

APPUNTI SUI METODI PERT-C.P.M.

(corso di ricerca operativa)

**A cura di:
Antonio Scalera**

PERT/C.P.M.

I metodi Pert e C.P.M. studiano lo sviluppo di un progetto attraverso la programmazione delle attività di cui si compone.

Entrambi i metodi si occupano soprattutto degli aspetti temporali e quindi vanno visti come metodi di ottimizzazione del tempo di realizzazione di un progetto.

Il C.P.M. utilizza stime deterministiche delle durate delle attività senza considerare incertezze relative a tali stime. Inoltre questo metodo considera anche gli aspetti relativi ai costi delle varie attività.

Il Pert, invece, si occupa solo della minimizzazione del tempo. Questo metodo fu infatti inventato ai tempi della guerra fredda in occasione del progetto "Polaris" (un missile strategico bistadio a testata nucleare), che dovette essere realizzato dagli Stati Uniti nel minor tempo possibile, trascurando i problemi relativi ai costi. Nel Pert le durate delle varie attività sono rappresentate da variabili aleatorie di cui occorre stimare la distribuzione di probabilità.

Sebbene quindi, vi siano delle differenze sostanziali tra i due metodi, spesso il Pert e il C.P.M. vengono confusi o chiamati entrambi con il nome di Pert. I seguenti passi sono comunque comuni ai due metodi. Più avanti, quando parleremo della stima dei parametri, tratteremo diversamente il Pert e il C.P.M.

1° Passo: individuazione delle attività

Il primo passo per entrambi i metodi è quello di scomporre il progetto in varie attività, cercando di mantenere nella scomposizione un grado di dettaglio omogeneo. Infatti ogni attività si potrà poi scomporre in varie sotto-attività, e quindi potrà a sua volta essere ottimizzata. Ovviamente ad ogni attività in cui si è suddiviso il progetto si devono poter attribuire dei parametri di tempo (nel Pert) o di tempo e di costo (nel C.P.M.).

2° Passo: determinazione dei vincoli

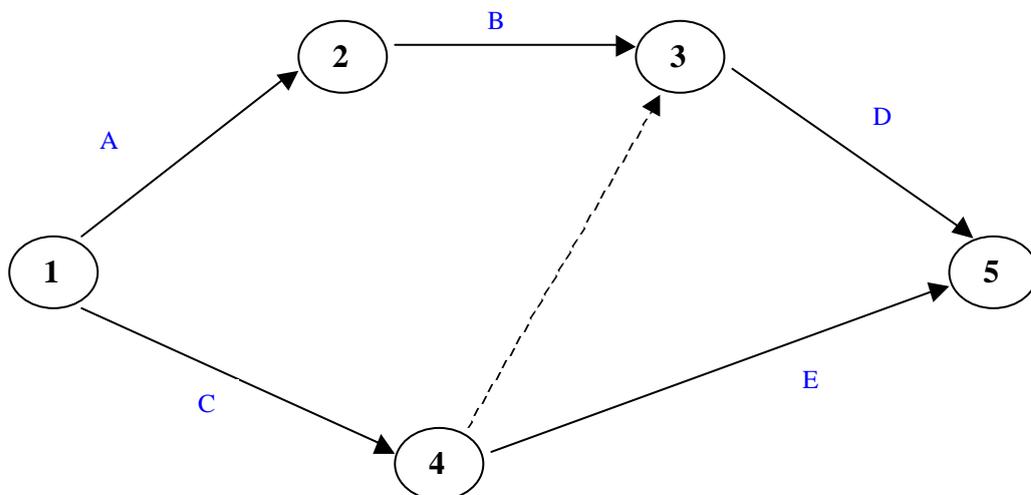
Una volta individuate le varie attività bisogna valutare l'ordine temporale con il quale queste attività devono essere completate. Devo cioè sapere quali attività devono essere già state completate prima di poterne iniziare un'altra. Ad esempio nella costruzione di un palazzo non potrò iniziare a costruire i muri esterni se prima non avrò costruito le fondamenta. Devo cioè fissare i "vincoli di sequenza". La determinazione dei vincoli può essere un'operazione molto complicata ed è di fondamentale importanza per poter applicare i metodi di ottimizzazione con successo.

Sia nel Pert che nel C.P.M. i vincoli sono sottoposti a logica AND. Questo vuol dire che potrò iniziare un'attività solo dopo che tutte (AND) quelle che la precedevano nella sequenza siano già state realizzate.

