2.4 Automorfismi di spazi vettoriali euclidei

In questo paragrafo e fino alla fine di questo capitolo sulla Geometria euclidea, tratteremo dello spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$.

Definiremo i "morfismi opportuni" tra spazi affini euclidei: saranno delle affinità le cui parti lineari saranno i "morfismi opportuni" tra spazi vettoriali euclidei. Partiamo dunque ricordando quest'ultima nozione.

Definizione 2.4.1. Diciamo che un isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un *automorfismo (ortogonale) di* $\mathbb{R}$ *- spazi vettoriali euclidei* se, comunque scelti $v, w \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle. \tag{2.1}$$

Osservazione 2.4.1. È immediato provare che se $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un automorfismo ortogonale allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\| v \| = \| \varphi(v) \| .$$

Si può dimostrare che vale anche il viceversa: se $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ preserva la norma, allora ϕ è ortogonale.

Ricordiamo un noto risultato di Algebra lineare.

Teorema 2.4.1. *Se* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è un'applicazione lineare, sono equivalenti:*

i) φ *è un automorfismo ortogonale;*

ii) per ogni base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *di* $\mathbb{R}^n$*, la n-upla* $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ *è ancora una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$*;*

iii) per ogni base ortonormale $\mathcal{B}$*, la matrice* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *è ortogonale;*

iv) esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ *tale che la matrice* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *è ortogonale.*

<u>Dimostrazione</u>. Proviamo solo l'equivalenza $i) \Leftrightarrow iii)$.
Osserviamo preliminarmente il seguente fatto. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e $M := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Identificando ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ con la colonna delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$, si ha che $\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = {}^t v w$ e che $\varphi(v) = Mv$ e $\varphi(w) = Mw$. Pertanto

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle Mv, Mw \rangle = {}^t(Mv) M w = {}^t v \, ({}^t M M) w.$$

$iii) \Rightarrow i)$ Supponiamo che M sia una matrice ortogonale, cioè che ${}^t M M = \mathbb{I}_n$. Dunque dall'espressione precedente segue

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = {}^t v \, ({}^t M M) w = {}^t v w = \langle v, w \rangle.$$

In tal modo è provata la (2.1).
i) $\Rightarrow$ *iii)* Viceversa, se vale la (2.1) per ogni scelta di v e w, si ha

$$^t v w = \langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = {}^t v \, ({}^t M M) w.$$

Dall'arbitrarietà di v e w segue che ${}^t M M = \mathbb{I}_n$, come volevamo. $\square$

Introduciamo la seguente notazione.

Definizione 2.4.2. L'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a entrate reali che sono ortogonali si denota con $O(n, \mathbb{R})$ o semplicemente con $O(n)$ e si dice *gruppo ortogonale di ordine n.*

Esercizio E6. Provare che $O(n)$ è effettivamente un gruppo in quanto sottogruppo di $GL(n)$. Provare inoltre che per ogni matrice $M \in O(n)$ si ha $\det(M) = \pm 1$. Infine provare che l'insieme

$$SO(n) := \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$$

è un sottogruppo di $O(n)$, detto *gruppo ortogonale speciale di ordine n.*

Un esempio di automorfismo ortogonale è il seguente.

Definizione 2.4.3. Se H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, possiamo scrivere ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ in modo unico come $v = v_H + v_{H^\perp}$, dove $v_H \in H$ e $v_{H^\perp} \in H^\perp$. Si dice *simmetria rispetto a H* l'applicazione

$$\mathrm{sy}_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da} \quad v = v_H + v_{H^\perp} \mapsto v_H - v_{H^\perp}.$$

Esempio 2.4.1. In $\mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto alla retta L (asse x) è data da $\mathrm{sy}_L(x, y) = (x, -y)$, mentre la simmetria rispetto all'origine si esprime come $\mathrm{sy}_O(x, y) = (-x, -y)$. Come si esprime la simmetria rispetto alla retta $x = y$?

Proposizione 2.4.2. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione* sy_H *è un automorfismo ortogonale di* $\mathbb{R}^n$ *in quanto la sua matrice associata (rispetto a una base ortonormale) è ortogonale. In particolare, se H è un iperpiano, tale matrice è ortogonale non speciale.*

<u>Dimostrazione</u>. Lasciamo al lettore la verifica che sy_H è un'applicazione lineare. Sia $s := \dim(H)$. Se $s = 0$, la tesi segue banalmente. Sia dunque $s \geq 1$ e sia $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$ una base ortonormale di H. Si consideri il suo completamento a una base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$. Chiaramente la matrice associata (rispetto a $\mathcal{B}$) alla simmetria risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{sy}_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

dove sulla diagonale compare 1 per s volte e -1 per $n-s$ volte e tale matrice è ovviamente ortogonale. Pertanto, per il Teorema 2.4.1, sy_H è un automorfismo ortogonale.
Infine, se H è un iperpiano, allora $s = n-1$ e dunque $\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{sy}_H)) = -1$, pertanto la matrice è ortogonale non speciale. $\square$

Vediamo ora alcuni casi particolari in dimensione bassa.

