SOLUZIONI DI EQUILIBRIO, STABILITA' E PICCOLE OSCILLAZIONI

Consideriamo sistema con VINCOLI INDIPENDENTI DAL TEMPO $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q})$

$\rightarrow T = T_2 \quad (b_h = 0 = c)$

Eq. di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial T}{\partial q_\ell} = Q_\ell$ possono essere scritte come

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

$$\bar{f} = \bar{a}^{-1}(\bar{Q} - \bar{g})$$

$$g_h = \sum_{jk}\left(\frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_h}\right)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\ddot{q}_h = f_h(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_h = \eta_h \\ \dot{\eta}_h = f_h(\bar{q}, \bar{\eta}) \end{cases} \quad (\star)$$

$\Leftarrow$ $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ sist. autonomo di eq. diff. del 1° ordine

Def. $\bar{q}^*$ è una CONFIGURAZIONE (o punto) DI EQUILIBRIO per le eq. di Lagrange se $\bar{c} \equiv (\bar{q}^*, 0)$ è pto di equil. per il sistema $(\star)$, ovvero se $f_h(\bar{q}^*, 0) = 0 \quad h = 1, \dots, n$

Prop. Pto $\bar{q}^*$ è di EQUIL. per le eq. di Lag. $\Longleftrightarrow$ $Q_h(\bar{q}^*, 0) = 0 \quad h = 1, \dots, n$

Dim. $\bar{f} = \bar{a}^{-1}(\bar{Q} - \bar{g})$ e $\bar{g}$ è omogenea in $\dot{\bar{q}}$

$$\bar{f}(\bar{q}^*, 0) = 0 \Longleftrightarrow \underset{\text{invertibile}}{\bar{a}^{-1}}\bar{Q}\,\big|_{(\bar{q}^*, 0)} = 0 \Longleftrightarrow \bar{Q}(\bar{q}^*, 0) = 0 \quad //$$

Se le forze sono f.c. $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}$ allora vale

Prop. Config. $\bar{q}^*$ è di equil. $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial V}{\partial q_h}(\bar{q}^*) = 0 \quad h = 1, \dots, n$

$\nwarrow$ $\bar{q}^*$ è pto staz. per V

Def. $\bar{q}^*$ è config. di equil. STABILE se $\bar{c} = (\bar{q}^*, 0)$ è stabile per il sistema $(\star)$

$\hookrightarrow$ comunque si prende un intorno U di $\bar{q}^*$ e $\epsilon > 0$, $\exists$ intorno V di $\bar{q}^*$ e $\exists \delta > 0$ t.c. ogni moto con dato iniziale $(\bar{q}^0, \dot{\bar{q}}^0)$ con $\bar{q}^0 \in V$ e $T(\bar{q}^0, \dot{\bar{q}}^0) < \delta$ resta indefinitamente in U con en. cin. $T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) < \epsilon$

Teorema di Lagrange-Dirichlet. Sia dato un sist. Lagrangiano con $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q})$ con $T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\bar{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k$.
Se l'en potenziale V ha un MINIMO STRETTO in $\bar{q}^*$, allora $\bar{q}^*$ è un pto di equil. STABILE.

Dim. Se $\bar{q}^*$ è min. di $V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_h}(\bar{q}^*) = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n \Rightarrow \bar{q}^*$ è di EQUIL

L'en. $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + V(\bar{q})$ è una buona funz. di Ljap.

- in un intorno di $\bar{c} = (\bar{q}^*, 0)$ risulta $E > V(\bar{q}^*)$
- $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ è una cost. del moto $\Rightarrow \mathcal{L}_{\bar{f}} E = 0$ //

- Teorema di LD si estende ai casi più comuni di forze dip. da velocità (es. Forza di Coriolis)

$$V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \qquad \text{con } V_1 \text{ lineare in } \dot{\bar{q}}$$

$\hookrightarrow$ la dim del teorema rimane valida se prendiamo come funz. di Ljapunov $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + V_0(\bar{q})$

- Se ci sono forze dissipative la stab. rimane ma solo per tempi positivi.