I vincoli nei casi pratici sono determinati oltre che da condizioni logiche e tecniche che impediscono la realizzazione di un'attività se non è stata completata la precedente anche da problemi relativi alla "disponibilità di risorse". Ad esempio dei macchinari non potrebbero essere disponibili contemporaneamente per più attività e quindi bisognerà aspettare che una sia terminata per poterne iniziare un'altra.

3° Passo:Costruzione del diagramma

Una volta suddiviso il progetto in attività e individuati i vincoli si può procedere alla costruzione del reticolo delle attività. Per convenzione nel reticolo le attività sono rappresentate con archi continui orientati, mentre i cerchi (nodi) rappresentano gli istanti "inizio" e "fine" di ogni attività. Noi diremo che ogni nodo è un **evento**, definito come l'istante di tempo in cui tutte le attività entranti nel nodo stesso siano state completate. Inoltre in ogni reticolo devono essere distinguibili gli eventi di inizio e fine dell'intero progetto. Un arco tratteggiato indica un vincolo di "precedenza" tra due attività e può essere inteso come un'attività fittizia (dummy) di durata nulla. Ad esempio nel seguente reticolo l'arco tratteggiato indica che l'attività "D" non può iniziare prima che siano state completate le attività "C" e "B".



Quando si costruisce il reticolo è bene tener presenti le seguenti regole:

- Tutti i vincoli di “sequenzialità” devono essere rispettati
- Non si devono mai creare loops (cioè cammini chiusi) all’interno del reticolo.
- Non è possibile definire due o più attività aventi gli stessi istanti di inizio e fine.

L’ultima regola è dovuta soprattutto alla difficoltà di implementare al calcolatore un algoritmo che preveda la definizione di più di una variabile tra due stessi nodi.

E’ possibile anche definire il reticolo in un altro modo, cioè rappresentando le attività con i nodi e i vincoli di sequenza con gli archi orientati. Questo tipo di notazione, meno usata, presenta il vantaggio di non dover fare ricorso alle attività fittizie. Nel seguito comunque non si userà mai questo tipo di notazione.

Il reticolo ci consente di calcolare il tempo di realizzazione di un progetto, nonché di tutte le fasi intermedie della sua realizzazione.

ESEMPIO (*fatto a lezione*)

Costruzione di un palazzo.

Supponiamo di aver definito le varie attività e di aver studiato i vincoli di sequenzialità e di essere quindi giunti al reticolo riportato alla pagina seguente. Il numero scritto tra parentesi in blu è il tempo stimato per ogni attività

Definiremo **tempo minimo** per un evento il tempo in cui si verificherà l’evento stesso supponendo che tutte le precedenti attività siano iniziate quanto prima possibile e siano durate esattamente il tempo stimato.

Il tempo minimo per ogni evento (e quindi anche per l’evento “fine”) è calcolato esaminando il reticolo a partire dall’evento inizio. Considerato un qualsiasi nodo se in tale nodo arriva una sola attività il tempo minimo sarà la somma tra il precedente tempo minimo e la durata dell’attività che ci ha condotto al nodo, altrimenti se nel nodo entrano più attività si dovrà calcolare questa somma per ogni attività e il tempo minimo sarà dato dal valore *massimo* di tali somme.

Per chiarire il concetto calcoliamo il tempo minimo relativo al reticolo del nostro esempio. Tutti i passaggi per giungere al risultato sono stati riportati nella tabella 1. Dalla tabella si può vedere come nel caso dei nodi 7,8, 12 e 13, nodi nei quali giunge più di una attività, si è dovuto prendere il valore massimo delle somme tra la durata di ogni attività che entra nel nodo e il tempo minimo precedente. Tale valore massimo è stato evidenziato in rosso.

