Calcolo integrale: esercizi svolti

1 Integrali semplici

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

(a) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx$ $\qquad [\log|x+\sin x|+c, \quad c\in\mathbb{R}]$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx$ $\qquad \left[\frac{3}{2}\log(x^2+1)+2\arctan x+c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\cos^2 x}.$ $\qquad [\tan x-\cot x+c, \quad c\in\mathbb{R}]$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx.$$

Poichè $1+\cos x$ è la derivata di $x+\sin x$, si ha che

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx = \log|x+\sin x|+c\,, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx &= \int\left(\frac{3x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \\ &= \frac{3}{2}\log(x^2+1)+2\arctan x+c, \qquad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\cos^2 x}.$$

Poichè $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, si ha che

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\,\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\,\cos^2 x}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \tan x-\cot x+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

---

2 Integrazione per parti

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, utilizzando la formula di integrazione per parti:

(a) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$ $\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

(b) $\displaystyle\int x^2 \log^2 x \, dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3 \left(\log^2 x - \frac{2}{3}\log x + \frac{2}{9}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

(c) $\displaystyle\int x^3 \sqrt{2-x^2} \, dx.$ $\left[-\frac{1}{3}x^2 \left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\left(2-x^2\right)^{\frac{5}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \arcsin x \, dx.$$

Integrando per parti si ha che

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int (x \, \log x)^2 \, dx = \int x^2 \log^2 x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned} \int x^2 \log^2 x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \log x \, dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{9}\int x^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{27}x^3 + c = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \left(\log^2 x - \frac{2}{3}\log x + \frac{2}{9}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int x^3 \sqrt{2-x^2}\, dx = \int x^2 \left(x\sqrt{2-x^2}\right) dx\,.$$

Integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned}\int x^2 \left(x\sqrt{2-x^2}\right) dx &= -\frac{1}{3}x^2\,(2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int x\,(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = \\ &= -\frac{1}{3}x^2\,(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(2-x^2)^{\frac{5}{2}} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

---

3 Integrazione per sostituzione

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, utilizzando la formula di integrazione per sostituzione:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,\log^3 x}$ $\qquad\left[-\dfrac{1}{2\log^2 x}+c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$ $\qquad\left[\log\left(1+\sin^2 x\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ $\qquad\left[2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x\,\log^3 x}.$$

Posto $t=\log x$ si ha che $dt=\frac{1}{x}\,dx$. Quindi

$$\int \frac{dx}{x\,\log^3 x} = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2}+c = -\frac{1}{2\log^2 x}+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx.$$

Posto $t = \sin x$ si ha che $dt = \cos x\,dx$. Quindi

$$\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \log\left(1+t^2\right)+c = \log\left(1+\sin^2 x\right)+c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

Posto $x = t^6$, si ha che $dx = 6t^5\,dt$. Quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2t^3-3t^2+6t-6\log|t+1|+c = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali fratte:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\left(1+x^2\right)}\,dx$ $\qquad \left[\log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+\arctan x+c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\left(1+x^2\right)}\,dx$ $\qquad \left[\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}-\frac{1}{2x^2}+c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-6}\,dx$ $\qquad \left[\frac{1}{2}x^2+2\log|x-2|+3\log|x+3|+c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2x+3)}$ $\qquad \left[\log\sqrt[6]{\frac{x^2}{x^2+2x+3}}-\frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2-10x+10}{x^3+2x^2+5x}\,dx.$ $\qquad \left[\log\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\frac{13}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+c, \quad c \in \mathbb{R}\right]$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x+1}{x\,(1+x^2)}\,dx.$$

Si ha che

$$\frac{x+1}{x\,(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = C = 1 \\ B = -1. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x\,(1+x^2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \\ &= \log|x| + \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \\ &= \log|x| + \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c = \\ &= \log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + \arctan x + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^3\,(1+x^2)}\,dx.$$

Si ha che

$$\frac{1}{x^3\,(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Dx+E}{x^2}\right) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} - \frac{Dx+2E}{x^3} =$$

$$= \frac{(A+B)x^4+(C-D)x^3+(A-2E)x^2-Dx-2E}{x^3(1+x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = D = 0 \\ E = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3\left(1+x^2\right)}\,dx &= \int \left[-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right] dx = \\
&= -\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) dx = \\
&= -\log|x| + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) - \frac{1}{2x^2} + c = \\
&= \log\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-6}\,dx.$$

Eseguendo la divisione fra i polinomi si ha che

$$\frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-6} = x + \frac{5x}{x^2+x-6}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-6}\,dx = \int \left(x + \frac{5x}{x^2+x-6}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx.$$

