CORPO RIGIDO

Consideriamo il MOTO RIGIDO di N punti materiali.

Le loro posizioni in un sistema di riferimento sono date da $\bar{r}_\alpha \quad \alpha = 1, \dots, N$.

Il VINCOLO DI RIGIDITÀ è dato da

$$\| \bar{r}_\alpha - \bar{r}_\beta \| = \text{costante} \qquad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, N$$

Questo implica anche che le distanze di tutti gli N pti da un punto scelto (solidale al corpo) è costante nel tempo.

⇝ Le configurazioni del CORPO RIGIDO sono date da

- traslazioni del centro di massa (3 g.d.l.) ← o anche un altro qualsiasi pto o solidale
- rotazioni di una terna solidale (3 g.d.l.)

Chiamiamo tale terna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

⇒ Dato un vettore $\bar{u}$ solidale al corpo rigido, esso varierà nel tempo, in modo che per tempi infinitesimi esso vari di

$$\delta \bar{u} = \Omega \bar{u} \qquad \text{con } \mathbb{1} + \Omega \text{ rotazione infinitesima.}$$

Qto ci dice che ad ogni istante t, $\exists!$ vettore $\bar{\omega}(t)$ t.c.

$$\dot{\bar{u}} = \bar{\omega} \times \bar{u}$$

In particolare questo è vero per la terna solidale:

$$\dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} \times \bar{e}_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Q.tà può essere vista come tre equazioni lineari nelle componenti di $\bar{\omega}$.
Se risolviamo[(·)] tali equazioni otteniamo l'UNICA SOLUZIONE

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i$$

Uno può verificare che $\bar{\omega} \times \bar{u} = \dot{\bar{u}}$:

$$\bar{\omega} \times \bar{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \; \bar{\omega} \times \bar{e}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i \left(\bar{e}_j \times \dot{\bar{e}}_j \right) \times \bar{e}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i \; \bar{e}_i \times \left(\dot{\bar{e}}_j \times \bar{e}_j \right)$$

Usando $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$ (*), otteniamo

$$\bar{\omega} \times \bar{u} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i \left(\dot{\bar{e}}_j \delta_{ij} - (\bar{e}_i \cdot \dot{\bar{e}}_j) \bar{e}_j \right)$$

$$\bar{e}_i \cdot \dot{\bar{e}}_j = \frac{d}{dt} \overset{0}{\overbrace{(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j)}} - \dot{\bar{e}}_i \cdot \bar{e}_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i u_i \dot{\bar{e}}_i + \frac{1}{2} \sum_j \sum_i (u_i \dot{\bar{e}}_i) \cdot \bar{e}_j \; \bar{e}_j = \sum_i u_i \dot{\bar{e}}_i = \dot{\bar{u}} .$$

(*) Dimostriamo:
$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \times \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \bar{e}_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \sum_{mnl} \epsilon_{mnl} a_m \delta_{nk} \bar{e}_l =$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \sum_{ml} \epsilon_{mkl} a_m \bar{e}_l = \sum_{ijml} b_i c_j a_m \bar{e}_l \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} =$$

$$= \sum_{ijml} b_i c_j a_m \bar{e}_l \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) = \sum_{ij} b_i c_j a_j \bar{e}_i - \sum_{ij} b_i c_j a_i \bar{e}_j =$$

$$= \left(\sum_i b_i \bar{e}_i \right) \sum_j a_j c_j - \left(\sum_j c_j \bar{e}_j \right) \sum_i a_i b_i = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} .$$

(·) Risolviamo l'equazione $\dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} \times \bar{e}_i$:

- moltiplichiamo a destra e sinistra per $\bar{e}_i \times$:

$$\bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = \bar{e}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{e}_i)$$

$$\bar{e}_i \cdot \sum_l \omega_l \bar{e}_l = \sum_l \omega_l \delta_{li} = \omega_i$$

$$= \bar{\omega} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) - \bar{e}_i (\bar{e}_i \cdot \bar{\omega}) = \bar{\omega} - \omega_i \bar{e}_i$$

- sommiamo su i :

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = 3\bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\bar{\omega} \implies \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i .$$

MOMENTO ANGOLARE del corpo rigido (rispetto origine O di terna solidale)

$$\bar{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\bar{r}_\alpha}_{\text{vett. solidal.}} \times \bar{v}_\alpha \quad \text{vel. } \bar{v}_\alpha = \dot{\bar{r}}_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \bar{r}_\alpha \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha) \leftarrow$$

espressione LINEARE in $\bar{\omega}$
$\Downarrow$
si può scrivere come un op. lineare che agisce sul vett. ω

$$\equiv \mathcal{I} \, \bar{\omega}$$

"Vel. ANGOLARE" ($\bar{\omega}$)

"OPERATORE d'INERZIA" ($\mathcal{I}$)