Osservazione 2.4.2. Nel caso $n = 1$, gli automorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ sono soltanto $\pm id_{\mathbb{R}}$.

Se $n = 2$, per il Teorema 2.4.1, classificare gli automorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^2$ significa descrivere le matrici del gruppo $O(2)$.

Teorema 2.4.3. *Se $M \in O(2)$, allora esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che M è di uno dei seguenti due tipi:*

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{oppure} \quad S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

dove, ovviamente, R_θ è speciale (cioè $R_\theta \in SO(2)$) e S_θ è non speciale (cioè $S_\theta \in O(2) \setminus SO(2)$).

Dimostrazione. Poiché le colonne di M sono due vettori di norma 1, esistono due angoli $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Inoltre tali vettori devono essere ortogonali, cioè

$$0 = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Di conseguenza, $\theta + \varphi$ deve essere 0 o π. Nel primo caso $\varphi = -\theta$ e si ottiene la matrice R_θ; nel secondo caso $\varphi = \pi - \theta$ e si ottiene la matrice S_θ. $\square$

Proposizione 2.4.4. *Per una matrice $M \in O(2)$ ci sono le seguenti possibilità: o $M = R_\theta$ o $M = S_\theta$, per qualche θ.*

i) Nel primo caso, R_θ ha autovalori reali se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ se e solo se $R_\theta = \pm\mathbb{I}_2$.

ii) Nel secondo caso, S_θ ha sempre autovalori reali e precisamente ± 1. Inoltre i relativi autospazi V_1 e V_{-1} sono tra loro ortogonali.

Dimostrazione.
i) Si consideri il polinomio caratteristico di R_θ dato da

$$P_\lambda(R_\theta) = \det(R_\theta - \lambda\mathbb{I}_2) = (\cos\theta - \lambda)^2 + (\sin\theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos\theta)\lambda + 1.$$

Esso ha radici reali se e solo se il suo discriminante $\Delta/4 = (\cos\theta)^2 - 1 \geq 0$. Ma tale condizione equivale ovviamente a $(\cos\theta)^2 - 1 = 0$; questo si verifica se e solo se $\cos\theta = \pm 1$ ovvero se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. L'ultima affermazione è banale.
ii) Si osservi anzitutto che S_θ, essendo una matrice 2×2 simmetrica reale, ha due autovalori reali e, se distinti, i suoi due autospazi sono ortogonali. Per calcolare tali autovalori, si consideri il polinomio caratteristico di S_θ dato da

$$P_\lambda(S_\theta) = \det(S_\theta - \lambda\mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 1.$$

Esso è indipendente da θ e ha sempre come radici ± 1. □

Osservazione 2.4.3. Per comprendere il significato geometrico di R_θ, basta considerare l'automorfismo di $\mathbb{R}^2$ ad essa associato:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Utilizzando le coordinate polari nel dominio e nel codominio, si ha una forma esplicita più significativa. Infatti

$$r(\cos\psi, \sin\psi) \mapsto (r\cos\psi\cos\theta - r\sin\psi\sin\theta, r\cos\psi\sin\theta + r\sin\psi\cos\theta)$$

e quest'ultima espressione è esattamente $r(\cos(\psi + \theta), \sin(\psi + \theta))$. Pertanto R_θ è associata alla rotazione di angolo θ.

Esempio 2.4.2. Vediamo due esempi di matrici non speciali S_θ nei casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale di $\mathbb{R}^2$ è dato da $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Nel secondo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale è dato da $(x, y) \mapsto (-x, y)$.
Le matrici S_0 e S_π sono associate, rispettivamente, alla simmetria rispetto a $\langle e_1 \rangle$ (asse x) e a quella rispetto a $\langle e_2 \rangle$ (asse y) (vedi Definizione 2.4.3 e Proposizione 2.4.2).

Tali esempi rientrano in una situazione più generale.

Proposizione 2.4.5. *Ogni matrice S_θ è associata a una simmetria e precisamente a* sy_{V_1}, *dove V_1 è l'autospazio di S_θ associato all'autovalore* 1.

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^\perp = V_1 \oplus V_{-1}$. Quindi, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere $v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$.
Da una parte, per definizione di autovettore, ovviamente $S_\theta(v_{V_1}) = v_{V_1}$ e $S_\theta(v_{V_{-1}}) = -v_{V_{-1}}$. Pertanto, per la linearità,

$$S_\theta(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

D'altra parte, per definizione di simmetria rispetto a V_1, si ha

$$\mathrm{sy}_{V_1}(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

□

E' immediato calcolare l'autospazio V_1 di

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Infatti è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(S_\theta - \mathbb{I}_2)X = 0$. Chiaramente, è sufficiente una sola equazione, ad esempio

$$V_1 : \quad (\cos\theta - 1)x + (\sin\theta)y = 0$$

Da quanto abbiamo visto, identificando un automorfismo ortogonale con la (una) matrice associata rispetto a una base ortonormale, siamo condotti naturalmente a dare la seguente nozione.

