

$$\ell[w] = \underbrace{\int_0^\ell qw}_{=0} + T(\ell)w(\ell) - T(0)w(0) - M(\ell)w'(\ell) + M(0)w'(0)$$

$$= \underbrace{V_2}_{\text{INCOGNITE}} w(\ell) + \underbrace{V_1}_{\text{INCOGNITE}} w(0) + \underbrace{M_2}_{\text{NOTO } M_2 = W} w'(\ell) + \underbrace{M_1}_{\text{INCOGNITE}} w'(0) = Ww'(\ell)$$

$$a[v,w] = \int_0^\ell EJv''w''$$

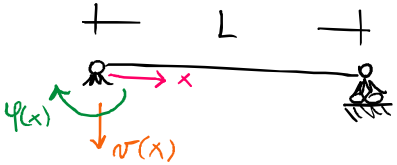
SICCOME POSSO SCEGLIERE w AMMISSIBILE A ZERO DOVE v è NOTO POSSO FISSARE IN MODO che LE INCOGNITE SPARISCANO

$$a[v,w] = \ell[w],\ \forall w$$

SE SI INTERPRETA $w \equiv \delta v$ SI OTTIENE IL PRINCIPIO VARIAZIONALE SUL MINIMO dell'ENERGIA POTENZIALE TOTALE

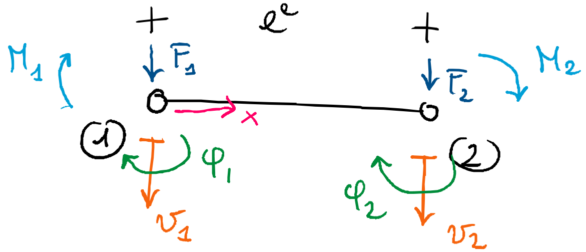
$$\Pi[v] = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\ell EJ(v'')^2 dx}_{\text{ENERGIA ELASTICA}} \underbrace{- \int_0^\ell qv - V_1v(0) - M_1v'(0) - V_2v(\ell) - M_2v'(\ell)}_{\text{LAVORO dei CARICHI ESTERNI}}$$

ELEMENTI FINITI PER STRUTTURE INFLESSE



$v(x) \rightarrow$ CAMPO PRIMARIO INCOGNITO

DIVIDIAMO LA STRUTTURA in ELEMENTI ed ISOLIAMONE UNO:



CLASSE delle FUNZIONI

$v(x) \in \mathcal{C}^2,\ x \in]0,\ell[$

$v(x) \in \mathcal{C}^1,\ x = 0 \vee x = \ell$

DENTRO L'EF DEVE ESISTERE $v''(x) \rightarrow$ ALMENO $\mathcal{C}^2$ NEL DOMINIO

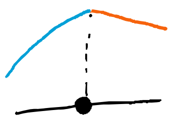
AL BORDO AMMETTO che CI SIA DISCONTINUITÀ $\rightarrow \mathcal{C}^1$ AL CONTORNO

CHIEDERE $\mathcal{C}^1$ AL BORDO IMPLICA che SIA CONTINUA LA FUNZIONE E ANCHE LA DERIVATA di v

$\downarrow$

LE CONDIZIONI AL BORDO SONO MOLTO VINCOLANTI

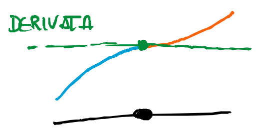
$\downarrow$



j-ESIMO

NON AMMISSIBILE

(COME TRUSS)



j-ESIMO

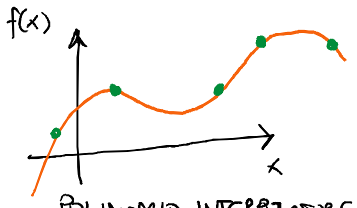
AMMISSIBILE

NEI NODI DEVO AVERE IL CONTROLLO di VALORE della FUNZIONE e della DERIVATA PRIMA $\rightarrow$ DEVO AVERE ALMENO 2 PARAMETRI LIBERI PER NODO $\rightarrow$ FUNZIONI QUADRATICHE SONO TROPPO POVERE

$\downarrow$

SOLO 3 GRADI DI LIBERTÀ, NE SERVONO ALMENO 4 OGNI EF

OSSERVAZIONE: c'è UN LEGAME CON I POLINOMI INTERPOLATORI



DATO UN SET DI PUNTI $\{x_k, y_k\}$ $\rightarrow$ POSSO TROVARE LA FUNZIONE che INTERPOLA I DATI $\rightarrow$ USO i POLINOMI di LAGRANGE

$\downarrow$

DEVO CONTROLLARE IL VALORE della FUNZIONE IN DETERMINATI PUNTI

POLINOMIO INTERPOLATORE di LAGRANGE, $m+1$ PUNTI

$$L_k = \prod_{i=0,\, i\neq k}^{m} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad f(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \dots$$

$$m = 1 \rightarrow (0, u_1), (L, u_2) \qquad L_0 = \frac{x-L}{0-L} = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad L_1 = \frac{x-0}{L-0} = \frac{x}{L} \qquad f(x) = u_1\left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2 \frac{x}{L}$$

QUANDO NON CONTROLLO SOLO IL VALORE della FUNZIONE, MA ANCHE LA DERIVATA PRIMA $\rightarrow$ POLINOMIO INTERPOLATORE CON FUNZIONI di HERMITE $\rightarrow$ LE FUNZIONI DI FORMA PER L'ELEMENTO di EB SONO DETTE FUNZIONI di FORMA HERMITIANE

