

PRINCIPI VARIAZIONALI

Il moto (come la configurazione del sistema) varia nel tempo
è descritto da una funt. $\bar{q}: \mathbb{R} \mapsto Q$
 $t \mapsto \bar{q}(t)$

Finora il moto di un sistema (soggetto a forze) è stato predetto risolvendo delle eq. differenziali, la cui incognita era una funzione del tempo.

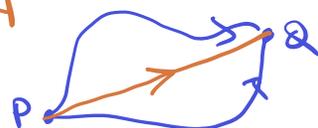
↳ eq. di Lagrange (Newton) $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = 0$
↑
incognita
vale punto per punto (LOCALE)

I moti effettivamente compiuti dal sistema sono descritti da funzioni $q_1(t), \dots, q_n(t)$ che soddisfano una certa equazione differenziale (locale).

Ora descriveremo il moto effettivamente seguito dal sistema usando PROPRIETÀ GLOBALI (INTEGRALI) della funt. $\bar{q}(t)$

Esempio di proprietà globale che permette di selezionare una traiettoria fra tutte quelle possibili:

dati due pts in \mathbb{R}^3 , la traiettoria da selezionare fra quelle che congiungono due pts dati (P, Q) è quella che abbia LUNGHEZZA MINIMA



FUNZIONI :

- data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

i pts stazionari di f sono quelli che risolvono $f'(x) = 0$

- data una funz. a più variabili $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_N) \mapsto F(x_1, \dots, x_N)$

i pts stazionari di F sono gli che risolvono $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \forall i=1, \dots, N$

- ora considereremo il caso in cui F non agisce su uno spazio vett. finito-dimensionale (\mathbb{R}, \mathbb{R}^N), ma su uno spazio (infinito-dim.) di FUNZIONI
 $\leadsto F$ detto FUNZIONALE

Def. Dato uno spazio U di funzioni, si dice FUNZIONALE definito nel dominio U una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in U$ associa un numero (reale)

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

ES) $U = \{ \text{funzioni regolari definite sull'intervallo } [0,1] \}$
 $u \in U$

1) $F[u] = \int_0^1 u(t) dt$

$$u(t) = \sin(\pi t)$$
$$F[u] = \int_0^1 \sin(\pi t) dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \xi d\xi = \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad F[u] = u(t_0) \quad \text{dove } t_0 \text{ è un valore fisso in } [0,1]$$

$$t_0 = 1/2 \quad u(t) = \sin(\pi t)$$

$$F[u] = \sin(\pi \cdot 1/2) = 1 \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad F[u] = u'(t_0) \quad F[u] = \pi \cos(\pi t) \Big|_{t=1/2} = 0$$

$$4) \quad F[u] = \sqrt{\int_0^1 u^2(t) dt} \quad F[u] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

↑
sin πt

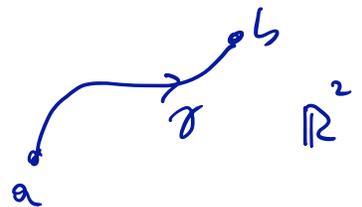
Es 1,2,3 sono FUNZIONALI LINEARI

$$F[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 F[u_1] + c_2 F[u_2] \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$u_1, u_2 \in \mathcal{U}$$

Un funzionale di notevole interesse è qlo che data una curva γ , restituisce la sua LUNGHEZZA

$$\gamma \mapsto F[\gamma] = \text{lunghezza di } \gamma$$



In che senso una curva "è una funzione"?