LINEARIZZAZIONE di un sist. Lagrangiano

si riferisce alle eq. diff. (eq. di Lagrange)

Studiamo le soluz. delle eq. di Lagrange attorno a pti di equil. stab.

$$|q_l(t) - q_l^*| \ll 1 \qquad |\dot q_l(t)| \ll 1$$ ← durante tutto il moto

ci permetteranno di trascurare potenze di grado superiore in $\|\bar q(t) - \bar q^*\|$ e $\|\dot{\bar q}(t)\|$.

$$L(\tilde{\bar q}, \dot{\tilde{\bar q}}) = T(\tilde{\bar q}, \dot{\tilde{\bar q}}) - V(\tilde{\bar q}) \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{h,m} \tilde a_{hm}(\tilde{\bar q})\, \dot{\tilde q}_h \dot{\tilde q}_m$$

Supponiamo che $(\tilde{\bar q}^*, 0)$ sia punto di equil. (stab.)

Per semplicità ridefiniamo le coordinate $\bar q = \bar q(\tilde{\bar q})$ t.c. nelle nuove coord. il pto di equil. sia in $\bar q = 0$:

$$\bar q = \tilde{\bar q} - \tilde{\bar q}^*$$

In queste nuove coordinate, il pto di equil. è in $(\bar q, \dot{\bar q}) = (0,0)$

$$\|\bar q(t)\| \ll 1 \qquad \|\dot{\bar q}(t)\| \ll 1$$

$$L = T(\bar q, \dot{\bar q}) - V(\bar q)$$ ← espandiamo attorno a $(0,0)$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}(\bar q)\, \dot q_h \dot q_k$$

$$L(\bar q, \dot{\bar q}) = L(0,0) + \sum_{m=1}^{\tilde m} \frac{\partial L}{\partial q_m}(0,0)\, q_m + \sum_{m=1}^{\tilde m} \frac{\partial L}{\partial \dot q_m}(0,0)\, \dot q_m +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{m,k}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial q_k}(0,0)\, q_m q_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_m \partial \dot q_k}(0,0)\, \dot q_m \dot q_k + 2\frac{\partial^2 L(0,0)}{\partial q_m \partial \dot q_k}\, q_m \dot q_k \right) +$$

$$+ O(q^3, q^2\dot q, q\dot q^2, \dot q^3)$$

$$L(\bar q, \dot{\bar q}) = -\overbrace{V(0)}^{\text{cost.}} \quad - \cancel{\sum_m \frac{\partial V(0)}{\partial q_m}} q_m \quad = 0 \text{ perchè } \bar q = 0 \text{ è di equil.}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{m,k=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_k}(0)\, q_m q_k \quad + \frac{1}{2} \sum_{m,k=1}^{m} a_{mk}(0)\, \dot q_m \dot q_k \; +$$

$$+ \; \ldots$$

termini di grado 3 in q e $\dot q$
quindi più piccoli rispetto ai
termini precedenti $(\|\bar q\| \ll 1 \quad \|\dot{\bar q}\| \ll 1)$

Otteniamo una Lagrangiana quadratica che bene approssima la Lagr. di partenza in un intorno della configurazione di equilibrio.

$$\hat L = \frac{1}{2} \sum_{h,k} \underbrace{a_{hk}(0)}_{\equiv A_{hk}}\, \dot q_h \dot q_k - \frac{1}{2} \sum_{h,k} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(0)}_{\equiv B_{hk}}\, q_h q_k$$

$$\rightarrow \hat L = \frac{1}{2} \dot{\bar q} \cdot A \dot{\bar q} - \frac{1}{2} \bar q \cdot B \bar q$$