Costruzione di un palazzo - Reticolo delle attività

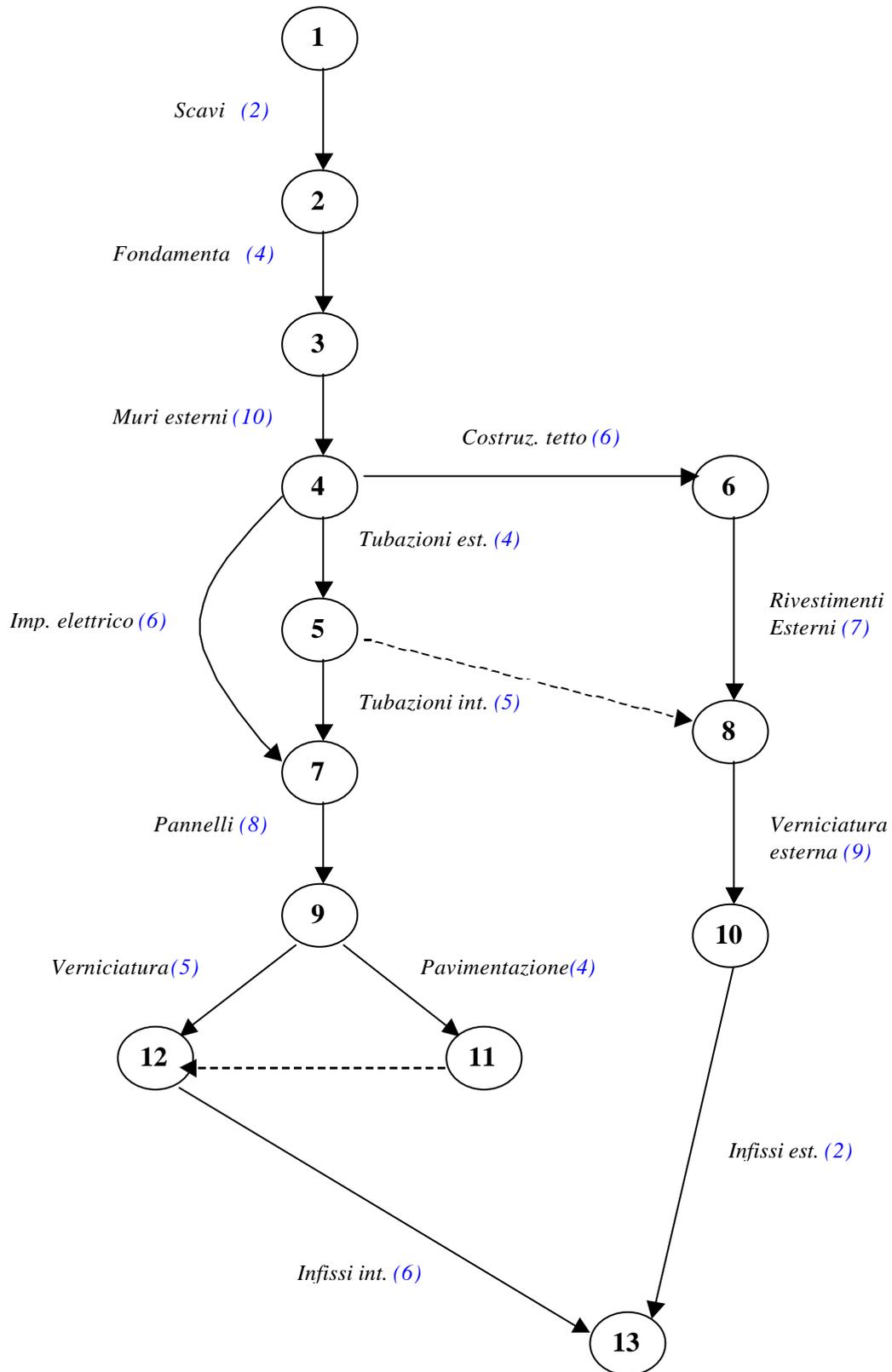


Tabella 1 – Calcolo del tempo minimo

Evento	Evento precedente	Tempo minimo precedente	+ Durata dell'attività	<u>Tempo minimo</u>
1	-	-	-	0
2	1	0	+ 2	2
3	2	2	+ 4	6
4	3	6	+ 10	16
5	4	16	+ 4	20
6	4	16	+ 6	22
7	4	16	+ 7	
	5	20	+ 5	25
8	5	20	+ 0	
	6	22	+ 7	29
9	7	25	+ 8	33
10	8	29	+ 9	38
11	9	33	+ 4	37
12	9	33	+ 5	38
	11	37	+ 0	
13	10	38	+ 2	
	12	38	+ 6	44