CALCOLO delle FUNZIONI di FORMA

DEVO AVERE 2 gdl PER NODO $\rightarrow (v_i, \varphi_i) \rightarrow$ 4 gdl PER OGNI ELEMENTO $\rightarrow$ SERVE UNA MODELLAZIONE CUBICA

$$v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

a, b, c, d PARAMETRI di RITZ-GALERKIN

PASSIAMO AI gdl:

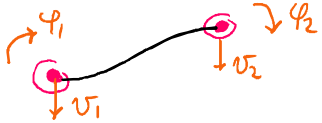
$$\begin{cases} v_1 = v(0) = a \\ \varphi_1 = v'(0) = b \\ v_2 = v(\ell) = a + b\ell + c\ell^2 + d\ell^3 \\ \varphi_2 = v'(\ell) = b + 2c\ell + 3d\ell^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = v_1 \\ b = \varphi_1 \\ c = \frac{3}{\ell^2}(v_2 - v_1) - \frac{2\varphi_1}{\ell} - \frac{\varphi_2}{\ell} \\ d = \frac{2}{\ell^3}(v_1 - v_2) + \frac{\varphi_1}{\ell^2} + \frac{\varphi_2}{\ell^2} \end{cases}$$

ISOLANDO I GRADI di LIBERTÀ della STRUTTURA

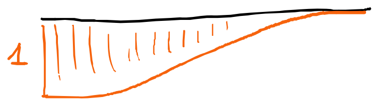
$$v(x) = v_1\underbrace{\left(1-\frac{3x^2}{\ell^2}+\frac{2x^3}{\ell^3}\right)}_{N_1(x)} + \varphi_1\underbrace{\left(x-\frac{2x^2}{\ell}+\frac{x^3}{\ell^2}\right)}_{N_2(x)} + v_2\underbrace{\left(\frac{3x^2}{\ell^2}-\frac{2x^3}{\ell^3}\right)}_{N_3(x)} + \varphi_2\underbrace{\left(-\frac{x^2}{\ell}+\frac{x^3}{\ell^2}\right)}_{N_4(x)}$$

FUNZIONI di FORMA HERMITIANE

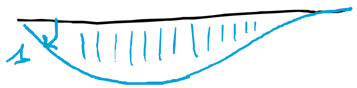
$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\varphi_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\varphi_2$$



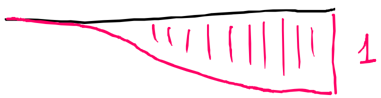
$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \qquad (v_1)$$



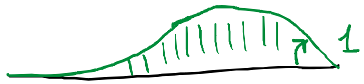
$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \qquad (\varphi_1)$$



$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \qquad (v_2)$$



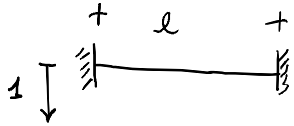
$$N_4(x) = -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \qquad (\varphi_2)$$



VALGONO SEMPRE LE STESSE PROPRIETÀ PER LE FUNZIONI di FORMA

" $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ " $\longrightarrow$ ORA PERÒ gdl SONO SPOST. e ROTAZIONI, NON HA SENSO SOMMARLI...

<u>OSS.</u> $N_i(x)$ RAPPRESENTA LA SOLUZIONE della TRAVE INCASTRATA CON CEDIMENTO UNITARIO RELATIVO alla "COMPONENTE i-ESIMA"

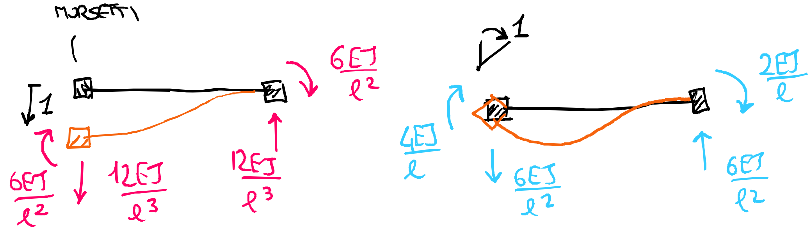


$EJv^{IV} = 0 \longrightarrow v(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \longrightarrow$ CUBICA!

$\begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v(\ell) = 0 \\ v'(\ell) = 0 \end{cases} \longrightarrow$ PER APPLICARE LE C.CONTORNO SI HA STESSO SISTEMA DI PRIMA DA RISOLVERE $\longrightarrow v(x) = v_1 N_1 + \varphi_1 N_2 + v_2 N_3 + \varphi_2 N_4$

PERÒ QUI $v_1 = 1,\ v_2 = \varphi_2 = \varphi_1 = 0 \implies v(x) = N_1(x)$

N.B.: DA QUESTO ESEMPIO SI INTUISCE IL FORTE LEGAME TRA <u>METODO AGLI SPOSTAMENTI</u> E METODO AGLI <u>ELEMENTI FINITI</u>



$\longrightarrow$ FORZE ELASTICHE DOVUTE A gdl UNITARIO SONO LE COLONNE DELLA $\underline{\underline{K}}$