Si ha che

$$\frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 2 \\ B = 3. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-6}\,dx &= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \int \left(\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+3}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2\log|x-2| + 3\log|x+3| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(d) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+3)}\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2+2x+3)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}=\\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+3A}{x(x^2+2x+3)} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{3}\\ B=-\dfrac{1}{3}\\ C=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}\end{aligned}$$

Quindi si ha che

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2+2x+3)} &= \int\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+2x+3}\right)dx=\\ &= \frac{1}{3}\log|x|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=\\ &= \frac{1}{3}\log|x|-\frac{1}{6}\log\left(x^2+2x+3\right)-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=\end{aligned}$$

essendo $\quad x^2+2x+3=(x+1)^2+2=2\left[\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]$, si ha che

$$= \frac{1}{3}\log|x|-\frac{1}{6}\log\left(x^2+2x+3\right)-\frac{1}{6}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}\,dx=$$

posto $t=\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$, si ha che $dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,dx$, quindi

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\log|x|-\frac{1}{6}\log\left(x^2+2x+3\right)-\frac{\sqrt{2}}{6}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\\ &= \frac{1}{3}\log|x|-\frac{1}{6}\log\left(x^2+2x+3\right)-\frac{\sqrt{2}}{6}\arctan t+c=\\ &= \frac{1}{3}\log|x|-\frac{1}{6}\log\left(x^2+2x+3\right)-\frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c=\\ &= \log\sqrt[6]{\frac{x^2}{x^2+2x+3}}-\frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c\,, \qquad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(*e*) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2 - 10x + 10}{x^3 + 2x^2 + 5x}\, dx = \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)}\, dx\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5} = \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (2A + C)x + 5A}{x(x^2 + 2x + 5)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = -14. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)}\, dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{x + 14}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} - \frac{13}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \\ &= 2 \log|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}\, dx - 13 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx = \\ &= 2 \log|x| - \frac{1}{2} \log\left(x^2 + 2x + 5\right) - 13 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx\,. \end{aligned}$$

Poichè

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4 \left[\left(\frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1 \right],$$

si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx &= \int \frac{1}{4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)}\, dx &= 2 \log|x| - \frac{1}{2} \log\left(x^2 + 2x + 5\right) - 13 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx = \\ &= 2 \log|x| - \frac{1}{2} \log\left(x^2 + 2x + 5\right) - \frac{13}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c = \\ &= \log \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - \frac{13}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

5 Integrazione con sostituzioni speciali

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti utilizzando la formula di integrazione per sostituzione:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ $\qquad\left[\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ $\qquad\left[-\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2+4}} + c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$ $\qquad\left[\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c, \quad c\in\mathbb{R}\right]$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx.$$

Posto $t=\tan\frac{x}{2}$ si ha che $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$. Poichè $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, si ha che

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}.$$

Posto $x=2\sinh t$, quindi $t=\operatorname{settsinh}\frac{x}{2}=\log\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\right)$, da cui $dx = 2\cosh t\,dt$, si ha che

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sinh^2 t}\,dt = \int \frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2}\,dt.$$

Posto $z=e^t$, cioè $z=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}$, da cui $dz=e^t\,dt$, si ha che

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2}\,dt = \int \frac{z}{(z^2-1)^2}\,dz = -\frac{1}{2}\frac{1}{z^2-1} + c =$$

$$= -\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2+4}} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Posto $x-1 = \sqrt{2}\sin t$, per $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha che $t = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ e $dx = \sqrt{2}\cos t\, dt$. Quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \int dt = t + c = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

6 Integrazione di funzioni definite a tratti

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni definite a tratti:

(a) $f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} e^x(x-1)+c & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x + c & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \right]$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x^3 \sin(\pi + \pi x^2) & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 8x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases}$

$$\left[\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}x^2\cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x^2) + c & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + c + \frac{1}{2\pi} - \frac{10}{3} & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determiniamo una generica primitiva F di f su $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\begin{aligned} \int xe^x\, dx &= xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + c_1 = e^x(x-1) + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \\ \int \sin x\, dx &= -\cos x + c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + c_1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x + c_2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che la generica primitiva F è continua in 0. Quindi deve essere