Definizione 2.4.4. Se $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è un automorfismo ortogonale, diciamo che è una *rotazione* se la (ogni) matrice associata è di tipo R_θ (cioè ortogonale speciale), mentre diciamo che è una *simmetria* se la (ogni) matrice associata è di tipo S_θ (cioè ortogonale non speciale).

Le seguenti semplici proprietà sono lasciate come esercizio (alcune di queste possono essere dimostrate utilizzando note formule trigonometriche).

Proposizione 2.4.6. *Comunque scelti θ e φ, valgono:*

i) $S_\theta\, S_\varphi = R_{\theta-\varphi} \in SO(2)$;

ii) $R_\theta\, R_\varphi = R_{\varphi+\theta} \in SO(2)$;

iii) $R_\theta\, S_\varphi = S_{\varphi+\theta} \notin SO(2)$;

iv) $S_\varphi\, R_\theta = S_{\varphi-\theta} \notin SO(2)$;

v) $S_{2\theta} = R_\theta\, S_0\, R_{-\theta}$.

In particolare, la composizione di una rotazione e di una simmetria non è commutativa.

Dalla *ii*) segue che SO(2) è un gruppo abeliano (però SO(n) non è abeliano per $n \geq 3$).

2.5 Isometrie degli spazi euclidei

Definizione 2.5.1. Si dice *isometria* dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$ una affinità f la cui parte lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un automorfismo ortogonale. L'insieme delle isometrie di $\mathbb{E}^n$ si denota con $\mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$.

Proposizione 2.5.1. *L'insieme* $\mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$ *è un gruppo (rispetto alla composizione) in quanto sottogruppo di* $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n)$*.*

Dimostrazione. Basta ricordare che gli automorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ costituiscono un sottogruppo di $GL(n)$, che è infatti il gruppo ortogonale $O(n)$ (vedi Esercizio E6). $\square$

Si osservi che, in quanto affinità, una isometria $f \in \mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ ammette un'equazione matriciale del tipo

$$Y = MX + C.$$

Si sottointende che si è fissato un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{E}^n$, dove $\mathcal{B}$ è una base ortonormale fissata. Nella scrittura precedente, X e Y sono, rispettivamente, le colonne delle coordinate del generico punto $P \in \mathbb{E}^n$ e di $f(P) \in \mathbb{E}^n$. Inoltre con C si denota la colonna delle coordinate di un punto specifico e con M la matrice ortogonale $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Un immediato esempio di isometria è dato dalle traslazioni.

Infatti abbiamo osservato nell'Esempio 1.10.2 che un'affinità $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E}^n)$ di equazione $Y = MX + C$ (rispetto a un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$) è una traslazione se e solo se $M = \mathbb{I}_n$. (In tal caso $f = t_v$, dove $v = C - O$). Chiaramente $\mathbb{I}_n \in O(n)$.

Esercizio E7. Provare che l'insieme $T(\mathbb{E}^n)$ delle traslazioni di $\mathbb{E}^n$ è un sottogruppo di $\mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$, isomorfo al gruppo additivo $(\mathbb{R}^n, +)$.

Le più semplici "proprietà euclidee", cioè quelle che vengono mantenute per isometria, sono le distanze e gli angoli.

Proposizione 2.5.2. *Sia* $f \in \mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$ *di parte lineare* φ*. Allora, per ogni* $P, Q \in \mathbb{E}^n$ *vale*

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

Dimostrazione. Per definizione

$$d(P, Q)^2 = \| Q - P \|^2$$

e, analogamente, tenendo conto che f è un'affinità di parte lineare φ,

$$d(f(P), f(Q))^2 = \| f(Q) - f(P) \|^2 = \| \varphi(Q - P) \|^2 .$$

Si conclude osservando che $\| Q - P \|^2 = \| \varphi(Q - P) \|^2$ per l'Osservazione 2.4.1. $\square$

Esercizio E8. Sia $f \in \mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ e sia $r:\ P = Q + \lambda v$ una retta. Provare che $f(r)$ è la retta di equazione

$$f(r):\ P = f(Q) + \lambda\varphi(v).$$

Proposizione 2.5.3. *Sia $f \in \mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ. Allora, se r e s sono due rette di $\mathbb{E}^n$, si ha*

$$\widehat{rs} = \widehat{f(r)f(s)}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'angolo $\theta = \widehat{rs}$ è individuato da

$$\cos\theta = \frac{|\langle v_r, v_s\rangle|}{\| v_r \| \| v_s \|}.$$

Per l'Esercizio E8, l'angolo $\theta' = \widehat{f(r)f(s)}$ è individuato da

$$\cos\theta' = \frac{|\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s)\rangle|}{\| \varphi(v_r) \| \| \varphi(v_s) \|}.$$