⋮

<u>MATRICE di RIGIDEZZA</u>

$$v^e(x) = v_1^e N_1 + \varphi_1^e N_2 + v_2^e N_3 + \varphi_2^e N_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{MATRICE delle}\\ \text{FUNZIONI di}\\ \text{FORMA}\\ \underline{N}(x)}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{VETTORE DEI}\\ \text{GRADI DI}\\ \text{LIBERTÀ NODALI}\\ \underline{U}(x)}} = \underline{N}(x)\,\underline{U}^e$$

SICCOME ENTRA IN GIOCO LA CURVATURA, LA MATRICE STRAIN-DISPLACEMENT VEDE LA DERIVATA SECONDA

$$-\chi(x) = v''(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix}}_{\underline{B}(x)} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

USIAMO METODO del RESIDUO PESATO

SUL SINGOLO ELEMENTO FINITO

$$\int_0^{\ell^e} EJ^e\, v'' w'' - \int_0^{\ell^e} q^e(x)\, w - V_1^e w(0) - M_1^e w'(0) - V_2^e w(\ell^e) - M_2^e w'(\ell^e) = 0, \quad \forall w \in H_0^2$$

(LA STESSA DI PRIMA, VISTA GLOBALMENTE)

METODO di GALERKIN → STESSE FUNZIONI di FORMA PER v_e e w

$$v^e(x) = \underline{N}\,\underline{U}^e \to v_e''(x) = \underline{B}(x)\,\underline{U}_e$$

$$w_e(x) = \underline{N}\,\underline{W}^e \to w_e''(x) = \underline{B}(x)\,\underline{W}_e$$

Quindi:

$$\int_0^\ell \underline{W}^T \underline{B}^T EJ \underline{B}\,\underline{U} - \int_0^\ell q\, \underline{W}^T \underline{N}^T - \underline{W}^T \tilde{\underline{F}} = 0, \ \forall \underline{W} \qquad \tilde{\underline{F}} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \ \underline{W} = \begin{Bmatrix} w(0) \\ w'(0) \\ w(\ell) \\ w'(\ell) \end{Bmatrix}$$

$$\cancel{\underline{W}^T}\left\{\left(\int_0^\ell \underline{B}^T EJ \underline{B}\right)\underline{U} - \int_0^\ell q\,\underline{N}^T - \tilde{\underline{F}}\right\} = 0, \ \forall W$$

$$\underbrace{\left(\int_0^\ell \underline{B}^T EJ\,\underline{B}\,dx\right)}_{\underline{K}} \underline{U} - \underbrace{\left(\int_0^\ell q\,\underline{N}^T - \tilde{\underline{F}}\right)}_{\underline{F}} = 0 \ \to \ \boxed{\underline{K}^e\,\underline{U}^e = \underline{F}^e}$$

$\underline{K}$ MATRICE di RIGIDEZZA

$\underline{F}$ VETTORE FORZE NODALI EQUIVALENTI

PROBLEMA ALGEBRICO SUL SINGOLO ELEMENTO FINITO

POI ASSEMBLAGGIO!!

$$\underline{B} = \left[\frac{12x}{\ell^3} - \frac{6}{\ell^2}, \ \frac{6x}{\ell^2} - \frac{4}{\ell}, \ \frac{6}{\ell^2} - \frac{12x}{\ell^3}, \ \frac{6x}{\ell^2} - \frac{2}{\ell}\right]$$

→ FONDAMENTALE PER IL CALCOLO della $\underline{K}$

MATRICE di RIGIDEZZA

$$\underline{K} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ \text{Sym} & & & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

MATRICE di RIGIDEZZA del SINGOLO EF PER IL MODELLO DI TRAVE ALLA EULERO-BERNOULLI (TRAVE SNELLA)

I CARICHI NODALI DIPENDONO dalla FORMA del CARICO DISTRIBUITO

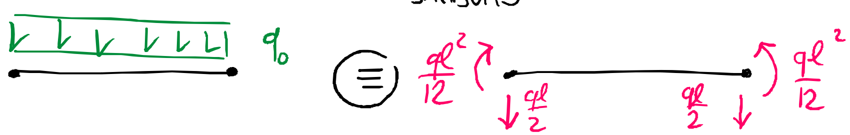
$$\underline{F}^e = \underbrace{\int_0^\ell q(x)\begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix}}_{\text{CARICO NODALE EQUIVALENTE AL CARICO DISTRIBUITO}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}}_{\text{CARICHI NOTI SUI NODI dell'ELEMENTO}}$$

NOTA: IL SEGNO DIPENDE dalla CONVENZIONE, NON DAL SEGNO delle AZIONI INTERNE N, M, T

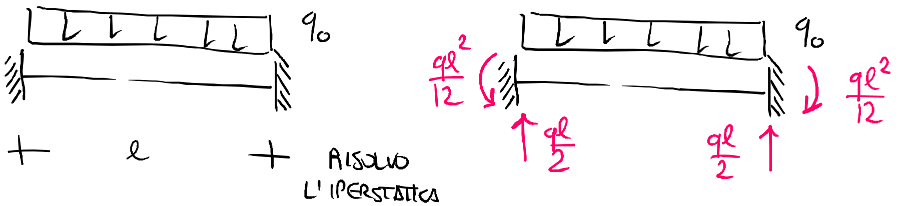
ESEMPIO: $q(x) = q_0$, CARICO DISTRIBUITO COSTANTE

$$\underline{F} = \int_0^\ell q_0 \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3} \\ x - \frac{2}{\ell}x^2 + \frac{x^3}{\ell^2} \\ 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\ -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \end{Bmatrix} = q_0 \begin{Bmatrix} \ell\,(1 - 1 + 1/2) \\ \ell^2\,(1/2 - 2/3 + 1/4) \\ \ell\,(1 - 1/2) \\ \ell^2\,(1/3 + 1/4) \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} \frac{q_0\ell}{2} \\ \frac{q_0\ell^2}{12} \\ \frac{q_0\ell}{2} \\ -\frac{q_0\ell^2}{12} \end{Bmatrix}}$$

