ORBITA utilizzando il vettore di (Laplace-) Runge-Lenz.

Finora abbiamo calcolato $r(\theta)$ in 2 modi:

Valido per ogni potenziale $V=V(r)$

1) risolvendo le eq. di Lagrange (Eq. diff. 2° ord.) per il problema <u>RIDOTTO</u> (usando cost. del moto $\bar{M}$)

2) abbiamo usato un'altra COST. del MOTO, l'ENERGIA, per ridurre l'eq. diff. del 2° ord. a un'eq. diff. al 1° ord. (risolvibile per quadrature)

Introduciamo un'ulteriore COSTANTE DEL MOTO che ci permetterà di ridurre il problema del calcolo di $r(\theta)$ alla risoluzione di eq. "differenziali del 0 ordine", cioè eq. ALGEBRICHE.

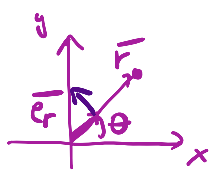
↳ qsta nuova cost. del moto esiste solo se $V(r) = -\frac{k}{r}$.

<u>Prop.</u> Nel moto Kepleriano, la seguente variabile dinamica (vettoriale) si conserva:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r}$$

↑ giace sul piano dell'orbita

$(\bar{M} = l\bar{e}_z)$



<u>Dim.</u> Valutiamo $\bar{A}$ in $r(t)$ e $\theta(t)$.

In termini di qte funz., il moto $\bar{r}(t)$ è dato da $\bar{r}(t) = r(t)\,\bar{e}_r(t)$

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\dot\theta\operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_x + \dot\theta\cos\theta\,\bar{e}_y = \dot\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot\theta\cos\theta\,\bar{e}_x - \dot\theta\operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_y = -\dot\theta\,\bar{e}_r$$

Allora $\dot{\bar{r}} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\,\dot{\bar{e}}_r =$

$= \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot\theta\,\bar{e}_\theta$

Ricordiamo:

$\bar{e}_r \times \bar{e}_\theta = \bar{e}_z$, $\bar{e}_r \times \bar{e}_z = -\bar{e}_\theta$, $\bar{e}_\theta \times \bar{e}_z = \bar{e}_r$ $\qquad M = l\bar{e}_z$

Possiamo allora scrivere

$$\bar{A} = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} = m(\dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta) \times l\bar{e}_z - mk\bar{e}_r =$$

$$= -ml\dot{r}\,\bar{e}_\theta + (mlr\dot{\theta} - mk)\bar{e}_r$$

Ora calcoliamo la derivata tot. di $\bar{A}$ rispetto al tempo:

$$\dot{\bar{A}} = -ml\ddot{r}\bar{e}_\theta + 2ml\dot{r}\dot{\theta}\,\bar{e}_r + mlr\ddot{\theta}\,\bar{e}_r + mlr\dot{\theta}^2\bar{e}_\theta - mk\dot{\theta}\bar{e}_\theta$$

Valutiamo tale espressione sulle soluz. delle eq. del moto, che ricordiamo essere $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ $\qquad \ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2r^3}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2l}{mr^3}\dot{r}\,.$$

$$= \bar{e}_\theta\, m\left[-l\left(-\cancel{\frac{k}{mr^2}} + \cancel{\frac{l^2}{mr^3}}\right) + rl\cancel{\frac{l^2}{m^2r^4}} - \cancel{\frac{kl}{mr^2}}\right] +$$

$$+ \bar{e}_r\, m\left[2l\dot{r}\cancel{\left(\frac{l}{mr^2}\right)} + lr\cancel{\left(-\frac{2l}{mr^3}\dot{r}\right)}\right] = 0!$$

Qto avviene qndo $r(t)$ e $\theta(t)$ soddisfano eq. del moto $\Rightarrow \bar{A}$ è cost del moto. //

Vediamo come possiamo usare che $\bar{A}$ è cost. del moto.

[Ricordiamoci come abbiamo sfruttato che $\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$ è cost. del moto:

→ abbiamo scritto insieme di livello $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$, da cui ci siamo ricavati algebricam. $\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$.]