Ma per la Definizione 2.4.1 e l'Osservazione 2.4.1 valgono le seguenti uguaglianze

$$\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s)\rangle = \langle v_r, v_s\rangle, \quad \| \varphi(v_r) \| = \| v_r \|, \quad \| \varphi(v_s) \| = \| v_s \|$$

e quindi $\cos\theta = \cos\theta'$. □

Concludiamo questo paragrafo con alcune nozioni e un risultato relativi alle affinità che saranno utili nel prossimo paragrafo.

Definizione 2.5.2. Siano $\mathbb{A}$ uno spazio affine e $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ una affinità. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}$ si dice

- *invariante per f* se $f(S) = S$;
- *fisso per f* se $f(P) = P$ per ogni punto $P \in S$.

Chiaramente fisso implica invariante, ma non viceversa.

Proposizione 2.5.4. *Siano V un K-spazio vettoriale e $\mathbb{A} = \mathbb{A}(V)$. Sia inoltre $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Infine sia $P_0 \in \mathbb{A}$ un punto fisso per f. Si hanno i seguenti fatti:*

i) se $\lambda \in K$ è un autovalore di φ e V_λ denota il relativo autospazio, allora il sottospazio affine $S := P_0 + V_\lambda$ è invariante per f;

ii) in particolare, se $\lambda = 1$, allora $S := P_0 + V_1$ è fisso per f.

Dimostrazione. $i)$ Vogliamo provare che, per ogni $Q \in S$ allora $f(Q) \in S$. Osserviamo che $Q - P_0 \in V_\lambda$, pertanto $\varphi(Q - P_0) = \lambda(Q - P_0)$ e quindi

$$f(Q) - f(P_0) = \lambda(Q - P_0).$$

Ma $f(P_0) = P_0$, dunque $f(Q) = P_0 + \lambda(Q - P_0) \in S$.
$ii)$ Con lo stesso ragionamento visto sopra, per ogni $Q \in S$ si ottiene che $f(Q) = P_0 + (Q - P_0) = Q$, come volevamo. $\square$

Esempio 2.5.1. L'affinità f di $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ definita come $f(x) = 1 - x$ ha $x = \frac{1}{2}$ come unico punto fisso.

L'affinità $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})$, $g(x, y) = (x + 1, -y)$ ha la retta $y = 0$ come sottospazio invariante, ma non ha punti fissi.

Concludiamo questo paragrafo ricordando anzitutto la Definizione 2.2.3 di riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^n$, che è il dato di un punto O fissato e di una base ortonormale $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$. Inoltre vale il seguente risultato di Algebra Lineare.

Lemma 2.5.5. *Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ortonormali dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ allora $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è una matrice ortogonale cioè $M \in O(n)$.*

Poiché $\mathbb{E}^n$ ha anche la struttura di spazio affine, il cambio di riferimento in tale ambiente è come quello descritto per $\mathbb{A}^n$ nel Teorema 1.10.1, il cui analogo euclideo è il seguente.

Teorema 2.5.6. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^n$ e siano $(c_1, \ldots, c_n)$ le coordinate del punto O nel riferimento Σ'. Se un punto $P \in \mathbb{E}^n$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto a Σ e coordinate $(y_1, \ldots, y_n)$ rispetto a Σ', allora, posti*

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

Come nel caso affine, la precedente espressione del *cambio di coordinate euclidee* è dello stesso tipo dell'equazione matriciale di un'isometria. Infatti, per il Lemma precedente, la matrice A è ortogonale.

Definizione 2.5.3. Diremo che la precedente espressione definisce un *cambio speciale di coordinate euclidee* se $A \in SO(n)$.

2.6 Classificazione delle isometrie del piano

Tenuto conto della Proposizione 2.4.4, abbiamo una prima suddivisione delle isometrie del piano.

Definizione 2.6.1. Sia $f \in \mathrm{Is}(\mathbb{E}^2)$ data dall'equazione, rispetto a un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$,

$$Y = MX + C, \quad M \in O(2).$$

Se $M = R_\theta \in SO(2)$, diremo che f è una *isometria diretta* o *rototraslazione*. Se invece $M = S_\theta$, diremo che f è una *isometria inversa*.

Vediamo alcuni casi particolari.

Esempio 2.6.1. Un primo esempio di isometria diretta (vedi Esercizio E7) è dato dalle *traslazioni*. Infatti

$$Y = X + C$$

ha come parte lineare l'identità (ovviamente $\mathbb{I}_2 \in SO(2)$) ed è l'equazione della traslazione t_v, dove $v = C - O$.