$\downarrow$

Eq di Lagrange (buona approssimaz. per moti vicino a pto equil.)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{m} A_{\ell h} \dot q_h\right) = \sum_{h=1}^{m} A_{\ell h} \ddot q_h$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\ell} = -\sum_{h=1}^{m} B_{\ell h} q_h \quad \rightsquigarrow \sum_{h=1}^{m} \left(A_{\ell h} \ddot q_h + B_{\ell h} q_h\right) = 0 \quad \ell = 1, \ldots, m$$

$$A \ddot{\bar q} + B \bar q = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ le eq. di Lagr. di $\hat{L}$ sono EQ. DIFF. LINEARI

– Avremmo ottenuto le eq. lineari $(\circ)$ linearizzando le eq. di Lagr. di L, cioè

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}) \end{cases} \leftarrow \text{lineariz. } \bar{f} \Rightarrow (\circ)$$

Risolviamo $A\ddot{\bar{q}} + B\bar{q} = 0$ $(*)$ $\leftarrow$ eq. LIN. OMOG. : soluz. gen. è comb. lin. di $2n$ soluz. indip.

Cerchiamo soluz. particolari della forma

$\bar{q}(t) = \tau(t)\,\bar{u}$ $\quad \bar{u} \in \mathbb{R}^n$

metto in $(*)$

$\ddot{\tau}(t)\, \underline{A\bar{u}} + \tau(t)\, \underline{B\bar{u}} = 0$ $\leftarrow$ possibile solo se $A\bar{u}$ e $B\bar{u}$ sono vettori paralleli

cioè se

$B\bar{u} = \lambda A\bar{u}$ $\quad (\ddagger)$

$\ddot{\tau} = -\lambda\tau$

2 soluzioni indipendenti

Per avere $2n$ soluz. indip. di $(*)$ $\rightsquigarrow$ cercare n soluz. indip. di $(\ddagger)$ $\quad \bar{u}^{(i)}$ $i=1,\dots,n$

$\rightarrow$ eq. agli autovalori per B data da

$\det(B - \lambda A) = 0$ $\rightsquigarrow$ valori di λ_i

matrice def. pos. e simm.

A è matrice simm. e strettam. def. pos.

$\Rightarrow \exists$ matrice $\tilde{U}$ (invertibile) t.c.

$$\tilde{U}^T A \tilde{U} = \mathbb{1}$$

$\tilde{O}^T A \tilde{O} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ $\quad a_i > 0$

$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{a_n}} \end{pmatrix}$

$\underbrace{L^T \tilde{O}^T}_{\tilde{U}^T} A \underbrace{\tilde{O} L}_{\tilde{U}} = L^T \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} L = \mathbb{1}$

$$B\bar{u} = \lambda A \bar{u} \iff \tilde{U}^T B \tilde{U}\tilde{U}^{-1} \bar{u} = \lambda \tilde{U}^T A \tilde{U}\tilde{U}^{-1}\bar{u} \iff$$

$$\iff (\tilde{U}^T B \tilde{U}) \bar{w} = \lambda \bar{w} \qquad \bar{w} \equiv \tilde{U}^{-1}\bar{u}$$

Si può dim. che $\tilde{U}^T B \tilde{U}$ è simmetrica $\rightarrow$ possiamo diagonalizzarla con una matrice ortogonale O $(OO^T = \mathbb{1})$

$$\rightsquigarrow O^T \tilde{U}^T B \tilde{U} O = B_{diag.} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ abbiamo trovato una matrice $U \equiv \tilde{U} O$ $\quad (U^T = O^T \tilde{U}^T)$

t.c. $\quad U^T B U = B_{diag.}$

$$U^T A U = \mathbb{1} \qquad (O^T \tilde{U}^T A \tilde{U} O = O^T \mathbb{1} O = \mathbb{1})$$

$$\Rightarrow U^{-T} = AU$$

$$BU = U^{-T} U^T B U = U^{-T} B_{diag.} = A U B_{diag.}$$

$$\underline{B \cdot U} = A \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$U = (\bar{u}^{(1)}\ \bar{u}^{(2)} \cdots \bar{u}^{(n)})$

$$(B\bar{u}^{(1)}\ B\bar{u}^{(2)} \cdots B\bar{u}^{(n)}) = (A\bar{u}^{(1)}\ A\bar{u}^{(2)} \cdots A\bar{u}^{(n)}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 A\bar{u}^{(1)}\ \lambda_2 A\bar{u}^{(2)} \cdots \lambda_n A\bar{u}^{(n)})$$