Partiamo dalla costatazione che $\bar{M}$ e $\bar{A}$ sono costanti del moto. Avrò quindi le equazioni:

$$\begin{cases} \bar{M}(\bar{r},\dot{\bar{r}}) = \underbrace{\bar{M}_0}_{\text{cost}} \\ \bar{A}(\bar{r},\dot{\bar{r}}) = \underbrace{\bar{A}_0}_{\text{cost.}} \end{cases}$$

insieme di livello associato alle cost. $\bar{M}_0$ e $\bar{A}_0$

Scelgo sist. di rif. $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ in modo che $\bar{M}_0$ sia parallelo ad asse z: $\bar{M}_0 = \ell \bar{e}_z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r}, \dot{\bar{r}} \in \text{piano generato da } \bar{e}_x, \bar{e}_y \\ \bar{A}_0 \in \quad '' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \bar{r} &= r\bar{e}_r = r\cos\theta\, \bar{e}_x + r\,\text{sen}\,\theta\, \bar{e}_y \\ \dot{\bar{r}} &= \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta)\bar{e}_x + (\dot{r}\,\text{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\bar{e}_y \\ \bar{A}_0 &= a\cos\theta_0\, \bar{e}_x + a\,\text{sen}\,\theta_0\, \bar{e}_y \end{aligned}$$

Rimangono quindi tre equazioni indipendenti:

$$(\star)\begin{cases} M_z(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \ell \\ A_x(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = a\cos\theta_0 \\ A_y(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = a\,\text{sen}\,\theta_0 \end{cases}$$

Tre equazioni nelle incognite $r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}$: possiamo esplicitare $r,\dot{r},\dot{\theta}$ in funzione di θ!

In qsta maniera otteniamo in particolare $r(\theta)$

Scriviamo $\bar{A}$ nella base $\bar{e}_x, \bar{e}_y$:

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_r = \cos\theta\, \bar{e}_x + \text{sen}\,\theta\, \bar{e}_y \\ \bar{e}_\theta = -\text{sen}\,\theta\, \bar{e}_x + \cos\theta\, \bar{e}_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -m\ell\dot{r}\bar{e}_\theta + m\ell r\dot{\theta}\bar{e}_r - mK\bar{e}_r = \\ &= (m\ell\dot{r}\,\text{sen}\,\theta + m\ell r\dot{\theta}\cos\theta - mK\cos\theta)\bar{e}_x + \\ &+ (-m\ell\dot{r}\cos\theta + m\ell r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta - mK\,\text{sen}\,\theta)\bar{e}_y \end{aligned}$$

(A) diventano:

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = \ell \\ m\ell\dot{r}\,\text{sen}\,\theta + m\ell r\dot{\theta}\cos\theta - mk\cos\theta = a\cos\theta_0 \\ -m\ell\dot{r}\cos\theta + m\ell r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta - mk\,\text{sen}\,\theta = a\,\text{sen}\,\theta_0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione $\rightsquigarrow$ $\dot{\theta} = \dfrac{\ell}{mr^2}$: sostituiamo nelle altre due equazioni:

$$\begin{cases} m\ell\dot{r}\,\text{sen}\,\theta + \ell^2\frac{1}{r}\cos\theta = mk\cos\theta + a\cos\theta_0 \\ -m\ell\dot{r}\cos\theta + \ell^2\frac{1}{r}\,\text{sen}\,\theta = mk\,\text{sen}\,\theta + a\,\text{sen}\,\theta_0 \end{cases}$$

Sistema lineare in $\dot{r}$ e $\frac{1}{r}$ (che, risolto, mi darà $r(\theta)$ e $\dot{r}(\theta)$)

Prendiamo combinazione lineare $\cos\theta\,(eq_1) + \text{sen}\,\theta\,(eq_2)$:

$$\ell^2\frac{1}{r}(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = mk(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + a(\cos\theta\cos\theta_0 + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta_0)$$

Cioè $\dfrac{1}{r} = \underbrace{\dfrac{mk}{\ell^2}}_{=1/\eta} + \dfrac{a}{\ell^2}\cos(\theta-\theta_0)$, ovvero

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + \frac{a\eta}{\ell^2}\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}$$

$\rightarrow$ Qta cost. è l'eccentricità e.

In particolare vediamo che e dipende dal modulo di $\bar{A}$. Ma noi sappiamo che e ha un'espressione anche in funzione dell'en. E $\Rightarrow$ $|\bar{A}|$ e E sono cost. del moto dipendenti!