Esempio 2.6.2. Se $C = O$, allora l'isometria $Y = MX$ può essere identificata con una rotazione di tipo R_θ o con una simmetria di tipo S_θ, a seconda che $M = R_\theta$ o $M = S_\theta$. Esplicitamente:

$$Y = R_\theta X, \quad Y = S_\theta X.$$

Qui si è fatto un piccolo abuso di notazione. Infatti, se $X = O + v$, con $R_\theta X$ si intende il punto $O + R_\theta v$, dove $R_\theta v$ è prodotto matriciale. Analogamente per $S_\theta X$.

Definizione 2.6.2. Una *rotazione di angolo θ e di centro il punto P_0* è l'isometria

$$\rho_{\theta,P_0} := t_w \circ R_\theta \circ t_{-w}$$

dove $w = P_0 - O$.

Osservazione 2.6.1. Per determinare la forma matriciale di ρ_{θ,P_0} basta osservare che $t_{-w}(X) = X + (O - P_0) = O + (X - P_0)$ e quindi

$$\begin{aligned} t_w(R_\theta(t_{-w}(X))) &= t_w(R_\theta(O + (X - P_0))) = t_w(O + R_\theta(X - P_0)) = \\ &= O + (P_0 - O) + R_\theta(X - P_0) = P_0 + R_\theta(X - P_0). \end{aligned}$$

Pertanto l'equazione di ρ_{θ,P_0} risulta $Y = P_0 + R_\theta(X - P_0)$ o anche

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0.$$

Dunque ρ_{θ,P_0} è una rototraslazione.

Come vedremo nel Teorema di classificazione, le traslazioni e le rotazioni di dati angolo e centro sono le uniche isometrie dirette.

Esempio 2.6.3. Vogliamo determinare l'equazione della rotazione $\rho_{\pi/4,P_0}$ di angolo $\pi/4$ di centro $P_0 = (2,4)$. L'equazione richiesta è $Y = MX + C$, dove

$$M = R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e

$$C = (\mathbb{I}_2 - R_{\pi/4})P_0 = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 4-\frac{6}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Studiamo ora alcuni tipi e proprietà delle isometrie inverse.

Definizione 2.6.3. Se $r \subset \mathbb{E}^2$ è una retta e $P \in \mathbb{E}^2$ è un punto, posta s_P la retta per P e ortogonale a r e denotato con M il punto $r \cap s_P$, diciamo che $P' \in \mathbb{E}^2$ è il *punto simmetrico di P rispetto a r* se $P' \in s_P$ e M è il punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si dice *riflessione rispetto a r* l'affinità

$$\sigma_r : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2 \quad \text{data da} \quad P \mapsto P'$$

dove P' è il punto simmetrico di P rispetto a r.

Il fatto che σ_r sia realmente un'affinità discende dalla prossima Proposizione 2.6.3, dove si afferma che è addirittura un'isometria.

Osservazione 2.6.2. Da questa definizione, si vede facilmente che r è fissa rispetto a σ_r. Inoltre ogni retta ortogonale a r è invariante rispetto a σ_r. Infatti, se s è una qualunque retta ortogonale a r, si scelga un suo punto P e si osservi che $s = s_P$ (con la notazione della definizione precedente). Per costruzione il punto simmetrico di P è $P' \in s_P$. Pertanto $\sigma_r(P) \in s = s_P$ e quindi $\sigma_r(s) \subseteq s$. Infine si osservi che $\sigma_r \circ \sigma_r = id_{\mathbb{E}^2}$. Da tale fatto, applicando σ_r all'inclusione appena dimostrata si ha

$$\sigma_r(\sigma_r(s)) \subseteq \sigma_r(s) \quad \Rightarrow \quad s \subseteq \sigma_r(s).$$

Questo prova l'altra inclusione, da cui segue che s è invariante rispetto a σ_r.

Esempio 2.6.4. Se r è l'asse y, la riflessione rispetto a r è data da

$$\sigma_r(x,y) = (-x,y).$$

Se r è l'asse x, la riflessione rispetto a r è data da

$$\sigma_r(x,y) = (x,-y).$$

Proposizione 2.6.1. *Si consideri l'isometria inversa f di equazione, rispetto a un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$, data da*

$$Y = S_\theta X.$$

Posto $r = V_1$ l'autospazio di S_θ associato a 1, si hanno i seguenti fatti:

i) r è una retta fissa per f;

ii) ogni retta s ortogonale a r è invariante per f;

iii) f è la riflessione σ_r.