Analogamente al tempo minimo si definisce per ogni evento anche il **tempo massimo**. Questo è definito come il massimo tempo nel quale può verificarsi un evento senza che il tempo minimo complessivo (cioè di tutto il progetto) sia aumentato. Per calcolare il tempo massimo di ogni evento si dovrà quindi scorrere il reticolo al contrario, cioè partendo dall'evento finale, e tenendo in considerazione il tempo minimo dell'evento finale. Nella tabella 2 sono calcolati i tempi massimi

per ogni evento con un ragionamento analogo a quello fatto per i tempi minimi. Questa volta per ogni nodo dovremo considerare la durata dell'attività uscente del nodo stesso e sottrarre questo valore dal tempo massimo relativo al nodo precedente. Quando ci sono più attività uscenti da un nodo dovremo calcolare questa differenza per ogni attività e prenderne il *valore minimo*.

Tabella 2 – Tempo massimo

Evento	Evento successivo	Tempo massimo precedente	- Durata dell'attività	<u>Tempo massimo</u>
13	-	-	-	44
12	13	44	- 6	38
11	12	38	- 0	38
10	13	44	- 2	42
9	11	38	- 4	
	12	38	- 5	33
8	10	42	- 9	33
7	9	33	- 8	25
6	8	33	- 7	26
5	7	25	- 5	20
	8	35	- 0	
4	5	20	- 4	16
	6	28	- 6	
	7	25	- 7	
3	4	16	- 10	6
2	3	6	- 4	2
1	2	2	- 2	0

Una volta che abbiamo calcolato il tempo minimo e massimo per ogni attività potremo calcolare per ogni evento il **tempo di slack**. *Il tempo di slack di un evento* è la differenza tra il suo tempo massimo e il suo tempo minimo. Inoltre si definisce anche *il tempo di slack di un'attività (i,j)* con la formula $L_j - (E_i + t_{ij})$ dove L_j è il tempo massimo dell'evento j, E_i il tempo minimo dell'evento i e t_{ij} la durata dell'attività (i,j). Il tempo di slack di un'attività è quindi il massimo ritardo che potrà subire la durata dell'attività stessa senza che il tempo minimo totale del progetto subisca ritardi. Possiamo quindi costruire una tabella con i tempi di slack per ogni attività.

Tabella 3 – Tempi di slack

Evento	Tempo di slack
1	$0 - 0 = 0$
2	$2 - 2 = 0$
3	$6 - 6 = 0$
4	$16 - 16 = 0$
5	$20 - 20 = 0$
6	$26 - 22 = 4$
7	$25 - 25 = 0$
8	$33 - 29 = 4$
9	$33 - 33 = 0$
10	$42 - 38 = 4$
11	$38 - 37 = 1$
12	$38 - 38 = 0$
13	$44 - 44 = 0$

Attività	Tempo di slack
1,2	$2 - (0 + 2) = 0$
2,3	$6 - (2 + 4) = 0$
3,4	$16 - (6 + 10) = 0$
4,5	$20 - (16 + 4) = 0$
4,6	$26 - (16 + 6) = 4$
4,7	$25 - (16 + 7) = 2$
5,7	$25 - (20 + 5) = 0$
6,8	$33 - (22 + 7) = 4$
7,9	$33 - (25 + 8) = 0$
8,1	$42 - (29 + 9) = 4$
9,11	$38 - (33 + 4) = 1$
9,12	$38 - (33 + 5) = 0$
10,13	$44 - (38 + 2) = 4$
12,13	$44 - (38 + 6) = 0$

Le attività che hanno tempo di slack uguale a zero sono particolarmente importanti, infatti se queste attività subiranno ritardi, anche il tempo totale del progetto sarà ritardato. Questa osservazione ci porta a definire **cammino critico** un percorso tra l'istante di inizio e l'istante di fine dell'intero progetto formato da attività aventi tutte tempo di slack uguale a zero. La somma dei tempi delle attività di un cammino critico sarà quindi il tempo minimo per la realizzazione del progetto.

Nel nostro caso, vedendo quali sono le attività con tempo di slack uguale a zero, troviamo che un cammino critico è dato dalla sequenza degli eventi 1 2 3 4 5 7 9 12 13.

I cammini critici in generale godono delle seguenti proprietà:

1. Ogni progetto ammette sempre almeno un cammino critico.
2. Tutte le attività e tutti gli eventi con tempo di slack uguale a zero devono appartenere almeno a un cammino critico (non necessariamente allo stesso), un'attività o un evento avente slack maggiore di zero non può mai appartenere a un cammino critico.
3. Un cammino formato solo da eventi con tempo di slack uguale a zero non è detto che sia critico, perché può succedere che qualche attività del cammino abbia tempo di slack maggiore di zero.