Le colonne di U soddisfano

$$B\,\bar{u}^{(i)} = \lambda_i\, A\,\bar{u}^{(i)} \qquad i=1,\dots,n$$

$\rightarrow$ le colonne di U sono gli autovettori di B rispetto agli autovalori λ_i.

B simmetrica $\rightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

B def. positiva $\rightarrow$ $\lambda_i \geqslant 0$

Autovett. $u_j^{(i)} = U_{ji}$

la componente j-esima del vettore i-esimo

MODI NORMALI DI OSCILLAZIONE

Ci restringiamo al caso di interesse: EQ. STAB. ($\bar{q}^*$ è MIN di V)

$$\Rightarrow \quad B \quad \left(B_{hk} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(q^*) \right) \quad \text{è DEF. POSITIVA}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_i \equiv \omega_i^2 > 0 \qquad i=1,\dots,n$$

Eq. per $\tau(t)$ è $\ddot{\tau}(t) = -\omega_i^2\,\tau(t)$ eq. osc. arm.

$$\Rightarrow \quad \tau_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \qquad \leftarrow \text{relativa a } \bar{u}^{(i)}$$

Soluz. generale

$$\bar{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)\,\bar{u}^{(i)}$$

combinaz. lin. delle $2n$ soluz. particol.

Sottocaso $A_k = 1 \quad A_{i \neq k} = 0$

$$q_h(t) = U_{hk} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \iff \bar{q}(t) = \cos(\omega_k t + \varphi_k)\, \bar{u}^{(k)}$$

→ soluzioni PERIODICHE (armoniche) in cui le $q_h(t)$ hanno PERIODO E FASE uguali $(\forall h = 1, \dots, n)$

e sono dette MODI NORMALI DI OSCILLAZIONE

→ Soluz. gen. è comb lineare dei modi norm. di oscill.

Le frequenze dei modi normali sono dette FREQUENZE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

$$\hat{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q} \cdot B \bar{q}$$

$\downarrow$ faccio cambio di coord. $\bar{q} = U \bar{x}$

$$\hat{L}'(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \hat{L}(U\dot{\bar{x}}, U\bar{x}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}} \cdot \overbrace{U^T A U}^{\mathbb{1}} \dot{\bar{x}} - \frac{1}{2} \bar{x} \cdot \overbrace{U^T B U}^{B_{diag.}} \bar{x}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

pto eq. stab.

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 x_i^2 \right] \quad (*)$$

x_i sono dette COORDINATE NORMALI

somma di n oscillatori armonici DISACCOPPIATI!

Eq. di Lagr. sono

$$\ddot{x}_i = - \omega_i^2 x_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ Qualsiasi sist. Lagrangiano linearizzato attorno a pto eq. stab. è equivalente a un sist. di n oscill. armonici disaccopp.

Linearizzazione e stabilità

Guardando le eq. disaccoppiate, si vede subito che l'origine è pto eq. stab. per il sistema linearizzato se $\lambda_i > 0 \ \forall i$, mentre è INSTAB. se $\exists i$ t.c. $\lambda_i \leq 0$.

Le proprietà di stabilità dell'eq. lin. non si trasportano sempre al sistema originario non-lineare. Ciò può avvenire per sist. Lagrangiani conservativi nei seguenti casi:

- se $\lambda_i > 0 \ \forall i \Rightarrow$ pto eq. STAB anche per sist. non-lineare
- se $\exists \lambda_i < 0 \Rightarrow$ " " INSTAB " " " "

Ma se almeno un λ_i è nullo, non si può dire nulla di definitivo (bisogna prendere in considerazione le potenze successive nell'espansione di L).