Dimostrazione.
i) Si osservi che il punto O è fisso per f in quanto

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, per la Proposizione 2.4.5, gli autovalori di S_θ sono 1 e -1. Dunque, per la Proposizione 2.5.4, $r = O + V_1$ è una retta fissa per f.
ii) Ricordiamo che, essendo S_θ una matrice simmetrica reale, i suoi autospazi V_1 e V_{-1} sono ortogonali. Sia ora s una retta ortogonale a r e sia $Q := r \cap s$. Per la (i), il punto Q è fisso per f. Scrivendo $s = Q + V_{-1}$, ancora per la Proposizione 2.5.4, si ha che s è invariante per f.
iii) Poiché la nozione di riflessione è intrinseca (cioè non dipende dal sistema di riferimento, in quanto coinvolge proprietà geometriche quali l'ortogonalità e la distanza), basta provare l'enunciato rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (v_r, w_r)$, dove v_r è un versore parallelo a r e w_r è un versore ortogonale a r. Nel riferimento $(O, \mathcal{B})$ la retta r ha equazione $y = 0$ e

$$S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $f(x, y) = (x, -y)$ è la riflessione rispetto alla retta r. □

Corollario 2.6.2. *Le simmetrie sono tutte e sole le riflessioni rispetto a rette passanti per l'origine.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, una simmetria S_θ è una riflessione rispetto a V_1, che è una retta per l'origine.
Viceversa, sia r una retta per l'origine e σ_r la riflessione rispetto a r. Come osservato nella dimostrazione della Proposizione precedente, la nozione di riflessione è intrinseca e quindi basta provare la tesi utilizzando un qualunque riferimento cartesiano. Sia $\mathcal{B} = (v_r, w_r)$ la base ortonormale dove v_r è parallelo a r (e w_r è ortogonale). Rispetto al riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$, la retta r è l'asse x e $\sigma_r(x, y) = (x, -y)$ (vedi Esempio 2.6.4).
Quindi σ_r è l'isometria associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è del tipo S_θ. Pertanto σ_r è una simmetria. □

In realtà una qualunque riflessione è comunque legata a una simmetria. La dimostrazione del seguente risultato è lasciata per esercizio.

Proposizione 2.6.3. *La riflessione σ_r, rispetto a una qualunque retta r del piano, è un'isometria inversa di $\mathbb{E}^2$ e precisamente del tipo*

$$\sigma_r = t_w \circ S_\theta \circ t_{-w} \quad \textit{dove} \quad w = P_0 - O,\ P_0 \in r.$$

Definizione 2.6.4. Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta e v un vettore parallelo a r; si dice *glissoriflessione rispetto a r e v* l'isometria definita da

$$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r.$$

Esempio 2.6.5. L'affinità g dell'Esempio 2.5.1 è una glissoriflessione di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ rispetto all'asse x e al vettore $(1, 0)$.

Teorema 2.6.4. (Classificazione delle isometrie del piano euclideo) *Sia f un'isometria di $\mathbb{E}^2$ espressa, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, da $Y = f(X)$ dove*

$$Y = AX + C,$$

con $A \in O(2)$ e $C \in \mathbb{E}^2$. Allora f è uno dei seguenti tipi:

Caso (a): $A = R_\theta$.

i) $R_\theta = \mathbb{I}_2 \quad \Rightarrow f = t_w$, *dove $w = C - O$. Inoltre, se $C \neq O$, allora f non ha punti fissi.*

ii) $R_\theta \neq \mathbb{I}_2 \quad \Rightarrow f$ *ha un punto fisso P_0 di coordinate $(\mathbb{I}_2 - R_\theta)^{-1}C$ ed è dunque la rotazione di angolo θ e centro P_0.*

Caso (b): $A = S_\theta$.

iii) f *ha un punto fisso P_0* $\quad \Rightarrow \quad f$ *è la riflessione σ_r rispetto alla retta $r = P_0 + V_1$ (dove V_1 è l'autospazio di S_θ associato all'autovalore 1), che è dunque una retta fissa per f.*

iv) f *non ha punti fissi* $\quad \Rightarrow \quad f$ *è una glissoriflessione.*

Dimostrazione.

(i) Chiaramente $Y = X + C$ è la traslazione t_w dove $w = C - O$. Inoltre, se $\overline{X}$ fosse un punto fisso per f, si avrebbe $\overline{X} = \overline{X} + C$ e dunque $C = O$.

(ii) Sia ora $R_\theta \neq \mathbb{I}_2$. Vogliamo provare che esiste un punto fisso P_0 per f. Posto $\overline{X}$ il vettore delle sue coordinate, vogliamo dunque provare che esiste $\overline{X}$ tale che

$$R_\theta \overline{X} + C = \overline{X}$$

cioè che esiste $\overline{X}$ tale che

$$(\mathbb{I}_2 - R_\theta)\overline{X} = C.$$

Per provare questo, è sufficiente mostrare che la matrice $\mathbb{I}_2 - R_\theta$ è invertibile.