Illustriamo la terza proprietà relativamente al nostro esempio. Se si considera il percorso che passa per gli eventi 1 2 3 4 7 9 12 13 si può notare che tutti gli eventi hanno slack uguale a zero ma il percorso non è un cammino critico perché l'attività (4,7) ha tempo di slack maggiore di zero.

Dopo questo discorso generale che è valido per entrambi i metodi entriamo nello specifico di ognuno di essi andando a vedere come il Pert e il C.P.M. stimano la durata e il costo (solo per il C.P.M.) di ogni attività.

PERT: Stima dei parametri

Come si è già detto in precedenza il Pert considera le durate delle attività come variabili aleatorie. Il metodo prevede che per ogni attività si conoscano le stime della durata ottimistica (caso migliore, se tutto ha funzionato bene e nei tempi previsti), della durata pessimistica (caso peggiore) e della durata più probabile. Il calcolo di queste stime viene effettuato da esperti delle specifiche attività basandosi sull'esperienza e sulle conoscenze possedute. Quindi si suppone che le durate delle attività abbiano una funzione densità di probabilità di tipo Beta, con deviazione standard data dalla seguente formula:

$$s = \frac{1}{6}(b - a)$$

dove b è la stima della durata pessimistica e a quella della durata ottimistica.

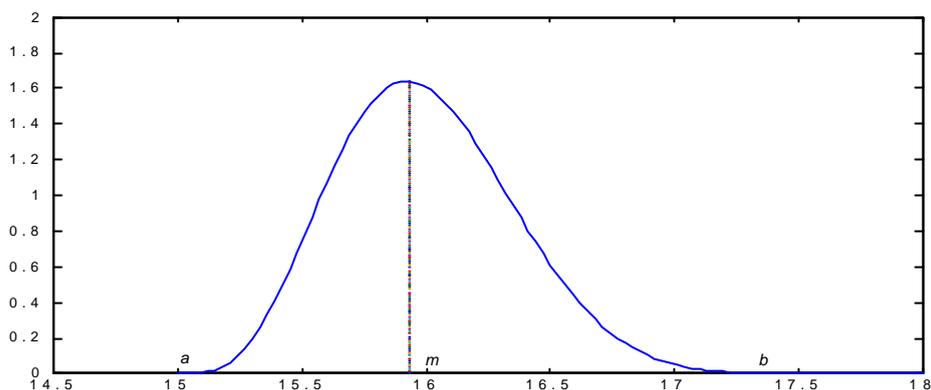
Questa espressione della deviazione standard deriva dal fatto che per la maggior parte delle distribuzioni di probabilità la probabilità che il valore della variabile cada in un intervallo di ampiezza pari a 6σ centrato attorno al valor medio è praticamente unitaria.

Allora se la durata dell'attività è distribuita secondo la distribuzione Beta il suo valore atteso sarà approssimato dalla formula:

$$t_e = \frac{1}{3} \left[2m + \frac{1}{2}(a + b) \right]$$

dove m è la stima del valore più probabile, cioè la stima della moda della variabile aleatoria (si ricordi che la distribuzione Beta è monomodale). Quindi il valore medio della durata dell'attività è una media pesata tra il punto medio dell'intervallo (a,b) e il valore della moda.

Nella figura seguente è riportato l'andamento della densità di probabilità di una distribuzione Beta.



Nel modo appena descritto il Pert calcola i valori attesi e le deviazioni standard delle variabili aleatorie relative alle durate di tutte le attività. Tornando al nostro esempio della costruzione di un palazzo, nella seguente tabella sono riportati i valori dei vari parametri relativi ad alcune attività (sono solo quelle del cammino critico trovato in precedenza)

Attività	DURATA DELL' ATTIVITA'			Valore atteso	Varianza
	Stima ottimistica	Stima più probabile	Stima pessimistica		
(1,2)	1	2	3	2	1/9
(2,3)	2	3,5	8	4	1
(3,4)	6	9	18	10	4
(4,5)	1	4,5	5	4	4/9
(5,7)	4	4	10	5	1
(7,9)	3	9	9	8	1
(9,12)	1	5,5	7	5	1
(12,13)	5	5,5	9	6	4/9
Totale	23	43	69	44	9