(È per qto che non abbiamo considerato E in qto procedimento per calcolare $r(\theta)$: avremmo ottenuto una relazione ridondante.)

Quindi, rispetto a $\bar{M}$ e E, $\bar{A}$ introduce solo 1 ulteriore cost. del moto indipendente.

[Potremmo anche prendere comb. lineare $\sin\theta\,(eq_1) - \cos\theta\,(eq_2)$:

$$m\ell\dot{r} = a(\cos\theta_0 \sin\theta - \sin\theta_0 \cos\theta) = a\sin(\theta-\theta_0)$$

Cioè otteniamo anche $\dot{r}$ in funz. di θ

$$\dot{r} = \frac{a}{m\ell}\sin(\theta-\theta_0)$$

Qta è consistente con

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\underbrace{\dot{\theta}}_{=\frac{\ell}{mr^2}} = -\frac{\cancel{\eta}}{\cancel{(1+e\cos(\theta-\theta_0))^2}}(-e\sin(\theta-\theta_0))\cdot\frac{\ell}{m}\,\frac{\cancel{(1+e\cos(\theta-\theta_0))^2}}{\eta^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{e\ell}{m\eta}\sin(\theta-\theta_0) \qquad e = \frac{a\eta}{\ell^2} \Rightarrow \frac{e\ell}{m\eta} = \frac{a}{m\ell}\,.\,]$$

Osservazione:

$\bar{A}$ cost. del moto $\Rightarrow \bar{B} = \dot{\bar{r}} - \frac{K}{\ell}\bar{e}_\theta$ è cost. del moto

Dim. $m\bar{B}\times\bar{M} = m\dot{\bar{r}}\times\bar{M} - \frac{K}{\ell}\bar{e}_\theta\times\ell\bar{e}_z = m\dot{\bar{r}}\times\bar{M} - K\bar{e}_r = \bar{A}$ //

Dipendenza di E da $\bar{A}$ e $\bar{M}$:

$$\bar{A} = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mK\frac{\bar{r}}{r}$$

$\bar{M} = \ell\,\bar{e}_z$

$$\|\bar{A}\|^2 = m^2 |\dot{\bar{r}} \times \bar{M}|^2 + m^2K^2 - 2\frac{m^2K}{r}(\dot{\bar{r}} \times \bar{M}) \cdot \bar{r} =$$

$$= m^2 \dot{\bar{r}}^2 \ell^2 + m^2K^2 - 2\frac{m^2K}{r}\left(\frac{\ell^2}{\cancel{m}}\right)$$

$\dot{\bar{r}} \perp \bar{M}$

$$(\dot{\bar{r}} \times \bar{M}) \cdot \bar{r} = (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) \cdot \bar{M} = \frac{1}{m}\ell^2$$

$$= 2m\ell^2\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - \frac{K}{r}}_{E} + \frac{1}{2}\frac{mK^2}{\ell^2}\right) =$$

$$= m^2K^2\left(1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}\right)$$

$\bar{P} \longleftrightarrow$ traslazioni

$\bar{M} \longleftrightarrow$ rotazioni in 3d $SO(3)$ $OO^T = \mathbb{1}$

$\uparrow$ 3 parametri continui

$SO(4)$ $\uparrow$ 6 parametri continui

$\bar{A} \longleftrightarrow$? + 3 parametri continui

Simmetrie di L

moto centrale: $SO(3)$

3 param. cont.

$\big\downarrow$ Teor. Nöth

3 cost. del moto

(M_x, M_y, M_z)

moto kepleriano $SO(4)$

6 param. cont.

$\big\downarrow$ Teor. Nöth

6 cost. del moto

$(M_x, M_y, M_z, A_x, A_y, A_z)$

$SO(d)$: rotazioni in $\mathbb{R}^d$ $\rightarrow$ parametrizzate da matrici antisimm. $d \times d$, che hanno $\binom{d}{2} = \frac{d!}{2!(d-2)!} = \frac{d(d-1)}{2}$ parametri.

$SO(2)$: rotaz. in $\mathbb{R}^2 \rightarrow \binom{2}{2} = 1$ parametro

$SO(3)$: rotaz. in $\mathbb{R}^3 \rightarrow \binom{3}{2} = 3$ parametri

$SO(4)$: rotaz. in $\mathbb{R}^4 \rightarrow \binom{4}{2} = 6$ parametri

Osservazione. Le costanti del moto sono funzioni definite sullo spazio degli stati ($2n$-dimensionale)
$I(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n)$.