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{I}_2 - R_\theta$ non sia invertibile. Allora esisterebbe un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\mathbb{I}_2 - R_\theta)v = 0$, i.e. $R_\theta v = v$. Pertanto R_θ avrebbe un autovalore reale (che è 1) e dunque, per la Proposizione 2.4.4 -(i), R_θ sarebbe $\mathbb{I}_2$ oppure $-\mathbb{I}_2$. Il primo caso è escluso per ipotesi. Dunque $R_\theta = -\mathbb{I}_2$ e quindi ha un solo autovalore, uguale a -1, mentre abbiamo appena visto che 1 è autovalore di R_θ. Questo porta a un assurdo.

Pertanto la matrice $\mathbb{I}_2 - R_\theta$ è invertibile e dunque la precedente equazione vettoriale ha una soluzione e precisamente

$$\overline{X} = (\mathbb{I}_2 - R_\theta)^{-1}C,$$

come volevamo. Tale $\overline{X}$ è unico per costruzione e quindi P_0 è l'unico punto fisso di f.
Infine si osservi che dalla precedente relazione si ottiene $C = (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0$ e quindi l'equazione di f è

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0$$

ovvero f è la rotazione di angolo θ e centro P_0 (vedi Osservazione 2.6.1).

(iii) Sia ora f data da $f(X) = Y = S_\theta X + C$ e avente un punto fisso P_0. Per la Proposizione 2.5.4, si ha che $r = P_0 + V_1$ è una retta fissa per f e che $s := P_0 + V_{-1}$ è una retta invariante per f. Tenendo conto che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_{-1}$, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^2$,

$$Q - P_0 = \lambda v_r + \mu v_s$$

dove v_r e v_s sono vettori direzionali delle rette r e s, rispettivamente. Dunque

$$Q = P_0 + \lambda v_r + \mu v_s.$$

Si può calcolare $f(Q)$, tenendo conto che f ha parte lineare S_θ:

$$f(Q) = f(P_0) + S_\theta(\lambda v_r + \mu v_s) = P_0 + \lambda v_r - \mu v_s$$

e quindi f è la riflessione rispetto alla retta r.

(iv) Sia ora f data dall'equazione, in un riferimento di origine O,

$$f(X) = Y = S_\theta X + C$$

senza punti fissi. Sia $v := C - O$; questo è un vettore non nullo in quanto f non ha punti fissi per ipotesi. Possiamo scrivere f come

$$f = t_v \circ S_\theta.$$

Gli autospazi di S_θ sono V_1 e V_{-1}, tra loro ortogonali per la Proposizione 2.4.4 -(ii). Consideriamo dunque una base ortonormale $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$, dove $e_1 \in V_1$ ed $e_2 \in V_{-1}$. Dunque possiamo scrivere, per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$v = a_1e_1 + a_2e_2.$$

Pertanto $t_v = t_{a_1e_1} \circ t_{a_2e_2}$ per l'Esercizio A1 e quindi

$$f = t_{a_1e_1} \circ t_{a_2e_2} \circ S_\theta. \tag{2.2}$$

Nel riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ si ha inoltre

$$S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'isometria $g := t_{a_2e_2} \circ S_\theta$ ha dunque equazione

$$g(X) = Y = S_\theta X + a_2e_2$$

cioè

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y + a_2 \end{pmatrix}.$$

I punti fissi di g sono ovviamente quelli le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y + a_2 \end{pmatrix},$$

cioè l'insieme dei punti per cui $y = a_2/2$. Tale insieme è ovviamente una retta r costituita tutta di punti fissi. Una sua equazione è

$$r = P_0 + V_1$$

dove si è scelto, ad esempio, $P_0 = (0, a_2/2)$. Pertanto, per la parte *(iii)* di questo teorema, $g = \sigma_r$, riflessione rispetto alla retta r. In conclusione, l'uguaglianza (2.2) diventa

$$f = t_{a_1e_1} \circ \sigma_r$$

e chiaramente $e_1 \parallel r$, come volevamo. $\square$

Teorema 2.6.5. *Ogni isometria del piano è una composizione finita di riflessioni.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare l'affermazione per le rotazioni, traslazioni e glissoriflessioni.

1) Ogni rotazione è composizione di riflessioni per Proposizione 2.4.6-(i)

2) Consideriamo la traslazione t_v lungo il vettore non nullo v. Poniamo

$$c := \| v \| /2.$$

Siano r e s due rette ortogonali a v tali che $d(r, s) = c$ e siano σ_r e σ_s le riflessioni rispettive. Vogliamo provare che

$$t_v = \sigma_s \circ \sigma_r \quad \text{oppure} \quad t_v = \sigma_r \circ \sigma_s.$$

Non è restrittivo scegliere un riferimento cartesiano tale che le due rette abbiano equazione

$$r : x = 0, \quad s : x = c.$$

Si osservi che, in tale riferimento, $v = (\pm 2c, 0)$ e le riflessioni sono

$$\sigma_r(x, y) = (-x, y), \quad \sigma_s(x, y) = (2c - x, y).$$

Dunque

$$\sigma_r(\sigma_s(x, y)) = \sigma_r(2c - x, y) = (x - 2c, y) = (x, y) + (-2c, 0)$$

e quindi $\sigma_r \circ \sigma_s$ è la traslazione lungo il vettore $(-2c, 0)$. Analogamente

$$\sigma_s(\sigma_r(x, y)) = \cdots = (x, y) + (2c, 0)$$

e quindi $\sigma_s \circ \sigma_r$ è la traslazione lungo il vettore $(2c, 0)$. Questo conclude la dimostrazione.

