

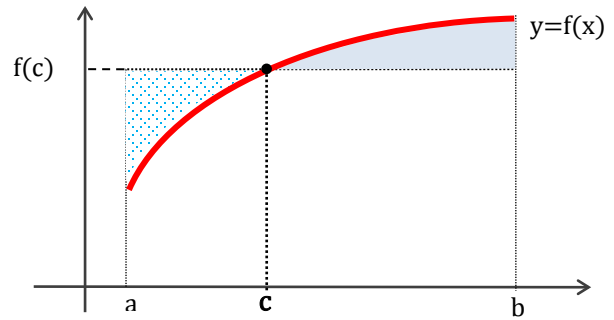
## Teorema della media

## enunciato

Se una funzione  $f(x)$  è continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$

allora esiste almeno un punto  $c$  appartenente all'intervallo chiuso  $[a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$



## dimostrazione

Osserviamo che le ipotesi sono le stesse del teorema di Weierstrass per cui la funzione è dotata di un punto di minimo e di massimo assoluto nell'intervallo:

$$\exists m = \text{minimo assoluto} \quad M = \text{massimo assoluto}$$

Per definizione di minimo e massimo assoluto, per ogni punto  $x \in [a, b]$  della funzione si ha che:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Applichiamo ai tre membri della disuguaglianza l'integrale definito tra gli estremi  $[a, b]$

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Osserviamo che:

$$\int_a^b m dx = m \cdot \int_a^b dx = m \cdot (b - a)$$

$$\int_a^b M dx = M \cdot \int_a^b dx = M \cdot (b - a)$$

Sostituendo nella disuguaglianza otteniamo:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

Dividiamo i tre membri per  $(b - a)$ . Osserviamo che il termine centrale è un valore compreso tra il minimo ed il massimo.

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b - a)} \leq M$$

Per il teorema di Bolzano esisterà almeno un punto  $c$  appartenente all'intervallo chiuso  $[a, b]$  tale che:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{(b - a)} = f(c)$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $(b - a)$  otteniamo la tesi

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

$f(c)$  viene detto *valore medio* di  $f(x)$  in  $[a, b]$

# Teorema della media

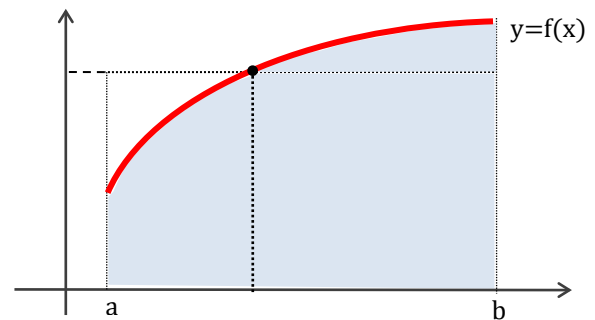
## significato geometrico del teorema della media

Riportiamo per comodità l'enunciato del teorema della media:

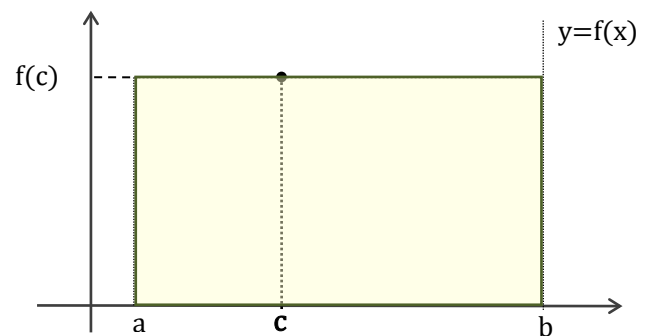
Se una funzione  $f(x)$  è continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$   
**allora** esiste almeno un punto  $c$  appartenente all'intervallo chiuso  $[a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Il primo membro del teorema è l'area del trapezoide di base l'intervallo  $[a, b]$  e delimitato superiormente dal grafico della funzione  $f(x)$ .



Il secondo membro del teorema è l'area del rettangolo di base  $[a, b]$  ed altezza  $f(c)$ .



Da un punto di vista geometrico il teorema afferma che esiste almeno una posizione del punto  $c$  nell'intervallo  $[a, b]$  tale che l'area del trapezoide risulta uguale all'area del rettangolo di base  $[a, b]$  ed altezza  $f(c)$ .