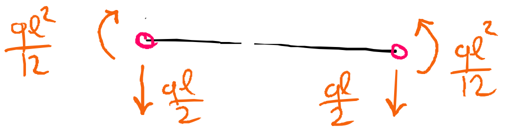
INTERPRET. MECCANICA → CARICO NODALE EQUIVALENTE DAL PUNTO DI VISTA ENERGETICO AL CARICO DISTRIBUITO



N.B.: RICORDANDO L'ANALOGIA FATTA CON LA TRAVE DOPPIO INCASTRO, IL SISTEMA DI CARICO NODALE EQUIVALENTE è UGUALE E CONTRARIO AL SISTEMA DI REAZIONI EQUILIBRANTI IL CARICO DISTRIBUITO



RISOLVO L'IPERSTATICA



EQUIVALENTE (− EQUILIBRANTE)

SI DIMOSTRA CON IL TEOREMA di BETTI

- A -

$v(x) = N_1(x) \cdot 1$

- B -

R_1 : REAZIONE DOVUTA AL CARICO $q(x)$

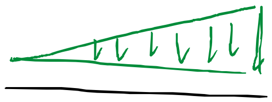
$\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_{BA}$

UNICA FORZA CONCENTRATA DUALE A SPOST. NON NULLI

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_0^\ell v(x)\, q(x) + 1 \cdot R_1 \rightarrow R_1 = -\underbrace{\int_0^\ell q N_1(x)}_{1^a \text{ COMPONENTE di } \underline{F}}$$

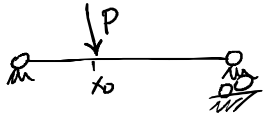
$\mathcal{L}_{BA} = 0$ (SPOSTAMENTI NULLI in B DOVE NASCONO FORZE IN A)

CARICO LINEARE



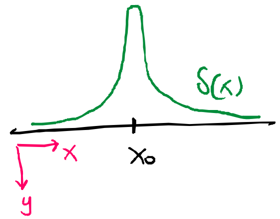
$q(x) = \frac{q_0 x}{\ell}$

CARICO CONCENTRATO



↳ È UN PROBLEMA NELLA MECCANICA DEL CONTINUO → CALCOLO delle DISTRIBUZIONI → ESTENSIONE del CONCETTO delle FUNZIONI

METODO 1) DELTA di DIRAC



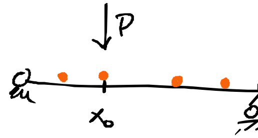
$$\delta(x) \text{ t.c. } \begin{cases} \delta(x) = 0\ , & x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \\ \delta(x) = \infty\ , & x = x_0 \end{cases} \rightarrow$$

È INTEGRABILE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

POSSIAMO VEDERE CARICO CONCENTRATO COME UN CARICO DISTRIBUITO $q(x) = P\,\delta(x)$

METODO 2) SI DISCRETIZZA IN MODO che IL PUNTO x_0 STIA SU UN NODO → INFATTI SUI NODI DEGLI EF SONO AMMESSI DEI CARICHI CONCENTRATI

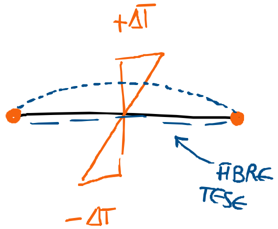


ATTENZIONE AD AVERE EF DI LUNGHEZZA TROPPO DIVERSA !!

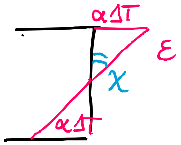
CARICHI TERMICI

BISOGNA INSERIRE NELLA FORMULAZIONE dell'EF LA POSSIBILITÀ DI AVERE DISTORSIONI TERMICHE

↳ DEVONO ENTRARE IN QUALCHE MODO NEI CARICHI ESTERNI



$$\chi^{TOT} = \underbrace{\chi_E}_{\text{CURVATURA ELASTICA}} + \underbrace{\chi_T}_{\text{CURVATURA TERMICA}}$$



$$|\chi^T| = \frac{\alpha\Delta T}{\frac{h}{2}} = \frac{2\alpha\Delta T}{h} \longrightarrow \boxed{\chi^T = -\frac{2\alpha\Delta T}{h}}$$

1) IN GENERALE LA CURVATURA TOTALE SI PUÒ VEDERE COME SOMMA DI UNA PARTE ELASTICA e UNA ANELASTICA (TERMICA, VISCOSA, ...)

$$\boxed{\chi^{TOT}(x) = \underbrace{\chi_E(x)}_{\text{QUESTA VALE}} + \chi_T(x)}$$

$\chi_E(x) = \dfrac{M}{EJ}$ → ABBIAMO SEMPRE LAVORATO CON QUELLA ELASTICA FINORA!!