Quindi se stiamo usando il Pert i numeri scritti tra parentesi nel reticolo rappresenteranno i valori attesi delle durate delle attività e non il loro valore esatto. Infatti si può notare come la somma dei valori attesi delle durate delle attività dia 44, che è il tempo della durata dell'intero progetto già calcolato precedentemente. In definitiva nel Pert il tempo di realizzazione del progetto sarà una stima affetta da incertezza, che si vuole valutare. In particolare si definisce **dead line** il tempo massimo entro il quale il progetto deve essere terminato, allora quello che ci interessa è la probabilità che il progetto sia terminato senza aver superato la dead line. Per procedere nel calcolo si suppone *che i tempi di durata delle varie attività siano tra loro statisticamente indipendenti*. Fatta questa ipotesi si può ricorrere allora al teorema del limite centrale, cioè si può assumere che la somma delle variabili aleatorie corrispondenti alla durata delle attività del cammino critico sia ancora una variabile aleatoria avente distribuzione normale con media pari alla somma delle medie e varianza pari alla somma delle varianze.

Nel nostro caso la durata totale del progetto sarà allora una variabile aleatoria con distribuzione normale avente media uguale a 44 e varianza uguale a 9. Quindi dato il tempo massimo D_i entro il quale il progetto deve essere realizzato (dead line), e chiamato T il tempo di realizzazione del progetto, consultando le tabelle della distribuzione normale avente media nulla e varianza unitaria potremo facilmente calcolare la probabilità

$$P(T \leq D_i) = P\left(\frac{T - 44}{3} \leq \frac{D_i - 44}{3}\right)$$

Ad esempio se la dead line è uguale a 47 si avrà

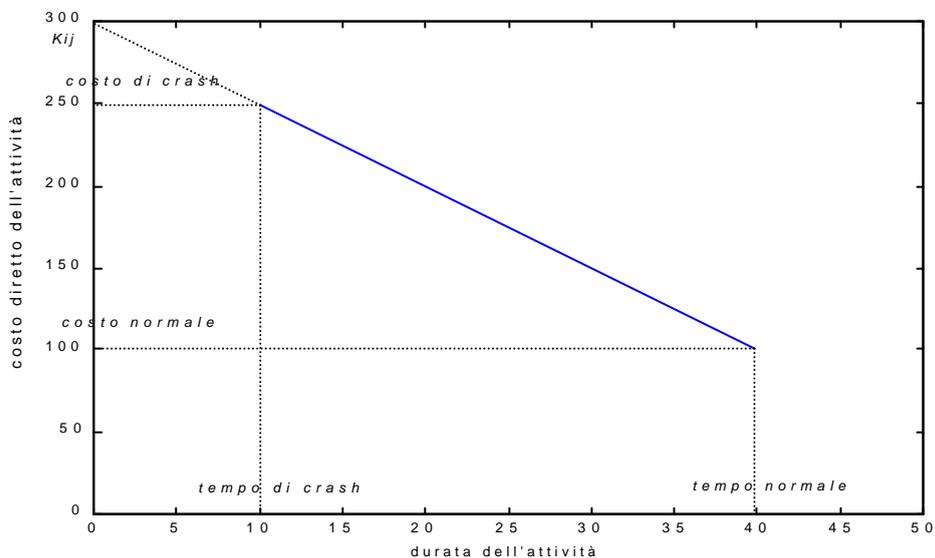
$$P(T \leq D_i) = P\left(\frac{T - 44}{3} \leq 1\right) \cong 0.8$$

Un'ultima osservazione riguarda l'aver assunto come tempo di realizzazione del progetto quello del cammino critico. Nel caso del Pert avendo a che fare con variabili aleatorie questo non sarà del tutto vero, perché in particolari condizioni potrebbe esserci un altro cammino avente durata maggiore. In genere comunque l'approssimazione che facciamo considerando il cammino critico è valida, e lo sarà tanto di più quanto più la durata del cammino critico sarà maggiore delle durate degli altri percorsi.