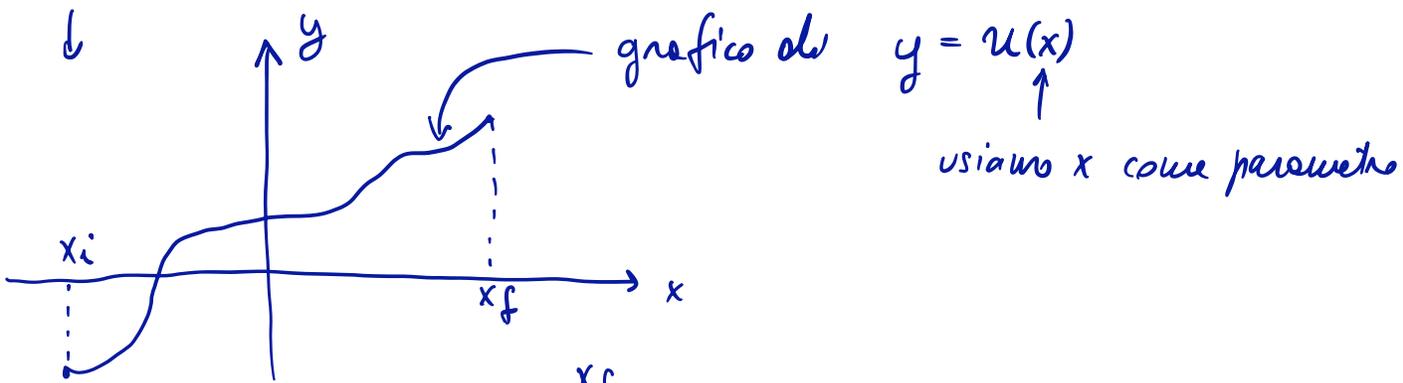
↳ La curva è descritta da una funzione

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t)$$

$$\text{e t.c. } \gamma(0) = a \quad \gamma(1) = b$$



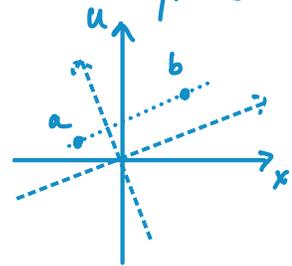
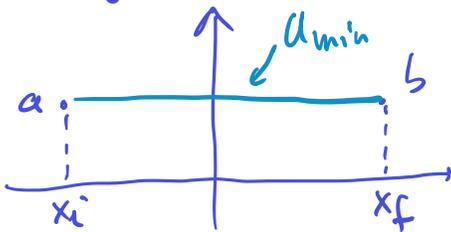


→ Lunghezza:
$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \quad (*)$$

Problema classico: trovare le linee più corte ^{GEODETICHE} tra due punti dati (in \mathbb{R}^2)

Nel nostro esempio sul piano \mathbb{R}^2 , chiediamo quali sono le curve che minimizzano (*).

Ci restringiamo al caso in cui $u(x_i) = u(x_f)$ → Altri casi sono riconducibili a qto con una rotaz.



$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

definito positivo \Rightarrow minimizzato da $u'(x) = 0 \quad \forall x$

\Leftrightarrow cioè la funzione che minimizza F è

$$u(x) = c \quad \text{con} \quad c = u(x_i) = u(x_f)$$

↑
RETTA

Un altro problema importante (meccanica, ottica) è il calcolo del tempo di percorrenza di una traiettoria γ assegnata, per cui la velocità dipende in maniera nota dalla posizione.

Moto piano, traiettorie sono parametrizzate da $y = u(x)$

TEMPO di PERCORRENZA

$$T[u] = \int_{\gamma} \frac{ds}{v} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2} dx}{v(x, u(x))} \quad v = v(x, y)$$

- In MECCANICA: se sistema è conservativo $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x, y))}$

In particolare, se la forza è gravitazionale

$$v = \sqrt{2gy} \quad T[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2gu(x)}} dx$$

- In OTTICA: $v = \frac{c}{n(x, y)}$ ← indice rifrattivo nel mezzo

$$T[u] = \frac{1}{c} \int_{x_i}^{x_f} n(x, u(x)) \sqrt{1+u'(x)^2} dx$$

PRINCIPIO di FERMAT: tra tutte le traiettorie possibili, la luce segue quelle che minimizzano $T[u]$.

- Noi considereremo funzionali dipendenti esplicitamente da u e u' ,
 ma in generale un funzionale può dipendere da un numero una derivata

arbitrario di derivate di u .

- Esistono funzionali dipendenti da più funzioni

$$F: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto F[u, v] \quad \stackrel{\text{ES}}{=} \int_0^1 u(x)v(x) dx \in \mathbb{R}$$

ES. lunghezza di una curva in \mathbb{R}^3

parametrizzato da $\gamma: t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$

$$F[\gamma] = F[u, v, w] = \int_0^1 \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 + w'(t)^2} dt$$

VARIAZIONE DI UN FUNZIONALE

Preliminarmente, consideriamo l'es. di funzione a più variabili.

$$F: U \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_M) \in U \mapsto F(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

Fissiamo una direzione in \mathbb{R}^M , scegliendo un vettore

$$\delta \bar{x} = (\delta x_1, \dots, \delta x_M) \in \mathbb{R}^M$$

e consideriamo i valori di F nei punti VARIATI $\bar{x} + \alpha \delta \bar{x}$
 \uparrow
 $\alpha \in \mathbb{R}$

La DERIVATA DIREZIONALE (o VARIAZIONE) δF

della funzione F nel pto \bar{x} e relativa al vett. $\delta \bar{x}$

è def. da

$$\delta F(\bar{x}, \delta \bar{x}) = \left. \frac{d}{d\alpha} F(\bar{x} + \alpha \delta \bar{x}) \right|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_{i=1}^M \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) \delta x_i \quad \leftarrow = dF[\delta \bar{x}]$$

$$= \bar{\nabla} F \cdot \delta \bar{x} \quad \leftarrow \text{dice quanto velocemente varia } F \text{ nella direzione } \delta \bar{x}.$$

F è stazionaria in $\bar{x} \iff \delta F$ si annulla in \bar{x} , $\forall \delta x$

$$\text{cioè } \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

cioè se $dF=0$ in \bar{x} .

