Ricapitoliamo:

Def. Dato uno spazio $\mathcal{U}$ di funzioni, si dice FUNZIONALE definito nel dominio $\mathcal{U}$ una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in \mathcal{U}$ associa un numero (reale)

$$F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

Def. VARIAZIONE di un FUNZIONALE:

$$\boxed{\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \Big|_{\alpha = 0}}$$

← generalizzazione ai funzionali delle derivate direzionali di funzioni a più variabili

Caso particolare:

$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx \implies \delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$$

Def. Diciamo che un funzionale F definito su $\mathcal{U}$ è STAZIONARIO in u_0, o che u_0 è pto di stazionarietà per F, se

$$\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \underline{\forall \delta u} \quad (\text{t.c. } u_0 + \delta u \in \mathcal{U})$$

Prop. Dato $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx$, allora

u_0 è pto di staz. per F per variazioni nulle agli estremi $\iff$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'}(u_0(x), u_0'(x), x) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0(x), u_0'(x), x) = 0}_{\text{dette EQ. di EULERO-LAGRANGE associate al funzionale } F}$$

Dim $\delta F[u, \delta u] = \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial u'} \delta u} \Big|_{x_i}^{x_f}}_{=0 \quad \delta u = 0} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$

$\Leftarrow$: ovvio $\rightsquigarrow$ $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} (u_0(x)) = 0 \implies \delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

$\Rightarrow$: dobbiamo dim. che se $\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$,

allora $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'}(u_0, u_0', x) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0, u_0', x) = 0$

dim. per assurdo: assumiamo per assurdo che $u_0(x)$ non soddisfi eq. di Lagr. $\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0}(x) = 0$,

cioè $\exists$ almeno un $\bar{x} \in [x_i, x_f]$ t.c.

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}(\bar{x}) \neq 0$$

allora per continuità

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}(x) \neq 0 \quad \text{per} \quad x \in I_{\bar{x}}$$

intorno di $\bar{x}$

e prendendo intorno suff. piccolo $\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}$ ha segno def.

<u>questo ci permette di trovare un δu t.c. $F[u_0, \delta u] \neq 0$:</u>

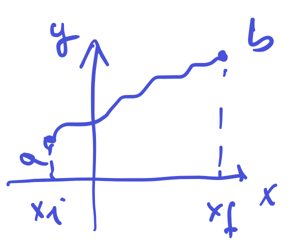
cioè δu t.c. $\delta u(x) = 0$ se $x \notin I_{\bar{x}}$, $\delta u(x) > 0$ se $x \in I_{\bar{x}}$

$$\to \int_{x_i}^{x_f}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}(x)\, \delta u(x)\, dx =$$

$$= \int_{I_{\bar{x}}} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}(x)}_{\neq 0}\, \underbrace{\delta u(x)}_{>0}\, dx \neq 0 \qquad //$$

ES) $L = (1 + u'^2)^{1/2}$ $\qquad F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx$

lunghezza della curva



u che minimizza F, cioè t.c. $\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

$\Leftrightarrow$ u soddisfa eq. di Lagr.:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} = 0 \iff u'' = 0$$

$$\updownarrow$$

$u(x) = mx + q$ RETTA

PRINCIPIO DI HAMILTON

In meccanica abbiamo a che fare con funzioni nel tempo t che descrivono il moto del sistema: $q_k(t)$, le cui derivate sono $\dot{q}_k(t)$

Iniziamo con un sistema a 1 grado di l.b. $n=1$

$L(q, \dot{q}, t)$ Lagrangiana $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Se sostituisco alle variabili $q, \dot{q}$, le funz. $q(t), \dot{q}(t)$, ottengo $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ che è una funz. in t

Definisco AZIONE HAMILTONIANA il funzionale

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

→ Un moto $q(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO $S[q]$, per variazioni arbitrarie $\delta q(t)$ (nulle agli estremi) se e solo se $q(t)$ soddisfa le eq. di Lag.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

⇝ Tra tutti i moti possibili tra $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$ il moto reale è quello che rende stazionario il funzionale AZIONE $S[q]$, cioè $q(t)$ t.c.

$$\delta S[q, \delta q] = 0 \quad \forall \delta q$$

Generalizziamo a n gradi di libertà

$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ $\quad L: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ Lagrangiana

$$S[\bar{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt$$ AZIONE HAMILTONIANA

Prop. La variazione del funzionale S è data da

$$\delta S[\bar{q}, \delta\bar{q}] = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt$$

$=0$ se δq_h si annulla in t_1 e t_2

Prop. PRINCIPIO DI HAMILTON. Il moto $\bar{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO il funzionale AZIONE S, per variazioni $\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t)$ arbitrarie e nulle agli estremi

$\iff$ $\bar{q}(t)$ soddisfa le eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1, \dots, n$$

Noi siamo partiti da PRINCIPIO di $\bar{F} = m\bar{a}$ $\Rightarrow$ principio di Hamilton

Si poteva anche formulare la MECCANICA CLASSICA assumendo come primo il PRINCIPIO di HAMILTON $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ eq. Lag $\Rightarrow$ eq. $F_i = m\ddot{a}_i$.

Vediamo ora che le proprietà di invarianza delle eq. di Lagrange sono facilmente ricavabili utilizzando la formulazione variazionale.

1) Inv. per CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\bar q = \bar q(\tilde{\bar q}, t)$$

$$\tilde L(\tilde{\bar q}, \dot{\tilde{\bar q}}, t) = L\left(\bar q(\tilde{\bar q},t), \dot{\bar q}(\tilde{\bar q},\dot{\tilde{\bar q}},t), t\right)$$

Il moto $\bar q(t) = \bar q(\tilde{\bar q}(t), t)$

Allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde L(\tilde{\bar q}(t), \dot{\tilde{\bar q}}(t), t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)\, dt$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \text{stazionario in } \tilde{\bar q}(t) & \Longleftrightarrow & \text{stazionario in } \bar q(t) = \bar q(\tilde{\bar q}(t), t) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \tilde{\bar q}(t) \text{ risolve eq. di Lag. in } \tilde L & \Longleftrightarrow & \bar q(t) \text{ risolve eq. di Lag. in } L \end{array}$$

2) Abbiamo stesse eq. di Lagrange se L e L' differiscono per una certa $\varphi(\bar q, \dot{\bar q}, t)$ t.c.

$$\varphi(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) = \frac{d}{dt} F(\bar q(t), t) \quad \leftarrow \text{DERIVATA TOTALE}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)\, dt \qquad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)\, dt$$

ma $$S' = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t), t)\, dt$$

$$= S + F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Devo fare variazione di termine di destra e di sinistra

$$\delta S' = \delta S + \delta \left(F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2} \right)$$

proporzionale a $\delta q(t_1)$ o $\delta q(t_2)$

$\rightarrow = 0$

$\Downarrow$

$$\delta S' = \delta S \quad //$$