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x).$$

Poichè

$$F(0) = c_1 - 1\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} F(x) = c_2 - 1,$$

si ha che $c_1 = c_2$. Quindi, posto $c = c_1$, si ha che una generica primitiva di f è

$$F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + c & \text{se } x \leq 0 \\ \\ -\cos x + c & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 \sin(\pi + \pi x^2) & \text{se } x \leq 1 \\ \\ x^2 - 8x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determiniamo una generica primitiva F di f su $\mathbb{R}$. Si ha che

$$-\int x^3 \sin(\pi + \pi x^2)\, dx \;= \int x^3 \sin(\pi x^2)\, dx = \int x \left(x^2 \sin(\pi x^2)\right) dx =$$

integrando per parti

$$= -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{\pi} \int x \cos(\pi x^2)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\int (x^2 - 8x + 7)\, dx \;= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \dfrac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c_1 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + c_2 & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che la generica primitiva F è continua in 1. Quindi deve essere

$$F(1) = \lim_{x \to 1^+} F(x).$$

Poichè

$$F(1) = c_1 + \frac{1}{2\pi}, \qquad \lim_{x \to 1^+} F(x) = c_2 + \frac{10}{3},$$

si ha che

$$c_2 = c_1 + \frac{1}{2\pi} - \frac{10}{3}.$$

Quindi, posto $c = c_1$, si ha che una generica primitiva di f è

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c & \text{se } x \le 1 \\ \frac{1}{3} x^3 - 4x^2 + 7x + c + \frac{1}{2\pi} - \frac{10}{3} & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

7 Integrali definiti

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali definiti:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} |6x - \pi| \sin x \, dx$ $\qquad [6\pi - 6]$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x \, dx$ $\qquad \left[\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 2\log 2\right]$

(c) $\displaystyle\int_e^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x\left(1 - \sqrt{\log x - 1}\right)} \, dx.$ $\qquad \left[-\sqrt{2} - 2\log\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} |6x - \pi| \sin x \, dx.$$

Si ha che

$$\int_0^{\pi} |6x - \pi| \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (6x - \pi) \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} (6x - \pi) \sin x \, dx =$$

integrando per parti

$$= \Big[(6x - \pi)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} - 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx + \Big[-(6x - \pi)\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} + 6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= \pi - 6\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + 5\pi + 6\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = 6\pi - 6.$$

(*b*) Consideriamo l'integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x \, dx.$$

Posto $t = \sin x$, da cui $dt = \cos x \, dx$, si ha che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x \, dx = \int_{-1}^{0} \frac{2t^2 + 3t + 3}{(t-1)(t^2+3)} \, dt.$$

Si ha che

$$\frac{2t^2 + 3t + 3}{(t-1)(t^2+3)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt + C}{t^2+3} = \frac{(A+B)t^2 + (-B+C)t + 3A - C}{(t-1)(t^2+3)}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = 3. \end{cases}$$

Quindi si ha che

$$\int_{-1}^{0} \frac{2t^2 + 3t + 3}{(t-1)(t^2+3)} \, dt = \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{t-1} + \frac{3}{t^2+3} \right) dt =$$

$$= 2\Big[\log|t-1|\Big]_{-1}^{0} + \sqrt{3} \int_{-1}^{0} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \, dt =$$

$$= -2\log 2 + \sqrt{3} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 2\log 2.$$

(*c*) Consideriamo l'integrale definito

$$\int_{e}^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x\,(1 - \sqrt{\log x - 1})} \, dx.$$

Posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x} dx$, si ha che

$$\int_{e}^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x\,(1 - \sqrt{\log x - 1})} \, dx = \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1 - \sqrt{t-1}} \, dt\,.$$

Posto $y = \sqrt{t-1}$, da cui $t = y^2 + 1$ e quindi $dt = 2y dy$, si ha che

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1 - \sqrt{t-1}} \, dt = 2\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{1-y} \, dy = 2\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{1}{1-y}\right) dy =$$

$$= 2\Big[-y - \log|1-y| \Big]_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} - 2\log\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

8 Altri esercizi

Esercizio 1. Scrivere lo sviluppo di McLaurin arrestato al sesto ordine della funzione

$$f(x) = \arctan x \cdot \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Svolgimento

È ben noto che se g è una funzione continua definita in un intorno di 0 e se $\alpha > 0$, allora

$$g(x) = o\left(|x|^\alpha\right), \quad x \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^x g(t)\,dt = o\left(|x|^{\alpha+1}\right), \quad x \to 0.$$

Quindi utilizzando gli sviluppi di McLaurin delle funzioni $\arctan x$ e e^s si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x \cdot \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)\right) \cdot \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + o\left(t^4\right)\right) dt = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)\right) \cdot \left(\left[t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{10}t^5\right]_0^x + o\left(x^5\right)\right) = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o\left(x^5\right)\right) = \\ &= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{37}{90}x^6 + o\left(x^6\right), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Ne segue che lo sviluppo di McLaurin arrestato al sesto ordine di f è

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{37}{90}x^6 + o\left(x^6\right), \quad x \to 0.$$

Esercizio 2. Scrivere lo sviluppo di McLaurin arrestato al nono ordine della primitiva della funzione

$$f(x) = \cos 2x^2$$

che si annulla in $x = 0$.

