

# Geometria 2

Anno accademico 2023-2024

## Foglio di esercizi n.6

18 aprile 2024

- 1) Dimostrare che per ogni  $R_\theta, S_\theta \in \text{SO}(2)$  si ha:  $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$  e  $(S_\theta)^{-1} = S_\theta$ .
- 2) Dimostrare che se  $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$  ha una matrice  $M \in \text{SO}(2)$  rispetto ad una certa base ortonormale, allora  $\phi$  ha la stessa matrice  $M$  oppure  $M^{-1}$  rispetto a qualunque altra base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  (*suggerimento: utilizzare la Proposizione 2.4.6*).

- 3) Sia  $f \in \text{Aff}(\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n)$  un'affinità che preserva le distanze, cioè

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

per ogni  $P, Q \in \mathbb{E}^n$ . Dimostrare che  $f \in \text{Is}(\mathbb{E}^n)$ .

- 4) Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane di  $\mathbb{E}^2$ , verificare che l'affinità di equazioni

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + 2\sqrt{3} \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 \end{cases}$$

è un'isometria di  $\mathbb{E}^2$  e classificarla.

- 5) Classificare l'isometria di  $\mathbb{E}^2$  di equazione

$$Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con  $X = {}^t(x_1, x_2)$ ,  $Y = {}^t(y_1, y_2)$ .

- 6) Determinare l'equazione della riflessione  $\sigma_r$  di sostegno la retta di  $\mathbb{E}^2$

$$r: 3x + 4y - 1 = 0.$$

- 7) Determinare l'equazione di  $f = \sigma_r \circ \sigma_s$ , dove  $\sigma_r$  e  $\sigma_s$  sono associate alle rette

$$r: 3x + 4y - 1 = 0, \quad s: x - y = 0$$

e classificare l'isometria  $f$ .

- 8) Sia  $v = (2, -1)$  un vettore di  $\mathbb{R}^2$ . Scrivere la traslazione  $t_v$  di  $\mathbb{E}^2$  come composizione di due riflessioni.
- 9) Dimostrare che le omotetie di  $\mathbb{E}^n$  preservano gli angoli. Come variano le distanze?
- 10) Si consideri  $\mathbb{C}$  come spazio vettoriale reale (rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali), munito del prodotto scalare che rende la base  $\{1, i\}$  una base ortonormale. In questo modo  $\mathbb{C}$  diventa un piano euclideo. Dimostrare che le affinità complesse di  $\mathbb{C}$  preservano gli angoli. Caratterizzare le affinità complesse che sono isometrie euclidee e dire di che tipo sono.