3) Poiché una glissoriflessione è del tipo $gl_{r,v} = t_v \circ \sigma_r$, dove r è una retta e v un vettore direzionale di r, per la parte (2) si ha la tesi. $\square$

Come nel caso delle isometrie del piano, anche lo studio delle isometrie dello spazio si fonda sulla descrizione delle matrici ortogonali reali 3×3. Ricordiamo che anche in questo caso il determinante è ± 1 e, di conseguenza, possono essere speciali o non speciali. Dunque, anche in questo caso, possiamo dividere le isometrie di $\mathbb{E}^3$ in dirette e inverse, a seconda del segno del determinante della matrice associata.

Il seguente risultato descrive tali matrici.

Proposizione 2.6.6. *Sia $A \in O(3) := O_{\mathbb{R}}(3)$. Allora:*

i) gli autovalori reali di A sono in numero di 1 o 3;

ii) ogni autovalore reale può assumere solo i valori 1 o -1;

iii) A è simile (in $O(3)$) a una matrice A' della forma

$$A' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \textit{dove} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = R_\theta \in SO(2)$$

per qualche angolo θ.

Dimostrazione. *i*) Sia $p_A(T)$ il polinomio caratteristico di A. Poiché è di terzo grado e ha coefficienti reali, ha sicuramente una radice reale e le restanti sono o entrambe reali o complesse coniugate.
ii) Interpretando A come la matrice associata, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, a un automorfismo ortogonale φ di $\mathbb{R}^3$, definiamo di conseguenza $\varphi(v) := Av$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.
Sia λ un autovalore reale di A e sia v un relativo autovettore (non nullo). Quindi

$$\| v \| = \| \varphi(v) \| = \| Av \| = \| \lambda v \| = |\lambda| \, \| v \|,$$

dove la prima uguaglianza segue dall'Osservazione 2.4.1. Pertanto $|\lambda| = 1$ e quindi $\lambda = \pm 1$.
iii) Sia ora e_1 un versore associato a un autovalore reale $\lambda (= \pm 1)$ e si completi e_1 a una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3).$$

Si consideri ora la matrice A' associata a φ rispetto a $\mathcal{B}$, cioè

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi), \quad A' := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi).$$

Per un noto risultato di Algebra Lineare, le matrici A e A' sono simili (tramite una matrice ortogonale) e anche A' è ortogonale e della forma

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}.$$

La mutua ortogonalità tra la prima colonna e le altre implica che $a = 0$ e $b = 0$, in quanto $\lambda \neq 0$. Inoltre i vettori colonna hanno norma 1 ovvero

$$\| (c, e) \| = 1, \quad \| (d, f) \| = 1.$$

Pertanto, tenendo conto che anche la seconda e la terza colonna sono ortogonali tra loro, la matrice in questione è del tipo

$$A' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in O(2).$$

Quest'ultima è una matrice speciale di tipo R_θ o non speciale di tipo S_θ. Nel primo caso, il teorema è provato. Nel secondo, lasciamo da dimostrare per esercizio che esiste un cambiamento di base (ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ per cui A' ha la forma richiesta. □

Enunciamo, senza dimostrarlo, l'analogo risultato per $\mathbb{E}^3$ (Eulero, 1776).

Teorema 2.6.7. *(Classificazione delle isometrie dello spazio euclideo) Sia f un'isometria di $\mathbb{E}^3$ espressa, in un riferimento cartesiano ortogonale, da $Y = f(X)$ dove*

$$Y = AX + C,$$

con $A \in O(3)$ e $C \in \mathbb{E}^3$. Allora f è uno dei seguenti tipi:

1. *traslazione t_v (diretta, senza punti fissi);*
2. *riflessione ρ_π (inversa, con un piano fisso π che è l'asse della riflessione);*
3. *rotazione $\sigma_{r,\theta}$ (diretta, con una retta fissa r che è l'asse della rotazione di angolo θ);*
4. *glissoriflessione $gl_{\pi,v} = t_v \circ \rho_\pi$ (inversa senza punti fissi, con v vettore parallelo a π);*
5. *glissorotazione $t_v \circ \sigma_{r,\theta}$ (diretta senza punti fissi, con v vettore parallelo a r);*
6. *riflessione rotatoria $\rho_\pi \circ \sigma_{r,\theta}$ (inversa, con un punto fisso, con r retta ortogonale al piano π).*