2) LA CURVATURA LEGATA ALLA CURVATURA dell'ASSE MEDIO è LA CURVATURA TOTALE (QUELLA che EFFETTIVAMENTE SI REALIZZA)

$$\boxed{\chi^{TOT} = -v''(x)}$$

3) CONVIENE PARTIRE dall'EPT, SAPENDO che $\mathcal{U}(v) = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\chi_E^2(x)$

(CLAPEYRON)

$$\Pi[v] = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\chi_E^2(x)\,dx - \int_0^l q(x)v(x) - V_1 v(0) - V_2 v(l) - M_1 v'(0) - M_2 v'(l) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EJ(\chi^{TOT} - \chi_T)^2 - \int_0^l q v - V_1 v_1 - V_2 v_2 - M_1\varphi_1 - M_2\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EJ v''^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l EJ\chi_T^2}_{\text{SI PUÒ ELIMINARE}} - \int_0^l EJ v''\chi_T - \int_0^l q v - \tilde{\underline{F}}\cdot\underline{U}$$

→ NON C'È v'', QUINDI QUANDO SI FA IL DIFFERENZIALE È UNA COSTANTE E SPARISCE

ORA INTRODUCIAMO L'APPROSSIMAZIONE SUL GENERICO ELEMENTO FINITO $\quad v(x) = \underline{N}\,\underline{U} \qquad v''(x) = \underline{\underline{B}}(x)\,\underline{U}$

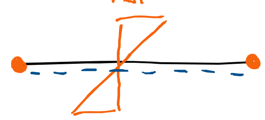
$$\Pi^e(\underline{U}) = \frac{1}{2}\int_0^l \underline{U}^T\underline{\underline{B}}^T EJ\,\underline{\underline{B}}\,\underline{U} - \int_0^l EJ\,\underline{U}^T\underline{\underline{B}}^T\chi_T - \int_0^l \underline{U}^T\underline{N}^T q - \underline{U}^T\tilde{\underline{F}} =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{U}^T\underbrace{\left(\int_0^l \underline{\underline{B}}^T EJ\,\underline{\underline{B}}\right)}_{\text{MATRICE DI RIGIDEZZA "CLASSICA"}}\underline{U} - \underline{U}^T\left(\underbrace{\int_0^l EJ\chi_T\underline{\underline{B}}^T}_{\text{FORZA EQUIVALENTE NEI NODI, DOVUTA AL CARICO TERMICO!!}} + \underbrace{\int_0^l q\underline{N}^T + \tilde{F}}_{\text{FORZA EQUIVALENTE DOVUTA AI CARICHI ESTERNI "CLASSICO"}}\right)$$

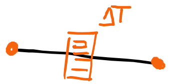
UNA CURVATURA TERMICA ENTRA IN GIOCO COME VETTORE delle FORZE

$$\underline{F}_T = \int_0^l EJ\chi_T\underline{\underline{B}}^T = \int_0^l \frac{2\alpha\Delta T}{h}EJ\,\underline{\underline{B}}^T = \frac{2\alpha\Delta T}{h}EJ\int_0^l \underline{\underline{B}}^T$$

$$\underline{F}_T = \frac{2\alpha\Delta T}{h}EJ\int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \\ \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} \\ \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \\ -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{Bmatrix} = \frac{2\alpha\Delta T}{h}EJ\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



E SULLE BIELLE?



$\varepsilon_T = \alpha\Delta T$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_0^l EA\,\varepsilon_E^2 = \frac{1}{2}\int_0^l EA(\varepsilon^{TOT} - \varepsilon_T)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EA\,u'^2 - \int_0^l EA\,u'\varepsilon_T$$

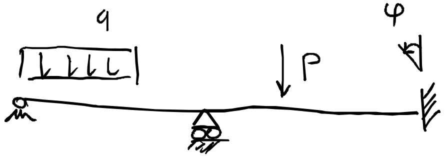
$$\underline{F}_T = \int_0^l \varepsilon_T EA\,\underline{N}'^T(x) = \alpha\Delta T EA\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

DALL' ELEMENTO FINITO alla TRAVE

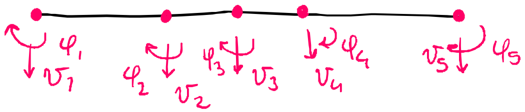
CON LA PROCEDURA di ASSEMBLAGGIO SI OTTIENE IL SISTEMA FINALE

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F}$$

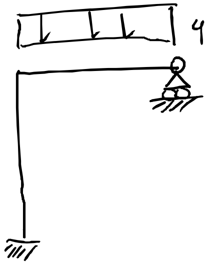
TUTTAVIA SE LA STRUTTURA è COMPLESSA L'ASSEMBLAGGIO DIVENTA COMPLICATO



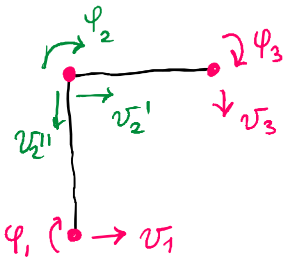
→ LA DISCRETIZZAZIONE (E IL SUCCESSIVO ASSEMBLAGGIO) SONO SEMPLICI