ENERGIA CINETICA (Importante per scrivere la Lagrangiana del corpo rigido.)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \bar{v}_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha)$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \bar{\omega} \cdot \left[\bar{r}_\alpha \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} m \, \bar{r}_\alpha \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha) = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega}$$

OPERATORE D'INERZIA:

- Simmetrico: $\bar{v} \cdot \mathcal{I} \bar{u} = \bar{u} \cdot \mathcal{I} \bar{v}$.
- Definito positivo: $\bar{u} \cdot \mathcal{I} \bar{u} > 0 \quad \forall \bar{u} \neq 0$ (se il corpo è costituito da almeno tre punti non allineati)
- $\mathcal{I}$ può essere rappresentato da una MATRICE, una volta scelta una base

$$\mathcal{I} \bar{e}_j = \sum_i \underbrace{(\bar{e}_i \cdot \mathcal{I} \bar{e}_j)}_{\mathcal{I}_{ij}} \bar{e}_i$$

$\mathcal{I}_{ij}$ matrice; $\bar{e}_i$ base o.n.

$$\mathcal{I} \bar{u} = \sum_k u_k \mathcal{I} \bar{e}_k = \sum_{kj} u_k \mathcal{I}_{jk} \bar{e}_j =$$

$$= \sum_j \Big(\underbrace{\sum_k \mathcal{I}_{jk} u_k}_{\text{componenti del vettore } \mathcal{I}\bar{u}} \Big) \bar{e}_j$$

$$\mathcal{I}_{11} = (\mathcal{I}\bar{e}_1)\cdot\bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \sum_\alpha m_\alpha \bar{r}_\alpha \times (\bar{e}_1 \times \bar{r}_\alpha) = \bar{e}_1 \cdot \sum_\alpha m_\alpha \left[\bar{r}_\alpha^2 \bar{e}_1 - (\bar{r}_\alpha \cdot \bar{e}_1)\bar{r}_\alpha \right] =$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left(\bar{r}_\alpha^{\,2} - (\bar{e}_1 \cdot \bar{r}_\alpha)^2 \right) = \sum_\alpha m_\alpha \left(x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 - x_\alpha^2 \right) =$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) = \sum_\alpha m_\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distanza da} \\ \text{asse } x}}{d_{\alpha,x}^{\,2}} = I_x \leftarrow \text{MOMENTO D'INERZIA rispetto asse } x$$

Analogamente: $\mathcal{I}_{22} = I_y$ e $\mathcal{I}_{33} = I_z$

$$\mathcal{I}_{12} = \bar{e}_1 \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\bar{r}_\alpha^{\,2} \bar{e}_2 - (\bar{r}_\alpha \cdot \bar{e}_2)\bar{r}_\alpha \right) = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha \leftarrow \text{"prodotto d'inerzia"}$$

e analogamente per altri $\mathcal{I}_{ij}$ con $i \neq j$.

$\mathcal{I}$ è SIMMETRICO $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ è DIAGONALIZZABILE, cioè si può scegliere una base (solidale) t.c. $\mathcal{I}_{ij}$ è MATRICE DIAGONALE

$\rightsquigarrow$ in qto caso, $\bar{e}_i$ vengono detti ASSI PRINCIPALI D'INERZIA e I_i MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA

Se $(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ è una terna principale d'inerzia, cioè $\bar{e}_i$ è autovett. di $\mathcal{I}$ con autovalore I_i, allora

$$\bar{M} = \mathcal{I}\bar{\omega} = \mathcal{I}\sum_{k=1}^{3} \omega_k \bar{e}_k = \sum_{k=1}^{3} I_k \omega_k \bar{e}_k \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\mathcal{I}\bar{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} I_k \omega_k^2$$

Teorema di Hygens-Steiner: dato asse a_B passante per c.m. e un asse a parallelo a a_B e da esso distante d, allora

$$I_a = I_{a_B} + Md^2$$

Dim. Prendiamo $a \,//\, a_B \,//$ asse z

$$I_{a_B} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \qquad I_a = \sum_\alpha m_\alpha \left[(x_\alpha - d)^2 + y_\alpha^2 \right] = \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) + \sum_\alpha m_\alpha d^2 \underbrace{- 2d\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha}_{=0}$$

//

Analogamente: $\mathcal{I}_O$ e $\mathcal{I}_B$ op. d'inerzia relativi a un polo generico O e cm. B, allora

$$\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_O^B$$

dove $\mathcal{I}_O^B$ t.c. $\mathcal{I}_O^B \bar{u} = m\, \bar{r}_{OB} \times (\bar{u} \times \bar{r}_{OB}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3$.