Consideriamo ora un funzionale $F: U \rightarrow \mathbb{R}$

- fissiamo una direzione $\delta u(t)$

- consideriamo la famiglia a un parametro di funzioni variabile

$$u^\alpha(t) = u(t) + \alpha \delta u(t)$$

Def. La VARIAZIONE δF del funzionale F in u , relativa alle

variazioni δu , si definisce a partire da $F[u^\alpha] = F[u + \alpha \delta u]$

e ponendo

Per u e δu fissati, $F[u^\alpha]$ è
una funzione di $\alpha: \alpha \mapsto F[u^\alpha] \in \mathbb{R}$

$$\delta F[u, \delta u] = \left. \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \right|_{\alpha=0} \quad (*)$$

δF è un funzionale nelle due
funzioni u e δu .

- Il funzionale si dice DIFFERENZIABILE in u se la
derivata (*) esiste $\forall \delta u$

- Procedendo in maniera intuitiva, si può immaginare δu
come "piccolo" e definire δF come la PARTE
LINEARE in δu dell' INCREMENTO

$$\Delta F = F[u + \delta u] - F[u]$$

Il risultato è lo stesso di (*).

ES] 1) $F[u] = \int_0^1 u(t) dt$

• $F[u^\alpha] = \int_0^1 (u(t) + \alpha \delta u(t)) dt$

$\delta F = \frac{d}{d\alpha} (F[u^\alpha]) \Big|_{\alpha=0} = \int_0^1 \delta u(t) dt$

• $\Delta F = F[u + \delta u] - F[u] = \int_0^1 (u + \delta u) dt - \int_0^1 u dt = \int_0^1 \delta u dt$
" δF
↑
lineare
in δu //

2) $F[u] = \int_0^1 u(x)^2 dx$

• $\delta F = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 (u + \alpha \delta u)^2 dt \Big|_{\alpha=0} =$

$= 2 \int_0^1 (u + \alpha \delta u) \delta u dt \Big|_{\alpha=0} = 2 \int_0^1 u \delta u dt$

• $\Delta F = \int_0^1 (u + \delta u)^2 dt - \int_0^1 u^2 dt =$

$= \int_0^1 u^2 dt + 2 \int_0^1 u \delta u dt + \int_0^1 \delta u^2 dt - \int_0^1 u^2 dt$

↑
parte lineare $\Rightarrow \delta F = 2 \int_0^1 u \delta u dt //$

$$3) \quad F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx \quad L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, u', x) \mapsto L(u, u', x)$$

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_i}^{x_f} L(u(x) + \alpha \delta u(x), u'(x) + \alpha \delta u'(x), x) dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u}(u(x), u'(x), x) \delta u(x) + \frac{\partial L}{\partial u'}(u(x), u'(x), x) \delta u'(x) \right\} dx$$

← integrat. per parti

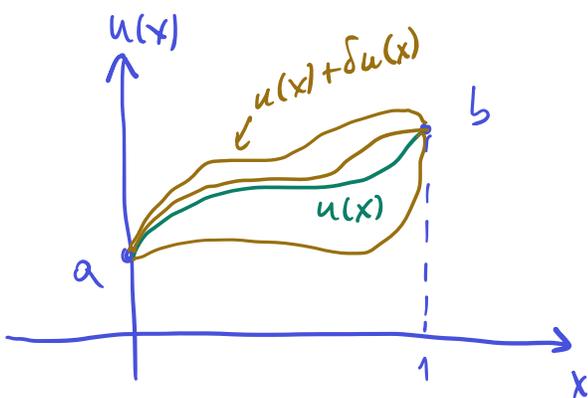
$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} \right) \delta u + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \right) \right\} dx =$$

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u dx$$

In particolare, se ci si restringe a **VARIAZIONI** $\delta u(x)$ **NULLI AGLI ESTREMI** ($\delta u(x_i) = 0$ $\delta u(x_f) = 0$), si trova

$$\delta F[u, \delta u] = - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u dx$$



↓
Stiamo restringendo il dominio U a tutte e sole le funzioni u t.c. $u(x_i) = a$ $u(x_f) = b$ fissati $\Rightarrow \delta u(x_i) = 0 = \delta u(x_f)$

$$ES. \quad F = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1+u'(x)^2} dx = \int_{x_i}^{x_f} L(u, u', x) dx$$

$$L(u, u', x) = \sqrt{1+u'^2}$$

$$\delta F [u, \delta u] = - \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \delta u dx =$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u''}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{u' \cdot 2u'u''}{2(1+u'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

$$= \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} (1+u'^2 - u'^2) = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$