Per ridurre il problema da n a $n-1$ gradi di libertà ho in generale bisogno di $\underline{2}$ cost. del moto:
Qte ci darebbero due relazioni

$$\begin{cases} I_1(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n) = I_1^0 \\ I_2(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n) = I_2^0 \end{cases}$$

da cui potremmo esplicitare per es. q_n e $\dot q_n$ in funz. delle $q_1,\dots,q_{n-1},\dot q_1,\dots,\dot q_{n-1}$. Quindi se determiniamo il moto in $(n-1)$-dim, cioè le funz. $q_1(t),\dots,q_{n-1}(t)$, allora $q_n(t) = q_n(q_1(t),\dots,q_{n-1}(t),\dot q_1(t),\dots,\dot q_{n-1}(t))$ è determinato.

[Qto è il caso visto in cui usando M_x e M_y riduciamo il problema centrale da $n=3$ a $n=2$.]

In casi particolari, invece, basta $\underline{1}$ cost. del moto per ridurre il problema da n a $n-1$ gradi di lib.
È il caso di quando troviamo una COORD CICLICA.

[Qto è il caso in cui usando M_z riduciamo il problema centrale da $n=2$ a $n=1$.]

Vedremo meglio qto aspetto in meccanica Hamiltoniana.

LEGGE ORARIA (cioè soluzione delle eq. del moto)

$$\dot r = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))} \rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{d\tilde r}{\sqrt{\frac{k}{\tilde r} - \frac{\ell^2}{2m\tilde r^2} + E}} \rightarrow t(r) \xrightarrow[\text{inversione}]{} r(t)$$

(o)

$$\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2} \rightarrow t = \frac{m}{\ell} \int_{\theta_0}^{\theta} r(\tilde\theta)^2 \, d\tilde\theta \rightarrow t(\theta) \xrightarrow[\text{inv}]{} \theta(t)$$

caso Kepleriano

$$= \underbrace{\frac{m}{\ell}\, \eta^2}_{\frac{\ell^3}{mk^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tilde\theta}{[1+e\cos(\tilde\theta-\theta')]^2}$$

Integrali da fare non sono complicati e quindi $t(r)$ e $t(\theta)$ sono esprimibili in termini di funzioni elementari. Quello che è complicato spesso è l'INVERSIONE di queste funzioni per ottenere $r(t)$ e $\theta(t)$

Esempio: prendiamo $\theta' = 0$ ($\theta=0$ è il perielio, cioè r_{min}) e consideriamo la traiettoria PARABOLICA ($e=1$)

$$\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$t = \frac{\ell^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde\theta}{(1+\cos\tilde\theta)^2} = \frac{\ell^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde\theta}{\left(\cos\frac{\tilde\theta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\tilde\theta}{2}\right)^2}$$

$$x = \operatorname{tg}\frac{\tilde\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\tilde\theta/2}{\cos\tilde\theta/2}$$

$$= \frac{\ell^3}{2mk^2} \int_0^{\operatorname{tg}\theta/2} dx\,(1+x^2) = \frac{\ell^3}{2mk^2}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right] = t(\theta)$$

$t(\theta)$ è una funzione semplice, ma per ottenere $\theta(t)$ bisogna risolvere un'equazione CUBICA (complicato) e infine INVERTIRE la tangente.

[Osservazione: $\theta = 0 \leftrightarrow t = 0$ $\qquad \theta = \pm\pi \leftrightarrow t \to \pm\infty$

(consist. con traiettoria parabolica)]

Una volta che abbiamo ottenuto $\theta(t)$, per trovare $r(t)$:

1) risolvere $(\bullet)$

2) siccome conosciamo $r(\theta)$:

$$r(t) = r(\underline{\theta(t)})$$

Ovviamente per trovare $r(t)$, $\theta(t)$ possiamo seguire il solito metodo dei problemi ridotti: prima risolviamo $(\bullet)$ ottenendo la funz. $r(t)$; successivamente si mette $r(t)$ trovata in $\theta = \int_{t_0}^{t} \frac{\ell \, dt'}{m r(t')^2}$ ottenendo $\theta(t)$.