Svolgimento

Essendo f continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \cos 2t^2\,dt$ è la primitiva di f che si annulla in $x = 0$. Inoltre, è ben noto che se g è una funzione continua definita in un intorno di 0 e se $\alpha > 0$, allora

$$g(x) = o\left(|x|^\alpha\right), \quad x \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^x g(t)\,dt = o\left(|x|^{\alpha+1}\right), \quad x \to 0.$$

Quindi utilizzando lo sviluppo di McLaurin della funzione $\cos s$ si ottiene

$$F(x) = \int_0^x \cos 2t^2\, dt = \int_0^x \left(1 - 2t^4 + \frac{2}{3}t^8 + o\left(t^8\right)\right) dt =$$

$$= \left(\left[t - \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{27}t^9\right]_0^x + o\left(x^9\right)\right) = x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{27}x^9 + o\left(x^9\right), \quad x \to 0.$$

Ne segue che lo sviluppo di McLaurin arrestato al sesto ordine di F è

$$F(x) = x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{27}x^9 + o\left(x^9\right), \quad x \to 0.$$

Esercizio 3. Calcolare l'area delle seguenti regioni di piano:

(a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; 1 \le x \le 2,\; 0 \le y \le \dfrac{1}{x\left(1 - \log^2 x\right)}\right\}$ $\left[\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+\log 2}{1-\log 2}\right)\right]$

(b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; -\sqrt{5} \le x \le -1,\; \dfrac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2-1}} \le y \le 0\right\}$ $\left[\log 3 - \dfrac{2}{3}\right]$

(c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; 1 \le x \le e,\; \dfrac{\log x}{x\sqrt{4 + 3\log^2 x}} \le y \le x^2\right\}.$ $\left[\dfrac{1}{3}\left(e^3 + 1 - \sqrt{7}\right)\right]$

Svolgimento

(a) Posto $f(x) = \frac{1}{x\left(1-\log^2 x\right)}$, osserviamo che per $1 \le x \le 2$ si ha che $f(x) \ge 0$. Quindi l'area di A è data da

$$\text{Area}_A = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x\left(1 - \log^2 x\right)}\, dx.$$

Posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$, si ha che

$$\int_1^2 \frac{1}{x\left(1 - \log^2 x\right)}\, dx = \int_0^{\log 2} \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\log 2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\log|1-t| + \log|1+t|\Big]_0^{\log 2} = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\log 2}{1-\log 2}\right).$$

Quindi l'area di A è $\text{Area}_A = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\log 2}{1-\log 2}\right)$.

(*b*) Posto $f(x)=\frac{x}{x^2+2\sqrt{x^2-1}}$, osserviamo che per $-\sqrt{5}\le x\le -1$ si ha che $f(x)\le 0$. Quindi l'area di B è data da

$$\text{Area}_B = -\int_{-\sqrt{5}}^{-1} f(x)\,dx = -\int_{-\sqrt{5}}^{-1} \frac{x}{x^2+2\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

posto $t=\sqrt{x^2-1}$, da cui $x^2=t^2+1$ e $xdx=t\,dt$,

$$= -\int_{-\sqrt{5}}^{-1} \frac{x}{x^2+2\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\int_2^0 \frac{t}{(t+1)^2}\,dt = -\int_2^0 \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= -\left[\log|t+1| + \frac{1}{(t+1)}\right]_2^0 = \log 3 - \frac{2}{3}.$$

Quindi l'area di B è $\text{Area}_B = \log 3 - \frac{2}{3}$.

(*c*) Posto $f(x)=\frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}$, osserviamo che per $1\le x\le e$ si ha che $f(x)\le x^2$. Infatti,

$$\frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}} \le x^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\log x}{\sqrt{4+3\log^2 x}} \le x^3$$

e le funzioni $g(x)=\frac{\log x}{\sqrt{4+3\log^2 x}}$ e $h(x)=x^3$ sono crescenti nell'intervallo $[1,e]$ con $0\le g(x)\le \frac{1}{\sqrt{7}}$, $1\le h(x)\le e^3$ per ogni $x\in[1,e]$. Ne segue che $g(x)\le h(x)$ per ogni $x\in[1,e]$, cioè $f(x)\le x^2$ per ogni $x\in[1,e]$. Quindi l'area di C è data da

$$\text{Area}_C = \int_1^e \left(x^2 - \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}\,dx =$$

posto $t=\log x$, da cui $dt=\frac{1}{x}dx$,

$$= \frac{1}{3}\left(e^3-1\right) - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4+3t^2}}\,dt = \frac{1}{3}\left(e^3-1\right) - \int_0^1 t(4+3t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^3-1\right) - \left[\frac{1}{3}\sqrt{4+3t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^3+1-\sqrt{7}\right).$$

Quindi l'area di C è $\text{Area}_C = \frac{1}{3}\left(e^3+1-\sqrt{7}\right)$.