Foglio di esercizi n.6

Esercizio 6

Determinare l'equazione della riflessione σ_r di sostegno la retta di $\mathbb{E}^2$

$$r : 3x + 4y - 1 = 0.$$

La riflessione

$$\sigma_r : \quad Y = AX + C$$

ha come parte lineare la simmetria sy_{V_1}, dove V_1 è l'autospazio di A relativo all'autovalore 1 (chiaramente A è ortogonale non speciale).
Per determinare la matrice $A = M_{\mathcal{E}}(\mathrm{sy}_{V_1})$, basta ricordare che i suoi autovalori sono ± 1, che che V_1 coincide con la giacitura di r e che $V_{-1} = (V_1)^{\perp}$. Pertanto i due autospazi di A sono:

$$V_1 : \quad 3x + 4y = 0, \qquad V_{-1} : \quad 4x - 3y = 0.$$

Si consideri la base ortonormale

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2), \quad \text{dove} \qquad v_1 = \frac{1}{5}(4, -3), \qquad v_2 = \frac{1}{5}(3, 4)$$

con $V_1 = \langle v_1 \rangle$ e $V_{-1} = \langle v_2 \rangle$. Quindi la matrice associata, rispetto a $\mathcal{B}$, alla simmetria è

$$M_{\mathcal{B}}(\mathrm{sy}_{V_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare A basta osservare che

$$A = M_{\mathcal{E}}(\mathrm{sy}_{V_1}) = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}\ M_{\mathcal{B}}(\mathrm{sy}_{V_1})\ M^{\mathcal{E},\mathcal{B}}.$$

Poiché la matrice

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

è ortogonale (si verifichi che è speciale !), la sua inversa $M^{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ coincide con la sua trasposta. Pertanto

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}.$$

(Si verifichi che A è ortogonale non speciale !) A questo punto resta da determinare C. A tale scopo si ricordi che per σ_r tutti i punti della retta r sono fissi. Si imponga, ad esempio, che il punto $P_0 = (-1, 1) \in r$ sia fisso, cioè che $P_0 = AP_0 + C$. Tale condizione, posto $C = (c_1, c_2)$, diventa

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

e si ottiene $C = \frac{1}{25}(6, 8)$.

Infine, ponendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

l'equazione richiesta $\sigma_r :\ Y = AX + C$ è

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7

Determinare l'equazione di $f = \sigma_r \circ \sigma_s$, dove σ_r e σ_s sono associate alle rette

$$r : 3x + 4y - 1 = 0, \quad s : x - y = 0$$

e classificare l'isometria f.

L'equazione di σ_r è stata determinata nell'Esercizio 6. In modo analogo si determina l'equazione

$$\sigma_s : \quad Y = BX$$

(già citata nell'Esempio 2.4.1 come esercizio) dove la matrice B, ortogonale non speciale, è associata alla simmetria sy_{V_1}. Si verifica che

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè bisogna calcolare la composizione di 2 isometrie, è opportuno cambiare il nome alle variabili di una delle due:

$$\sigma_r : \quad Z = AY + C, \qquad \sigma_s : \quad Y = BX,$$

dove

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

In conclusione

$$\sigma_r \circ \sigma_s : \quad Z = A(BX) + C.$$

Dall'associatività del prodotto fra matrici, si ha $A(BX) = (AB)X$ e quindi

$$\sigma_r \circ \sigma_s : \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -24 & 7 \\ -7 & -24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La sua matrice AB è il prodotto di 2 matrici ortogonali non speciali quindi è ortogonale speciale, dunque $\sigma_r \circ \sigma_s$ risulta un'isometria diretta e precisamente una rototraslazione generale.