C.P.M: Stima dei parametri

Il C.P.M., come già accennato in precedenza, usa stime deterministiche per le durate delle attività. In alcuni casi, infatti, la durata di un'attività può essere valutata senza alcuna incertezza (ad esempio un'attività del progetto potrebbe essere il rilascio di un certificato che richiede il suo tempo

burocratico, noto con esattezza). Il C.P.M. però al contrario del Pert prende in considerazione anche i costi delle attività. Questo viene fatto tracciando per ogni attività una curva che rappresenti il costo dell'attività stessa in funzione del tempo. In particolare per ogni attività si fissa un **punto normale** che ha come coordinate il tempo e il costo *normali* dell'attività (indicati con D_{ij} e $C_{D_{ij}}$ rispettivamente), questo punto rappresenta nel grafico il caso in cui l'attività sia realizzata senza costi aggiuntivi rispetto al previsto e senza "incidenti". Quindi si fissa anche un **punto di crash** che ha come coordinate il tempo e il costo di crash (indicati con d_{ij} e $C_{d_{ij}}$); il tempo di crash rappresenta il minimo tempo in cui posso realizzare l'attività *senza badare a spese*. E' chiaro quindi che il costo di crash sarà più alto del costo normale. Tra questi due punti il C.P.M. prevede che il costo abbia un andamento lineare rispetto al tempo, come è raffigurato nella figura seguente.



La pendenza di questo segmento sarà

$$S_{ij} = \frac{C_{D_{ij}} - C_{d_{ij}}}{D_{ij} - d_{ij}}$$

Allora se indico con x_{ij} la durata di ogni attività si hanno i seguenti risultati:

$$\text{Costo diretto per l'attività (i,j)} = C_{ij} = K_{ij} + S_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Costo totale per il progetto} = \sum_{i,j} (K_{ij} + S_{ij}x_{ij})$$

Il nostro obiettivo sarà, dato il tempo massimo T in cui deve essere realizzato il progetto, trovare i valori di x_{ij} che minimizzano il costo.

Ovviamente se la somma dei tempi normali è di per se inferiore a T allora basterà semplicemente prendere $x_{ij} = D_{ij}$, ci poniamo quindi nel caso in cui la somma dei tempi normali sia superiore a T. In questo caso dovranno essere rispettati i vincoli $d_{ij} \leq x_{ij} \leq D_{ij}$, $\forall(i, j)$.

Il problema è un problema di programmazione lineare. Per impostarlo introduciamo ancora le variabili y_k uguali al tempo minimo per l'evento k. Allora per ogni attività tra gli eventi i e j dovrà verificarsi:

$$y_i + x_{ij} \leq y_j$$

oppure, analogamente:

$$y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$$

Queste variabili y sono quindi delle variabili ausiliarie.

Quindi in definitiva il nostro problema sarà

$$\max Z = - \sum_{i,j} (K_{ij} + S_{ij}x_{ij})$$

soggetto ai vincoli

$$d_{ij} \leq x_{ij} \leq D_{ij}$$

$$y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$$

$$y_n \leq T$$

dove y_n è il tempo totale per la realizzazione del progetto (tempo dell'ultimo evento).

Si può anche fare il cambio di variabile $x_{ij} = d_{ij} + x'_{ij}$, in tal caso i vincoli diventano