NELLE STRUTTURE A TELAIO LE COSE SI COMPLICANO



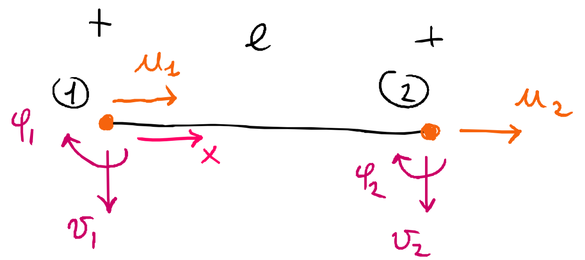
QUI TAGLIO e AZIONE ASSIALE SI SCAMBIANO



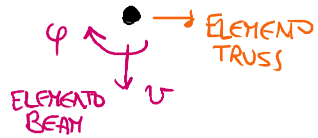
1 gdl DEL NODO 2 SONO DI PIÙ

CONVIENE SOVRAPPORRE L'ELEMENTO TRUSS (che "SENTE" DEFORMAZIONI ASSIALI) E L'ELEMENTO BEAM (che "SENTE" LE DEFORMAZIONI TRASVERSALI)

ELEMENTO TRAVE ALLA EULERO - BERNOULLI COMPLETO



CI SONO 3 gdl PER NODO



$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

VETTORE dei GRADI di LIBERTÀ GENERALIZZATI

QUI AVRÒ 2 CAMPI PRIMARI INCOGNITI $u(x)$, $v(x)$

$$\begin{cases} EAu'' + p = 0 \\ + \text{C. CONTORNO} \end{cases}$$

– PROBLEMA ASSIALE –

$$\begin{cases} EJv^{IV} - q = 0 \\ + \text{C. CONTORNO} \end{cases}$$

– PROBLEMA FLESSIONALE –

QUINDI L'EPT DIVENTA

$$\Pi[u,v] = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l EAu'^2}_{\text{EN. ELASTICA ASSIALE}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l EJ(-v'')^2}_{\text{EN. ELASTICA FLESSIONALE}} - \underbrace{\mathcal{L}[u,v]}_{\text{LAVORO ESTERNO}}$$

← SFRUTTARE IL FUNZIONALE è COMODO, PERMETTE DI SOMMARE I CONTRIBUTI!!

APPROSSIMAZIONE CAMPI

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_1^u(x) & N_2^u(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\leadsto \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & N_2^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^v & N_2^v & 0 & N_3^v & N_4^v \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE delle FUNZIONI DI FORMA COMPLETA}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{u}(x) = \underline{\underline{N}}\,\underline{U}$$

$$\Pi[u,v] = \frac{1}{2}\int_0^l (u')^T EA (u') + \frac{1}{2}\int_0^l v''^T EJ v'' - \mathcal{L}[u,v]$$

$$u'(x) = N'_{1j}(x)\,U_j$$

$$v''(x) = N''_{2j}(x)\,U_j$$

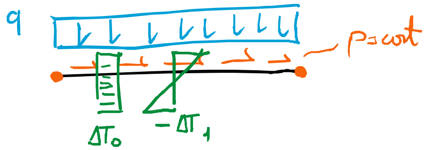
LA MATRICE DI RIGIDEZZA FINALE è una 6×6, BASTA INSERIRE I TERMINI NEL MODO CORRETTO

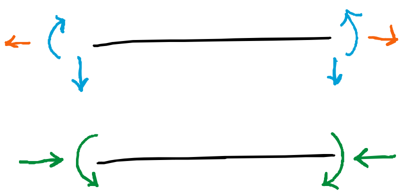
$$\underline{\underline{K}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^3} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array}$$

PER QUANTO RIGUARDA I CARICHI SI FA CALCOLO ANALOGO

$$\underline{F} = \underline{\tilde{F}} + \int_0^l \underline{\underline{N}}^T \begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix}$$

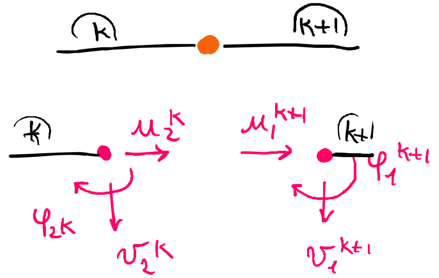
↳ ANCHE QUI BASTA INSERIRE COMPONENTI AL POSTO GIUSTO





$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} \frac{pl}{2} + \alpha \Delta T_0 EA \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} - \frac{2\alpha \Delta T_1 EJ}{h} \\ \frac{pl}{2} - \alpha \Delta T_0 EA \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} + \frac{2\alpha \Delta T_1 EJ}{h} \end{Bmatrix}$$

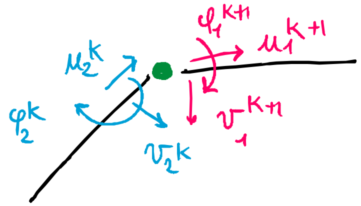
L'ASSEMBLAGGIO È ANCORA DELICATO → CI POSSONO ESSERE PROBLEMI NELLE ASTE INCLINATE



ASSEMBLARE SIGNIFICA IMPORRE:

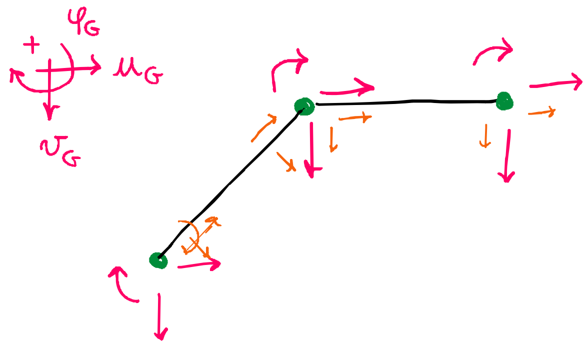
$$\begin{cases} u_2^k = u_1^{k+1} \\ v_2^k = v_1^{k+1} \\ \varphi_2^k = \varphi_1^{k+1} \end{cases}$$

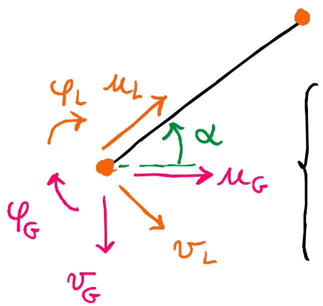
E SE CI SONO ASTE INCLINATE?



NON POSSO UGUAGLIARE I gdl DIRETTAMENTE

LA SOLUZIONE È DEFINIRE dei GRADI DI LIBERTÀ GLOBALI DEFINITI IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO GLOBALE PER TUTTI I NODI → SERVE INTRODURRE UNA ROTAZIONE dal SISTEMA LOCALE dell'EF AL SIST. GLOBALE





IL LEGAME TRA LOCALE e GLOBALE SI SCRIVE:

$$\begin{cases} u^L = u_G \cos\alpha - v_G \operatorname{sen}\alpha \\ v^L = u_G \operatorname{sen}\alpha + v_G \cos\alpha \\ \varphi^L = \varphi^G \end{cases}$$

QUINDI:

$$\begin{Bmatrix} u^L \\ v^L \\ \varphi^L \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE di ROTAZIONE}} \begin{Bmatrix} u_G \\ v_G \\ \varphi_G \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VETTORI gdl SINGOLO NODO

$$\underline{u}^L = \underline{\underline{T}}_0 \, \underline{u}^G$$

IL VETTORE dei GRADI DI LIBERTÀ dell' ELEMENTO è

$$\underline{U}^L = \begin{Bmatrix} u_1^L \\ v_1^L \\ \varphi_1^L \\ u_2^L \\ v_2^L \\ \varphi_2^L \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_0 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_0 \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE di ROTAZIONE dell' ELEMENTO } \underline{\underline{T}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^G \\ v_1^G \\ \varphi_1^G \\ u_2^G \\ v_2^G \\ \varphi_2^G \end{Bmatrix}}_{\underline{U}^G}$$

QUINDI

$\underline{U}^L = \underline{\underline{T}}\,\underline{U}^G \rightarrow$ USIAMOLA NELL' EPT

$$\Pi[\underline{u}] = \frac{1}{2}\underline{U}^L \cdot \underline{\underline{K}}^L \underline{U}^L - \underline{U}^L \cdot \underline{F}^L =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\underline{T}}\,\underline{U}^G \cdot \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{U}^G - \underline{\underline{T}}\,\underline{U}^G \cdot \underline{F}^L =$$

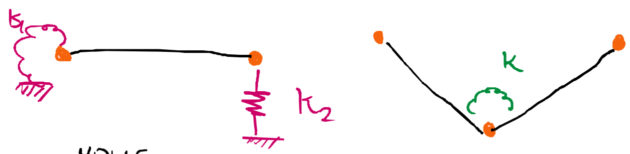
$$= \frac{1}{2}\underline{U}^G \cdot \underbrace{\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}}^L \underline{\underline{T}}}_{\substack{\underline{\underline{K}} \\ \text{GLOBALE}}} \underline{U}^G - \underline{U}^G \cdot \underbrace{\underline{\underline{T}}^T \underline{F}^L}_{\substack{\underline{F} \\ \text{GLOBALE}}}$$

IN GENERALE

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}}^L \underline{\underline{T}} \quad , \quad \underline{F} = \underline{\underline{T}}^T \underline{F}^L \leftarrow$$ ASSEMBLAGGIO CORRETTO

$\underline{\underline{K}}^L$ e $\underline{F}^L$ NOTE dalla FORMULAZIONE

MOLLE ED ELEMENTI AD ELASTICITÀ CONCENTRATA



\- MOLLE A TERRA -   - MOLLE INTERNE -

DUE TIPOLOGIE di VINCOLI ELASTICI → BISOGNA INSERIRE NELLA FORMULAZIONE FEM LA COMPONENTE di ENERGIA ELASTICA della MOLLA

MOLLE A TERRA

gdl LEGATO alla MOLLA

ENERGIA ELASTICA SINGOLO EF $\quad \mathcal{U}[u] = \frac{1}{2}\underline{U}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e + \frac{1}{2}k_1 U_{e2}^2 + \frac{1}{2}k_2 U_{e3}^2$

I TERMINI AGGIUNTI VANNO SCRITTI COME FUNZIONE dell' INTERO $\underline{U}^e$

$\frac{1}{2}\underline{U}_e^T \tilde{\underline{\underline{K}}}_1 \tilde{\underline{U}}_e$

QUINDI $\frac{1}{2}k_1 U_{e2}^2 = $

$$\underline{U}^{eT} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}\underline{U}^e + \underline{U}^{eT} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}\underline{U}^e$$