Asse di rotazione fisso:

scegliamo $\bar{e}_3 \parallel$ asse fisso $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_3 = 0$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \bar{e}_j \times \dot{\bar{e}}_j = \frac{1}{2} \left(\bar{e}_1 \times \dot{\bar{e}}_1 + \bar{e}_2 \times \dot{\bar{e}}_2 \right)$$

La config. del corpo rigido è determinata dalla conoscenza dei vett. solidali $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ $\qquad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{e}}_1 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\, \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{e}}_2 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\, \bar{e}_1$$

La config. può cambiare nel tempo, e il moto è descritto dalla funzione $\theta(t)$ (1 grado di lib.)

$$\rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \Big(\bar{e}_1 \times \underbrace{\dot{\theta} \bar{e}_2}_{\dot{\bar{e}}_1} + \bar{e}_2 \times \underbrace{(-\dot{\theta} \bar{e}_1)}_{\dot{\bar{e}}_2} \Big) = \frac{\dot{\theta}}{2} \left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \right)$$

$$\overset{!}{=} \dot{\theta}\, \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \dot{\theta}\, \bar{e}_3$$

$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3$

velocità dell'angolo di rotazione

asse di rotazione $\quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \bar{e}_3 \cdot \mathcal{I} \bar{e}_3 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{33} = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

mom. d'in. risp. asse di rotaz.

Rotaz. attorno a un ASSE passante per il c.m.

Si va a sist. di rif. del c.m.

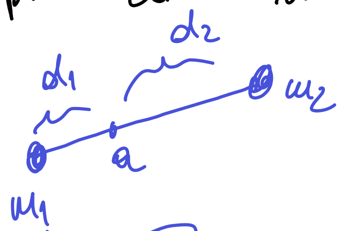
$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + T'$$

T': in pto sist. di rif. l'asse di rotaz. è fisso $\Rightarrow$ si applica quanto detto sopra.

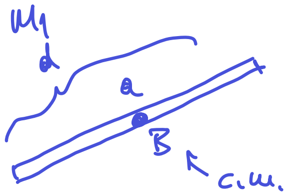
3 + 1 gradi di libertà

Trottola non rientra nei casi precedenti

Esempi di momento d'inerzia.

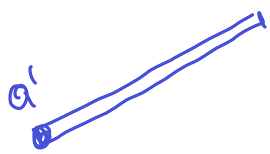
1) 

$$I_a = \sum_{i=1}^{2} m_i d_i^2 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$

2) 

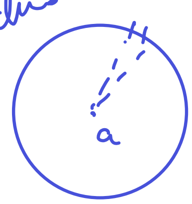
asta omogenea di lungh. d e dens. lin. ρ $\rightarrow M = \rho \cdot d$

$$I_a = \int_{-d/2}^{d/2} s^2 \rho \, ds = \left.\frac{s^3}{3}\right|_{-d/2}^{d/2} \cdot \rho = 2\rho \frac{d^3}{24} = \frac{Md^2}{12}$$

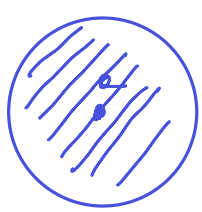
3) 

$$I_{a'} = \int_0^d s^2 \rho \, ds = \frac{d^3}{3}\rho = \frac{Md^2}{3}$$

$$= I_a + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{Md^2}{12} + \frac{Md^2}{4} = \frac{Md^2}{3}$$

4) anello 

$$I_a = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R \, d\theta = R^3 \rho 2\pi = R^2 (2\pi R \cdot \rho) = MR^2$$

5) disco 

ρ dens. sup.

$$I_a = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho \, r \, dr \, d\theta = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = (\pi R^2 \rho) \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

Extra: Energia cinetica per N corpi.

Per un sistema a N corpi vale il Teorema di König. Chiamiamo

- $\bar{r}_\alpha$ la posizione dell'α-esimo corpo ($\alpha = 1, \dots, N$) in un sist. di rif. fisso
- $\bar{R}$ la posizione del c.m. nel sist. di rif. fisso: $\bar{R} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha \bar{r}_\alpha}{M}$ con $M = \sum_\alpha m_\alpha$
- $\bar{r}_\alpha'$ la posizione dell'α-esimo corpo rispetto al c.m.

Vale allora $\bar{r}_\alpha = \bar{R} + \bar{r}_\alpha'$. L'en. cinetica è allora

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\bar{r}}_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\dot{\bar{R}}^2 + 2\dot{\bar{R}}\cdot\dot{\bar{r}}_\alpha' + \dot{\bar{r}}_\alpha'^2 \right) =$$

En. cinetica nel sist. del c.m.

$$= \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\bar{r}}_\alpha'^2 + \underbrace{\cancel{\dot{\bar{R}}\cdot \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \dot{\bar{r}}_\alpha'}_{\text{proporz. a vel. di c.m. in s.d.r. del c.m.}}}}_{=0} = T_{c.m.} + T'$$