$$x'_{ij} \leq D_{ij} - d_{ij}$$

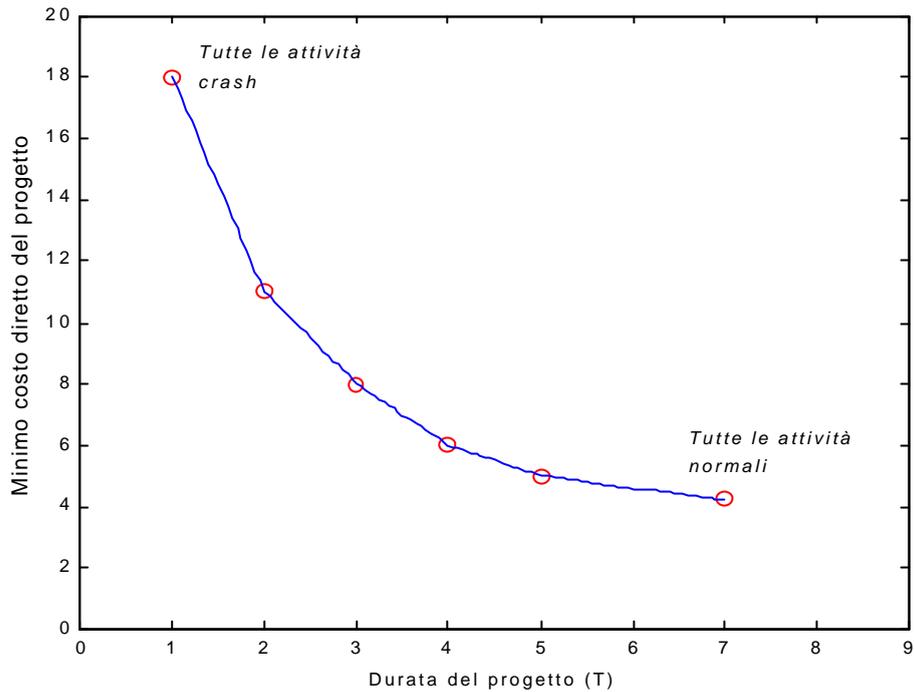
$$x'_{ij} \geq 0$$

$$y_i + x'_{ij} - y_j + d_j \leq 0$$

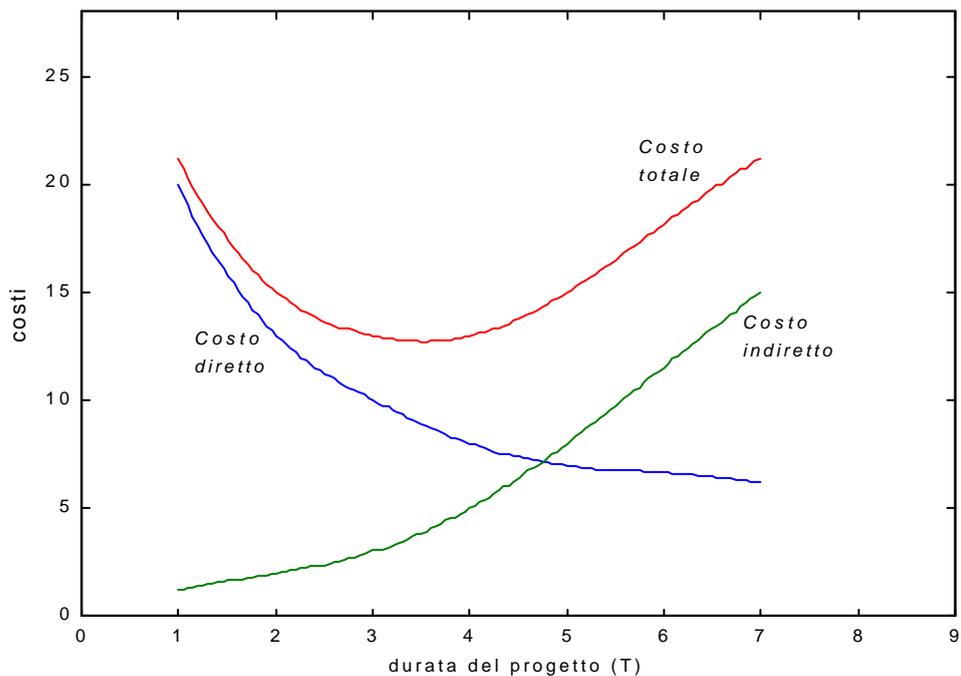
$$y_n \leq T$$

Un'importante proprietà della soluzione ottima di questo sistema è che ogni cammino sarà critico e richiederà un tempo pari a T. Infatti finchè esisteranno cammini con durata minore di T il C.P.M. allungherà i tempi degli eventi di questi cammini (diminuendo quindi i costi) finchè tutti i cammini non avranno una durata totale pari a T e quindi saranno tutti critici.

Variando T si potrà diagrammare il costo diretto totale del progetto in funzione del tempo totale, si otterrà un andamento di questo tipo:



Insieme ai costi diretti si possono anche definire dei *costi indiretti*, che aumentano non linearmente all'aumentare del tempo. Si pensi ad esempio alle maggiori revisioni che richiede un progetto più lungo, o all'effetto dell'inflazione se il progetto ha durata dell'ordine degli anni. Questi costi hanno un andamento quindi opposto a quello dei costi diretti. Posso allora rappresentare su un unico grafico il costo totale diretto, quello totale indiretto e il costo complessivo dovuto alla somma dei due, il risultato è rappresentato nella seguente figura:



Come si vede dall'ultima figura la curva del costo totale ha un minimo. Questo minimo si verifica per un determinato valore della durata del progetto. Allora sarà questo valore del tempo che prenderemo come tempo totale del progetto in fase di pianificazione.