MATRICI di RIGIDEZZA delle MOLLE CONCENTRATE TRASLAZ. e ROTAZ. $\tilde{\underline{\underline{K}}}_1$ e $\tilde{\underline{\underline{K}}}_2$ → ADDITIVITÀ !! SI SOMMANO ALLA $\underline{\underline{K}}$ dell' EF

LA MATRICE di RIGIDEZZA FINALE è $\underline{\underline{K}} + \tilde{\underline{\underline{K}}}_1 + \tilde{\underline{\underline{K}}}_2$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} + k_1 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} + k_2 & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

MOLLE INTERNE

SONO DEL TIPO $\mathcal{U} = \frac{1}{2}k_3\left(\underbrace{U_i^k - U_j^{k+1}}\right)^2$

COINVOLGONO gdl di ELEMENTI DIVERSI

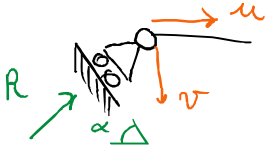
COME PRIMA, ma:

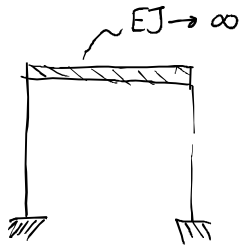
i) BISOGNA LAVORARE SULLA MATRICE ASSEMBLATA

ii) LA "MATRICE della MOLLA" DA AGGIUNGERE alla $\underline{\underline{K}}$ GLOBALE è del TIPO

$$\tilde{\underline{\underline{k}}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} U_i^k \\ U_j^{k+1} \end{array}$$

VINCOLI AGGIUNTIVI al SISTEMA





A VOLTE È NECESSARIO IMPORRE VINCOLI AI GRADI DI LIBERTÀ
↓
COME ENTRANO NEL SISTEMA DA RISOLVERE?

MULTIFREEDOM CONSTRAINTS $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{g}$ CONSIDERIAMO SOLO VINCOLI LINEARI TRA i gdl

3 MODI PER TENERNE CONTO:

i) PENALTY METHOD: SI AGGIUNGE UN VINCOLO ELASTICO CON RIGIDEZZA OPPORTUNA

ex: $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{g}$ → STO IMPONENDO UN MOTO RIGIDO → AGGIUNGO BIELLA CON RIGIDEZZA $EA \to \infty$

ii) METODO dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

PROBLEMA IN FORMA DEBOLE è PROBLEMA di MINIMO → LO TRASFORMO IN MINIMO VINCOLATO

$\min \Pi \implies \min \mathcal{L}$ $\mathcal{L}$: LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \Pi - \underbrace{\underline{\lambda}^T}_{\text{MOLTIPLICATORI di LAGRANGE}} \underbrace{(\underline{\underline{A}}\,\underline{u} - \underline{g})}_{\text{VINCOLO}}$$

← SI FA IL MINIMO di QUESTA, CONSIDERANDO ANCHE I NUOVI PARAMETRI $\underline{\lambda}$

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{u}} = 0$ ma anche $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\lambda}} = 0$ ← CONDIZIONI AGGIUNTIVE $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\lambda})$

ALLA FINE, IL MINIMO di QUESTA LAGRANGIANA CONDUCE AL PROBLEMA

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{A}}^T \\ \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{Bmatrix}$$

$\underline{\lambda}$, dal PUNTO DI VISTA FISICO, SONO LE FORZE DOVUTE AI VINCOLI

iii) METODO MASTER-SLAVE

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{g}$ → $\underline{\underline{A}}$ NON È QUADRATA, ha DIMENSIONI GENERICHE (TANTE RIGHE QUANTE EQUAZIONI) → POSSO RISOLVERE IL SISTEMA e SCRIVERE ALCUNI gdl IN FUNZIONE degli ALTRI...
↓
$$\boxed{\underline{u} = \underline{\underline{L}}\,\underline{q}}$$

POSSO PARTIZIONARE IL VETTORE $\underline{u}$ dei gdl IN DUE INSIEMI: NODI MASTER $\underline{q}$, LE VERE INCOGNITE DEL PROBLEMA, E NODI SLAVE CHE SONO LEGATI AI NODI MASTER da $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{g}$

NODI MASTER $\underline{q}$ → VETTORE dei gdl LINEARMENTE INDIPENDENTI

L'EPT si SCRIVE

$$\Pi[\underline{u}] = \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{u} - \underline{u}^T \underline{F} = \frac{1}{2}\underline{q}^T \underbrace{\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{L}}}_{\underline{\underline{\tilde{K}}}}\,\underline{q} - \underline{q}^T \underbrace{\underline{\underline{L}}^T \underline{F}}_{\underline{\tilde{F}}}$$

→ IL PROBLEMA da RISOLVERE è $\boxed{\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{q} = \underline{\tilde{F}}}$

UNA VOLTA NOTO $\underline{q}$ si CALCOLA $\underline{u} = \underline{\underline{L}}\,\underline{q}$

C'È LEGAME "DIRETTO" TRA $\underline{\underline{A}}$ ed $\underline{\underline{L}}$

$$\boxed{\underline{\underline{L}} = \text{nullspace}(\underline{\underline{A}})}$$

→ COMODO, SI CALCOLA DIRETTAMENTE

NULLSPACE di $\underline{\underline{A}}$:

TUTTI gli $\underline{y}$ t.c. $\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = 0$ $L = [\underline{y}_1 | \underline{y}_2 \ldots]$

($\underline{y}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI)